ZUR ELEMENTAREN THEORIE

DER

KREISEL-BEWEGUNG[1].

Von

ALEX. WERNICKE.

---

[1]) Vergl. hierzu Ad. Wernickes Lehrbuch der Mechanik (bei Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig), IV. Aufl., im 1. Theil §. 102 und Anwendung 13 zum 4. Kapitel des 3. Abschnittes.

§. 1.

In seinen Vorlesungen über technische Mechanik hat Herr Föppl den Flächensatz mehrfach herangezogen, unter Anderem auch, um die Grundgleichungen des Schlick'schen Verfahrens für die Massenausgleichung bei Schiffsmaschinen kurz und elegant abzuleiten (Bd. IV, S. 127 u. f.). Dabei macht er die Bemerkung (S. 129), „dass der Flächensatz bisher in technischen Kreisen noch längst nicht die Beachtung gefunden hat, die er in Wirklichkeit verdient".

Diese durchaus zutreffende Bemerkung lässt sich dahin erweitern, dass von den sogenannten Principien der Mechanik gerade der Flächensatz bisher überhaupt verhältnissmässig selten für die wirkliche Lösung besonderer Aufgaben verwandt worden ist.

Ein Grund dafür dürfte in dem Umstande zu suchen sein, dass er noch nicht unter die gangbaren Lehrsätze der elementaren Mechanik aufgenommen ist, während dies bei den anderen sogenannten Principien (Bewegung des Schwerpunktes, Beziehung von Energie und Arbeit u. s. w.) längst der Fall ist.

Ein zweiter Grund liegt vielleicht darin, dass der Flächensatz gerade in der Beziehung, welcher er seine Benennung verdankt, für Anwendungen nicht allzu günstig ist, weil dabei sein innerster Kern, die Verbindung des Momentes der Bewegungsgrösse mit dem Momente der äusseren Kräfte, verschleiert wird.

In rechnerischer Beziehung besteht wohl sein Werth hauptsächlich darin, dass er, ebenso wie der Satz von Energie und Arbeit, gelegentlich eine Integration erspart.

Im Folgenden soll der Versuch gemacht werden, den Lehrsatz durchaus elementar zu begründen, und zwar so, dass sein Kern dabei zu Tage tritt.

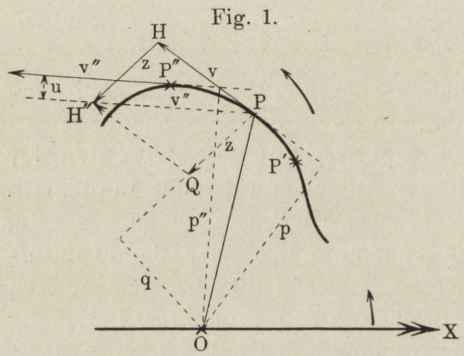
Ausserdem soll seine Verwendbarkeit, gerade in der bezeichneten Hinsicht, an einem Beispiel gezeigt werden, das sich augenblicklich einer gewissen Theilnahme erfreut, nämlich für die (elementare) Behandlung der Bewegung des Kreisels.

Dabei soll der Begriff der elementaren Behandlung in dem sich für die angewandte Mathematik mehr und mehr einbürgernden Sinne bestimmt werden, dass Verwendung von Differential- und Integralrechnung ausgeschlossen wird, dass aber einfache Grenzübergänge zugelassen werden und dass demnach auch die Ableitungen der einfachsten Functionen (Potenz, Sinus, Cosinus und Exponentialgrösse) zu Gebote stehen.

§. 2.

Wir betrachten zunächst die ebene Bewegung eines Punktes (vergl. Fig. 1), der von P' über P nach P'' läuft. Trägt man die Geschwindigkeiten v und v'' für P und P'' in diesen Punkten als Vectoren an, so stellen pv und $p''v''$ die Momente dieser Geschwindigkeiten für einen beliebigen Punkt O dar. Verschiebt man v'' von P'' nach P, so liefert das Parallelogramm $PHH''Q$ die Strecke z, welche die Aenderung der Geschwindigkeit für den Uebergang von P nach P'' darstellt. Wendet man auf dieses Parallelogramm den Momentensatz an für O als Drehpunkt, so gilt

