Archives of Mechanics • Archiwum Mechaniki Stosowanej • 31, 4, pp. 467-487, Warszawa 1979

Equation de Boltzmann stationnaire sur la droite et sur la demi-droite

CH. RIGOLOT-TURBAT (REIMS)

ON CONSIDÈRE l'équation stationnaire de Boltzmann sur la droite et sur la demi-droite. Dans le cas de la demi-droite on tient compte des conditions de réflexion a la paroi. La théorème d'existence et d'unicité est démontré pour la solution de l'équation de Boltzmann stationnaire dans les deux cas. On donne la solution dans laquelle une composante mise dans le sous-espace 5-dimensionel engendré par les invariants de collisions est distinguée.

W pracy rozpatruje się stacjonarne równanie Boltzmanna na prostej i na półprostej. W przypadku półprostej uwzględnia się warunki odbicia na ściance. W obu przypadkach dowodzi się twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania stacjonarnego równania Boltzmanna. Podana jest postać rozwiązania z wyróżnieniem składowej położonej w pięciowymiarowej podprzestrzeni rozpiętej przez niezmienniki zderzeń.

В работе рассматривается стационарное уравнение Больцмана на прямой и на полупрямой. В случае полупрямой учитываются условия отражения на стенке. В обоих случаях доказывается теорема существования и единственности решения стационарного уравнения Больцмана. Дается вид решения с выделением составляющей расположенной в 5-мерном полупространстве распятом на инвариантах столкновений.

Introduction

LA FONCTION de distribution $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ d'un gaz est régie par l'équation de Boltzmann, qui, en l'absence de forces extérieures, a la forme:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} F = q(F, F), \qquad \text{soit, dans le cas stationnaire}$$

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} F = q(F, F),$$

où l'expression $q(F, F)$ est quadratique, et représente la variation de F due aux interactions entre les particules (pour un gaz raréfié, seules, les collisions d'ordre deux sont en effet à prendre en considération).

Une solution triviale de l'équation de Boltzmann est la répartition "maxwellienne", qui, pour un gaz de densité ϱ_0, de vitesse moyenne nulle, et à la température T_0 s'écrit:

$$F_M = \frac{\varrho_0}{(2\pi R T_0)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2RT_0}\right\}.$$

En variables sans dimension, les échelles pour $\mathbf{x}$ et $\boldsymbol{\xi}$ étant respectivement $\tau_0\sqrt{RT_0}$ et $\sqrt{RT_0}$, où τ_0 est le temps moyen de collision, la répartition maxwellienne prend la forme:

$$\omega = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2}{2}\right\},$$

et après avoir effectué la linéarisation suivante:

$$F = F_M(1+\Phi),$$

$$f = \omega^{1/2}\Phi,$$

l'équation de Boltzmann s'écrit, dans le cas non stationnaire:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\xi}\cdot\nabla_{\mathbf{x}} f + Lf = J(f,f).$$

L est l'opérateur de collision linéarisé, et $J(f,f)$ l'opérateur quadratique, la forme de ces deux opérateurs dépend de manière essentielle de la nature des particules en présence, et leurs expressions, fonctions des cas physiques, servent uniquement à établir les propriétés que nous rappelons ici, et qui seules seront utilisées, ces propriétés étant valables pour des classes de molécules.

L'espace fonctionnel classique dans l'étude notamment de l'opérateur L est $H = \mathscr{L}^2_{\boldsymbol{\xi}}$, espace des fonctions de $\boldsymbol{\xi}$ mesurables, de carré sommable, où la norme et le produit scalaire valent:

$$\|f\|_H = \Big\{\int_{R^3} f^2(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}\Big\}^{1/2}, \qquad (f,g)_H = \int_{R^3} f(\boldsymbol{\xi})g(\boldsymbol{\xi})d\boldsymbol{\xi}.$$

Le fait que, au cours de la collision, la masse, la quantité de mouvement, et l'énergie sont conservées permet de montrer que l'opérateur L admet zéro comme valeur propre d'ordre cinq, le sous espace $\mathscr{P}H$ de H, noyau de L, est engendré par cinq fonctions, dites "invariants des rencontres", qui, après orthonormalisation, sont:

$$\psi_0 = \omega^{1/2}$$

$$\psi_i = \omega^{1/2}\xi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{où} \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

$$\psi_4 = \omega^{1/2}\frac{|\boldsymbol{\xi}|^2-3}{\sqrt{6}},$$

si bien qu'un élément $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t)$ de H admet la décomposition sur $\mathscr{P}H$ et $\mathscr{Q}H$ son supplémentaire orthogonal:

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \mathscr{P}f + \mathscr{Q}f = \psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) + \chi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=0}^{4} a^i(\mathbf{x}, t)\psi_i(\boldsymbol{\xi}) + \chi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, t).$$

L'opérateur L est symétrique, et non négatif, et, à condition d'introduire une "coupure" dans le domaine d'interaction entre deux particules, soit radiale, soit angulaire, conformément aux hypothèses de CERCIGNANI [1] et GRAD [4], L peut être considéré comme somme de deux opérateurs:

$$Lf = \nu(|\boldsymbol{\xi}|)f - Af.$$

On notera par ailleurs

$$L'f = \boldsymbol{\xi}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + Lf,$$

où $\nu(|\boldsymbol{\xi}|)$ est une fonction positive de $|\boldsymbol{\xi}|$, et A un opérateur intégral.

Pour une classe d'interactions intermoléculaires, dites "potentiels durs", cf GRAD [3], qui inclut d'ailleurs les sphères rigides de Carleman et la force radiale en puissance d'exposant inférieur à -5, les propriétés suivantes ont lieu:

$\nu(|\xi|)$ est borné inférieurement par ν ($|0|$), et il existe deux nombres positifs, a et b tels que:

$$a(1+|\xi|) < \nu(|\xi|) < b(1+|\xi|).$$

L'opérateur A, auto adjoint dans H, a pour noyau K, différence de deux noyaux positifs K_1 et K_2:

$$Af(\xi) = \int_{R^3} (K_1-K_2)(\xi-\mathbf{n}) f(\mathbf{n}) d\mathbf{n},$$

et les noyaux $K_1(\mathbf{v})$ et $K_2(\mathbf{v})$ sont intégrables, et de carrés intégrables, dans R^3.

A est borné et compact dans H et vérifie:

$$\|Af\|_H < k\, \|f\|_H,$$

$$\operatorname*{Max}_{\xi \in R^3} |Af| < k_0 \|f\|_H,$$

$$r \geqslant 1: \quad \operatorname*{Max}_{\xi \in R^3} \{(1+|\xi|^2)^{r/2}|Af|\} \leqslant k_{r-1} \operatorname*{Max}_{\xi \in R^3} (1+|\xi|^2)^{\frac{r-1}{2}} |f|.$$

Il existe une constante μ telle que

$$(Lf, f)_H \geqslant \mu \|\mathscr{Q} f\|_H^2.$$

Le noyau quadratique $J(f,f)$, ainsi que la forme bilinéaire associée $J(f, g)$ sont orthogonaux aux invariants des rencontres dans H.

Le problème considéré ici est stationnaire, et ne dépend que de la composante x de $\mathbf{x}$:

$$f(\mathbf{x}, \xi) = f(x, \xi).$$

Nous noterons $\mathscr{L}^2(R, H)$ (resp. $\mathscr{L}^2(R^+, H)$), l'espace des fonctions de x et ξ mesurables dans $R \times R^3$ (resp. $R^+ \times R^3$), telles que $x \to \|f(x, \xi)\|_H$ soit de carré sommable dans R (resp. R^+), et cet espace sera normé par:

$$|||f|||_{\mathscr{L}^2(R,H)} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \|f\|_H^2 dx \right\}^{1/2}, \quad \left(\text{resp. } |||f|||_{\mathscr{L}^2(R^+,H)} = \left\{ \int_{\infty}^{0} \|f\|_H^2 dx \right\}^{1/2}\right),$$

$$((f, g))_{\mathscr{L}^2(R,H)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (f, g)_H dx, \quad (\text{resp: } ((f, g))_{\mathscr{L}^2(R^+,H)} = \int_0^{\infty} (f, g)_H dx).$$

Et $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(R, H)$ (resp. $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(R^+, H)$) désigne le sous espace de $\mathscr{L}^2(R, H)$ (resp. $\mathscr{L}^2(R^+, H)$) des éléments orthogonaux à $\psi_\alpha(\xi)$.

