

STANISŁAW MAY

**Fala uderzeniowa
w wilgotnej mieszaninie
parogazowej**

6/1967

WARSZAWA 1967



Do użytku wewnętrznego

**Zakład Mechaniki Cieczy i Gazów IPPT PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd.2,5, ark.druk.4
Druk ukończono w lipcu 1967r.**

**Warszawska Drukarnia Naukowa
Warszawa, ul. Śniadeckich 8.**

Zam. 595/0/67.

Fala uderzeniowa w wilgotnej mieszaninie parogazowej

Spis rzeczy	strona
Spis ważniejszych oznaczeń	2
WSTĘP	5
CZĘŚĆ I <u>Warunki zgodności</u>	
1.1. Warunki zachowania masy, pędu i energii ..	9
1.2. Warunek równowagi między cieczą i parą ..	12
1.3. Prędkość dźwięku w wilgotnej mieszaninie parogazowej	14
1.4. Wnioski z warunków zgodności	19
CZĘŚĆ II. <u>Struktura fali uderzeniowej we mgle</u>	
2.1. Wprowadzenie	28
2.2. Równania zachowania masy, pędu i energii	31
2.3. Analiza ruchu kropli w gazie	35
2.4. Strumień masy przez powierzchnię kropli..	37
2.5. Strumień ciepła przez powierzchnię kropli	41
2.6. Dyskusja równań dla struktury fali uderzeniowej	42
2.7. Szczególny przypadek. Struktura fali słabej w ośrodku z małą koncentracją cieczy.	47
2.8. Omówienie wyników	50
LITERATURA	59

Spis ważniejszych oznaczeń

W oznaczeniach przyjętych w niniejszej pracy dolne wskaźniki g, p, c odnoszą się odpowiednio do gazu, pary i cieczy, a wskaźniki 1 i 2 przy parametrach przepływu /ale nie przy stałych/ dotyczą stanu w nieskończoności odpowiednio przed i za falą uderzeniową.

Ważniejsze oznaczenia:

- a - prędkość dźwięku,
- a_0, a_∞ - graniczna prędkość dźwięku dla bardzo małych i bardzo wielkich częstości w ośrodku zawierającym parę nasyconą,
- c_c - ciepło właściwe cieczy,
- c_{pg} - ciepło właściwe gazu przy stałym ciśnieniu,
- c_{pp} - ciepło właściwe suchej pary przy stałym ciśnieniu,
- c_{pm} - ciepło właściwe mieszaniny gazu i suchej pary przy stałym ciśnieniu,
- c_{vg} - ciepło właściwe gazu przy stałej objętości,
- c_{vp} - ciepło właściwe suchej pary przy stałej objętości,
- c_{vm} - ciepło właściwe mieszaniny gazu i suchej pary przy stałej objętości,
- C - bezwymiarowy współczynnik oporu aerodynamicznego sfery,
- D - współczynnik dyfuzji,
- E - energia jednostki masy mieszaniny,
- E_k - energia kinetyczna jednostki masy mieszaniny,
- E_w - energia wewnętrzna jednostki masy mieszaniny,
- i - entalpia jednostki masy mieszaniny,
- J, J_0 - strumień masy przez powierzchnię kropli,
- m - masa kropli,
- m^* - masa elementu mieszaniny,

- K, K', K'' - bezwymiarowe ciepła parowania,
 M - liczba Macha odniesiona do a_0 ,
 \bar{M} - liczba Macha odniesiona do a_∞ ,
 P - ciśnienie,
 P_{ps} - prędkość pary nasyczonej,
 q - ciepło parowania,
 Q_c - przewodzony strumień ciepła,
 Q_e - strumień ciepła pobierany na parowanie na powierzchni kropli,
 r - promień kropli,
 R - bezwymiarowy promień kropli,
 R_g, R_p, R_m - stała gazowa dla gazu, pary i mieszaniny gazu i pary,
 S - entropia jednostki masy mieszaniny,
 t - czas,
 T - temperatura fazy gazowej,
 T_c - temperatura kropli,
 w - prędkość fazy gazowej,
 U - bezwymiarowa prędkość fazy gazowej,
 v - objętość,
 v^* - objętość właściwa,
 V - objętość bezwymiarowa kropli,
 w - prędkość kropel,
 W - bezwymiarowa prędkość kropel,
 x - współrzędna przestrzenna,
 X - bezwymiarowa współrzędna przestrzenna,

- K_n - liczba Knudsen,
- Nu - liczba Nusselta,
- Pr - liczba Prandtla,
- Re - liczba Reynoldsa,
- Sc - liczba Schmidta,
- Sh - liczba Sherwooda,
- α - współczynnik parowania,
- ξ - bezwymiarowa koncentracja gazu,
- η, η' - bezwymiarowe współczynniki lepkości,
- θ - bezwymiarowa temperatura fazy gazowej,
- θ_c - bezwymiarowa temperatura kropel,
- κ_g - wykładnik adiabaty gazu,
- κ_p - wykładnik adiabaty pary,
- κ_m - wykładnik adiabaty mieszaniny gazu i pary,
- λ - współczynnik przewodnictwa ciepła,
- Λ, Λ' - bezwymiarowe współczynniki przewodnictwa ciepła,
- μ - współczynnik lepkości,
- ξ - bezwymiarowa koncentracja czynnika parującego
 /ciecz + para/,
- ξ - gęstość mieszaniny,
- ξ_c - koncentracja cieczy,
- ξ_c^* - gęstość cieczy,
- ξ_g - gęstość /koncentracja/ gazu,
- ξ_p - gęstość /koncentracja/ pary,
- σ - bezwymiarowa koncentracja cieczy,
- σ^* - współczynnik napięcia powierzchniowego,
- τ - bezwymiarowa koncentracja pary.

Wstęp

Literatura poświęcona falom uderzeniowym sięga swymi początkami jeszcze pierwszej połowy XIX wieku. Stokes na podstawie rozważań teoretycznych zwrócił uwagę na pewne trudności pojawiające się w akustyce i mogące prowadzić do powstawania nieciągłości ciśnienia i innych parametrów w gazie. Doświadczenia potwierdziły istnienie takich nieciągłości. Powstał przede wszystkim problem teoretycznego uzasadnienia możliwości istnienia ustalonej fali uderzeniowej. Ten problem został rozwiązany w końcu XIX wieku i na początku XX wieku w pracach Hugoniota, Taylora, Beckera, Thomasa i innych. Prace te zapoczątkowały badania bliżej określające falę uderzeniową już z uwzględnieniem efektów dysypacyjnych.

W ostatnim dwudziestoleciu w związku z rosnącym znaczeniem fal uderzeniowych dla fizyki, chemii, techniki ukazało się wiele prac uwzględniających szerszy wachlarz zjawisk fizycznych towarzyszących falom uderzeniowym; rozpoczęto badania teoretyczne i doświadczalne nad falami uderzeniowymi w ośrodkach bardziej złożonych fizycznie niż gaz lepki i przewodzący ciepło. Należy wymienić badania struktury fali w przypadku, gdy w grę wchodzi wewnętrzne stopnie swobody molekuł gazu; inną grupę prac tworzą te, w których badano wpływ przemian fazowych lub reakcji chemicznych na strukturę fali, w szczególności zaś na jej grubość i intensywność.

Do interesujących i ważnych praktycznie typów przemiany fazowej zaliczyć należy parowanie i kondensację. Fale kondensacyjne powstają w parze przechłodzonej. Jeżeli w takim ośrodku w pewnym miejscu rozpocznie się proces kondensacji, to w odpowiednich warunkach zaburzenie rozchodzi się szybko

w głąb ośrodka; front na którym zachodzi kondensacja można traktować pod względem matematycznym analogicznie do fali uderzeniowej. Grubość fal kondensacyjnych znacznie przekracza grubość zwykłych fal uderzeniowych.

Wielokrotnie zwracano uwagę, że w ośrodkach wielofazowych, w szczególności we mgłę, można oczekiwać pojawienia się interesujących własności fal uderzeniowych. Między innymi zwraca na to uwagę Hayes w obszernym artykule przeglądowym dotyczącym fal uderzeniowych, zamieszczonym w [19].

Analizie zjawisk związanych z falą uderzeniową we mgłę tj. w Ośrodku: gaz + para nasycona + zawieszona faza ciekła poświęcona jest niniejsza praca.

Fala uderzeniowa przechodząc przez mgłę powoduje naruszenie istniejącej w ośrodku równowagi i uruchamiania mechanizmu przemiany fazowej /parowania/ zmierzającej do przywrócenia tej równowagi. Jeśli fala jest dostatecznie silna, a koncentracja cieczy w zawieszinie niewielka, to przy przejściu przez falę uderzeniową odparowuje cała ciecz, a ciepło pochłonięte na przemianę fazową nie zależy od natężenia fali. Takie fale uderzeniowe są szczególnym przypadkiem wprowadzonych przez Polacheka i Seegera [22] aerotermicznych fal uderzeniowych, w obszarze, którym ma miejsce określony przyrost lub ubytek ciepła. W pracy [22] podano ogólne własności takich fal niezależna od samego mechanizmu fizycznego przyrostu lub ubytku ciepła /p. również [19], rozdz.V/. Fewne uwagi odnośnie fal uderzeniowych z całkowitym odparowaniem można znaleźć w pracach [1] - [4]. Krótkie omówienie wyników otrzymanych w tej dziedzinie podają Wegener i Mack [5].

Jeżeli jednak fala uderzeniowa jest dostatecznie słaba lub koncentracja cieczy w zawieszinie dostatecznie wielka, ciecz przy przejściu przez falę uderzeniową paruje tylko częściowo. W tym przypadku ilość ciepła pochłonięta na parowanie zależy od natężenia samej fali. Fale tego typu, rozważane w niniejszej pracy, nie były dotąd - o ile wiadomo autorowi - omawiane w literaturze.

W pierwszej części pracy podano warunki zgodności dla fal uderzeniowych we mgle, przedmiotem drugiej części jest badanie struktury fali. Pod terminem fala uderzeniowa rozumiemy w niniejszej pracy cały obszar zakłóconej równowagi termodynamicznej. Można oczekiwać, że ze względu na wchodzące tu w grę procesy fizyczne w rodzaju parowania, mierzona w jakikolwiek rozsądny sposób grubość takiego obszaru jest dużo większa, niż dla klasycznych fal uderzeniowych.

Interesujące okazało się badanie prędkości dźwięku we mgle. W klasycznych przepływach mamy do czynienia z prędkością dźwięku niezależną od częstości. W badanym przez nas przypadku, w wyniku obecności pary nasyconej w ośrodku, zależność taka istnieje. Jej rezultatem jest istnienie całkowicie rozmytych /fully dispered/^s fal uderzeniowych. Podobne zjawisko, jednak o odmiennym mechanizmie obserwowano w dwutlenku węgla /23/. W ostatnim przypadku przyczyną dyspersji dźwięku był wpływ wewnętrznych stopni swobody molekuł gazu.

W drugiej części pracy omówiono problem struktury fali uderzeniowej we mgle. Przy przejściu przez falę uderzeniową następuje gwałtowna zmiana prędkości fazy gazowej od nad-dźwiękowej do poddźwiękowej, której towarzyszy równie szybki

wzrost temperatury. Ze względu na większą bezwładność mechaniczną i cieplną hamowanie kropeł i wzrost ich temperatury przebiegają wolniej. W rezultacie w przepływie pojawia się różnica prędkości i temperatur obu faz. W wyniku wzrostu temperatury para z nasyconej przechodzi w przegrzaną zapoczątkowując tym samym parowanie cieczy.

W ten sposób w przepływie pojawiają się trzy dodatkowe czynniki o charakterze sił termodynamicznych, zmierzające do przywrócenia naruszonej równowagi termodynamicznej ośrodka. Rezultatem ich działania są strumienie masy, pędu i energii między obu fazami. Związki łączące siły termodynamiczne ze strumieniami w rozważanym przez nas ośrodku mają postać złożoną. Sytuację komplikuje ponadto fakt, że mechanizm fizyczny wchodzących tu w grę zjawisk może zmieniać się ze zmianą takich parametrów, jak liczba Reynoldsa i Knudsen. Struktura tego rodzaju fal nie była wogóle badana. W niniejszej pracy w oparciu o pewne upraszczające założenia podjęto próbę przedstawienia zachodzących tu procesów. Wydaje się, że ogólny obraz jakościowy jaki uzyskano powinien obowiązywać również w takim zakresie parametrów, dla którego podane ilościowe charakterystyki mogą już zawodzić.

Fale uderzeniowe omawiane w niniejszej pracy mogą pojawiać się w tunelach hiperdźwiękowych, gdzie w obszarach rozrzedzenia występuje czasem kondensacja któregoś ze składników gazowych wypełniających tunel. Podobnym ośrodkiem interesuje się również meteorologia. Tam też wyniki niniejszej pracy mogą znaleźć zastosowanie.