Fig. 1.



$$(p'' - u)\, v'' = pv + qz$$

oder

$$p''v'' - pv = qz + uv''.$$

Geschieht der Uebergang von P nach P'' in der Zeit τ, so bezeichnet $\frac{z}{\tau}$ die entsprechende mittlere Beschleunigung, und man hat

$$\frac{p''v'' - pv}{\tau} = q \cdot \frac{z}{\tau} + \frac{u}{\tau} \cdot v''.$$

Beim Grenzübergange für $lim\ \tau = 0$ ist $u = PP''.\sin H''PH$

zu setzen, so dass $\frac{u}{\tau} = \frac{PP''}{\tau} \cdot sin\ H''PH$ für $lim\ \tau = 0$ verschwindet, während dabei $\frac{z}{\tau}$ in die Gesammtbeschleunigung j_G übergeht.

Demnach ist

$$lim \left[\frac{p''v'' - pv}{\tau}\right] = q \cdot j_G.$$

Handelt es sich bei der betrachteten Bewegung um einen materiellen Punkt W von der Masse μ, so kann man statt der Geschwindigkeiten in P und P'' die entsprechenden Bewegungsgrössen als Vectoren antragen. Dabei erhält man die Gleichung

$$lim \left[\frac{p''(\mu v'') - p(\mu v)}{\tau}\right] = q \cdot (\mu j_G).$$

Jetzt bedeutet μj_G die Kraft, welche thatsächlich in der Bewegung zur Geltung kommt.

Gehört der materielle Punkt W einem System materieller Punkte an, so erwächst die Effectivkraft μj_G aus der Resultante der äusseren und der Resultante der inneren auf W wirkenden Kräfte. Projicirt man diese beiden Resultanten, falls sie nicht in der Ebene der Zeichnung liegen, auf diese, so erwächst die Effectivkraft auf alle Fälle aus zwei, in der Ebene der Zeichnung gelegenen Kräften A und J, deren Arme für O als Drehpunkt bezw. a und b sein mögen.

Demnach gilt:

$$lim \left[\frac{p''(\mu v'') - p(\mu v)}{\tau}\right] = a \,.\, A + b \,.\, J.$$

Wendet man die erhaltene Gleichung auf alle (n) Punkte eines materiellen, in der Ebene der Zeichnung gelegenen und in ihr beweglichen Systems an, so erhält man bei Addition der einzelnen Gleichungen

$$lim \left[\frac{\Sigma p''(\mu v'') - \Sigma p(\mu v)}{\tau}\right] = \Sigma(a \,.\, A) + \Sigma(b \,.\, J.)$$

Da die inneren Kräfte des Systems in Paare von Gegenkräften zerfallen, so ist $\Sigma(b \,.\, J) = 0$, d. h. man hat

$$lim \left[\frac{\Sigma p''(\mu v'') - \Sigma p(\mu v)}{\tau}\right] = \Sigma(a \,.\, A).$$

Die linke Seite dieser Gleichung stellt die Erzeugungsgeschwindigkeit der Grösse $\Sigma p(\mu v)$ dar, welche „Moment der Bewegungsgrösse für das System“ genannt werden mag.

Demnach gilt: Für jeden Drehpunkt ist die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes der Bewegungsgrösse gleich dem Momente der äusseren Kräfte.

Dieser Satz gilt zunächst für ein ebenes System von n materiellen Punkten.

Seine Erweiterung für $\lim n = \infty$ bietet keine besonderen Schwierigkeiten dar.

Bezeichnet man die Flächengeschwindigkeiten (vergl. Fig. 1) in Bezug auf O für P und P'' bezw. durch V und V'', so ist $V = \frac{1}{2} pv$ und $V'' = \frac{1}{2} p''v''$.

Führt man μV als Massenflächengeschwindigkeit eines materiellen Punktes und $\Sigma \mu V$ als Massenflächengeschwindigkeit eines materiellen Systems ein, so stellt die linke Seite der abgeleiteten Gleichung die doppelte Massenbeschleunigung des Systems dar, so dass der gewonnene Satz auch die Form erhalten kann: Für jeden Drehpunkt ist die doppelte Massenflächenbeschleunigung gleich dem Momente der äusseren Kräfte.