Le premier problème considéré concerne l'équation de Boltzmann à une seule variable d'espace, en domaine infini, ou le second membre est, de même que $J(f,f)$, orthogonal aux invariants des rencontres. Ce problème avait été traité jusqu'ici non pas avec l'opérateur linéairisé de Boltzmann, mais à l'aide d'un modèle, rendant compte des propriétés physiques (DARROZES [2], SIROVICH [7]).

Nous démontrerons le théorème d'existence suivant:

THÉORÈME A:

Soit $g(x, \xi)$ un élément de $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2$ (R, H) à symétrie cylindrique en ξ, d'axe ξ, il existe un élément et un seul dans $\mathscr{L}^2$ (R, H)

$$f(x, \xi) = a^0(x)\psi_0(\xi) + a^4(x)\psi_4(\xi) + \chi(x, \xi),$$

satisfaisant, dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}, H)$, *au sens fort*:

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\xi|)f - Af = g.$$

Notre deuxième résultat est relatif à l'existence d'une solution du même problème, mais dans le demi espace $x \geqslant 0$, la solution devant vérifier à la paroi $x = 0$ des conditions de réflexion du type:

$$J^+Bf = \mathscr{G}J^-Bf,$$

où

$$Bf(x, \xi) = f(0, \xi),$$

$$J^{\pm}f(0, \xi) = f(0, \xi) \quad \text{si} \quad \xi \gtrless 0,$$

$$= 0 \quad \text{si} \quad \xi \gtrless 0;$$

l'axe des ξ étant la direction normale à la paroi, orientée positivement vers l'extérieur. J^+Bf est la répartition des molécules émises par la paroi, alors que J^-Bf est la répartition des molécules incidents; l'opérateur $\mathscr{G}$ est fonction de la nature de la paroi, et nous ferons sur $\mathscr{G}$ les hypothèses classiques [5] que nous rappellerons ultérieurement (§B et § B4). Il convient, pour tenir compte du phénomène à la paroi, d'introduire les espaces $\tilde{H}_{\varrho(\xi)}$, $\varrho(\xi)$ étant strictement positive, $\tilde{H} = \tilde{H}_{\varrho(\xi)}$ si $\varrho(\xi) = 1$.

$\tilde{H}_{\varrho(\xi)}$ est l'espace des éléments $f(x, \xi)$ tels que $|\xi|\varrho(\xi)|Bf|^2$ soit une fonction mesurable de ξ, la norme et le produit scalaire sont donnés par:

$$(f, g)_{\tilde{H}_{\varrho(\xi)}} = \int_{\mathrm{R}^3} |\xi|\varrho(\xi)Bf(x, \xi)Bg(z, \xi)d\xi.$$

Ce problème a été traité dans le cas d'un domaine borné par Guiraud [8, 9].

THEOREME B

Supposant que l'opérateur $\mathscr{G}$ *de réflexion vérifie les hypothèses* (1) *à* (7), *données* §B4 il *existe un élément* $f(x, \xi)$ *de la forme*

$$f(x, \xi) = \sum_{\alpha=0}^{4} a^{\alpha}(x)\psi_{\alpha}(\xi) + \chi(x, \xi)$$

tel que

$$\chi(x, \xi), \quad \nu(|\xi|)\chi(x, \xi)$$

appartiennent à $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$,

$$B\overline{\omega}\chi \text{ et } Ba^{\alpha}(x)\psi_{\alpha}(\xi), \quad \alpha \neq 0$$

appartiennent à $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$, $\dfrac{d}{dx}a^{\alpha}(x)$, $\alpha = 0, \ldots, 4$ *appartiennent à* $\mathscr{H}^{-1}(0, \infty)$, *dual de* $\mathscr{H}^1(0, \infty)$, *et vérifiant, pourvu que* φ *soit un élément de* $\mathscr{D}\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\xi|)\chi - A\chi = \varphi \quad \textit{dans} \quad \mathscr{L}^2(R^+, H),$$

$$J^+B\overline{\omega}f = \mathscr{G}J^-B\overline{\omega}f \quad \textit{dans} \quad \tilde{H}_{\nu(|\xi|)},$$

où l'opérateur $\overline{\omega}$ *désigne la projection sur le sous espace de* $\tilde{H}_{[\nu|\xi|]^{-1}}$ *orthogonal à* $\psi_0(\xi)$.

1. Equation de Boltzmann sur la droite

Afin d'étudier l'existence d'un élément $f(x, \xi)$ vérifiant

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\xi|)f - Af = g, \tag{1}$$

dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H), g(x, \xi)$ appartenant à $\mathscr{D}\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ et possédant une symétrie de révolution en ξ d'axe ξ, nous sommes amenés à traiter le problème intermédiaire suivant

1.1. Résolution du problème intermédiaire

Notons $\mathscr{M} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \nu(|\xi|)$, et $\mathscr{M}^*$ son adjoint, afin d'étudier le problème

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\xi|)f = \varphi(x, \xi).$$

L'étude du cas où $f(x, \xi)$ est régulière, à support compact met en évidence l'opérateur $\mathscr{U}$ réalisant dans l'espace Δ de telles fonctions

$$\mathscr{U}\mathscr{M}\varphi = \mathscr{M}\mathscr{U}\varphi,$$

soit

$$\mathscr{U}\varphi(\cdot, \xi) = \mathscr{E}(\cdot, \xi) * \varphi(\cdot, \xi),$$

où

$$\mathscr{E}(x, \xi) = \varepsilon Y(\varepsilon x)\xi^{-1}\exp\left\{-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}x\right\}, \quad \varepsilon = \pm 1 \quad \text{si} \quad \xi \gtrless 0,$$

et $Y(x)$ est la fonction d'Heaviside.

L'opérateur $\mathscr{U}$, réalisant l'inversion de $\mathscr{M}$ dans ce cas particulier va devoir être étendu à l'espace $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, l'espace Δ est en effet dense dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, et d'autre part :

LEMME 1.1.

L'opérateur $\mathscr{U}$ est borné dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ par $\nu(0)^{-1}$,

$\xi \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial x}$ est borné dans $\mathscr{L}(\mathsf{R}, H)$ par 2,

$\nu(|\xi|)\mathscr{U}$ est borné dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ par 1.

(Il en est de même pour $\mathscr{U}^*$ dual de $\mathscr{U}$).

Ceci provient du fait que $\mathscr{U}\varphi$ a la forme d'un produit de convolution.

D'autre part, le domaine $\mathscr{V}$ de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ est l'ensemble des éléments pour lesquels l'expression suivante existe (et sera prise pour norme dans $\mathscr{V}$)

$$|f|_{\mathscr{V}} = \{|||\mathscr{M}f|||^2 + |||f|||^2\}^{1/2},$$

et $\mathscr{V}^*$ le domaine de $\mathscr{M}^*$ (on remarque qu'alors $\mathscr{V} = \mathscr{V}^*$). Nous noterons $\mathscr{V}'$ l'espace dual.

Il est classique d'établir

PROPOSITION 1.1.

Les opérateurs $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}^*$ peuvent être étendus à $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$. Leurs extensions, encore notées $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}^*$ sont des éléments de $\mathscr{L}(\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H), \mathscr{V}')$.

Les opérateurs $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}^*$ peuvent être étendus à $\mathcal{V}'$, et sont alors éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{V}', \mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H))$.

Dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$ $\quad \mathcal{M}\mathcal{U} = \mathcal{U}\mathcal{M} = Id.,$

$$\mathcal{M}^*\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{M} = Id,$$

Dans $\mathcal{V}'$ $\quad \mathcal{M}\mathcal{U} = Id, \quad \mathcal{M}^*\mathcal{U}^* = Id,$

Dans $\mathcal{V}$ $\quad \mathcal{U}\mathcal{M} = Id, \quad \mathcal{U}^*\mathcal{M}^* = Id.$

Il est maintenant naturel d'associer au problème (1.1) sa forme intégrale (1.2)

$$f - \mathcal{U}Af = \mathcal{U}g, \tag{2}$$

et d'en faire l'étude dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$, toute solution de (2) dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$ est un élément de $\mathcal{V}$, donc une solution forte de (1) dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$, et réciproquement.

LEMME 1.2.

L'équation $f - \mathcal{U}Af = 0$ n'a dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$ que la solution nulle.

La démonstration est tout à fait analogue, (et un peu plus simple) que celle du lemme 2.1 auquel nous nous reporterons.

Le problème serait alors bien simple si l'opérateur $\mathcal{U}A$ était compact dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$. Mais, bien que A soit compact dans H, $\mathcal{U}A$ ne l'est pas dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$, le produit de convolution qui figure dans l'opérateur $\mathcal{U}$ fait en effet intervenir les valeurs infinies de x.