Część I WARUNKI ZGODNOŚCI

1.1. Warunki zachowania masy, pędu i energii

Rozważany jest jednowymiarowy, ustalony przepływ typu fali uderzeniowej w ośrodku złożonym z dwu składników gazowych: gazu i pary nasyconej oraz zawieszanej fazy ciekłej. Zakładamy, że gaz i para spełniają równanie Clapeyrona /1.1/:

$$/1.1/ \quad \begin{cases} p_p = R_p \xi_p T, \\ p_g = R_g \xi_g T. \end{cases} *$$

Powyższe założenie odnośnie pary jest uzasadnione z dala od punktu krytycznego. Ponadto przyjmujemy, że ciecz jest nieściśliwa, zaś ciepła właściwe wszystkich składników nie zależą od temperatury. Każdy ze składników gazowych charakteryzuje się dwoma stałymi: stałą gazową i wykładnikiem adiabaty. Przyjęty model opisuje również sytuację, kiedy obok obu składników biorących udział w przemianie fazowej: cieczy i pary, występuje jeszcze kilka składników gazowych, z których każdy spełnia równanie stanu gazu doskonałego. Wszystkie te składniki można łącznie traktować jako jeden gaz z odpowiednio uśrednioną stałą gazową i wykładnikiem adiabaty.

Oznaczmy przez m_g^* , m_p^* , m_c^* odpowiednio masę gazu, pary i cieczy w elemencie mieszaniny o łącznej masie

$$/1.2/ \quad m^* = m_g^* + m_p^* + m_c^*$$

i objętości v . Przez koncentracje poszczególnych skład-

* Znaczenie wskaźników u dołu poszczególnych wielkości podane na str. 2.

ników ρ_g, ρ_r, ρ_c rozumiemy odpowiednio masy tych składników w jednostce objętości mieszaniny:

$$/1.3/ \quad \rho_g = \frac{m_g^*}{v}, \quad \rho_r = \frac{m_r^*}{v}, \quad \rho_c = \frac{m_c^*}{v}.$$

Z /1.2/ i /1.3/ wynika, że gęstość mieszaniny jest sumą koncentracji wszystkich składników:

$$/1.4/ \quad \rho = \frac{m^*}{v} = \rho_g + \rho_r + \rho_c.$$

Interesujemy się takimi mieszaninami, w których objętość cieczy jest dużo mniejsza od całkowitej objętości mieszaniny: przyjmujemy zatem, że gęstości składników gazowych są równe ich koncentracjom.

Koncentracje bezwymiarowe ξ, τ, σ określamy wzorami:

$$/1.5/ \quad \xi = \frac{\rho_g}{\rho} = \frac{m_g^*}{m^*}, \quad \tau = \frac{\rho_r}{\rho} = \frac{m_r^*}{m^*}, \quad \sigma = \frac{\rho_c}{\rho} = \frac{m_c^*}{m^*}.$$

Z /1.2/ mamy:

$$/1.6/ \quad \xi + \tau + \sigma = 1.$$

Warunki zgodności wiążą parametry ośrodka w obszarach całkowitej równowagi, tzn. w obszarach, w których w szczególności prędkość i temperatura fazy ciekłej i gazowej są sobie równe. Prawa zachowania masy, pędu i energii przyjmują wtedy dobrze znaną postać:

$$/1.7/ \quad \rho_1 u_1 = \rho_2 u_2,$$

$$/1.8/ \quad \rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2,$$

$$/1.9/ \quad i_1 + \frac{u_1^2}{2} = i_2 + \frac{u_2^2}{2},$$

gdzie u, ρ, i oznaczają odpowiednio prędkość, gęstość, ciśnienie i entalpię właściwą mieszaniny. Wynikiem jednakowej prędkości obu faz w nieskończoności są równości:

$$/1.10/ \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta, \quad \sigma_1 + \tau_1 = \sigma_2 + \tau_2 = \xi.$$

Na ciśnienie w mieszaninie składają się ciśnienia cząstkowe gazu i pary określone przez równania Clapeyrona /1.1/:

$$/1.11/ \quad p = p_g + p_p = R_m \rho T,$$

gdzie:

$$/1.12/ \quad R_m = R_g \zeta + R_p \tau.$$

Wstawiając otrzymaną wartość dla ciśnienia do równania zachowania pędu mamy:

$$/1.13/ \quad \rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2 = R_{m2} \rho_2 T_2 - R_{m1} \rho_1 T_1.$$

Przy pominięciu efektów związanych z napięciem powierzchniowym*, entalpia właściwa mieszaniny daje się przedstawić w postaci:

$$/1.14/ \quad i = \zeta i_g + \tau i_p + \sigma i_c,$$

gdzie i_g, i_p, i_c oznaczają entalpię jednostki masy poszczególnych składników. Entalpia, podobnie jak energia wewnętrzna, określona jest z dokładnością do stałej. Dla entalpii składników gazowych przyjmujemy:

$$/1.15/ \quad i_g = c_{pg} T, \quad i_p = c_{pp} T,$$

gdzie c_{pg} i c_{pp} oznaczają ciepła właściwe gazu i pary przy stałym ciśnieniu. Uwzględniając, że przy przemianie fa-
* powyższe założenie omówiono szerzej w drugiej części pracy.

zowej przy stałym ciśnieniu ciepło parowania równe jest przyrostowi entalpii, otrzymujemy:

$$/1.16/ \quad i_c = c_{pp} T - q(T).$$

gdzie $q(T)$ oznacza ciepło parowania w temperaturze T .

Z /1.14/-/1.16/ mamy:

$$/1.17/ \quad i = (\zeta c_{pg} + \xi c_{pp}) T - \sigma q(T).$$

Równanie zachowania energii /1.9/ przyjmuje teraz postać:

$$/1.18/ \quad \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) = (\zeta c_{pg} + \xi c_{pp})(T_2 - T_1) - \sigma_2 q(T_2) + \sigma_1 q(T_1).$$

1.2. Warunek równowagi między cieczą i parą

Z założenia równowagi między cieczą i parą wynika, że prężność pary nasyconej p_{ps} , odpowiadająca temperaturze mieszaniny jest równa rzeczywistej prężności pary w mieszaninie, tzn.

$$p_p = p_{ps} \quad \text{i} \quad \text{odpowiednio} \quad \rho_p = \rho_{ps}.$$

Prężność pary nasyconej zależy tylko od temperatury. W termodynamice zależność tę wyprowadza się z równania Clapeyrona-Clausiusa:

$$\frac{dp_{ps}}{dT} = \frac{q(T)}{T \left(\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_c^*} \right)},$$

gdzie ρ_c^* jest gęstością cieczy. Jeśli pominąć $\frac{1}{\rho_c^*}$ wobec $\frac{1}{\rho_p}$ i uwzględnić /1.1/, to równanie Clapeyrona - Clausiusa przyjmuje uproszczoną postać:

$$/1.19/ \quad \frac{dp_{ps}}{p_{ps}} = \frac{q(T)}{R_p T^2} dT.$$

Dla stałych ciepł właściwych ciepło parowania jest liniową funkcją temperatury ([6], str 163 i nast.):

$$/1.20/ \quad q_v = q_{v1} - (c_c - c_{pp})(T - T_1),$$

c_c oznacza tu ciepło właściwe cieczy.

Równanie Clapeyrona-Clausiusa/1.19/ można scałkować dla q_v określonych przez /1.20/. Jeśli jako wartości początkowe przyjąć odpowiednie parametry przed falą uderzeniową, to dla prężności pary nasyconej p_{ps} otrzymamy po scałkowaniu następujące wyrażenie:

$$/1.21/ \quad p_{ps} = p_{ps1} \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\beta'-1} \cdot e^{\beta''\left(1-\frac{T_1}{T}\right)},$$

gdzie

$$/1.22/ \quad \beta' = \frac{c_c - c_{pp}}{R_p} + 1, \quad \beta'' = \frac{q_{v1}}{R_p T_1} + \beta' - 1.$$

Odpowiednio dla gęstości pary nasyconej mamy:

$$/1.23/ \quad \rho_{ps} = \rho_{ps1} \left(\frac{T_1}{T}\right)^{\beta'} \cdot e^{\beta''\left(1-\frac{T_1}{T}\right)}.$$

Zastępując w równości /1.23/ wielkości bez wskaźników wielkościami ze wskaźnikami otrzymamy po uwzględnieniu /1.5/ i /1.7/ następujący warunek:

$$/1.24/ \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{u_2}{u_1} \cdot \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\beta'} \cdot e^{\beta''\left(1-\frac{T_1}{T_2}\right)},$$

który przyjmujemy jako czwarty warunek, wiążący parametry po obu stronach fali uderzeniowej.

1.3 Prędkość dźwięku w wilgotnej mieszaninie parogazowej

Fala dźwiękowa w ośrodku zawierającym parę wilgotną narusza równowagę między fazą ciekłą a gazową. Szybkość powrotu do równowagi jest określona przez odpowiednie czasy charakterystyczne zanikania strumieni masy, pędu i energii. Mechanizm zjawisk fizycznych towarzyszących rozchodzeniu się fal dźwiękowych jest różny, w zależności od stosunków okresu drgań do wspomnianych czasów charakterystycznych. Powoduje to dyspersję fal dźwiękowych czyli zależność prędkości dźwięku od częstości.

W skrajnym przypadku bardzo wielkich częstości, kiedy czasy charakterystyczne są dużo większe od okresu drgań, można pominąć oddziaływanie między składnikami gazowymi, a kroplami cieczy. Wtedy prędkość dźwięku nie zależy od obecności kropeł w ośrodku i wyraża się formułą analogiczną jak dla gazu doskonałego.

Wprowadzimy oznaczenia:

$$/1.25/ \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{pm} = c_{pg} \zeta + c_{pp} \tau, \\ c_{vm} = c_{vg} \zeta + c_{vp} \tau, \\ \kappa_{ni} = \frac{c_{pm}}{c_{vm}} \end{array} \right.$$

oraz

$$/1.26/ \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{pM} = c_{pg} \zeta + c_{pp} \tau + c_c \sigma, \\ c_{vM} = c_{vg} \zeta + c_{vp} \tau + c_c \sigma. \end{array} \right.$$

Wielkości określone przez /1.25/ oznaczają ciepła właściwe suchej mieszaniny przy stałym ciśnieniu i stałej objętości oraz odpowiedni wykładnik adiabaty. Oczywiście:

$$/1.27/ \quad c_{pm} - c_{vm} = c_{pM} - c_{vM} = R_m.$$

Dla granicznej prędkości dźwięku o bardzo wielkiej częstotliwości mamy:

$$a_{\infty} = \sqrt{\frac{\kappa_m \rho}{\rho_g + \rho_p}}$$

Po wyeliminowaniu ciśnienia i koncentracji na podstawie /1.5/, /1.6/ i /1.11/ wzór ten przyjmuje postać:

$$/1.28/ \quad a_{\infty} = \sqrt{\frac{\kappa_m R_m T}{1 - \sigma}}$$

W drugim skrajnym przypadku bardzo małych częstotliwości możemy uważać, że w ośrodku przez cały czas utrzymuje się równowaga termodynamiczna. Oddziaływanie między fazami ma wtedy istotne znaczenie dla rozchodzenia się słabych zaburzeń; szczególna rola przypada przy tym wymianie masy - parowaniu i kondensacji. Wpływ wymiany pędu i energii jest natomiast znikomy, jeżeli koncentracja cieczy we mgłę jest mała. W wyniku istnienia strumienia masy para w ośrodku jest stale nasycana, niezależnie od tego jak mała jest koncentracja cieczy.