In dem Sonderfalle, wenn das Moment der äusseren Kräfte verschwindet, gilt: Das Moment der Bewegungsgrösse ist constant bezw. die Massenflächengeschwindigkeit ist unveränderlich (Flächensatz).

Um den Satz auf räumliche materielle Systeme auszudehnen, braucht man nur das betrachtete ebene System als rechtwinklige Projection eines räumlichen Systems aufzufassen und zwar so, dass man jedem Projectionspunkte die Masse des projicirten Punktes zuordnet.

Anstatt des Drehpunktes O tritt dabei natürlich eine Achse durch O ein, senkrecht zur Ebene der Zeichnung.

Für das räumliche materielle System lässt sich der Satz demnach so aussprechen: Für jede Achse ist die Erzeugungsgeschwindigkeit des Momentes der Bewegungsgrösse gleich dem Momente der äusseren Kräfte.

Ist das materielle System im Besonderen ein starrer Körper mit fester Drehungsachse, so nimmt unser Satz für diese als Achse eine sehr einfache und bekannte Gestalt an.

Bezeichnet man die Tangentialbeschleunigung eines Punktes im Abstande r von der Achse mit j_T, so ist hier $q \cdot j_G = r \cdot j_T$ und $\mu \cdot q \cdot j_G = \mu r^2 \cdot \iota$, wenn man noch j_T durch die Winkelbeschleunigung ι ausdrückt.

Demnach wird hier

$$\Sigma \mu r^2 \iota = \iota \Sigma \mu r^2 = \Sigma (a A),$$

d. h. die Winkelbeschleunigung ist der Quotient aus Kraftmoment und Trägheitsmoment.

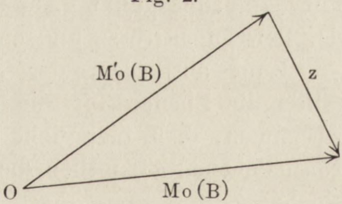
Es ist nun auch leicht, dem Satze eine noch allgemeinere Form zu geben.

Denkt man für jeden Augenblick an jedem Punkte eines materiellen Systems dessen Bewegungsgrösse als Vector angetragen, so liefert die rechtwinklige Projection dieses mit Vectoren behafteten materiellen Systems auf eine Ebene, senkrecht zu irgend einer Achse, für diese Achse unmittelbar die Grössen, auf welche sich unser Satz bezieht.

Projicirt man das System auf die drei Ebenen eines rechtwinkligen Coordinatenkreuzes vom Anfangspunkte O, so kann man die Momente für O für die Ebenen XOY, YOZ, ZOX wie Kraftmomente bezw. auf den Achsen OZ, OX, OY als Vectoren auftragen und aus ihnen einen resultirenden Vector bilden, welcher das Moment der Bewegungsgrösse des Systems für O als Zurückführungspunkt darstellt.

Zu demselben resultirenden Vector würde man gelangen, wenn man die übliche Behandlung eines Kräftesystems mit zerstreuten Angriffspunkten für O auf die als Vectoren dargestellten Bewegungsgrössen des materiellen Systems überträgt. Denkt man diesen resultirenden Vector für jeden Augenblick in O angetragen, so beschreibt dessen Spitze eine Linie, welche sich mit dem Hodographen Hamilton's vergleichen lässt, man kann sie die „Linie des Momentes der Bewegungsgrösse“ für O nennen.

Fig. 2.



Stellen die Vectoren $M'o(B)$ und $Mo(B)$ in Fig. 2 die Momente der Bewegungsgrösse des Systems für zwei Zeitpunkte dar, zwischen denen die Zeit τ liegt, so bezeichnet z den Zusatz, welcher für ihre

Ueberführung nöthig ist und $\frac{z}{\tau}$ nach Grösse und Richtung die mittlere Erzeugungsgeschwindigkeit für den Uebergang.

Geht man zur Grenze über, so stimmt das Moment der äusseren Kräfte, welches man gleichfalls als Vector einführen kann, für den gewählten Zeitpunkt überein mit $lim\left(\frac{z}{\tau}\right)$.

Demgemäss gelangen wir zu dem Satze: Das Moment der äusseren Kräfte stellt als Vector in jedem Augenblicke für die „Linie des Momentes der Bewegungsgrösse" die Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung dar.