Dans un premier temps, nous allons, de ce fait, considérer un problème tronqué, pour lequel nous obtiendrons un résultat, dont il faudra déduire la conclusion pour l'équation (2).

1.2. Equation intégrale modifiée

Il s'agit d'éliminer les valeur infinies de x, en introduisant une coupure à $|x| = N$: Soit

$$P_N f = f \quad \text{si} \quad |x| < N, \qquad Q_N = 1 - P_N.$$
$$= 0 \quad \text{si} \quad |x| \geqslant N.$$

Ceci permet de considérer l'opérateur L_N de Boltzmann partiellement tronqué:

$$L_N = \nu(|\xi|) - AP_N.$$

Il est immédiat de montrer la majoration:

$$(L_N f, f)_H \geqslant \mu_1 \|\mathcal{Q}f\|_H^2, \qquad \mu_1 = \sup(\mu, \nu(0)).$$

Notons f_N la solution de l'équation (1_N)

$$\xi \frac{\partial f_N}{\partial x} + L_N f_N = g, \tag{1_N}$$

dont la forme intégrale équivalente est

$$f_N - \mathcal{U}AP_N f_N = \mathcal{U}g. \tag{2_N}$$

LEMME 1.3.

Dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$, l'équation (2_N) ne peut avoir qu'une solution.

Toute solution de $f = \mathcal{U}AP_N f$ appartient à $\mathcal{U}$, et vérifie alors

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + L_N f = 0,$$

soit encore:

$$\left(\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}, f\right)\right) + ((L_N f, f)) = 0.$$

Posons $\phi = AP_N f$, et cherchons à quelles conditions on a:

$$f = \mathscr{U}\phi,$$

$\phi\varepsilon$ étant une suite d'éléments réguliers à support compact, approchant ϕ, dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, les éléments f_ε définis par:

$$f_\varepsilon = \mathscr{U}\phi_\varepsilon$$

sont tels que

$$\left(\left(\xi\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x}, f_\varepsilon\right)\right) \quad \text{converge vers} \quad \left(\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}, f\right)\right),$$

ceci étant une conséquence de l'Annexe a.1.

Toute solution de $f = \mathscr{U}AP_N f$ vérifie donc:

$$((L_N f, f)) = 0.$$

Il est alors trivial de montrer que f est nul dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, il suffit de montrer successivement: $P_N \mathscr{Q} f = 0$, et $P_N \mathscr{P} f = 0$.

Etudions l'opérateur $\mathscr{U}AP_N$, de la manière suivante:

l'opérateur $\mathscr{U}$ est singulier en $\xi = 0$, singularité que nous allons provisoirement éliminer en introduisant δ_θ fonction caractéristique de $|\xi| > \theta$. Nous montrerons que l'opérateur $\delta_\theta\mathscr{U}AP_N$ est compact, et la compacité de $\mathscr{U}AP_N$ sera alors conséquence du lemme suivant:

LEMME 1.4.

$\delta_\theta\mathscr{U}AP_N$ converge uniformément vers $\mathscr{U}AP_N$ quand $\theta \to 0$, dans l'espace $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

Compte tenu des propriétés de A, on peut en effet établir:

$$|||\delta_\theta\mathscr{U}AP_N f - \mathscr{U}AP_N f|||^2 \leqslant k\|A\|\,|||f|||^2 \left\{\int_{|\xi|<\theta} \nu(|\xi|)^{-4} d\xi\right\}^{1/2}.$$

LEMME 1.5.

L'opérateur $\delta_\theta\mathscr{U}AP_N$ est compact dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

Pour exploiter le fait que A est compact dans H, N fini, nous allons montrer que l'adjoint $AP_N\delta_\theta\mathscr{U}^*$ est compact dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

Montrons que si une suite f_n converge faiblement vers f dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, pour tout x fixé, $\delta_\theta\mathscr{U}^* f_n$ converge faiblement dans H vers $\delta_\theta\,\mathscr{U}^* f$: prenons un élément h de H.

$$(\delta_\theta\mathscr{U}^*(f_n - f), h)_H = ((f_n - f, \Phi_x))$$

où

$$\Phi_x(y, \xi) = \delta_\theta h(\xi)\mathscr{E}(x-y, \xi).$$

Il est aisé d'établir que $\dot{\Phi}_x$ est dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, en effet:

$|||\Phi_x(y, \xi)|||^2 < \dfrac{1}{2\theta\nu(0)}\,\|h\|_H^2$, et il apparaît ici pourquoi l'introduction de δ_θ est fondamentale.

On peut de ce fait conclure:

PROPOSITION 1.2.

L'équation $\mathcal{M}f_N - AP_N f_N = g$ admet une solution unique dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ solution forte du problème dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

Il faut maintenant savoir si f_N a une limite quand N tend vers l'infini, et si cette limite est solution du problème.

Nous noterons

$$\begin{aligned} f_N &= \mathscr{Q}f_N + \mathscr{P}f_N = \chi_N + \psi_N \\ &= \chi_N(x, \xi) + \sum_i a_N^i(x)\psi_i(\xi). \end{aligned}$$

1.3. Convergence de f_N quand N tend vers l'infini

Dans ce paragraphe, il est fondamental de supposer que $g(x, \xi)$ est un élément de $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, c'est-à-dire est dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ orthogonal aux invariants des rencontres $a^i(x)\ \psi_i(\xi)$. C'est en effet cette propriété qui permet les majorations conduisant aux convergences faibles.

LEMME 1.6.

Si g appartient à $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, $\mathscr{Q}f_N$ reste borné dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, et il existe une suite de réels, notée encore N, telle que $\mathscr{Q}f_N$ converge dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ vers un élément χ de $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$. La convergence de $\gamma(|\xi|)^{1/2}\chi_N$ a alors lieu vers $\nu(|\xi|)^{1/2}\chi$, et $Q_N f_N$ et $Q_N \mathscr{P} f_N$ convergent, pour une sous suite convenable, vers zéro dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

D'après (2_N), la forme de f_N est telle que, d'après l'annexe a:

$$(\xi f_N, f_N)_H \to 0 \quad \text{quand} \quad |x| \to \infty,$$

soit:

$$\left(\left(\xi \frac{\partial f_N}{\partial x}, f_N\right)\right) = 0.$$

La majoration indiquée pour $((L_N f, f))$ permet d'obtenir:

$$|||\chi_N||| \leqslant \mu^{-1}|||g|||$$

D'autre part, la suite extraite de la suite χ_N, qui converge faiblement dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ a pour limite faible un élément de $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$

Mettons $L_N f_N$ sous la forme:

$$L_N f_N = P_N L f_N + \nu(|\xi|) Q_N f_N,$$

il vient alors:

$$((L_N f_N, f_N)) \geqslant \mu |||P_N \chi_N|||^2 + |||\nu(|\xi|)^{1/2} Q_N f_N|||^2,$$

d'où nous déduirons en particulier

$$|||Q_N f_N||| \leqslant C_1 |||g|||,$$

c'est-à-dire, pour tout φ de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$,

$$\begin{aligned} ((Q_N f_N, \varphi)) &= ((f_N, Q_N \varphi)) \\ &\leqslant C_1 |||g|||\ |||Q_N \varphi||| \end{aligned}$$

ce qui établit la convergence vers zéro de $Q_N f_N$.

Le résultat annoncé pour $Q_N \psi_N$ est trivial.

En ce qui concerne $\nu(|\xi|)^{1/2}\chi_N$, il suffit de rappeler que les opérateurs Q_N et A commutent:

$$|||\nu(|\xi|)^{1/2}\chi_N|||^2 = ((A\chi_N, \chi_N)) + ((g, \chi_N)) + ((AQ_N f_N, Q_N f_N))$$
$$\leqslant C|||g|||^2.$$

Rappelons que nous noterons encore N la sous suite d'entiers pour laquelle les convergences faibles précédentes ont lieu.

Lemme 1.7.

La suite $L'_N\chi_N = \mathscr{M}\chi_N - AP_N\chi_N$ converge dans $\mathscr{V}'$ vers $L'\chi = \mathscr{M}\chi - A\chi$.

La suite $\xi \dfrac{\partial \psi_N}{\partial x}$ converge faiblement dans $\mathscr{V}'$ vers $g - L'\chi$.

Montrons tout d'abord que l'élément $L'\chi$, où χ est la limite faible de χ_N, est un élément de $\mathscr{V}'$: $L'^* = \mathscr{M}_0^* - A$.