Wzór określający prędkość dźwięku o małej częstotliwości w wilgotnej mieszaninie parogazowej podał Chudiakow [7] wychodząc z formuły adiabatycznej:

$$/1.29/ \quad a_0 = \sqrt{\frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}}$$

Otrzymany przez niego wynik jest jednak niepoprawny. Autor pracy [7] przyjmuje bowiem błędnie, że objętość właściwa mieszaniny jest sumą objętości właściwych poszczególnych składników, pomnożonych przez udział masowy tych składników w mieszaninie:

$$/1.30/ \quad v^* = \zeta v_g^* + \tau v_p^* + \sigma v_c^*$$

Wzór /1.30/ obowiązywałby jedynie wtedy, kiedy poszczególne składniki zajmowałyby odrębne obszary w przestrzeni /tzn. nie mieszałyby się/. W rozważanym w [7] i tutaj przypadku sytuacja jest odmienna, bowiem gaz i para zapełniają ten sam obszar. Objętość elementu mieszaniny jest równa sumie objętości cieczy i objętości zajmowanej wspólnie przez gaz i parę:

$$/1.31/ \quad v = v_c + v_g = v_c + v_p.$$

Dzieląc /1.31/ przez masę elementu mieszaniny i uwzględniając /1.5/ otrzymamy dla objętości właściwych - w miejsce wzoru /1.30/ przyjętego w pracy [7]- następującą poprawną zależność:

$$/1.32/ \quad v^* = \sigma v_c^* + \zeta v_g^* = \sigma v_c^* + \tau v_p^*.$$

Wychodząc z wzoru /1.29/ wyprowadzimy teraz wyrażenie dla α . Ponieważ wzór /1.29/ zawiera pochodną przy stałej entropii, mamy $dS=0$. Z drugiej zasady termodynamiki:

$$/1.33/ \quad dS = \frac{di}{T} - \frac{dp}{\rho T}.$$

Różniczka entalpii mieszaniny na podstawie /1.14/ ma postać:

$$/1.34/ \quad di = \zeta di_g + \tau di_p + \sigma di_c + i_p d\tau + i_c \alpha \sigma.$$

Wykorzystując fakt, przy przemianie fazowej przyrost cieczy jest równy ubytkowi pary, tzn.

$$d\sigma = -d\tau$$

można /1.34/ uprościć:

$$/1.35/ \quad di = \zeta di_g + \xi di_c + d[\tau(i_p - i_c)].$$

Dalej po uwzględnieniu /1.15/-i/1.16/ i podstawieniu /1.35/ do /1.33/ mamy:

$$/1.36/ \quad dS = (\xi c_{p3} + \xi c_c) \frac{dT}{T} + \frac{d[\tau q(T)]}{T} - \frac{dp}{\rho T}.$$

Z równania Clapeyrona-Clausiusa /1.19/ i równania stanu /1.11/ można otrzymać zależności różniczkowe, które po uwzględnieniu /1.1/ i /1.5/ i wprowadzeniu bezwymiarowego ciepła parowania $K = \frac{q(T)}{R_p T}$ przyjmują postać:

$$/1.37/ \quad (K-1) \frac{dT}{T} = \frac{d\xi}{\xi} + \frac{d\tau}{\tau},$$

$$/1.38/ \quad \frac{dp}{p} = \frac{d\xi}{\xi} + \frac{dT}{T} + \frac{R_p \tau}{R_m} \cdot \frac{d\tau}{\tau}.$$

Biorąc pod uwagę /1.36/ - /1.38/ można wyrazić przyrost entropii przez przyrosty ciśnienia i gęstości mieszaniny:

$$/1.39/ \quad dS = \left[\frac{c_{vm}}{R_p} + \tau (K-1)^2 \right] \frac{dp}{p} - \left(\frac{c_{pm}}{R_p} \cdot \frac{R_g \xi}{R_m} + \tau K^2 \right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Przyjęcie we wzorze /1.39/ $S = \text{const.}$ czyli $dS = 0$ pozwala wyznaczyć stosunek $\frac{dp}{d\xi}$. Graniczna prędkość dźwięku o małej częstotliwości wyrazi się wtedy z /1.39/ wzorem

$$/1.40/ \quad a_o^2 = \frac{\frac{c_{pm}}{R_p} \cdot \frac{R_g \xi}{R_m} + \tau K^2}{\frac{c_{vm}}{R_p} + \tau (K-1)^2} R_m T.$$

W szczególnym przypadku $\xi = 0$, $\sigma = 0$, tzn. w wilgotnej parze nasyconej z pomijalną koncentracją cieczy formuła /1.40/ upraszcza się:

$$/1.41/ \quad a_o^2 = \frac{K^2}{\frac{1}{k_p - 1} + (K-1)^2} R_p T.$$

Wzór /1.41/ podają Landau i Lifszyc ([16], str.305).

Wykażemy teraz, że

$$/1.42/ \quad a_o < a_\infty.$$

Oznaczmy stosunek kwadratów obu prędkości dźwięku przez

χ , mamy wtedy:

$$/1.43/ \quad a_0^2 = \chi a_\infty^2.$$

Jeżeli do /1.43/ podstawić wyrażenia dla a_∞ i a_0 z /1.28/ i /1.40/, to otrzymamy równanie kwadratowe dla χ . Ponieważ χ ma wartość rzeczywistą, wyróżnik tego równania Δ winien być nieujemny:

$$/1.44/ \quad \Delta = -\frac{4\tau c_{vM}}{R_p} \left(\frac{\kappa_m \chi}{1-\sigma} - \frac{c_{pM}}{c_{vM}} \right) \left(\frac{\kappa_m \chi}{1-\sigma} - \frac{\sum R_2}{R_m} \right) \geq 0.$$

Rozwiązując nierówność /1.44/ mamy:

$$\frac{(1-\sigma)\sum R_2}{\kappa_m R_m} \leq \chi \leq \frac{(1-\sigma)c_{pM}}{\kappa_m c_{vM}} = (1-\sigma) \frac{1 + \frac{c_c \sigma}{c_{pM}}}{1 + \frac{c_c \sigma}{c_{vM}}} < 1$$

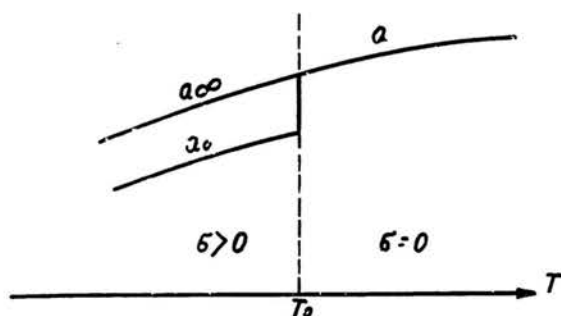
dla $\sigma > 0$. Wykazaliśmy więc, że $\chi < 1$, tzn. nierówność

/1.42/ jest prawdziwa.

Można wykazać /patrz np. [17]/, że w ogólnym przypadku dyspersji dźwięku w ośrodku z przemianami wewnętrznymi prędkość dźwięku jest rosnącą funkcją częstości.

1.4 Wnioski z warunków zgodności

Rys. 1 przedstawia zależność prędkości dźwięku od temperatury w ośrodku zawierającym parę cieczy.



Rys.1

T_0 oznacza temperaturę, przy której przy danym ciśnieniu para z przegrzanej przechodzi w nasyconą. Dla $T > T_0$ para jest przegrzana i $\sigma = 0$ - istnieje wtedy tylko jedna prędkość dźwięku. Przy $T < T_0$ ośrodek zawiera wilgotną parę nasyconą - prędkość dźwięku zależy od częstości i ze wzrostem częstości zmienia się od a_0 do a_{∞} .

W ośrodku pierwszego typu ($T > T_0, \sigma = 0$) mogą istnieć tylko takie fale uderzeniowe, dla których prędkość ośrodka niezaburzonego względem fali jest większa od prędkości dźwięku w tym ośrodku:

$$u_1 > a_1 .$$

Powstaje pytanie jak przedstawia się sytuacja w obszarze drugiego typu ($T < T_0, \sigma > 0$); czy dla istnienia fali uderzeniowej musi zachodzić stale nierówność $u_1 > a_{\infty 1}$, czy też wystarczy słabszy warunek $u_1 > a_{01}$. Aby odpowiedzieć na to pytanie musimy odwołać się do przyjętej w niniejszej pracy definicji fali uderzeniowej, jako całego obszaru zakłóconej

równowagi termodynamicznej. Jeżeli ciecz przy przejściu przez falę uderzeniową nie odparowała całkowicie, co dla dostatecznie słabych fal jest zawsze prawdziwe, to zgodnie z tą definicją para za falą jest nasycona. Prędkość takich fal uderzeniowych przy zmniejszaniu natężenia fali zmierza do granicznej prędkości a_0 fal dźwiękowych o małej częstotliwości, które rozchodzą się w warunkach równowagi termodynamicznej. Liczbę Macha przepływu niezaburzonego określimy wzorem:

$$/1.45/ \quad M_1 = \frac{u_1}{a_{01}}$$

Mogą zachodzić dwie możliwości:

$$a_{01} < u_1 < a_{\infty 1} ,$$

$$a_{\infty 1} < u_1 .$$

W pierwszym przypadku falę uderzeniową nazwiemy słabą, w drugim - silną. Sens fizyczny tego podziału jest wyjaśniony bliżej przy omawianiu struktury fali uderzeniowej /str.45 /
Obok liczby Macha M_1 wprowadzimy wielkość analogiczną odniesioną do $a_{\infty 1}$.

$$/1.46/ \quad \bar{M}_1 = \frac{u_1}{a_{\infty 1}}$$

Mamy wtedy zgodnie z /1.28/ i /1.40/:

$$/1.47/ \quad \frac{\bar{M}_1}{M_1} = \frac{a_{01}}{a_{\infty 1}} = \frac{\frac{c_p M_1}{R_{m1}} \frac{R_g}{R_p} \zeta + \tau_1 K_1^2}{\frac{c_v M_1}{R_p} + \tau_1 (K_1 - 1)^2} R_{m1} T .$$

Dla klasyfikacji fal uderzeniowych przyjmiemy za podstawę dwa kryteria podziału: stopień odparowania i natężenie fali. W związku z tym wyróżniamy fale z częściowym i całkowitym odparowaniem oraz fale silne i słabe. Sytuację tę ilustruje tabela 1.

	Fale słabe	Fale silne
Odp. częściowe	$\bar{M}_1 < 1, \sigma_2 > 0$	$\bar{M}_1 > 1, \sigma_2 > 0$
Odp. całkowite	$\bar{M}_1 < 1, \sigma_2 = 0$	$\bar{M}_1 > 1, \sigma_2 = 0$

Tabela 1

W paragrafach /1.1/ i /1.2/ otrzymaliśmy cztery związki analityczne /1.7/, /1.13/, /1.18/ i /1.24/ wiążące wartości czterech parametrów u, ξ, T, σ po obu stronach fali uderzeniowej /koncentracje bezwymiarowe τ, ζ można bowiem wyrazić przez te zmienne z wzorów /1.6/ i /1.10/. W miejsce u, ξ, T wykorzystując równanie ciągłości, wprowadzimy bezwymiarową prędkość i temperaturę:

$$/1.48/ \quad U_2 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \theta_2 = \frac{T_2}{T_1}$$

Dalej oznaczamy:

$$/1.49/ \quad K' = \frac{q_v(I)}{c_{pm} T},$$

bezwymiarowe ciepło parowania i

$$/1.50/ \quad M_{m2}^2 = \frac{u_1^2}{\kappa_m R_m T_1} = \frac{\bar{M}_1^2}{1 - \sigma_1}$$

W zmiennych bezwymiarowych układ warunków zgodności dla fal z częściowym odparowaniem można przedstawić w postaci:

$$/1.51/ \quad \begin{aligned} \kappa_{m2} M_{m1}^2 (1 - U_2) U_2 &= \frac{R_{m2}}{R_{m1}} \theta_2 - U_2, \\ \frac{\kappa_{m1} - 1}{2} M_{m1}^2 (1 - U_2^2) &= \frac{c_{pm2}}{c_{pm1}} (\theta_2 - 1) + (\sigma_1 - \sigma_2) K', \\ \frac{\xi - \sigma_2}{\xi - \sigma_1} &= U_2 \theta_2^{-\beta'} e^{\beta' (1 - \frac{1}{\theta_2})} \end{aligned}$$

Ostatnie równanie /1.51/ wyraża równowagę między parą a cieczą. Dla fal uderzeniowych z całkowitym odparowaniem fazy ciekłej $\sigma_2 = 0$, a para za falą nie jest nasycona. Układ /1.51/ należy zastąpić wtedy przez /1.52/, w którym pominięto warunek dla pary nasyconej:

$$\begin{aligned} & \kappa_{m1} M_{m1}^2 (1 - U_2) U_2 = \frac{R_{m2}}{R_{m1}} \theta_2 - U_2, \\ /1.52/ \quad & \frac{\kappa_{m1} - 1}{2} M_{m1}^2 (1 - U_2^2) = \frac{c_{pm2}}{c_{pm1}} (\theta_2 - 1) + K_1' \sigma_2. \end{aligned}$$

Stan termodynamiczny ośrodka niezaburzonego jest jednoznacznie określony przez 3 niezależne parametry np. p_1 , T_1 , σ_1 /abstrahujemy tu od stopnia rozdrobnienia zawiesziny cieczy, który nie ma wpływu na warunki zgodności/. Znając te wielkości oraz liczbę Macha M_1 można rozwiązać układ /1.51/ lub /1.52/ odpowiednio względem U_2 , θ_2 , σ_2 i U_2 , θ_2 .

Układ /1.51/ posiada 2 rozwiązania. Jedno z nich

$$/1.53/ \quad U_2 = \theta_2 = 1, \quad \sigma_2 = \sigma_1,$$

tożsamościowe ze względu na M_1 odpowiada stanowi przed falą uderzeniową. Drugie rozwiązanie dąży do /1.53/ przy $M_1 \rightarrow 1$.