Projicirt man endlich das materielle System auf die einzelnen Ebenen eines Ebenenbündels durch O, so ist das Moment der Bewegungsgrösse der Projectionen für O ein Maximum für diejenige Ebene, welche senkrecht steht auf dem Vector, welcher das Moment der Bewegungsgrösse für das System darstellt.

Diese Ebene durch O wechselt im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick und ebenso die Grösse des Maximalwerthes des Momentes, weil sich jener Vector im Allgemeinen von Augenblick zu Augenblick ändert.

Hat im Besonderen das Moment der äusseren Kräfte für O den Werth Null, so behält jene Ebene (die unveränderliche Ebene von Laplace) durch O bei constantem Werthe des Maximums ihre Lage bei, weil dann der Vector, welcher das Moment der Bewegungsgrösse für das System darstellt, nach Grösse und Richtung unveränderlich ist.

Steht das System der äusseren Kräfte im Gleichgewichte, so gilt die für O durchgeführte Betrachtung für jeden Punkt des Raumes, d. h. für jeden bestimmten Punkt des Raumes als Zurückführungspunkt giebt es ein bestimmtes constantes Moment der Bewegungsgrösse und eine bestimmte unveränderliche Ebene.

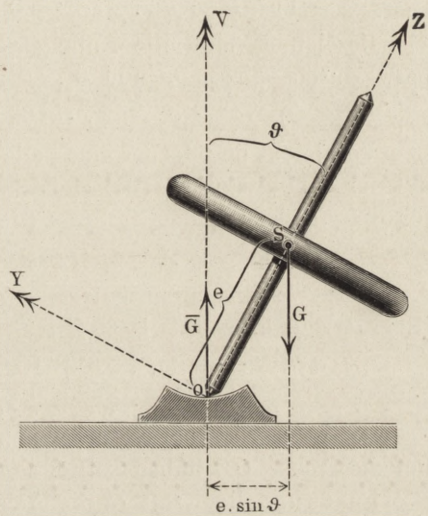
Ruht ausserdem der Massenmittelpunkt des Systems, so fallen die Ebenen für die verschiedenen Zurückführungspunkte zusammen, d. h. hier giebt es eine Richtung im Raume, deren Normalebenen sämmtlich die Rolle einer unveränderlichen Ebene spielen.

Da die Massenflächengeschwindigkeit constant ist, sobald das Moment der äusseren Kräfte verschwindet, so werden in diesem Falle in gleichen Zeiten gleiche Massenflächen beschrieben (Erhaltung der Flächen).

§. 3.

Wir betrachten nun einen Kreisel (Rotationskörper), wie ihn Fig. 3 andeutet, und zwar denken wir uns ihn schief auf das Lager in O aufgesetzt, nachdem er eine kräftige Drehung um seine Achse OZ erhalten hat.

Fig. 3.



Um die Bewegung der Achse OZ zu untersuchen, benutzen wir ein bewegliches Coordinatenkreuz, indem wir in der Verticalebene ZOV durch O eine Y-Achse senkrecht zu OZ, und ausserdem eine X-Achse senkrecht zur Ebene ZOY einführen.

Um die Lage dieses Kreuzes im Raume zu bestimmen, führen wir $\measuredangle ZOV = \vartheta$ ein, suchen ferner die Spuren der Ebene ZOY mit der Horizontalebene durch O auf und messen die Stellung (η) dieser Spuren gegen eine feste Gerade OH der Horizontalebene.

Die Relativbewegung des Kreisels gegen die XY-Ebene ist nicht von wesentlicher Bedeutung, da dieser wegen seiner Form als Rotationskörper für alle Geraden der XY-Ebene durch O dasselbe Trägheitsmoment hat.

Bei Vernachlässigung der Reibungen kommt von äusseren Kräften nur das Gewicht G des Kreisels in dessen Schwerpunkt S in Betracht und die entsprechende Reaction $\overline{G}$ in O. Für die Achse OV hat das Moment der äusseren Kräfte den Werth Null, so dass also für diese Achse das Moment der Bewegungsgrösse des Kreisels einen constanten Werth B hat (vergl. §. 2).