Soit un élément Φ de $\mathscr{V}$. L'application $\Phi \to ((\chi, L'^*\Phi))$ est une forme linéaire continue sur $\mathscr{V}$ en effet:

$$((\chi, L'^*\Phi))| \leqslant (1 + ||A||)|||\chi||| \, |\Phi|_{\mathscr{V}}.$$

Il existe donc un élément de $\mathscr{V}'$, que l'on notera $L'\chi$, tel que pour tous Φ de $\mathscr{V}$, on ait

$$< L'\chi, \Phi >_{\mathscr{V}} = ((\chi, L'^*\Phi)).$$

Il faut maintenant établir la convergence de $L'_N\chi_N$ vers cet élément c'est-à-dire la convergence vers zéro de $< L'_N\chi_N - L'\chi, \Phi >_{\mathscr{V}}$ en effet:

$$((A\chi_N - AP_N\chi_N, \Phi)) = ((Q_N A\chi_N, Q_N\Phi)),$$

expression qui converge vers zéro quand $N \to \infty$.

L'affirmation concernant $\xi \dfrac{\partial \psi_N}{\partial x}$ est alors immédiate, il s'agit dans un dernier temps de chercher à préciser vers quel élément de $\mathscr{V}'$ converge $\xi \dfrac{\partial \psi_N}{\partial x}$, ceci afin d'étudier $\psi_N(x, \xi) = \sum_{i=0}^{4} a_N^i(x)\psi_i(\xi)$.

Lemme 1.8.

Les éléments de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ de la forme $\varphi(\xi)\theta(x)$, où $\varphi(\xi), \nu(|\xi|)\varphi(\xi)$ sont dans H, et $\theta(x)$ est dans $\mathscr{H}^1(\mathsf{R})$, appartiennent à $\mathscr{V}$.

Lemme 1.9.

$\dfrac{da_N^i(x)}{dx}$ converge dans $\mathscr{H}^{-1}(\mathsf{R})$ vers un élément $\mathscr{A}^i(x)$.

Rappelons que $\mathscr{H}^{-s}(\mathsf{R}^n)$ est le dual de $\mathscr{H}^s(\mathsf{R}^n)$, et que les éléments de $\mathscr{H}^{-s}(\mathsf{R}^n)$ sont des sommes finies de dérivées d'ordre $\leqslant s$ de fonctions de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^n)$ (Trèves [8] p. 52).

Prenons un élément de $\mathscr{V}$ de la forme:

$$\Phi_\beta(x, \xi) = \xi\psi_\beta(\xi)\theta(x), \quad \text{où } \theta(x) \quad \text{appartient à} \quad \mathscr{H}^1(\mathsf{R}).$$

L'expression suivante converge quand N tend vers l'infini:

$$\left\langle \mathcal{M}\psi_N, \Phi_\beta\right\rangle_{\mathcal{V}} = -\left(\left(\psi_N, \xi\frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x}\right)\right) + ((\psi_N, \nu(|\xi|)\Phi_\beta))$$

si bien que

$$\left\langle \sum_\alpha \psi_\alpha(\xi)\xi\frac{da_N^\alpha}{dx}, \xi\psi_\beta(\xi)\theta(x)\right\rangle_{\mathcal{V}} = \sum_\alpha d_{\alpha\beta}\left\langle\frac{da_N^\alpha}{dx}, \theta(x)\right\rangle_{\mathcal{H}^1(\mathsf{R})}$$

(où $d_{\alpha\beta} = \big(\xi\psi_\beta(\xi), \xi\psi_\alpha(\xi)\big)_H$ converge quand N tend vers l'infini, pour tout élément $\theta(x)$ de $\mathcal{H}^1(\mathsf{R})$; et il en est de même de chaque terme $\left\langle\frac{da_N^\alpha}{dx}(x), \theta(x)\right\rangle_{\mathcal{H}^1(\mathsf{R})}$ d'où le résultat.

On peut établir aisément que:

$\xi\frac{\partial\psi_N}{\partial x}$ converge dans $\mathcal{V}'$ vers $\sum_{\alpha=0}^{4}\xi\psi_\alpha(\xi)\mathcal{A}^\alpha(x)$ et l'on posera par définition $\xi\frac{\partial\psi}{\partial x} = \sum_{\alpha=0}^{4}\xi\psi^\alpha(\xi)\mathcal{A}^\alpha(x)$.

LEMME 1.10.

Les éléments $\nu(|\xi|)\chi$, et $\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\xi\frac{\partial\chi}{\partial x}$ de $\mathcal{V}'$ appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

Tenant compte du dernier résultat, on peut écrire dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$:

$$\chi = \mathcal{U}(A\chi+g)-\mathcal{U}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

Afin de montrer que $\nu(|\xi|)\chi$ est dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$, nous montrons qu'il en est ainsi de $\nu(|\xi|)\mathcal{U}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ et le résultat concernant $\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\xi\frac{\partial\chi}{\partial x}$ est immédiat.

Il est intéressant de pouvoir préciser les éléments $\mathcal{A}^\alpha(x)$ de $\mathcal{H}^{-1}(\mathsf{R})$ et notamment de déterminer les propriétés de $\mathcal{B}^\alpha$ et $\mathcal{C}^\alpha$, où

$\mathcal{A}^\alpha(x) = \mathcal{B}^\alpha(x)+\mathcal{C}^\alpha(x)$ où $\mathcal{B}^\alpha(x)$ et $\mathcal{C}^\alpha(x)$ appartiennent à $\mathcal{L}^2(\mathsf{R})$.

L'élément $\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial x}, \psi_\alpha\right)_H$ appartient à $\mathcal{H}^{-1}(\mathsf{R})$ et pour tout élément b^α de $\mathcal{L}^2(\mathsf{R})$, on a:

$$0 = \sum_\beta(\xi\psi_\alpha, \psi_\beta)_H(\mathcal{B}^\beta, b^\alpha)_{\mathcal{L}^2(\mathsf{R})} - \left\langle\sum_\beta(\xi\psi_\alpha, \psi_\beta)_H\mathcal{C}^\beta + (\xi\chi, \psi_\alpha)_H, \quad \frac{db^\alpha}{dx}\right\rangle_{\mathcal{H}^{-1}(\mathsf{R})}.$$

Donnant à α les valeurs successives $0 \dots 4$, nous obtenons les résultats suivants, conséquence du calcul de $\Delta_{\alpha\beta} = (\xi\psi_\alpha, \psi_\beta)_H$:

$\mathcal{A}^0(x)$ et $\mathcal{A}^4(x)$ sont dérivées de fonctions de $\mathcal{L}^2(\mathsf{R})$, $a^0(x)$ et $a^4(x)$.

D'autre part, $\mathcal{A}^1(x)$ est nul, c'est-à-dire:

$$\xi\frac{\partial\psi}{\partial x} = \xi\psi_0(\xi)\frac{da^0(x)}{dx}+\xi\psi_4(\xi)\frac{da^4(x)}{dx}.$$

Notons $f(x, \xi)$ l'élément de $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}, H)$ défini par:

$$f(x, \xi) = a^0(x)\psi_0(\xi)+a^4(x)\psi_4(\xi)+\chi(x, \xi),$$

élément qui vérifie dans $\mathscr{V}'$

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\boldsymbol{\xi}|)f - Af = g.$$

Appliquons l'opérateur $\mathscr{U}$ pour montrer que f est solution dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$: $f = \mathscr{U}Af + \mathscr{U}g$, et f est solution forte du problème posé.

THÉORÈME A

Soit $g(x, \boldsymbol{\xi})$ un élément de $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$ à symétrie cylindrique en $\boldsymbol{\xi}$ d'axe ξ, il existe un élément

$$f(x, \boldsymbol{\xi}) = a^0(x)\psi_0(\boldsymbol{\xi}) + a^4(x)\psi_4(\boldsymbol{\xi}) + \chi(x, \boldsymbol{\xi})$$

satisfaisant au sens fort dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\boldsymbol{\xi}|)f - Af = g,$$

tel que $\nu(|\boldsymbol{\xi}|)\chi$ soit dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

Cette solution est unique dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$.

2. Equation de Boltzmann sur la demi-droite, avec conditions de réflexion à la paroi

Les conditions à la paroi, $x = 0$, sont du type suivant: $J^+Bf = \mathscr{G}J^-Bf + \Phi^+$, où Φ^+ est un terme de source, élément de H, à symétrie cylindrique en $\boldsymbol{\xi}$ d'axe ξ.