Będziemy szukali rozwiązania /1.51/ w postaci szeregu potęgowego od $\Delta = M_1 - 1$:

$$\begin{aligned} & U_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta M)^n \cdot \Delta_n U, \\ /1.54/ \quad & \theta_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta M)^n \cdot \Delta_n \theta, \\ & \sigma_2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\Delta M)^n \cdot \Delta_n \sigma. \end{aligned}$$

Jeżeli do równań /1.51/ podstawić U_2 , θ_2 , σ_2 w postaci /1.54/ i pominać wyrazy kwadratowe i wyższego stopnia względem ΔM otrzymamy układ równań liniowych jednorodnych dla $\Delta_1 U$, $\Delta_1 \theta$, $\Delta_1 \sigma$

o wyznaczniku

$$/1.55/ \quad \Delta' = \begin{vmatrix} \kappa_{m_1} M_{m_1}^2 - 1 & -1 & -\frac{R_p}{R_{m_1}} \\ (\kappa_{m_1} - 1) M_{m_1}^2 & -\frac{c_{p m_1}}{c_{p m_1}} & -K_1' \\ 1 & 1 - K_1 & \frac{1}{\tau_1} \end{vmatrix}$$

Rozwiązując dla $M_1=1$ układ zlinearyzowany /wtedy $\Delta'=0$ /
otrzymamy:

$$/1.56/ \quad \Delta_1 U = \frac{\frac{R_p}{R_{m_1}} - K_1'}{M_{m_1}^2 - 1} \Delta_1 \sigma_1,$$

$$\Delta_1 \theta = \left[\frac{R_p}{R_m} - \frac{\kappa_m M_{m_1}^2 - 1}{M_{m_1}^2 - 1} \left(\frac{R_p}{R_{m_1}} - K_1' \right) \right] \Delta_1 \sigma_1.$$

Wzory /1.56/ dają kierunek styczny do adiabaty uderzeniowej
w przestrzeni U_2, θ_2, σ_2 w punkcie danym przez $M_1=1$.

Podstawienie /1.56/ do wzoru dla różniczki entropii

/1.39/ daje:

$$/1.57/ \quad \Delta_1 S = -R_p \Delta_1 \sigma_1.$$

Tym samym zmiana entropii na fali uderzeniowej o małym na-
tężeniu /i z częściowym odparowaniem/ jest proporcjonalna
do zmiany prędkości i temperatury. Ten fakt różni w istotny
sposób rozważane fale uderzeniowe od fal uderzeniowych w ga-
zie, dla których przyrost entropii jest proporcjonalny do
trzeciej potęgi natężenia fali mierzonego przez zmianę pręd-
kości lub temperatury.

Rozpatrzmy z kolei fale z odparowaniem całkowitym.

Układ /1.52/ przybiera klasyczną postać warunków zgodności
dla $\sigma_1=0$. Będziemy poszukiwać przy $M_{m_1} \neq 1$ asymptotycznej
postaci rozwiązań dla $\sigma_1 \rightarrow 0$. Z /1.52/ otrzymujemy wtedy
dla dostatecznie małych $\frac{\sigma_1}{M_{m_1}^2 - 1}$ 2 rozwiązania:

$$/1.58/ \quad U_2 = 1 - \left(K_1' - \frac{R_p}{R_{m_1}} \right) \frac{\sigma_1}{1 - M_{m_1}^2},$$

$$\theta_2 = 1 + \left[(\kappa_{m_1} - 1) \frac{R_p}{R_{m_1}} M_{m_1}^2 - K_1' (\kappa_{m_1} M_{m_1}^2 - 1) \right] \frac{\sigma_1}{M_{m_1}^2 - 1}$$

$$U_2 = \left(\frac{\kappa_{m1}-1}{\kappa_{m1}+1} + \frac{2}{(\kappa_{m1}+1)M_{m1}^2} \right) + \\ + \left[\frac{K_1' - \frac{R_p}{R_{m1}}}{1 - M_{m1}^2} + 2 \frac{\kappa_{m1}-1}{\kappa_{m1}+1} \cdot \frac{R_p}{R_{m1}} \left(1 + \frac{1}{\kappa_{m1}M_{m1}^2} \right) \right] \sigma_1,$$

/1.59/

$$\theta_2 = 1 + 2 \frac{\kappa_{m1}-1}{(\kappa_{m1}+1)^2} \left(1 - \frac{1}{M_{m1}^2} \right) (\kappa_{m1}M_{m1}^2 + 1) - \\ - \frac{\kappa_{m1}-1}{\kappa_{m1}+1} (\kappa_{m1}M_{m1}^2 + 1) \left\{ \frac{2(\kappa_{m1}-1)}{(\kappa_{m1}+1)^2} \cdot \frac{R_p}{R_{m1}} \left[\left(1 + \frac{1}{\kappa_{m1}M_{m1}^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\kappa_p+1}{\kappa_p-1} \left(\frac{1}{M_{m1}^2} - 1 \right) \right] + \frac{K_1' - \frac{R_p}{R_{m1}}}{1 - M_{m1}^2} + \frac{2\kappa_{m1}}{\kappa_{m1}M_{m1}^2 + 1} \frac{K_1' - \frac{R_p}{R_{m1}}}{R_{m1}} \right\} \sigma_1.$$

Jeżeli $\sigma_1 = 0$ oba rozwiązania przechodzą w rozwiązania klasycznych warunków zgodności:

/1.60/ $U_2 = \theta_2 = 1$

i

/1.61/

$$U_2 = \frac{\kappa_{m2}-1}{\kappa_{m1}+1} + \frac{2}{(\kappa_{m2}+1)M_{m2}^2},$$

$$\theta_2 = 1 + 2 \frac{\kappa_{m2}-1}{(\kappa_{m1}+1)^2} (\kappa_{m1}M_{m1}^2 + 1) \left(1 - \frac{1}{M_{m1}^2} \right).$$

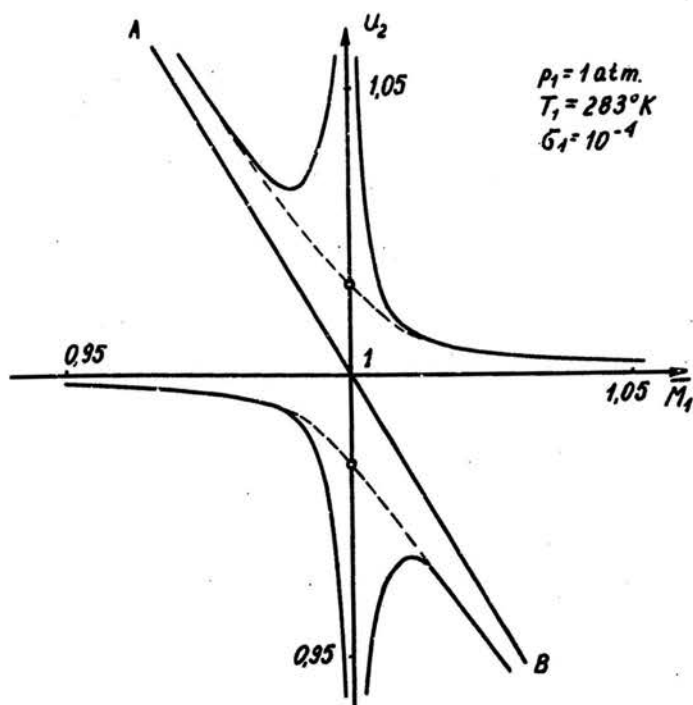
Dla $M_{m1} = 1$ z /1.52/ mamy również 2 rozwiązania:

$$U_2 = 1 \mp \sqrt{\frac{2}{\kappa_{m1}+1} \left(K_1' - \frac{R_p}{R_{m1}} \right)} \cdot \sqrt{\sigma_1},$$

/1.62/ $\theta_2 = 1 \pm (\kappa_{m1}-1) \sqrt{\frac{2}{\kappa_{m1}+1} \left(K_1' - \frac{R_p}{R_{m1}} \right)} \cdot \sqrt{\sigma_1}.$

W obu przypadkach ($M_{m2} \neq 1, M_{m1} = 1$) fizycznie sensowne są te rozwiązania, które zgodne są z drugą zasadą termodynamiki. W pierwszym przypadku warunek ten dla $M_{m1} < 1$ spełnia rozwiązanie /1.58/, a dla $M_{m1} > 1$ /1.59/. W drugim przypadku sens fizyczny mają rozwiązania z "górnym znakiem".

Dla ilustracji przytaczamy niżej wykresy dla fal uderzeniowych w powietrzu z wilgotną parą wodną przy ciśnieniu 1 atm i temperaturze 283°K.

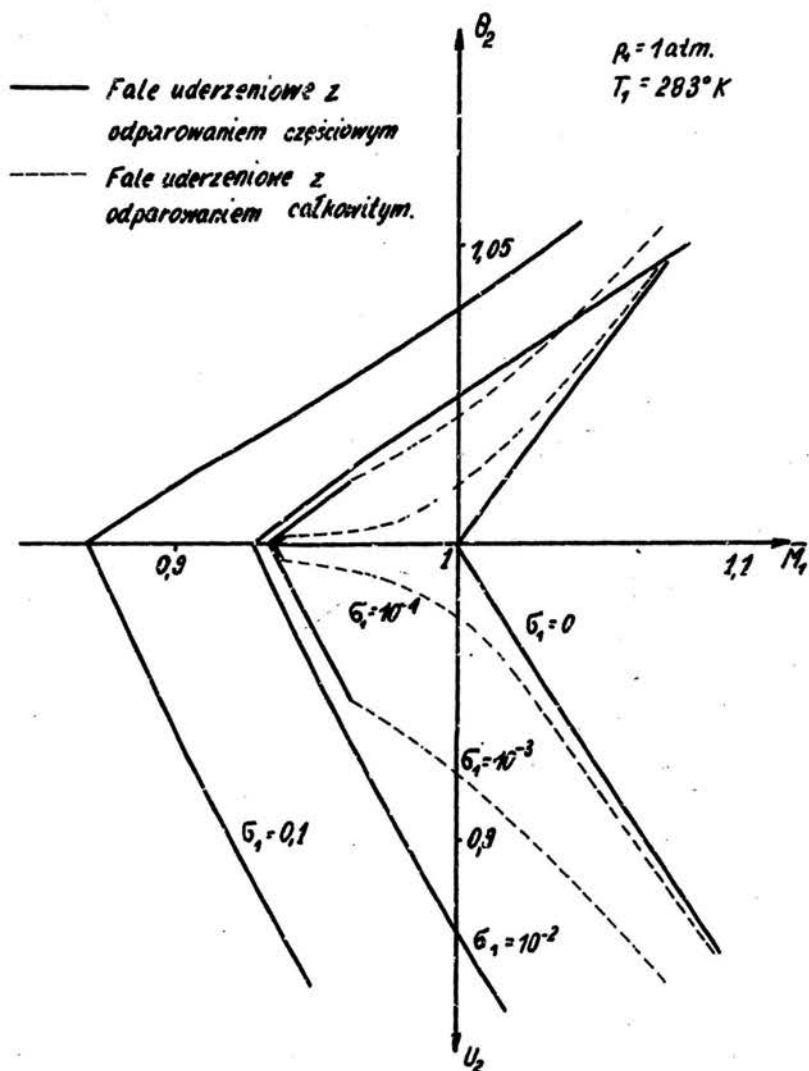


Rys.2

Porównanie ogólnych i zlinearyzowanych warunków zgodności na przykładzie U_2 .

Na rys.2 przedstawiono wartości U_2 dla fal z odparowaniem całkowitym. Jeżeli $\sigma_1 \neq 0$ rozwiązania /1.58/, /1.59/ układu zlinearyzowanego dają 4 gałęzie hiperbol. Przy $\sigma_1 \rightarrow 0$ granicą tych hiperbol są: krzywa AB i oś \bar{M}_1 odpowiadające formułom /1.60/ i /1.61/, oraz krzywa $M_{\text{min}}=1$ /na rysunku pokrywająca się praktycznie z prostą $\bar{M}_1=1$ /. Realnym stanom fizycznym odpowiadają punkty na osi \bar{M}_1 /stan przed falą/ i dla $U_2 < 0$ na krzywej AB /stan za falą/. Dla $\sigma_2 \ll 1$ rozwiązanie układu zlinearyzowanego jest dobrym przybliżeniem rozwiązań układu /1.52/ /na rys.2 - linia przerywana/ z wyjątkiem wąskiego przedziału \bar{M}_1 w pobliżu 1.