Bezeichnet man die Componenten der Winkelgeschwindigkeit für die Achsen OX, OY, OZ zur Zeit t bezw. durch φ_x, φ_y, φ_z, so hat das Moment der Bewegungsgrösse zur Zeit t bezw. die Componenten $\mathfrak{Tr} \,.\, \varphi_x$, $\mathfrak{Tr} \,.\, \varphi_y$, $\mathfrak{Tr}_z \,.\, \varphi_x$ wenn man die Trägheitsmomente für die Achsen OX und OY durch $\mathfrak{Tr}$ und für die Achse OZ durch $\mathfrak{Tr}_z$ bezeichnet.

Projicirt man diese Componenten auf die Achse OV, so ergiebt sich

$$1)\quad B = \varphi_y \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, \sin\vartheta + \varphi_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z \,.\, \cos\vartheta.$$

Bezeichnet man die Anfangswerthe von φ_x, φ_y, φ_z und ϑ bezw. durch γ_x, γ_y, γ_z und ϑ_0, so ist auch

$$2)\quad B = \gamma_y \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, \sin\vartheta_0 + \gamma_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z \,.\, \cos\vartheta_0.$$

Vergleicht man ferner eine beliebige Stellung (ϑ) der Achse OZ mit der Anfangsstellung (ϑ_0), so ist die Arbeit A der äusseren Kräfte für die Aenderung der Stellung (Senkung)

$$3)\quad A = Ge(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Diese Arbeit entspricht dem Zuwachs an lebendiger Kraft (Energie), d. h. es ist $A = E$ für

$$4)\quad E = (\tfrac{1}{2}\,\varphi_x^2 \,.\, \mathfrak{Tr} + \tfrac{1}{2}\,\varphi_y^2 \,.\, \mathfrak{Tr} + \tfrac{1}{2}\,\varphi_z^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_z) - (\tfrac{1}{2}\,\gamma_x^2 \,.\, \mathfrak{Tr} + \tfrac{1}{2}\,\gamma_y^2 \,.\, \mathfrak{Tr} + \tfrac{1}{2}\,\gamma_z^2 \,.\, \mathfrak{Tr}_z).$$

Da der Kreisel bei Beginn seiner Bewegung nur eine Drehung um die Achse OZ haben sollte, so ist $\gamma_x = 0$ und $\gamma_y = 0$.

Da ferner die Kraft G die Achse OZ schneidet, so kann sie keine Veränderung von φ_z bewirken, d. h. es ist stets $\varphi_z = \gamma_z$.

Danach ergiebt sich aus Gleichung 1) und 2)

$$5)\quad \varphi_y \,.\, \mathfrak{Tr} \,.\, \sin\vartheta + \gamma_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z \,.\, \cos\vartheta = \gamma_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z \,.\, \cos\vartheta_0$$

und aus Gleichung 3) und 4)

$$6)\quad \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{Tr}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = Ge(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta).$$

Aus Gleichung 5) folgt

$$7)\quad \varphi_y = \frac{\gamma_z \,.\, \mathfrak{Tr}_z}{\mathfrak{Tr}} \cdot \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

und daraus, mit Rücksicht auf Gleichung 6)

$$8)\quad \varphi_x = \pm\sqrt{(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\left[\frac{2\,Ge}{\mathfrak{Tr}} - \frac{\gamma_z^2\mathfrak{Tr}_z^2}{\mathfrak{Tr}^2}\;\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right]}$$

Da die Arbeit der äusseren Kräfte in einer Senkung besteht, so ist $\vartheta \geqq \vartheta_0$ und demnach ist $\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta$ positiv oder Null, es muss also auch die Klammergrösse unter der Wurzel, welche φ_x darstellt, positiv oder Null sein, d. h. man hat

$$\frac{2\,Ge\,.\,\mathfrak{Tr}}{\gamma_z^2\,.\,\mathfrak{Tr}_z^2} \geqq \frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}.$$

Bezeichnet man $\frac{\gamma_z^2\,\mathfrak{Tr}_z^2}{2\,Ge\,\mathfrak{Tr}}$ durch $2\,m$, so ist für die Grenze $(=)$ in Geltung:

$$\sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta = 2\,m\cos\vartheta_0 - 2\,m\cos\vartheta,$$

d. h. man hat

$$\cos\vartheta = m \pm \sqrt{m^2 - 2\,m\cos\vartheta_0 + 1}$$

Da m proportional zu γ_z^2 ist, so ist m bei kräftigen Drehungen, welche hier vorausgesetzt werden, relativ gross.