Nous nous ramènerons ici à des consitions de réflexion homogènes, il suffira en effet de modifier, pour en tenir compte, le second membre de l'équation vérifiée pour $x > 0$: Pour résoudre

$$(\mathscr{M} - A)f = \varphi, \quad x > 0,$$
$$J^+Bf = \mathscr{G}J^-Bf + \Phi^+, \quad x = 0,$$

il suffit de chercher f sous la forme

$$f = f_1 + E\Phi^+,$$

f_1 étant solution de

$$(\mathscr{M} - A)f_1 = \varphi + AE\Phi^+, \quad x > 0,$$
$$J^+Bf_1 = \mathscr{G}J^-Bf_1, \quad x = 0.$$

Nous utiliserons les sous espaces $J^\pm H$ de H, la norme et le produit scalaire étant notés $\|f\|_{H^\pm}$ et $(f, g)_{H^\pm}$.

Les hypothèses suivantes sur $\mathscr{G}$ sont fournies par des impératifs physiques:

1) La paroi est localement un thermostat:

$$J^+\omega^{1/2} = \mathscr{G}J^-\omega^{1/2}.$$

2) La paroi est non absorbante:

$$\int_{\mathsf{R}^3} \xi(J^-Bf + \mathscr{G}J^-Bf)\,d\boldsymbol{\xi} = 0$$

et nous supposerons de plus que:

3) $\mathcal{G}$ est donné par un noyau:

$$\mathcal{G}J^-Bf = \int_{R^3} \Gamma(\xi, \xi_1) J^- Bf(\xi_1) d\xi_1,$$

$\mathcal{G}$ étant non négatif, $\Gamma(\xi, \xi_1)$ est non négatif, et on en déduit

$$\int_{R^3} \xi Bf^2(\xi) d\xi \leqslant 0.$$

4) L'opérateur $\mathcal{G}$ admet un ajoint $\mathcal{G}^*$ au sens suivant:

$$\int_{R^3} |\xi^-| f^- \mathcal{G}^* h^+ d\xi = \int_{R^3} |\xi^-| R\mathcal{G} f^- R h^+ d\xi, \quad \text{où} \quad f^\pm = J^\pm Bf,$$

$$Rf(\xi, \eta, \varphi) = f(-\xi, \eta, \varphi),$$

et $\mathcal{G}^*$ vérifie

$$J^- \omega^{1/2} = \mathcal{G}^* J^+ \omega^{1/2}.$$

Si $f^+ = \mathcal{G} f^-$, et $h^- = \mathcal{G}^* h^+$ alors on a identiquement:

$$\int_{R^3} \xi Bf Bh d\xi = 0.$$

5) Sur $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ faisons les hypothèses suivantes, pour des raisons mathématiques qui apparaîtront au cours du développement cf [5].

Notons $\hat{H} = \tilde{H}_{\nu(|\xi|)^{-1}}$, et désignons par $\overline{\omega}$ et π les opérateurs de projection sur le sous espace de $\hat{H}$ orthogonal à $\omega(\xi)^{1/2}$ et le sous-espace engendré par $\omega(\xi)^{1/2}$ respectivement:

$$Bf = \overline{\omega} Bf + \pi Bf.$$

Nous supposerons alors qu'il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$\sigma \|J^- \overline{\omega} Bf\|_{\hat{H}}^2 \leqslant -(\xi Bf, Bf)_H.$$

6) Nous supposerons aussi que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ sont bornés de $\hat{H}$ dans $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$. Une septième hypothèse est donnée §.B4.

2.1. Résolution du problème intermédiaire

$$\mathcal{M} f = \varphi, \qquad x > 0, \quad \mathcal{M} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \nu(|\xi|),$$
$$J^+ Bf = \mathcal{G} J^- Bf, \quad x = 0.$$

Introduisons l'opérateur $\overline{\mathcal{U}}$ défini par:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{U}} g &= \overline{\mathcal{U}} \bar{g}, \\ &= \bar{\mathcal{E}}(\cdot, \xi) \ast \bar{g}(\cdot, \xi), \quad \text{où} \quad \bar{g}(x, \xi) = g(x, \xi) \quad \text{pour} \quad x \geqslant 0, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \qquad\quad \text{pour} \quad x < 0. \end{aligned}$$

Une démonstration analogue au cas A permet d'établir:

LEMME 2.1.

Les opérateurs $\overline{\mathcal{U}}, \nu(|\xi|)\overline{\mathcal{U}}$ et $\xi \frac{\partial}{\partial x} \overline{\mathcal{U}}$ sont des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{L}^2(R^\pm, H), \mathcal{L}^2(R^+, H))$, et l'operateur $\overline{\mathcal{U}}$ vérifie dans $\mathcal{L}^2(R^+, H)$ la relation $\mathcal{M}\overline{\mathcal{U}} = Id$.

L'étude en $x = 0$ est résumé par:

LEMME 2.2.

L'opérateur $B\overline{\mathscr{U}}$ est un élément de $\mathscr{L}(\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H), \tilde{H}_{\nu(|\xi|)})$, dont la norme est bornée par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a d'autre part:

$$J^+ B\overline{\mathscr{U}} = 0.$$

Le problème

$$\mathscr{M}f = \varphi, \qquad x > 0,$$
$$J^+ Bf = f^+, \qquad x = 0$$

où f^+ est une fonction donnée de ξ pour $\xi > 0$ a pour solution

$$f = \overline{\mathscr{U}}\varphi + Ef^+,$$

$$Ef^+ = \exp\left\{-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}x\right\} Y(x) f^+(\xi).$$

L'introduction de $\hat{H} = \tilde{H}_{\nu(|\xi|)^{-1}}$ permet de montrer que E appartient à $\mathscr{L}(\hat{H}, \mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H))$.

Il est utile de définir les opérateurs $\overline{\mathscr{U}}^*$ et E^*, résolvant le problème adjoint, et possédanrt les mêmes propriétés que $\overline{\mathscr{U}}$ et E:

$$\mathscr{M}^* f = \varphi, \qquad x > 0,$$
$$J^+ Bf = f^-, \qquad x = 0.$$

La solution de

$$\mathscr{M}f = \varphi, \qquad x > 0,$$
$$J^+ Bf = \mathscr{G} J^- Bf, \qquad x = 0,$$

est:

$$f = \overline{\mathscr{U}}_\varphi + E\mathscr{G}J^- B\overline{\mathscr{U}}\varphi,$$

ce qui nous amène à poser:

$$W = \overline{\mathscr{U}} + E\mathscr{G}J^- B\overline{\mathscr{U}}.$$

PROPOSITION 2.1.

L'opérateur $W = \overline{\mathscr{U}} + E\mathscr{G}J^- B\overline{\mathscr{U}}$ est tel que

$$\mathscr{M}W\varphi = \varphi \qquad \text{dans} \quad \mathscr{L}^2(R^+, H),$$
$$J^+ BW\varphi = \mathscr{G}J^- BW\varphi \qquad \text{dans} \quad \tilde{H}_{\nu(|\xi|)},$$

en outre:

$$W \quad \text{est élément de} \quad \mathscr{L}(\mathscr{L}^2(R^+, H), \mathscr{L}^2(R^+, H)),$$
$$BW \quad \text{est élément de} \quad \mathscr{L}(\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H), \tilde{H}_{\nu(|\xi|)}),$$

W possède des propriétés régularisantes (comme il en était de $\mathscr{U}$) que nous allons étudier pour montrer dans quel sens il résoud le problème.

Introduisons l'espace F des fonctions de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$, appartenant au domaine de $\mathscr{M}$, et qui, de plus, pour $x = 0$ appartiennent à $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$:

$$|f|_F^2 = \left|\left|\left|\xi\frac{\partial f}{\partial x}\right|\right|\right|^2 + |||\nu(|\xi|)f|||^2 + ||Bf||^2_{\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}}.$$

Il est alors aisé de montrer le lemme suivant:

LEMME 2.3.

L'opérateur W est borné de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ dans F pourvu que $\mathscr{G}$ soit borné dans $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$, il en est de même de W^* et $\mathscr{G}^*$.

Il suffit de reprendre les propriétés de $\overline{\mathscr{U}}$ déduites de celle de $\mathscr{U}$. Rappelons les relations entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}^*$:

Si f et g appartiennent à F:

$$\big((\mathscr{M}f, g)\big) + (\xi Bf, Bg)_H = \big((f, \mathscr{M}^* g)\big).$$

En vue d'étendre l'opérateur W, définissons les espaces et opérateurs suivants: Soit Φ un élément de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$, dont la trace à $x = 0$ est dans $\tilde{H}$: nous noterons l'élément Φ:

$$\Phi = [\Phi^+, B\Phi], \quad \Phi^+ \in \mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H),$$
$$B\Phi \in \tilde{H},$$
$$|\Phi|_{\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)\times\tilde{H}} = |||\Phi^+||| + ||B\Phi||_{\tilde{H}}.$$

Soit $\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H) \times \tilde{H}_\varrho$ l'espace des éléments $\Phi = [\phi^+, B, \Phi]$, où Φ^+ est la restriction à R^+ d'un élément Φ de $\mathscr{V}$, domaine de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}, H)$, et où $B\Phi$ est dans $\tilde{H}_\rho$.

$$|\Phi|_{\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)\times\tilde{H}_\rho} = |\Phi^+|_{\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)} + ||B\Phi||_{\tilde{H}_\rho}$$

où

$$|\Phi^+|_{\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)} = \inf|\tilde{\Phi}|_{\mathscr{V}},$$

$\Phi^+ = \tilde{\Phi}$ presque partout dans R^+.