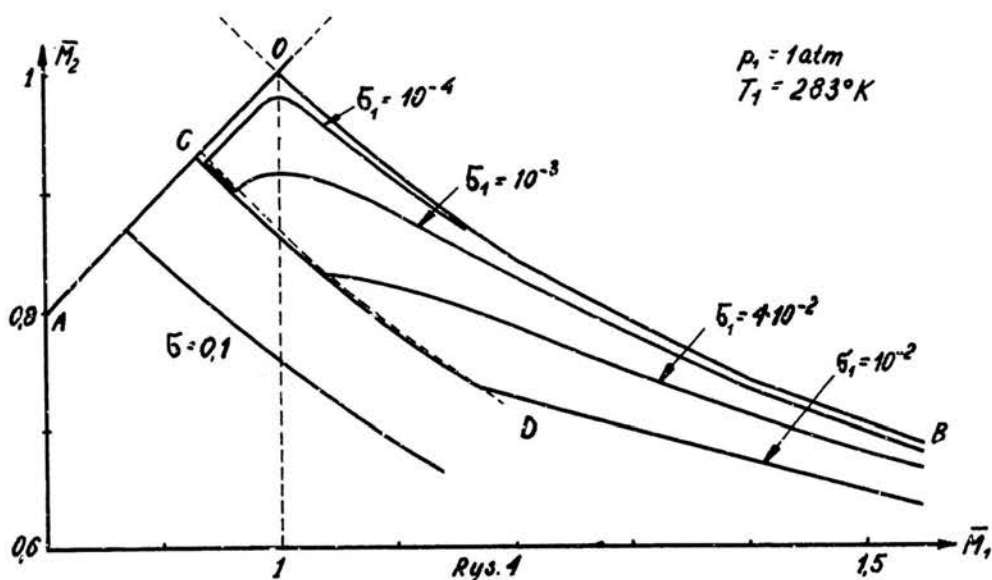
Typowy przebieg krzywych otrzymany z warunków zgodności |1.51| i |1.52| dla różnych wartości σ_1 i \bar{M}_1 , przedstawiono na rys.3.



Rys.3
Warunki zgodności

Fala uderzeniowa istnieje przy wartościach \bar{M}_1 przekraczających pewną wartość krytyczną odpowiadającą $M_1 = 1$ / i różną dla różnych σ_1 /. Na lewo od prostej $\bar{M}_1 = 1$ rozciąga się obszar fal słabych, na prawo - silnych.

Jak widać z /1.58/ i rys.2 przy $\sigma_1 \rightarrow 0$ dla fal słabych z całkowitym odparowaniem parametry ośrodka za falą uderzeniową zmieniają się bardzo słabo ze wzrostem \bar{M}_1 .



Warunki zgodności

Na rys.4 pokazano zależność \bar{M}_2 od \bar{M}_1 . Punkty odpowiadające falom uderzeniowym leżą w obszarze ograniczonym przez prostą OA przedstawiającą przepływ jednorodny i klasyczną adiabatę Hugoniota OB. Fale z częściowym odparowaniem od fal z całkowitym odparowaniem oddziela krzywa CD, będąca rozwiązaniem układu /1.51/ /w zmiennych $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \sigma_1$ / dla $\sigma_2 = 0$. Obszar fal słabych z odparowaniem całkowitym charakteryzuje się tym, że wzrostowi \bar{M}_1 towarzyszy wzrost \bar{M}_2 .

II. STRUKTURA FALI UDERZENIOWEJ WE MGLE

2.1. Wprowadzenie

W części pierwszej podano warunki zgodności dla płaskiej fali uderzeniowej we mgle, tzn. zależności analityczne wynikające z podstawowych praw zachowania i wiążące parametry ośrodka w stanie równowagi w nieskończoności po obu stronach fali.

Przedmiotem drugiej części pracy jest struktura takiej fali uderzeniowej. Podamy układ równań różniczkowych opisujący zachowanie masy, pędu i energii oraz wymianę tych wielkości między fazami. W rozważanym przepływie mamy do czynienia ze złożonym kompleksem zjawisk fizycznych, zależnych od wielu parametrów. W szczególności wpływ na jakościowy charakter tych zjawisk ma stopień rozdrobnienia fazy ciekłej scharakteryzowany przez rozmiary kropeł. Istotne jest stwierdzenie w jakim zakresie promieni kropeł obowiązuje przedstawiona teoria.

Promień kropeł jest ograniczony z dołu przez założenie ośrodka ciągłego i pominięcie efektów związanych z napięciem powierzchniowym. Wpływ napięcia powierzchniowego można scharakteryzować przez stosunek energii napięcia powierzchniowego kropli do energii wewnętrznej:

$$/2.1/ \quad d = \frac{4\pi r^2 \sigma^*}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c^* c_c T} = \frac{3\sigma^*}{\rho_c^* c_c T r}$$

gdzie σ^* oznacza współczynnik napięcia powierzchniowego.

Prężność pary nasyconej nad zakrzywioną powierzchnią kropli jest mniejsza niż nad powierzchnią płaską. Poprawka

na zakrzywienie powierzchni jest tego samego rzędu $\sigma_j/\rho r$. [19], rozdz. VI, § 3/. Jak wynika z /2.1/ współczynnik j jest odwrotnie proporcjonalny do r ; dla kropli wody w powietrzu $j=1$, gdy $r = 1,5 \cdot 10^{-4} \mu$. W naszych rozważaniach nie uwzględniamy energii i entalpii napięcia powierzchniowego i pomijamy wpływ krzywizny na prężność pary nasyconej. Drugim czynnikiem ograniczającym z dołu promień kropli jest założenie ośrodka ciągłego, zawężające zakres liczb Knudsenów:

$$Kn = \frac{l}{2r} \ll 1,$$

gdzie l jest długością drogi swobodnej molekuł fazy gazowej. Wymienione ograniczenia na promień kropli nie wyłączają jednak z rozważań przepływów, w których następuje całkowite odparowanie kropli, tzn. promień kropli zmierza do zera, bowiem efekty wymiany między fazami maleją /jeśli pominąć wpływ innych czynników/ proporcjonalnie do powierzchni międzyfazowej, tzn. proporcjonalnie do kwadratu promienia kropli. Jeśli więc liczba Knudsenów w stanie początkowym jest dostatecznie duża, odstępstwa od ośrodka ciągłego nastąpią przy tak małym promieniu kropli i koncentracji cieczy, kiedy efekty wymiany między fazami są pomijalne.

Siły napięcia powierzchniowego decydują również o górnej granicy promieni kropli, dla których obowiązuje przedstawiona teoria. Jeżeli stosunek sił zewnętrznych, działających na kroplę poruszającą się w gazie, do sił napięcia powierzchniowego jest dostatecznie duży, to kropla może ulec rozerwaniu. Jak się okazuje [10], [9], [11], krople o dostatecznie małym promieniu nie ulegają rozerwaniu nawet przy bardzo wielkich prędkościach/dla wody krytyczna wartość promienia wynosi ok. 25μ /. Dla większych kropli

czynnikiem decydującym, jest bezwymiarowy współczynnik

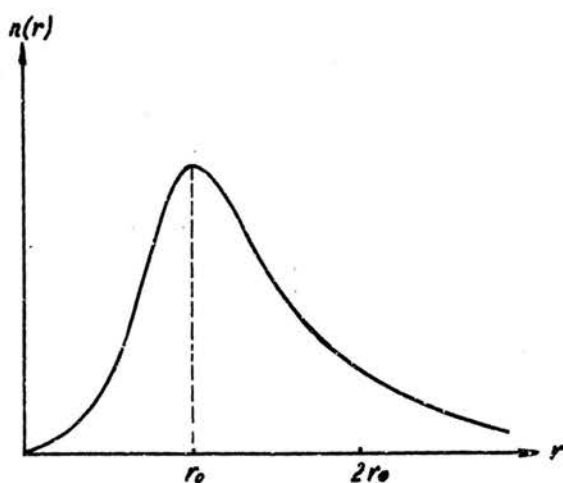
$$k = \frac{2(\omega - u)^2 r}{\sigma \rho} .$$

Jeżeli współczynnik k jest mniej-

szy od określonej wartości krytycznej rozzerwanie nie następuje. W naszych rozważaniach przyjmujemy, że warunki uniemożliwiające rozpylanie kropeł są spełnione. Nie będziemy uwzględniać ponadto drgań postaciowych przyjmując kształt kropli jako sferyczny.

W realnych zawiesinach występujących w atmosferze rozkład promieni kropeł ma kształt podobny jak na rys.4a.

W chmurach promień kropeł zmienia się od paru do około 20μ z maksimum w przedziale $5-10 \mu$, a w mgłę atmosferycznej od ok. 1μ do kilku mikronów z maksimum około $2-3 \mu$.



Rys 4a

Typowy rozkład promieni kropeł w chmurach i w mgłę atmosferycznej.

Uwzględnienie rzeczywistego rozkładu promieni kropeł przy badaniu struktury fali uderzeniowej doprowadziłoby do złożonego układu równań różniczkowo-całkowych. W celu uproszczenia zagadnienia przyjmujemy założenie jednorodnej struktury zawiesiny, tzn. przyjmujemy, że w przepływie niezaburzonym promie-

nie wszystkich kropeł są identyczne. Jak się wydaje, przyjęte założenie nie powinno zmieniać jakościowych cech rozważanego zjawiska.

Założenia dotyczące modelu parowania kropeł i wymiany ciepła omówione są bliżej w 2.5 i 2.6 .

2.2. Równania zachowania masy, pędu i energii

Za punkt wyjścia przyjmujemy postać całkową warunków zachowania masy, pędu i energii. Przez Ω oznaczamy dowolny obszar w kształcie walca o tworzących równoległych do kierunku prędkości przepływu, związany stale z tymi samymi elementami gazu. Należy jednak zauważyć, że masa pary i cieczy w obszarze

Ω ulega zmianie. Jest to uwarunkowane, z jednej strony parowaniem cieczy w obszarze Ω , a z drugiej strony - istniejącym, w wyniku różnych prędkości fazy ciekłej i gazowej - przepływem cieczy przez powierzchnię Σ ograniczającą obszar Ω .

Po tych uwagach możemy warunki zachowania masy /oddzielnie dla pary wraz z cieczą i oddzielnie dla gazu/, pędu i energii przedstawić w następującej postaci:

$$/2.2/ \quad \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} (\rho_p + \rho_c) d\Omega = - \iint_{\Sigma} \rho_c (w-u) d\Sigma ,$$

$$/2.3/ \quad \iint_{\Sigma} \rho_g u d\Sigma = 0 ,$$

$$/2.4/ \quad \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} [(\rho_g + \rho_p)u + \rho_c w] d\Omega + \iint_{\Sigma} \rho_c w (w-u) d\Sigma = - \iint_{\Sigma} (\rho - \frac{4}{3}\mu \frac{du}{dx}) d\Sigma ,$$

$$/2.5/ \quad \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} E_p d\Omega = - \iint_{\Sigma} \rho_c E_c (w-u) d\Sigma - \\ - \iint_{\Sigma} (\rho - \frac{4}{3}\mu \frac{du}{dx}) u d\Sigma + \iint_{\Sigma} \lambda \frac{dT}{dx} d\Sigma ,$$

gdzie: u jest prędkością fazy gazowej, w - prędkością kropeł cieczy, x oznacza zmienną przestrzenną, μ - współczynnik lepkości fazy gazowej, λ - współczynnik przewodnictwa ciepła fazy gazowej, E i E_c odpowiednio energią jednostki masy mieszaniny i cieczy.

Równania zachowania masy /2.2/ i /2.3/ stwierdzają, że pochodna po czasie łącznej masy cieczy i pary w obszarze Ω jest równa wziętemu z ujemnym znakiem strumieniowi masy cieczy przez powierzchnię Σ /wektor normalny do powierzchni Σ skierowany jest na zewnątrz/, a strumień masy gazu przez powierzchnię Σ , zgodnie z definicją obszaru Ω , jest równy 0. Równanie /2.4/ wyraża zasadę zachowania pędu przez przyrównanie pochodnej czasowej pędu elementów mieszaniny z obszaru Ω - powiększonej o strumień pędu wynoszony przez ciecz przepływającą przez powierzchnię Σ - do sił działających na tę powierzchnię. Wreszcie równanie /2.5/ stwierdzając, że przyrost energii w obszarze Ω jest równy sumie strumienia energii przenoszonego do obszaru Ω przez ciecz przepływającą przez powierzchnię Σ , pracy wykonanej nad obszarem Ω i ciepła doprowadzającego do tegoż obszaru wyraża zasadę zachowania energii. W wyrażeniach dla pracy sił mechanicznych, w równaniach /2.4/ i /2.5/ pomięto jak zwykle lepkość objętościową.