Entwickelt man die Wurzelgrösse von $\cos\vartheta$ für grosse Werthe von m, so gilt

$$\cos\vartheta = m \pm \left(m - \cos\vartheta_0 + \frac{\sin^2\vartheta_0}{2\,m} + \cdots\right),$$

d. h. es ist

$$\cos\vartheta = 2\,m - \cos\vartheta_0 + \frac{\sin^2\vartheta_0}{2\,m} + \cdots$$

oder

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 - \frac{\sin^2\vartheta_0}{2\,m} + \cdots$$

Man sieht, dass nur der zweite Werth von ϑ, welcher durch $\overline{\vartheta}$ bezeichnet werden mag, brauchbar ist.

Setzt man $\overline{\vartheta} = \vartheta_0 + \overline{\delta}$, so ist $\cos\vartheta = \cos\vartheta_0\cos\overline{\delta} - \sin\vartheta_0\sin\overline{\delta}$, und man hat bei Berücksichtigung der Glieder erster Ordnung

$$\cos\overline{\vartheta} = \cos\vartheta_0 - \sin\vartheta_0\,arc\,\overline{\delta},$$

so dass

$$9)\quad arc(\overline{\delta}) = arc(\overline{\vartheta} - \vartheta_0) = \frac{\sin\vartheta_0}{2\,m} = \frac{2\,Ge\,\mathfrak{Tr}\sin\vartheta_0}{\gamma_z^2\,\mathfrak{Tr}_z^2}$$

ist.

Der Winkel ϑ vermag demnach die Grenzen ϑ_0 und $\overline{\vartheta}$ nicht zu überschreiten.

Setzt man allgemein $\vartheta = \vartheta_0 + \delta$, so dass also δ in den Grenzen 0 und $\overline{\delta}$ liegt, so folgt aus Gleichung 7) gemäss $\cos(\vartheta - \delta) = \cos\vartheta_0$

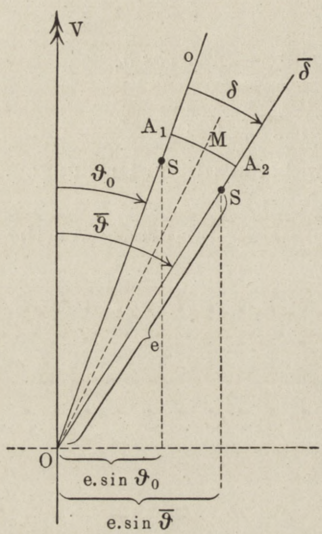
$$10)\quad \varphi_y = \frac{\gamma_z\,\mathfrak{Tr}_z}{\mathfrak{Tr}} \cdot arc\,\delta$$

und aus Gleichung 8) ebenso

$$11)\quad \varphi_x = \pm \sqrt{\frac{2\,G e \sin\vartheta_0}{\mathfrak{Tr}} \cdot arc\,\delta - \frac{\gamma_z^2 \mathfrak{Tr}_z^2}{\mathfrak{Tr}^2} \cdot arc\,\delta^2}.$$

Für $\varphi_x = 0$ erhielte man wieder $\delta = 0$ oder $\delta = \overline{\delta}$.

Fig. 4.



Denkt man $arc\,\delta$ dargestellt als Function der Zeit (t), so ist φ_x deren Ableitung, d. h. man hat für $arc\,\delta = f(t)$ gegeben $\varphi_x = f'(t)$.

Versucht man $f(t)$ als Gleichung einer harmonischen Schwingung darzustellen, welche (vergl. Fig. 4) einer Bewegung von A_1 über M nach A_2 und zurück entspricht, so ist

$$12\text{a})\quad arc\,\delta = f(t) = r\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi . t}{T}\right)\right]$$

zu setzen, wobei r die Amplitude und T die Schwingungsdauer bezeichnet.