Nous pouvons alors établir que le dual de cet espace est $\mathscr{V}'(\mathsf{R}^+, H) \times \tilde{H}_{\varrho-1}$, espace des éléments $\Phi = [\Phi^+, \beta\Phi]$ où Φ^+ est un élément du dual $\mathscr{V}'$ de $\mathscr{V}$ dont le support est dans $x \geqslant 0$, et $B\Phi$ dans $\tilde{H}_{\varrho-1}$.

Introduisons les notations suivantes

$$[\mathscr{M}, J^+][\Phi^+, B\Phi] = [\mathscr{M}\Phi^+, J^+B\Phi],$$
$$[\mathscr{M}^*, J^-][\Phi^+, B\Phi] = [\mathscr{M}^*\Phi^+, J^-B\Phi],$$
$$[\overline{\mathscr{U}}, E][\Phi^+, B\Phi] = [\overline{\mathscr{U}}\Phi^+ + EJ^+B\Phi, B\,\overline{\mathscr{U}}\Phi^+ + J^+B\Phi],$$
$$[\overline{\mathscr{U}}^*\, E^*][\Phi^+, B\Phi] = [\overline{\mathscr{U}}^*\Phi^+ + E^*J^-B\Phi, B\overline{\mathscr{U}}^*\Phi^+ + J^-B\Phi].$$

LEMME 2.4.

La relation entre $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}^*$ se formule de la manière suivante:

$$\big([\mathscr{M}, J^+]\Phi, \psi\big)_{\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)\times\tilde{H}} = (\Phi, [\mathscr{M}^*, J^-]\psi)_{\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)\times\tilde{H}}.$$

Il est alors aisé d'en déduire les deux extensions suivantes:

LEMME 2.5.

L'opérateur $[\mathscr{M}, J^+]$ peut être étendu à l'espace $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H) \times \tilde{H}$ cet élément encore noté $[\mathscr{M}, J^+]$ appartient à $\mathscr{Z}(\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H) \times \tilde{H}, \mathscr{V}'(R^+, H) \times J^+\tilde{H}_{\nu-1})$.

L'opérateur $[\overline{\mathscr{U}}, E]$ peut être étendu à $\mathscr{V}'(\mathsf{R}^+, H) \times J^+\tilde{H}$, son extension encore notée $[\overline{\mathscr{U}}, E]$ est élément de $\mathscr{Z}(\mathscr{V}'(\mathsf{R}^+, H) \times J^+\tilde{H}, \mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H) \times \tilde{H}_{\nu-1})$ de même pour les adjoints.

PROPOSITION 2.2.

a) Sur $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)\times J^+\tilde{H}_\nu$, $\quad [\mathscr{M}, J^+]\circ[\overline{\mathscr{U}}, E] = Id$,

b) Sur $\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)\times \tilde{H}_\nu$, $\quad [\overline{\mathscr{U}}, E]\circ[\mathscr{M}, J^+] = Id$,

c) Sur $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)\times \tilde{H}_\nu$, $\quad [\overline{\mathscr{U}}, E]\circ[\mathscr{M}, J^+] = Id$.

Des résultats analogues ont lieu pour les adjoints.

a) Pour un élément $[\Phi^+, B\Phi]$ de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)\times J^+\tilde{H}_\nu$:

$$[\Phi^+, B\Phi]\xrightarrow{[\overline{\mathscr{U}}, E]}[\overline{\mathscr{U}}\Phi^+ + EJ^+B\Phi, B\overline{\mathscr{U}}\Phi + J^+\Phi]$$

$$\xrightarrow{[\mathscr{M}, J^+]}[\mathscr{M}(\overline{\mathscr{U}}\Phi^+ + EJ^+B\Phi), J^+B\overline{\mathscr{U}}\Phi + J^+B\Phi].$$

$\overline{\mathscr{U}}\Phi^+$ est un élément de $\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)$, soit $\mathscr{M}\overline{\mathscr{U}}\Phi^+ = \Phi^+$.

D'autre part, $\mathscr{M}E = 0$, $J^+B\overline{\mathscr{U}}\Phi = 0$, et $J^+B\Phi = B\Phi$, d'où le résultat.

La méthode de démonstration pour b) est la même, sachant que si Φ^+ est dans $\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)$:

$$\overline{\mathscr{U}}\mathscr{M}\Phi^+ + EJ^+B\Phi = \Phi^+.$$

COROLLAIRE 2.1.

L'opérateur W peut être étendu à $\mathscr{V}'(\mathsf{R}^+, H)$, son extension est un élément de $\mathscr{L}(\mathscr{V}'(\mathsf{R}^+, H), \mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)\times\tilde{H}_{\nu(|\xi|)^{-1}})$.

W tel qu'on l'a défini, se formule ainsi, pour un élément ψ^+ de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$:

$$W\psi^+ = (\overline{\mathscr{U}}, E)(\psi^+, B\overline{\mathscr{U}}\psi^+ + \mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}\psi^+),$$

expression qui garde un sens pour $\psi^+ = \mathscr{M}\Phi^+$.

2.2. Equation intégrale associée au probleme posé

Le paragraphe précédent nous assure l'équivalene entre

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{aligned} \mathscr{M}f &= Af + \varphi, \quad & x > 0,\\ J^+Bf &= \mathscr{G}J^-Bf, \quad & x = 0,\end{aligned}$$

et

$$\text{(2.2)}\qquad f = WAf + W\varphi.$$

Toute solution de l'équation intégrale dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ est un élément de F tel que $J^+Bf = \mathscr{G}J^-Bf$; c'est une solution forte dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ du problème posé.

Ici encore, l'opérateur WA n'étant pas compact, nous nous ramènerons à un opérateur compact, $WA\overline{P}_N$, où $\overline{P}_N$ est l'opérateur de troncature à $x > N$.

2.3. Equation modifiée

Soit le problème:

$$(1_N)\qquad \begin{aligned} \mathscr{M}f_N - A\overline{P}_N f_N &= \varphi, \quad & x > 0,\\ J^+Bf_N &= \mathscr{G}J^-Bf_N, \quad & x = 0,\end{aligned}$$

équivalent à

$$(2_N)\qquad f_N - WA\overline{P}_N f_N = W\varphi,$$

$\overline{L_N}$ est défini par $\overline{L_N} = \nu(|\xi|) - A\overline{P_N}$.

LEMME 2.6.

L'équation (2_N) ne peut avoir dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$ plus d'une solution.

Pour la démonstration, on se reportera à la partie A:

L'hypothèse (3) permet de conclure que $Bf = 0$ dans $\tilde{H}$ et $f = 0$ dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$. Etudions alors la compacité de l'opérateur $WA\overline{P_N}$ dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$, qui conduira à l'existence, d'une solution de (2_N) unique dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$, solution dont il s'agira d'étudier la convergence pour N infini.

LEMME 2.7.

L'opérateur $WA\overline{P_N}$ est compact dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$.

La démonstration se déroule de manière analogue à celle du paragraphe 1, l'introduction de l'opérateur δ_θ est ici encore indispensable, ce qui définit

$$W_\theta = \delta_\theta\overline{\mathscr{U}} + E\mathscr{G}J^- B\delta_\theta\overline{\mathscr{U}}.$$

L'opérateur $W_\theta A$ converge uniformément en norme dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$ vers W, si $\theta \to 0$; (il suffit alors de démontrer la compacité de W_θ), en effet, on peut établir les deux majorations:

$$||\delta_\theta\overline{\mathscr{U}}Af - \overline{\mathscr{U}}Af||_{(\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)} \leqslant c\sqrt{\theta}\,|||f|||^2_{\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)},$$

$$|||E\mathscr{G}J^- B\delta_\theta\overline{\mathscr{U}}Af - E\mathscr{G}J^- B\overline{\mathscr{U}}Af|||_{\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)} \leqslant K\sqrt{\theta}\,|||f|||^2_{\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)},$$

en utilisant le fait que E est borné de $\hat{H}$ dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$, et $\mathscr{G}$ de $\hat{H}$ dans lui-même, on est ramené à établir que $J^- E\delta_\theta\overline{\mathscr{U}}A$ converge en norme dans $\hat{H}$ vers $J^- B\overline{\mathscr{U}}A$.