W przypadku ustalonego układu całkowy /2.2/-/2.5/ można w prosty sposób sprowadzić do postaci:

$$/2.6/ \quad \varrho(\tau u + \sigma w) = \omega_1(\tau_1 + \sigma_1),$$

$$/2.7/ \quad u \varrho \xi = \omega_1 \xi_1,$$

$$/2.8/ \quad \frac{4}{3} \mu \frac{du}{dx} = \varrho u [(\xi + \tau)u + \sigma w] + \varrho \sigma (w - u)w + p - \omega_2,$$

$$/2.9/ \quad \frac{4}{3}\rho u \frac{du}{dx} + \lambda \frac{dT}{dx} = E_g u + E_c \rho \sigma (w-u) + \rho u - \omega_3,$$

gdzie:

$$/2.10/ \quad \omega_1 = \rho_1 u_1,$$

$$/2.11/ \quad \omega_2 = \rho_1 u_1^2 + p_1,$$

$$/2.12/ \quad \omega_3 = E_1 \rho_1 u_1 + p_1 u_1.$$

Bezwymiarowe koncentracje ζ , τ , σ , zgodnie z definicją, również i przy ruchu względnym obu faz spełniają warunek:

$$/2.13/ \quad \zeta + \tau + \sigma = 1.$$

Energia jednostkowego elementu masy mieszaniny E jest sumą jednostkowych energii kinetycznej i wewnętrznej:

$$/2.14/ \quad E = E_k + E_w.$$

Przedstawiając każdą z tych energii jako sumę wyrazów odpowiadających poszczególnym składnikom mieszaniny otrzymamy:

$$/2.15/ \quad E_k = \zeta E_{kg} + \tau E_{kp} + \sigma E_{kc} = \frac{1}{2} u^2 (\zeta + \tau) + \frac{1}{2} w^2 \sigma,$$

$$/2.16/ \quad E_w = \zeta \cdot E_{wg} + \tau E_{wp} + \sigma E_{wc},$$

gdzie:

$$/2.17/ \quad E_{wg} = c_{vg} T, \quad E_{wp} = c_{vp} T.$$

Zgodnie z tym, co stwierdzono poprzednio, w wyrażeniu dla energii wewnętrznej pominięto wyraz odpowiadający energii napięcia powierzchniowego.

Z założenia nieściśliwości cieczy wynika równość odpowiedniej energii wewnętrznej i entalpii. Na mocy /1.16/

mamy wtedy:

$$/2.18/ \quad E_{wc} = c_{pp} T - q_c(T).$$

Podobnie jak w części pierwszej wprowadzimy zmienne bezwymiarowe:

$$/2.19/ \quad U = \frac{w}{u_1}, \quad W = \frac{w'}{u_1}, \quad \theta = \frac{T}{T_1},$$

$$V = \left(\frac{r}{r_1}\right)^3, \quad \theta_c = \frac{T_c}{T_1}, \quad X = \frac{x}{r_1}.$$

Biorąc pod uwagę równania ciągłości /2.6/ i /2.7/ i podane wyżej zależności dla energii mieszaniny, możemy po prostych przekształceniach zastąpić równania pędu i energii /2.8/, /2.9/ przez układ równań w zmiennych bezwymiarowych:

$$/2.20/ \quad \eta \frac{dU}{dX} = \frac{U^2 + \sigma(W^2 - U^2)}{U + \sigma(W - U)} - 1 +$$

$$+ \frac{1}{\kappa_{m2} M_{m1}^2} \left(\frac{R_m}{R_{m1}} \frac{\theta}{U + \sigma(W - U)} - 1 \right),$$

$$/2.21/ \quad \Lambda \frac{d\theta}{dX} = \frac{U}{U + \sigma(W - U)} \left\{ \frac{c_{vm}}{c_{vm2}} \frac{\theta}{\kappa_{m1} - 1} - \frac{\kappa_{m1} M_{m1}^2}{2} \right.$$

$$\cdot \left[U^2 + \sigma(2W^2 - U^2 - \frac{W^3}{U}) \right] + \frac{c_{pp}}{R_{m1}} \left[(\kappa_1'' - 1) \sigma_1 \right.$$

$$\left. - (\kappa_1'' - 1) \frac{\theta_c \sigma W}{U} \right] \left. \right\} + (\kappa_{m1} M_{m1}^2 + 1) U -$$

$$- \left(\frac{\kappa_{m1} M_{m1}^2}{2} + \frac{\kappa_{m1}}{\kappa_{m2} - 1} \right),$$

gdzie η , Λ oznaczają bezwymiarowe współczynniki lepkości i przewodnictwa ciepła

$$/2.22/ \quad \eta = \frac{4\mu}{3\tau_1 u_1 g_1},$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\tau_1 g_1 u_1 R_{m1}},$$

a K'' jest bezwymiarowym ciepłem parowania

$$/2.23/ \quad K'' = \frac{q}{c_{pp}T} .$$

Jeżeli $\sigma = \sigma_1 = 0$, równania /2.20/ i /2.21/ przyjmują standardową postać równań dla struktury fali uderzeniowej w gazie.

2.3. Analiza ruchu kropli w gazie

Ruch kropli w układzie inercyjnym związanym z falą uderzeniową dany jest przez równanie:

$$/2.24/ \quad m \frac{dw}{dt} = F ,$$

gdzie m oznacza masę kropli, a F siłę oporu aerodynamicznego skierowaną przeciwnie do kierunku prędkości:

$$/2.25/ \quad m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c^* ,$$

$$/2.26/ \quad F = - C \pi r^2 \frac{\rho(1-\sigma)(w-u)^2}{2} .$$

C jest bezwymiarowym współczynnikiem oporu.

Z warunków ciągłości /2.6/ i /2.7/ po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych można wyrazić stosunek gęstości.

$$/2.27/ \quad \frac{\rho_1}{\rho} = U + \sigma(W-U) .$$

Po uwzględnieniu /2.25/, /2.26/, /2.27/ i przejściu od zmiennej niezależnej t do X równanie ruchu kropli w zmiennych bezwymiarowych przyjmuje postać:

$$/2.28/ \quad R \frac{dW}{dX} = - \frac{3\rho_1}{8\rho_c^*} C \cdot \frac{(1-\sigma)(W-U)^2}{W[U + \sigma(W-U)]}$$

gdzie $R = \frac{r}{r_1}$ jest bezwymiarowym promieniem kropli.

Z założenia jednorodnej struktury zawiesiny cieczy w przepływie niezaburzonym wynika /o ile nie nastąpiło całkowite odparowanie cieczy/ prawo zachowania liczby kropeł, które stwierdza, że w obszarze płynnym związanym z kroplami cieczy ilość kropeł pozostaje stała. Z powyższego mamy:

$$/2.29/ \quad \frac{\sigma g w}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c} = \frac{\sigma_1 g_1 u_1}{\frac{4}{3} \pi r_1^3 \rho_c^*} .$$

Dzieląc stronami /2.29/ przez /2.7/ po prostych przekształceniach otrzymamy:

$$/2.30/ \quad R = \frac{r}{r_1} = \sqrt[3]{\frac{\sigma W \xi_1}{\sigma_1 U \xi}} .$$

W równaniu ruchu kropli /2.28/ występuje bezwymiarowy współczynnik oporu C . Jeśli przyjąć, że kształt poruszających się kropeł nie odbiega zbyt od sferycznego, co dla małych kropeł jest uzasadnione, to dla małych liczb Reynoldsa z prawa Stokes'a $C = \frac{24}{Re}$, przy czym liczba Reynoldsa określona jest wzorem:

$$Re = \frac{2r(w-u)(\rho_g + \rho_f)}{\mu} ,$$

lub w wielkościach bezwymiarowych :

$$/2.31/ \quad Re = \frac{R}{\eta'} \cdot \frac{(W-U)(1-\sigma)}{U + \sigma(W-U)} ;$$

η' jest wielkością bezwymiarową, proporcjonalną do współczynnika lepkości:

$$/2.32/ \quad \eta' = \frac{\mu}{2r_1 u_1 \rho_1} .$$

Dla liczb Reynoldsa w zakresie przejściowym między przepływem stoksowskim, a przepływem z laminarną warstwą przyścienną /dla którego $C = \text{const.}$ / urek prostych zależności teoretycznych dla współczynnika oporu sfery. Przy

numerycznym całkowaniu równań wykorzystano w niniejszej pracy podane dane doświadczalne w tabeli 1 /wg [13]/.

Tabela 1

	0,1	1	10	10^2	10^3	10^4
	245	28	4,4	1,10	0,46	0,42

W oparciu o powyższą tabelę przyjęto następujące wzory interpolacyjne:

$$C = -\frac{10}{9} Re + \frac{46}{9} + \frac{24}{Re} \quad \text{dla } 0 \leq Re < 1,$$

$$/2.23/ \quad C = -1,041 \cdot 10^{-2} Re + 1,893 + \frac{26,12}{Re} \quad \text{dla } 1 \leq Re < 10^2,$$

$$C = 2,695 \cdot 10^{-6} Re + 0,386 + \frac{71,38}{Re} \quad \text{dla } 10^2 \leq Re < 10^4.$$

W zakresie naddźwiękowym przyjęto bliską doświadczeniu wartość $C=1$ /por. [20]/.

2.4. Strumień masy przez powierzchnię kropli

Zjawiska fizyczne towarzyszące parowaniu kropli poruszającej się w gazie mają różny przebieg w zależności od charakteryzującej ten ruch liczby Reynoldsa.

Jeżeli przepływ jest poddźwiękowy, a Re jest rzędu setek lub tysięcy, wokół opływanej kropli powstaje - analogicznie do warstwyprzysściennej dla prędkości - dyfuzyjna warstwa przysścienna, w której gęstość pary zmienia się od wartości nasycenia ρ_p , przy powierzchni kropli do wartości ρ w obszarze z dala od kropli. Ze względu na analogię między równaniami ruchu cieczy lepkiej i dyfuzji, grubość warstwy przysściennej w obu przypadkach jest tego samego

rzędu, jeśli tylko kinematyczny współczynnik lepkości i współczynnik dyfuzji są bliskie sobie tzn. liczba Schmidta

$$/2.34/ \quad Sc = \frac{\nu}{D} \cong 1 ,$$

gdzie ν oznacza kinematyczny współczynnik lepkości, a D współczynnik dyfuzji. Przybliżona równość /2.34/ istotnie ma miejsce [8]. Szybkość parowania jest wtedy proporcjonalna do $Re^{1/2} Sc^{1/3}$ /por. [8]/. Powyższe odnosi się do zakresu liczb Reynoldsa od 100 do ok.100.000. Dla $Re > 10^5$ następuje turbulizacja warstwy przyściennej.

W zakresie stokesowskim obejmującym małe liczby Reynoldsa doświadczenie wykazuje /p.[3]/, że szybkość parowania nie zależy od prędkości ruchu kropli i jest równa szybkości parowania kropli spoczywającej.

Oba te zakresy obejmują wzór Frosslinga, który w zmienionych bezwymiarowych ma postać:

$$/2.35/ \quad Sh = 2(1 + \beta Re^{1/2} Sc^{1/3}) .$$

W równości /2.35/ liczba Sherwooda, Sh jest bezwymiarową miarą szybkości parowania, a β oznacza stałą doświadczalną; dla parowania wody w powietrzu $\beta = 0,3$ /p.[3]/. Strumień masy parującej z poruszającej się w gazie pojedynczej kropli jest proporcjonalny do liczby Sherwooda, współczynnika dyfuzji i różnicy między gęstością pary nasyconej w temperaturze powierzchni kropli, a gęstością pary z dala od kropli.

Dla kropli sferycznej:

$$/2.36/ \quad J_0 = 4\pi r D (\rho_{ps}(T_c) - \rho_p) (1 + \beta Re^{1/2} Sc^{1/3}) .$$

Ja^k wykazują doświadczenia, formuła /2.36/ opisuje dobrze parowanie również w pośrednim zakresie liczb Reynoldsa 1-10.

Z wzoru /2.36/ wynika, że szybkość parowania jest proporcjonalna do różnicy między gęstością pary nasyconej odpowiadającej temperaturze powierzchni cieczy i gęstością pary z dala od kropli. Dla kropeł dostatecznie dużych aktualna gęstość pary przy powierzchni kropli jest równa $\rho_{ps}(\tau_c)$, gdzie τ_c jest temperaturą powierzchni kropli; inaczej przedstawia się jednak sprawa dla małych kropeł. Przy ustalonym parowaniu kropli cieczy nieruchomej względem gazu z równania dyfuzji wynika, że natężenie strumienia molekuł dyfundujących od powierzchni kropli jest odwrotnie proporcjonalne do odległości od środka kropli τ_{im} . ^{im} mniejsza jest ta odległość, tym większa jest natężenie strumienia.

Z drugiej strony szybkość parowania z jednostki powierzchni cieczy nie może być dowolnie wielka, ogranicza ją bowiem kinetyczny mechanizm parowania. Tak więc, dla dostatecznie małych kropeł ilość molekuł parujących z powierzchni cieczy nie nadążałaby za ilością molekuł odprowadzanych od powierzchni drogą dyfuzji. Wynika stąd, że gęstość molekuł pary przy powierzchni cieczy musi być mniejsza od gęstości pary nasyconej odpowiadającej temperaturze powierzchni.