Man hätte dann, mit Rücksicht auf Gleichung 11)

$$12\text{b})\quad \varphi_x = f'(t) = r \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin\left(\frac{2\pi . t}{T}\right)$$

$$= \pm \sqrt{a r\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi . t}{T}\right)\right] - b r^2 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi . t}{T}\right)\right]^2},$$

falls man die Factoren von $arc\,\delta$ und $arc\,\delta^2$ in Gleichung 11) bezw. durch a und b bezeichnet.

Diese Gleichung erweist sich als richtig für $t = 0$ und $t = T$. Für $t = \frac{1}{2}T$ ergiebt sie

$$2ar - 4br^2 = 0$$

$$\text{d. h. } r = 0 \text{ oder } r = \frac{a}{2b} = \frac{G e \mathfrak{Tr} \sin\vartheta_0}{\gamma_z^2 \mathfrak{Tr}_z^2}.$$

Für $t = \frac{1}{4}T$ bezw. $t = \frac{3}{4}T$ ist

$$\pm r \cdot \frac{2\pi}{T} = \pm \sqrt{ar - br^2},$$

d. h. man hat

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{b} = \frac{4\pi^2 \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r}^2}{\gamma_z^2 \,.\, \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z^2}$$

und

$$T = \frac{2\pi\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}.$$

Führt man die Werthe von r und T in Gleichung 12b) ein, so wird diese in sich befriedigt, es ist also nach Gleichung 12a)

$$13)\quad arc\,\delta = \frac{Ge\,\mathfrak{T}\mathfrak{r}\,sin\,\vartheta_0}{\gamma_z^2 \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z^2}\left[1 - cos\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot t\right)\right].$$

Bei der gewählten Annäherung entspricht also die Veränderlichkeit von δ bezw. ϑ thatsächlich einer harmonischen Schwingung von der Amplitude r und der Schwingungsdauer T.

Damit ist auch φ_y bestimmt, man hat

$$14)\quad \varphi_y = \frac{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot arc\,\delta = \frac{Ge\,sin\,\vartheta_0}{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}\left[1 - cos\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot t\right)\right].$$

Aus φ_y lässt sich leicht die Winkelgeschwindigkeit φ_V für die Verticale OV ableiten, man hat

$$\varphi_V = \frac{\varphi_y}{sin\,\vartheta} = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z} \cdot \frac{sin\,\vartheta_0}{sin\,\vartheta}\left[1 - cos\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot t\right)\right].$$

Da ϑ nur in den engen Grenzen ϑ_0 und $\bar{\vartheta}$ schwankt, so erhält man eine brauchbare Annäherung, wenn man in diesem Ausdrucke $sin\,\vartheta$ gegen $sin\,\vartheta_0$ forthebt, d. h. man hat

$$15)\quad \varphi_V = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}\left[1 - cos\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \cdot t\right)\right]$$

als Winkelgeschwindigkeit der Kreiselachse um die Verticale OV. Projicirt man OZ auf die Horizontalebene, so ist der Winkelweg $arc\,\eta$ dadurch gegeben, das φ_V seine Ableitung ist, d. h. man hat

$$16)\quad arc\,\eta = \frac{Ge}{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}\left[t - \frac{\mathfrak{T}\mathfrak{r}}{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}\, sin\left(\frac{\gamma_z \mathfrak{T}\mathfrak{r}_z}{\mathfrak{T}\mathfrak{r}} \,.\, t\right)\right] + C,$$

wobei C eine Constante bedeutet.

Soll $\eta = 0$ sein für $t = 0$, so ist $C = 0$ zu setzen.

Zeichnet man irgend einen Punkt, z. B. den Schwerpunkt auf der Horizontalprojection der Kreiselachse aus, so entsteht in der Horizontalebene ein Bild, wie es Fig. 5 (auf folgender Seite) andeutet.

Setzt man in der Formel für $arc\,\eta$ bei $C = 0$ einmal $t = 0$ und einmal $t = T$, so erhält man $arc\,\bar{\eta}$, entsprechend dem Bahnstücke ABC.

Es ist $arc\,\bar{\eta} = 2\pi \, . \, \frac{Ge\mathfrak{Tr}}{\gamma_z^2 \mathfrak{Tr}_z^2}$.