La compacité de $W_\theta A\overline{P_N}$ est obtenue par passage à l'adjoint, notamment

$$(J^- B\delta_\theta\overline{\mathscr{U}}A\overline{P_N})^* = \overline{P}_N A(J^- B\delta_\theta\overline{\mathscr{U}})^*$$

et on est ramené à montrer que pour tout x, $J^-\delta_\theta\nu(|\xi|)^{-1}E^*(h_n - h)$ converge faiblement vers zéro dans H, dès que $h_n - h$ converge vers zéro dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$. Il suffit pour cela de montrer que pour tout x, si $\Phi(\xi)$ appartient à H alors $Y(\theta - \xi)\nu(|\xi|)^{-1}\Phi(\xi)\exp\left\{\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}x\right\}$ est élément de $\hat{H}$, comme le prouve le calcul de sa norme, et nous pouvons énoncer:

PROPOSITION 2.3.

L'équation $f = WA\overline{P}_N f + W\varphi$ a une slution unique dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$ pourvu que φ soit dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$. La solution f_N de (2_N) est solution forte dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$ du problème (1_N):

$$\xi\frac{\partial f_N}{\partial x} + \overline{L}_N f_N = \varphi \quad \text{dans} \quad \mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H),$$

$$J^+ Bf_N = \mathscr{G}J^- Bf_N \quad \text{dans} \quad \hat{H}.$$

Nous écrirons f_N sous la forme

$$f_N(x, \xi) = \psi_N(x, \xi) + \chi_N(x, \xi)$$

$$= \sum_{\alpha=0}^{4} a^\alpha(x)\psi_\alpha(\xi) + \chi_N(x, \xi).$$

2.4. Convergence de $f_N(x,\xi)$ quand $N\to\infty$

LEMME 2.8.

Si φ appartient à $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$,

$$|||\chi_N||| \leqslant \frac{1}{\mu_1}|||\varphi|||$$

$$||\overline{\omega}Bf_N||_{\hat{H}}^2 \leqslant \frac{1}{\sigma\mu_1}|||\varphi|||^2$$

$$|||\overline{Q}_N\psi_N||| \leqslant \frac{1}{\nu(0)\mu_1}|||\varphi||| \quad \text{où} \quad \overline{Q}_N = 1-\overline{P}_N.$$

Comme au paragraphe 1:

$$\left(\left(\xi\frac{\partial f_N}{\partial x}, f_N\right)\right) + ((\overline{L}_Nf_N, f_N)) = ((f_N, \varphi)).$$

L'annexe a pour conséquence:

$$-(\xi Bf_N, Bf_N)_H + ((\overline{L}_Nf_N, f_N)) = ((f_N, \varphi))$$

d'où les inégalités indiquées compte tenu de l'hypothèse (5).

Nous pouvons conclure aux convergences faibles suivantes, ceci pour une sous suite d'entiers, que nous noterons encore N:

PROPOSITION 2.7.

Pour une suite d'entiers N, χ_N converge faiblement dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$ vers un élément de $\mathscr{Q}\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$ noté χ, $\nu(|\xi|)^{1/2}\chi_N$ converge alors faiblement vers $\nu(|\xi|)^{1/2}\chi$, et $\overline{Q}_N\psi_N$ vers zéro dans $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$. $\overline{\omega}Bf_N$ converge faiblement dans $\hat{H}$ vers un élément que l'on notera $\overline{\omega}Bf$.

La première partie est analogue au paragraphe précédent, la seconde est conséquence de l'inégalité:

$$||\overline{\omega}Bf_N||_{\hat{H}}^2 \leqslant \frac{1}{\sigma\mu_1}|||\varphi|||^2$$

et du fait que $\mathscr{G}$ est borné de $\hat{H}$ dans lui-même.

Afin d'étudier avec plus de précision le phénomène à la paroi, formulons une nouvelle de 5 hypothèse:

H y p o t h è s e 7. A tout opérateur de réflexion $\mathscr{G}$, on peut associer un système fonctions $\Phi_\alpha(\xi)$, $\alpha = 0, \ldots 4$, telles que

(i) Φ_α, $\xi\Phi_\alpha$ appartiennent à H,

(ii) $J^-\Phi_\alpha = G^*J^+\Phi_\alpha$,

(iii) $(\xi\Phi_\alpha, \psi_\beta)_H = \delta_{\alpha\beta}$ si α et β non tous deux nuls,
$= 0$ si $\beta = \alpha = 0$.

LEMME 2.9.

$\dfrac{d}{dx}a_N^\alpha$ converge dans $\mathscr{H}^{-1}(0,\infty)$, et, pour $\alpha\neq 0$, Ba_N^α une limite $a_\alpha(0)$ quand N tend vers l'infini.

Etant donné la structure particulière de f_N: $f_N = Wh_N$, pour un élément particulier de $\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)\times \tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$:

$$h(x, \xi) = \Phi_\alpha(\xi)\theta(x)$$

où $\theta(x) = [\theta^+(x), \theta(0)]$, $\theta^+(x)$ appartient à $\mathscr{H}^1(\mathsf{R}^+)$, on a, compte tenu de la définition de $\Phi_\alpha(\xi)$:

$$\big((\mathscr{M}f_N - A\overline{P}_N f_N, \Phi_\alpha(\xi)\theta(x))\big) = \big((f_N, (\mathscr{M}^* - A\overline{P}_N^{\,*})\Phi_\alpha(\xi)\theta(x))\big).$$

La relation $\mathscr{M}f_N - A\overline{P}_N f_N = \varphi$ ayant lieu pour tout N, les convergences établies précédemment permettent d'affirmer que: $\left(\left(\psi_N, \xi\dfrac{\partial}{\partial x}\Phi_\alpha(\xi)\theta^+(x)\right)\right)$ a un sens et converge quand N tend vers l'infini, pour tout $\theta^+(x)$ de $\mathscr{H}^1(\mathsf{R}^+)$.

Il existe donc un élément $B\psi_N$ de $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)^{-1}}$ défini (partiellement) par la relation:

$$\left\langle \xi\frac{\partial}{\partial x}\psi_N, \Phi_\alpha(\xi)\theta^+(x)\right\rangle_{\mathscr{V}(\mathsf{R}^+, H)} + \left(\xi B\psi_N, \Phi_\alpha(\xi)\theta(0)\right)_H = -\left(\left(\psi_N, \xi\frac{\partial}{\partial x}\Phi_\alpha(\xi)\theta^+(x)\right)\right).$$

Par passage à la limite, les valeurs successives de α, $\alpha \neq 0$ puis $\alpha = 0$ donnent les résultats suivants:

Pour $\alpha \neq 0$, $\quad \dfrac{d}{dx}a_N^\alpha(x)$ converge faiblement dans $\mathscr{H}^{-1}(0, \infty)$ vers A^α.

Ba_N^α a une limite, $a^\alpha(0)$ quand N tend vers l'infini.

Pour $\alpha = 0$, $\quad \dfrac{d}{dx}a_N^0(x)$ converge vers A^0 dans $\mathscr{H}^{-1}(0, \infty)$.

On ne peut obtenir aucun renseignement concernant $a^0(0)$, ceci est du à la particularité que présente l'invariant d'ordre zéro, pour l'opérateur de réflexion.

COROLLAIRE 2.2.

Pour une sous suite d'entiers N, $\overline{\omega}B\psi_N$ et $\overline{\omega}B\chi_N$ convergent dans $H_{(\nu|\xi|)^{-1}}$.

$\xi\dfrac{\partial\psi_N}{\partial x}$ converge dans $(\mathscr{V}(|\mathsf{R}^+, H)\times 0)'$ vers $\sum\limits_\alpha \xi A^\alpha(x)\psi_\alpha(\xi)$.

Il suffit de reprendre la démonstration du paragraphe 1.

Il reste à étudier la convergence de $\nu(\xi)\chi_N$ dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, \tilde{H})$:

PROPOSITION 2.8.

Si $\mathscr{G}$ est borné de $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)^{-1}}$ dans $\tilde{H}_{\nu(|\xi|), \nu(|\xi|)\chi_N}$ converge dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ faiblement vers l'élément $\nu(|\xi|)\chi$ de $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$.