Sytuacja nie zmienia się istotnie, gdy kropla się porusza względem gazu. Szybkość parowania małych kropeł jest wtedy mniejsza niż by to wynikało z wzoru /2.36/ i wyraża się wzorem /p. [8]/:

$$/2.37/ \quad J = \frac{J_0}{1 + \frac{D}{r_{cs}N}},$$

gdzie J_0 jest określone przez /2.36/, N jest równe średniej prędkości molekuł pary o temperaturze powierzchni cieczy:

$$/2.38/ \quad N = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}},$$

a α oznacza tzw. współczynnik parowania lub kondensacji;
dla wody $\alpha = 0,03$ /p. [18]/.

Z /2.36/ i /2.37/ mamy:

$$/2.39/ \quad \dot{J} = \frac{2\pi r D \cdot Sh}{1 + \frac{D}{r\alpha N}} (\rho_{ps}(T_c) - \rho_p).$$

Przedstawiony wyżej model parowania pojedynczej kropli przyjmujemy za podstawę przy rozważaniu parowania zawiesziny cieczy, w której rozchadzi się fala uderzeniowa. W tym miejscu uczynić musimy dwa dodatkowe założenia:

1° Strumień masy przez powierzchnię kropli jest kwasi-ustalony, tzn. zmienia się niewiele na drodze równej średniej odległości między kroplami;

2° Gęstość pary jest kwazijednorodna /dla ustalonego X / tzn. zmienia się istotnie jedynie w bliskim sąsiedztwie kropli na drodze dużo mniejszej od średniej odległości między kroplami. Pozwala to w wyrażeniu dla strumienia masy /2.39/ zastąpić gęstość pary w nieskończoności przez bliską jej średnią gęstość pary.

Strumień masy przez powierzchnię kropli wyraża szybkość zmniejszania się masy kropli:

$$/2.40/ \quad \dot{J} = \frac{dm}{dt} = \frac{4}{3} \pi r_1^2 \rho_c^* \cdot \frac{dV}{dt},$$

gdzie

$$/2.41/ \quad V = \frac{m}{m_1} = \left(\frac{r}{r_1}\right)^3 = R^3.$$

Przechodząc do pochodnej po X i uwzględniając /2.39/, /2.40/ otrzymujemy:

$$/2.42/ \quad \frac{dV}{dX} = \frac{DR}{\tau_{14}W} \left(\frac{\rho_{ps}(T_c)}{\rho_c^*} - \frac{\rho_p}{\rho_c^*} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{DSh}{2\alpha rN}}$$

2.5 Strumień ciepła przez powierzchnię kropli

Przejściu elementu gazu przez falę uderzeniową towarzyszy wzrost temperatury gazu. Z powodu większej bezwładności cieplnej cieczy, temperatura kropli nie nadąża za wzrostem temperatury fazy gazowej. W rezultacie powstaje strumień ciepła przez powierzchnię kropli zmierzający do wyrównania temperatur obu faz.

Dużo lepsze przewodnictwo cieplne cieczy w porównaniu z gazem pozwala przyjąć jednorodny rozkład temperatury wewnątrz kropli*. Bilans cieplny kropli przy założeniu kwazi-ustalonego strumienia ciepła ma wtedy postać:

$$/2.43/ \quad \frac{d}{dt}(c_c m T_c) = Q_c - Q_e$$

gdzie Q_c oznacza strumień ciepła doprowadzony do powierzchni kropli przez przewodnictwo ośrodka gazowego, a Q_e - strumień ciepła pobrany na parowanie na powierzchni kropli

Przewodzony strumień ciepła Q_c w przypadku poruszającego się ciała jest proporcjonalny do liczby Nusselta Nu ; dla sfery zależność ta ma postać:

$$/2.44/ \quad Q_c = 2\pi r \lambda (T - T_c) \cdot Nu.$$

* Dla porównania przeanalizowano również przypadek z liniową zależnością temperatury kropli wzdłuż promienia. Ponieważ rozwiązania równań dla struktury fali różniły się w obu przypadkach bardzo mało, przyjęto ostatecznie prostszy model jednorodnej temperatury kropli cieczy.

Liczba Nusselta dla kropli kulistej opływanej przez gaz wyraża się formułą analogiczną do /2.35/ [por. [3]]:

$$/2.45/ \quad Nu = 2 \left(1 + \beta Re^{1/2} Pr^{1/3} \right),$$

gdzie Pr jest liczbą Prandla $Pr = \frac{\mu c_{pm}}{\lambda}$.

Druga część ogólnego strumienia ciepła Q_c jest proporcjonalna do strumienia masy przez powierzchnię kropli:

$$/2.46/ \quad Q_c = J \cdot q = m_1 \cdot \frac{dV}{dt} \cdot q.$$

Po podzieleniu przez $m_1 c_c T_1$ i wprowadzeniu pochodnych po X równanie strumienia energii przyjmuje postać:

$$/2.47/ \quad \frac{d}{dX} (V \theta_c) + \frac{c_c}{c_{pp}} K'' \frac{dV}{dX} = \frac{3}{2} \frac{R(\theta - \theta_c) \Lambda' Nu}{W};$$

Λ' jest bezwymiarowym współczynnikiem przewodnictwa ciepła:

$$/2.48/ \quad \Lambda' = \frac{\lambda}{r_1 \mu_1 g_c^* c_c}.$$

2.6 Dyskusja równań dla struktury fali uderzeniowej

W paragrafach 2.2 - 2.5 wyprowadzono układ równań różniczkowych swychających nieliniowych opisujących strukturę fali uderzeniowej we ggle. Pierwsze dwa równania układu wyrażają zasadę zachowania pędu i energii w elemencie objętości zawiesiny, a trzy dalsze opisują strumienie masy pędu i energii wymieniane między fazami. Niżej przytoczamy pełny układ otrzymanych równań:

$$/2.49/ \quad \eta \frac{dU}{dX} = \frac{U^2 + \sigma(W^2 - U^2)}{U + \sigma(W - U)} - 1 + \frac{1}{\kappa_{m1} M_{m1}^2} \cdot \left(\frac{R_m}{R_{m2}} \cdot \frac{\theta}{U + \sigma(W - U)} - 1 \right),$$

$$\Lambda \frac{d\theta}{dX} = \frac{U}{U + \sigma(W-U)} \left\{ \frac{c_{vm}}{c_{vm1}} \cdot \frac{\theta}{k_{m1}-1} - \frac{k_{m1} M_{m1}^2}{2} [U^2 + \sigma(2W^2 - U^2 - \frac{W^3}{U})] + \right.$$

$$\left. + \frac{c_{pp}}{R_{m1}} [(K_1^n - 1)\sigma_1 - (K'' - 1) \frac{\theta_c \sigma W}{U}] \right\} + (k_{m1} M_{m1}^2 - 1)U -$$

$$- \left(\frac{k_{m1} M_{m1}^2}{2} + \frac{k_{m1}}{k_{m1}-1} \right),$$

12.49/
c.d.

$$\frac{dW}{dX} = - \frac{3 \sigma_1}{8 \xi_c^2} \cdot \frac{(1-\sigma)(W-U)^2}{W[U + \sigma(W-U)]} \cdot C,$$

$$\frac{dV}{dX} = \frac{DR}{\tau_1 u_1 W} \left(\frac{\bar{g}_{ps}(\theta_c)}{\xi_c^2} - \frac{g_p}{\xi_c^2} \right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{DSh}{2\alpha r N}},$$

$$\frac{d}{dX} (\theta_c V) + \frac{c_c}{c_{pp}} K'' \cdot \frac{dV}{dX} = \frac{3}{2} \frac{R(\theta - \theta_c) \Lambda' Nu}{W}.$$

Prócz zmiennej niezależnej X , która nie pojawia się explicite w prawych stronach równań i funkcji szukanych $U, \theta, W, \theta_c, V$ w układzie /2.49/ występują stałe współczynniki i znane funkcje od $U, \theta, W, \theta_c, V$ określone w poprzednich paragrafach: $R_m, c_{vm}, k_m, K, \xi_p, R, N, C, Sh, Nu, \bar{g}_{ps}(\theta_c) = \xi_{ps}(T_c)$. Zależność współczynnika dyfuzji od ciśnienia i temperatury uwzględniono w postaci:

$$D = D_1 \left(\frac{p_1}{p} \right) \left(\frac{T}{T_1} \right)^n$$

por. [21]; dla wzajemnej dyfuzji powietrza i pary wodnej $n = 1,8$. Współczynniki lepkości i przewodnictwa ciepła przyjęte jako stałe.

W przepływie rządzone przez układ /2.49/ działają dwa istotne różniące się mechanizmy wymiany: wymiana "objętościowa" między molekułami fazy gazowej /tego samego rodzaju co w zwykłej fali uderzeniowej/ oraz "powierzchniowa" między fazą gazową, a zawieszoną cieczą. Ze względu na ograniczoną powierzchnię kropeł wymiana poszczególnych wielkości fizycznych między molekułami fazy gazowej /w odniesieniu do jednostki masy/ jest znacznie intensywniejsza, niż wymiana między cieczą a fazą gazową przez powierzchnię kropeł. W rezultacie wystąpić mogą 2 rodzaje obsza-

rów: obszary pierwszego rodzaju o bardzo dużych gradientach, ze zdecydowaną przewagą wymiany między molekułami fazy gazowej, praktycznie różniące się od zwykłej fali uderzeniowej i obszary drugiego rodzaju z małymi gradientami, o wartości których decydują przede wszystkim procesy wymiany masy, pędu i energii między fazą ciekłą a gazową, opisane przez 3 ostatnie równania układu /2.49/.

W każdym z tych obszarów układ /2.49/ sprowadza się do prostszej postaci. Oznaczmy:

$$/2.50/ \quad y_1 = U, \quad y_2 = \Theta, \quad y_3 = W, \quad y_4 = \theta_c, \quad y_5 = V.$$

Równaniom /2.49/ równoważny jest układ /2.51/ :

$$/2.51/ \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5), \quad i = 1, 2, \dots, 5.$$

W obszarze pierwszego rodzaju wymiana między fazami jest pomijalna, parametry cieczy pozostają zatem stałe. Zamiast /2.51/ mamy tam:

$$/2.52/ \quad \begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= f_i(y_1, \dots, y_5), & i &= 1, 2. \\ y_j &= \text{const.}, & j &= 3, 4, 5. \end{aligned}$$

W obszarze drugiego rodzaju, gdzie decyduje wymiana między fazami, zastąpimy /2.51/ przez /2.53/:

$$/2.53/ \quad \begin{aligned} f_i(y_1, \dots, y_5) &= 0, & i &= 1, 2, \\ \frac{dy_j}{dx} &= f_j(y_1, \dots, y_5), & j &= 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Między obszarami typu 1 i 2 winien istnieć pewien obszar przejściowy, w którym dla opisu zjawiska należy uwzględnić pełny układ /2.51/.

Występowanie w fali uderzeniowej obszaru pierwszego i drugiego rodzaju zależy od natężenia fali uderzeniowej i jest zwią-

sane z dyspersją dźwięku w ośrodku.

W oparciu o definicję fali uderzeniowej jako całego obszaru zakłóconej równowagi termodynamicznej stwierdziliśmy w 1.4, że przy zmierzaniu do sera nałężenia fali uderzeniowej, prędkość fali dąży do a_0 , a liczba Macha M_1 określona przez /1.45/ - do jedynki.

Inaczej przedstawia się sprawa, jeśli w tym samym ośrodku mamy do czynienia z falą uderzeniową typu klasycznego, odpowiadającą wspomnianemu wyżej, obszarowi pierwszego rodzaju. Za taką falą nie ma równowagi termodynamicznej, bowiem czas przejścia elementu zawieszony przez falę jest zbyt mały, by wprowadzić w ruch mechanizm parowania. Graniczną prędkością słabych fal tego typu jest prędkość dźwięku a bardzo dużej częstotliwości a_∞ , na którą parowanie kropeł nie wywiera żadnego wpływu. Jak stąd wynika przy takim przejściu granicznym zmierza do 1 liczba Macha \bar{M}_1 określona przez wzór /1.46/. Warunki Hugoniota dla takiej fali przybierają postać klasyczną /2.54/:

$$\begin{aligned} /2.54/ \quad \kappa_{m_1} \bar{M}_1^2 (1 - U_2') U_2' &= \theta_2' - U_2' , \\ \frac{\kappa_{m_1} - 1}{2} \bar{M}_1^2 (1 - U_2'^2) &= \theta_2' - 1 , \end{aligned}$$

gdzie U_2' i θ_2' oznaczają bezwymiarową prędkość i temperaturę za falą.