Die Anzahl (n) der Schwankungen der Kreiselachse, wie ABC, welche auf eine volle Umdrehung dieser Achse fallen, beträgt

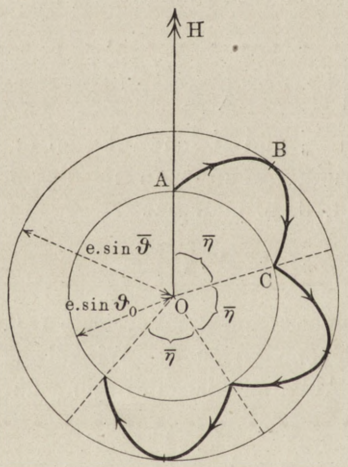
$$n = \frac{2\pi}{arc\,\bar{\eta}} = \frac{\gamma_z^2 \mathfrak{Tr}_z^2}{Ge\mathfrak{Tr}}.$$

Da $arc\,\bar{\eta}$ in der Zeit T beschrieben wird, so erfordert ein voller Umgang der Achse die Zeit

$$\Theta = \frac{2\pi}{arc\,\bar{\eta}} \cdot T = \frac{\mathfrak{Tr}_z}{Ge} \cdot \gamma_z \, . \, 2\pi.$$

Die durchschnittliche Winkelgeschwindigkeit dieses Umganges ist also $\frac{Ge}{\mathfrak{Tr}_z \gamma_z}$.

Fig. 5.



Man bemerkt leicht, dass die zuletzt erhaltenen Formeln bei der gewählten Art der Annäherung von ϑ_0 unabhängig sind.

Der Sinn von γ_z und φ_V stimmt überein, d. h. für einen Beschauer, der von oben längs der Achsen ZO und VO blickt, ist für beide Achsen entweder Uhrzeigerdrehung vorhanden oder deren Gegenbewegung; es folgt dies unmittelbar aus den Formeln 14) und 15).

Ein Kreisel, welcher seine Bewegung mit einem grossen Werthe von γ_z beginnt, beschreibt langsam (vergl. Θ) einen Kegel mit vielen (vergl. n), aber kleinen (vergl. $arc\,\bar{\eta}$) Einbuchtungen. Die Reibungen, welche durch die Befestigung und den Luftwiderstand hervorgerufen werden, verändern langsam den Werth von γ_z, so dass die Umgänge von OZ mit der Zeit rascher und die Einbuchtungen seltener, aber grösser werden, bis schliesslich ein Umfallen des Kreisels eintritt.

Da φ_V und $arc\,\eta$ proportional sind zu e, so verschwinden diese Grössen für $e = 0$, d. h. für den Fall, dass der Schwerpunkt des Kreisels mit O zusammenfällt.

Für eine senkrechte Anfangsstellung ($\vartheta_0 = 0$) folgt, wie die Rechnung zu Gleichung 8) zeigt,

$$cos\,\vartheta = m \pm (m - 1)$$

und demnach $cos\,\overline{\vartheta} = +1$ oder $\overline{\vartheta} = \vartheta_0$, d. h. hier sind für die Achse überhaupt keine Schwankungen möglich.

Dies zeigt auch die Formel 13), welche $arc\,\delta = 0$ liefert. Demnach ist auch $\varphi_y = 0$, gemäss Formel 14), und damit verlieren Formel 15) und ihre Folgerungen für diesen Fall jede Bedeutung.

§. 4.

Man sieht, dass die hier gegebene elementare Behandlung der Kreiselbewegung im Wesentlichen alle Erscheinungen beschreibt, welche auch bei einer genaueren Behandlung zur Darstellung kommen.

Die strengen Gleichungen 5) und 6), welche den Ausgangspunkt bilden, ersetzen das System der drei Euler'schen Gleichungen, von denen man sonst auszugehen pflegt, vollständig, und machen eine erste Integration jener Gleichungen überflüssig.

Vergleicht man die Gleichungen 5) und 6) mit den Gleichungen 1) und 4), welche zu ihrer Herleitung dienten, so sieht man, dass die besonderen Bedingungen $\gamma_x = 0$, $\gamma_y = 0$ und $\varphi_z = \gamma_z$ eine wesentliche Erleichterung für die Behandlung bilden.