Dans $\mathscr{V}'(R^+, H)$ on a:

$$\xi\frac{\partial\psi_N}{\partial x} + \mathscr{M}\chi_N = A\overline{P}_N\chi_N - \nu(|\xi|)\overline{Q}_N\psi_N + \varphi.$$

Les propriétés de l'opérateur W montrent que l'expression suivante converge en projection dans $\mathscr{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ faiblement:

$$\nu(|\xi|)W\frac{\partial\psi_N}{\partial x} + \nu(|\xi|)W\mathscr{M}\chi_N.$$

Utilisant la forme de la limite de $\frac{\partial \psi_N}{\partial x}$ et le fait que $\nu(|\xi|)E(J^+B\chi_N - \mathcal{G}J^-B\chi_N)$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$, on en déduit la convergence faible de $\nu(|\xi|)\chi_N$ dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$.

PROPOSITION 2.9.

Il existe une suite d'entiers N pour laquelle

χ_N converge faiblement dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ vers χ,

$\nu(|\xi|)\chi_N$ converge faiblement dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ vers $\nu(|\xi|)\chi$,

$\overline{Q}_N\psi_N$ converge faiblement vers zéro dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$,

$\xi \frac{\partial \psi_N}{\partial x}$ converge vers $\xi A^\alpha(x)\psi_\alpha(\xi)$ où $A^\alpha(x) \in \mathcal{H}^{-1}(\mathsf{R}^+)$,

tels que $\xi \frac{\partial}{\partial x}\chi + A^\alpha\psi_\alpha(\xi)$ appartienne à $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ et soit la limite faible dans $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$ de $\xi \frac{\partial f_N}{\partial x}$.

$B\overline{\omega}\chi$ et $Ba^\alpha(x)\psi_\alpha(\xi)$, $\alpha \neq 0$, appartiennent à $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$.

THÉORÈME B

Supposons que $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}^*$ vérifient les hypothèses 1) à 7). *Il existe un élément $f(x, \xi)$ de la forme*

$f(x, \xi) = \sum_{\alpha=0}^{4} a^\alpha(x)\psi_\alpha(\xi) + \chi(x, \xi)$ *tel que*

$\chi(x, \xi)$, $\nu(|\xi|)\chi(x, \xi)$ *appartiennent à* $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$,

$B\overline{\omega}\chi$ *et* $Ba^\alpha(x)\psi_\alpha(\xi)$, $\alpha \neq 0$, *appartiennent à* $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$,

$\frac{d}{dx}a^\alpha(x)$ $\alpha = 0, \ldots 4$, *appartiennent à* $\mathcal{H}^{-1}(0, \infty)$,

vérifiant, pourvu que φ appartienne à $\mathcal{Q}\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$

$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \nu(|\xi|)\chi - A\chi = \varphi$ *dans* $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$,

$J^+\overline{\omega}Bf = \mathcal{G}J^-\overline{\omega}Bf$ *dans* $\tilde{H}_{\nu(|\xi|)}$.

Annexe

Annexe a

THÉORÈME a – 1.

Si $\varphi(x, \xi)$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathsf{R}^+, H)$, la quantité $(\xi\mathcal{U}_\varphi, \mathcal{U}_\varphi)_H$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

$$(\xi\mathcal{U}_\varphi, \mathcal{U}_\varphi)_H = \int_{\xi>0} d\xi \frac{1}{\xi}\left[\int_0^x \exp\left(-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}(x-y)\right)\varphi(y, \xi)dy\right]^2$$
$$+ \int_{\xi<0} d\xi - \frac{1}{\xi}\left[\int_x^\infty \exp\left(-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}x - y\right)\varphi(y, \xi)dy\right]^2.$$

Considérons l'intervalle $[0, \infty]$ comme la réunion de $[0, A]$ et $[A, \infty]$. Les majorations suivantes ont alors lieu:

$$\xi > 0: \quad \left|\int_0^A \exp\left(-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}(x-y)\right)\varphi(y, \xi)dy\right| \leqslant \|\varphi\|_{\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+)}\sqrt{\frac{\xi}{2\nu(|\xi|)}}\exp\left(-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}(x-A)\right),$$

$$\left|\int_A^x \exp\left(-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}(x-y)\right)\varphi(y, \xi)dy\right| \leqslant \left(\int_A^x \varphi^2(y, \xi)dy\right)^{1/2}\sqrt{\frac{\xi}{2\nu(|\xi|)}},$$

$$\xi < 0: \quad \left|\int_x^\infty \exp\left(-\frac{\nu(|\xi|)}{\xi}(x-y)\right)\varphi(y, \xi)dy\right| \leqslant \left(\int_x^\infty \varphi^2(y, \xi)dy\right)^{1/2}\sqrt{\frac{\xi}{2\nu(|\xi|)}}.$$

Si bien que, pour $x > 2A$, étant donnée la majoration $\nu(|\xi|) > a\xi$:

$$\max_{x>2A}(\xi\mathscr{U}_\varphi, \mathscr{U}_\varphi)_H \leqslant \frac{1}{\nu(0)}\left\{|||\varphi|||^2\exp(-2aA) + \int_A^\infty \|\varphi(y, \xi)\|_H^2 dy\right.$$

expression qui tend bien vers zéro quand A tend vers l'infini, pourvu que $\varphi(x, \xi)$ appartienne à $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$.

THÉORÈME a−2.

Si $\varphi(x, \xi)$ appartient à $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$ l'expression $(\xi\overline{\mathscr{U}}_\varphi, \overline{\mathscr{U}}_\varphi)_H$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

Il suffit de reprendre la démonstration précédente, et de limiter les intégrations et majorations à $x \geqslant 0$.

THÉORÈME a−3.

Si $\varphi(x, \xi)$ appartient à $\mathscr{L}^2(\mathrm{R}^+, H)$, l'expression $(\xi E\mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}_\varphi, E\mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}_\varphi)_H$ converge vers zéro quand x tend vers l'infini.

$$(\xi E\mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}_\varphi, E\mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}_\varphi)_H = \int_{\xi>0} d\xi\,\xi\exp\left(-\frac{2\nu(|\xi|)}{\xi}x\right)(\mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}_\varphi)^2.$$

Pour le potentiel intermoléculaire choisi: $\dfrac{\nu(|\xi|)}{\xi} > a > 0$ on peut conclure que:

$$\max_{x>x_0}(\xi E\mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}_\varphi, E\mathscr{G}J^-B\overline{\mathscr{U}}_\varphi)_H \leqslant \frac{\gamma^2}{2\nu(0)}\exp(-2ax)|||\varphi(x, \xi)|||^2.$$

Annexe b

1. Calcul du déterminant $\Delta_{\alpha\beta} = (\xi\psi_\alpha(\xi), \psi_\beta(\xi))_H$

$$\psi_0(\xi) = \omega^{1/2},$$

$$\psi_1(\xi) = \xi\omega^{1/2}, \quad \psi_2(\xi) = \xi_2\omega^{1/2}, \quad \psi_3 = \xi_3\omega^{1/2},$$

$$\psi_4(\xi) = (|\xi|^2-3)\frac{1}{\sqrt{6}}\omega^{1/2},$$

$$\omega(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp - \frac{|\xi|^2}{2},$$

$$\Delta_{01} = \Delta_{04} = 0,$$

$$\Delta_{00} = 1,$$

$$\Delta_{14} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

2. Calcul du déterminant $\delta_{ij} = (\theta_i(\xi), \theta_j(\xi))_H$

$$\theta_i = \psi_i, \quad i = 0, \ldots, 4,$$

$$\theta_j = \xi\psi_i, \quad i = 1, \ldots, 4, \quad j = 5, \ldots, 8.$$

Le calcul effectif du déterminant montre qu'il est non nul.

Bibliographie

1. V. CERCIGNANI, *On the Boltzmann equation with cut off potentials*, Phys. of Fluids, **10**, 10, 1967.
2. K. DARROZES, *7th Symposium on rarefied gas dynamics*, Pise 1970.
3. A. GRAD, *Principles on the kinetic theory of gases*, Handbuch der Physik, **12**, 26, 1958.
4. A. GRAD, *Asymptotic theory of the Boltzmann equation, Rarefied gas dynamics*, I. Laurman 1963.
5. G. GUIRAUD, *Sur le problème de Couette et l'équation de Boltzmann*, J. de Mécanique, 7, 2, 1968.
6. J. LIONS et J. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, 1, Dunod Paris 1968.
7. V. SIROVICH, *On some mathematical aspects of the kinetic model equations*, Brown University lectures notes.
8. K. TRÈVES, *Linear partial de differential equations with constant coefficients*.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES DE REIMS, FRANCE.

Received November 24, 1977.