W pierwszej części pracy wprowadziliśmy podział na fale silne i słabe w zależności od tego czy u_1 jest większe, czy mniejsze od $a_{\infty 1}$. Sprecyzujemy bliżej sens tego podziału. Silna fala uderzeniowa ($u_1 > a_{\infty 1}$) składa się z dwu obszarów. W pierwszym z nich typu klasycznej fali uderzeniowej gaz na

krótkiej drodze ulega podgrzaniu i zahamowaniu. Dalej następuje obszar relaksacyjny typu drugiego, w którym ośrodek przez wymianę masy, pędu i energii między fazami wraca, na znacznie dłuższej drodze, do stanu równowagi. W przypadku fal słabych / $a_{01} < u_1 < a_{-1}$ / klasyczna fala uderzeniowa pojawić się nie może ze względu na istnienie słabych zaburzeń o prędkości większej od u_1 . Cały obszar takiej "całkowicie rozmytej" fali uderzeniowej jest typu drugiego. Na istnienie obu typów fal uderzeniowych w ośrodku z dyspersją dźwięku zwrócili uwagę Zeldowicz i Diakov [14], [15].

Jak już stwierdziliśmy, przepływ w obszarze typu 1 jest opisany przez układ /2.52/, a w obszarze typu 2 przez /2.53/. Ze względu jednak na duże gradienty w obszarze typu 1 i względnie małą jego grubość traktować będziemy ten obszar jako powierzchnię nieciągłości. W związku z tym określenie struktury fali uderzeniowej sprowadza się do następujących zadań matematycznych.

1° Dla fal silnych.

Rozwiązać układ /2.53/ przy warunkach początkowych:

$$\begin{aligned} U = U_2^1, \quad \theta = \theta_2^1, \quad z \text{ /2.54/} \\ W = \theta_c = V = 1. \end{aligned}$$

Ze względu na złożoną postać prawych stron równań rozwiązano układ numerycznie.

2° Dla fal słabych.

Rozwiązać układ /2.53/ przy warunkach brzegowych:

$$\begin{aligned} \text{dla } X \rightarrow -\infty & \quad U = \theta = W = \theta_c = V = 1, \\ \text{dla } X \rightarrow +\infty & \quad \left. \begin{aligned} U = W = U_2, \\ \theta = \theta_c = \theta_2, \\ V = V_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} z \text{ /1.51/} \\ \text{lub /1.52/.} \end{aligned} \end{aligned}$$

Ponieważ prawa strony równań nie zależą od X , możemy dzieląc przez siebie równania stronami zastąpić układ /2.53/ przez /2.55/:

$$\begin{aligned} /2.55/ \quad f_1 = 0 \quad , \quad f_2 = 0 \quad , \\ \frac{dW}{dV} = \frac{f_2}{f_5} \quad , \quad \frac{d\theta_c}{dV} = \frac{f_4}{f_5} . \end{aligned}$$

Nieskończonym wartościom X odpowiadają punkty osobliwe równań /2.55/. Układ /2.55/ rozwiązano numerycznie wychodząc z punktu odpowiadającego $X = -\infty$.

2.7 Szczególny przypadek. Struktura fali słabej w ośrodku z małą koncentracją cieczy.

Równania /2.55/ można scałkować efektywnie w szczególnym przypadku fal słabych z całkowitym odparowaniem w ośrodku z dostatecznie małą koncentracją cieczy. Jak wynika z /1.58/, na takiej fali prędkość i temperatura zmieniają się mało, jeśli tylko \bar{M}_1 nie jest zbyt bliskie 1. Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} /2.56/ \quad U_2 - 1 = \Delta U = -\frac{\Delta U}{\Delta V} = O(\sigma_1), \\ \theta_2 - 1 = \Delta \theta = -\frac{\Delta \theta}{\Delta V} = O(\sigma_1). \end{aligned}$$

Przyrosty U i θ na fali są rzędu σ_1 .

Przy rozważaniu struktury fali uderzeniowej założymy, że także pochodne obu prędkości i temperatur względem V w całym obszarze fali uderzeniowej są rzędu σ_1 :

$$/2.57/ \quad \frac{dy_j}{dV} = O(\sigma_1) \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Wtedy y_j można przedstawić w postaci:

$$/2.58/ \quad y_j = 1 + \sigma_1 A_j(V) \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Jednocześnie na mocy /2.57/ na krzywej całkowej spełnione są warunki:

$$/2.59/ \quad \frac{f_3}{f_5} = 0(\sigma_1) \quad , \quad \frac{f_4}{f_5} = 0(\sigma_1).$$

Z rozwinięcia f_5 na szereg Taylora w otoczeniu punktu początkowego z dokładnością do wyrazów stopnia > 1 mamy:

$$/2.60/ \quad \begin{aligned} f_5(y_j) &= f_5(y_{j-1} + \Delta y_j) = f_5(y_{j-1}) + \sum_{j=1}^5 \frac{\partial f_5}{\partial y_j} \Delta y_j = \\ &= (1-V) \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial f_5}{\partial y_j} A_j \sigma_1 + \frac{\partial f_5}{\partial y_5} \right). \end{aligned}$$

Różniczkując f_5 względem y_5 łatwo sprawdzić, że odpowiednia pochodna jest rzędu σ_1 :

$$\frac{\partial f_5}{\partial y_5} = \frac{\partial f_5}{\partial V} = 0(\sigma_1),$$

jeżeli $\sigma_1 \ll \tau_1$; wtedy z /2.60/

$$/2.61/ \quad f_5 = 0(\sigma_1)$$

a po uwzględnieniu /2.59/:

$$/2.62/ \quad f_3 = 0(\sigma_1^2) \quad , \quad f_4 = 0(\sigma_1^2).$$

Podstawy do układu /2.53/ zamiast y_k $k=1, 2, 3, 4$ odpowiednie wyrażenia z /2.58/ pomijając wyrazy kwadratowe i wyższego stopnia względem σ_1 . Na mocy /2.62/ mamy:

$$/2.63/ \quad f_3 = 0 \quad , \quad f_4 = 0.$$

Układ /2.53/ można więc zastąpić przez jedno równanie różniczkowe oraz 4 liniowe jednorodne równania algebraiczne:

$$/2.64/ \quad \frac{dV}{dX} = g(V, A_j),$$

$$/2.65/ \quad \sum_{j=1}^4 \alpha_{ij}(V) A_j = \beta_i(V). \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

Rozwiązując układ /2.65/ względem R_j i przechodząc od bezwymiarowej objętości kropli V do bezwymiarowego promienia R możemy z /2.58/ wyrazić zmienne y_j $j=1, 2, 3, 4$ jako funkcje R :

$$\begin{aligned} U &= W = 1 + B_1 \sigma_1 (1 - R^3), \\ /2.66/ \quad \theta &= 1 + B_2 \sigma_1 (1 - R^3), \\ \theta_c &= 1 + B_2 \sigma_1 (1 - R^3) \cdot \frac{B_4 R - B_5}{B_5 R - B_6}. \end{aligned}$$

W szczególności na skutek proporcjonalności f_3 do $(W-U)^2$ prędkości obu faz są sobie równe.

Równanie /2.64/ po uwzględnieniu /2.66/ przyjmuje postać:

$$/2.67/ \quad \frac{dR}{dX} = B_7 B_8 \frac{1 - R^3}{B_5 R - B_6}$$

Stałe $B_1 - B_8$ są określone przez wzory /2.68/:

$$\begin{aligned} /2.68/ \quad B_1 &= \frac{K_1' - \frac{R_p}{R_{m1}}}{M_{m1}^2 - 1}, \\ B_2 &= \left(\frac{R_p}{R_{m1}} - \frac{K_{m1} M_{m1}^2 - 1}{K_{m1} - 1} K_1' \right) \frac{K_{m1} - 1}{M_{m1}^2 - 1}, \\ B_3 &= \frac{D_0 \rho_{p1} c_{pp}}{\lambda} \left(\frac{c_c}{c_{pp}} - K_1'' \right), \\ B_4 &= B_3 \frac{1/\tau_1 - B_1}{B_2} - 1, \\ B_5 &= B_3 \left(\frac{K_p}{K_p - 1} K_1'' - 1 \right) - 1, \\ B_6 &= \frac{D_0}{\alpha r_1} \sqrt{\frac{2\pi}{R_p T_1}}, \\ B_7 &= \left(\frac{K_p}{K_p - 1} K_1'' - 1 \right) B_2 + B_1 - \frac{1}{\tau_1}, \\ B_8 &= \frac{D_0 \rho_{p1} \sigma_1}{r_1 u_1 \rho_c^*}. \end{aligned}$$

Jak widać z /2.67/, R może mieć tylko jedną wartość asymptotyczną $R=1$. Druga wartość asymptotyczna odpowiadająca $X \rightarrow +\infty$ została usunięta w wyniku przeprowadzonej linearyzacji.

W związku z tym równanie /2.67/ nie opisuje struktury fal z częściowym odparowaniem, dla których rozwiązania mają 2

asymptoty.

Po scałkowaniu /2.67/ i przyjęciu $X=0$ dla $R=0$ rozwiązanie przyjmuje postać:

$$/2.69/ \quad B_9 X = \ln \frac{\sqrt{R^2+R+1}}{1-R} + B_{10} \left(\frac{\pi}{6} - \operatorname{arctg} \frac{2R+1}{\sqrt{3}} \right),$$

gdzie

$$B_9 = \frac{3 B_7 B_8}{B_5 - B_6},$$

$$B_{10} = \sqrt{3} \frac{B_5 + B_6}{B_5 - B_6}.$$

Rozwiązanie /2.69/ opisuje przepływ dla X od $-\infty$ do 0. Temu zakresowi X odpowiada zmienność R od 1 do 0. Od punktu, w którym R osiąga wartość 0 /tan. dla $X > 0$ / przepływ staje się jednorodny. Rozwiązanie /2.69/ daje wtedy nonsensowny fizycznie wynik $R < 0$.

2.8 Omówienie wyników

Niżej przedstawimy niektóre rezultaty obliczeń otrzymanych dla struktury fal uderzeniowych w powietrzu z mgłą wodną. Obliczenia wykonana dla jednej wartości ciśnienia i temperatury $p_1 = 1 \text{ atm.}$, $T_1 = 283^\circ\text{K}$ i kilku wartości pozostałych parametrów: M_1 , σ_1 , r_1 .

Rys.5 przedstawia strukturę silnej fali uderzeniowej w dwu przypadkach: dużej i małej koncentracji cieczy. Pierwszemu przypadkowi $\sigma_1 = 0,1$ odpowiadają na wykresie linie ciągłe, a drugiemu $\sigma_1 = 10^{-4}$ - linie przerywane. Bezpośrednio za powierzchnią nieciągłości, na skutek różnicy prędkości i temperatur obu faz, następuje szybkie hamowanie i grzanie się kropel. Jednocześnie w wyniku wzrostu gęstości pary na powierzchni nieciągłości przy zachowaniu początkowo nie-

zmienionej temperatury kropel para kondensuje się na kroplach. Jednakże ze względu na szybki wzrost θ_c przyrost V jest nieznaczny i niezauważalny na wykresie /we wszystkich przypadkach, dla których przeprowadzono obliczenia maksymalny przyrost V nie przekracza 0,1%/.

Gwałtowne początkowo hamowanie kropel, podobnie jak i kondensacja pary powodują wzrost temperatury nie tylko kropel, lecz w przypadku dużej koncentracji cieczy, również grzanie się gazu. Wkrótce jednak procesy zmierzające w przeciwnym kierunku, chłodzące gaz - parowanie kropel i przewodnictwo cieplne - przeważają i temperatura fazy gazowej po osiągnięciu maksimum maleje. Również temperatura kropel osiąga maksimum, jeżeli w początkowym okresie szybkiego wzrostu przekroczy wartość asymptotyczną. W przeciwnieństwie do W i θ_c objętość kropli V zaczyna maleć z pewnym opóźnieniem, co jest spowodowane początkowym zjawiskiem kondensacji pary.

Prostszy jest przebieg zjawiska w ośrodku z małą koncentracją cieczy. W tym przypadku prędkość i temperatura gazu w całym obszarze za powierzchnią nieciągłości pozostają praktycznie stałe, a zmieniają się jedynie parametry cieczy. Na wykresie θ_c , w obszarze, w którym nastąpiło wyrównanie prędkości obu faz, pojawia się wtedy charakterystyczne plateau. Jak pokazał Maxwell^{well} [12], [8] przy kwaziustalonym parowaniu spoczywającej w gazie kropli ustala się określona różnica między temperaturą kropli, a temperaturą gazu w nieskończoności, przy czym różnica ta nie zależy od promienia kropli. Temu właśnie reżymowi parowania odpowiada plateau na wykresie θ_c /linia przerywana/. Ponowny wzrost

temperatury kropli następuje wtedy, kiedy zaczynają grać rolę nie uwzględnione przez Maxwella, efekty związane z małymi rozmiarami kropli,

Rys.5 odnosi się do jednorodnej zawiesiny z początkowym promieniem kropli $r_1 = 1\mu$. Analogiczne wykresy dla

$r_1 = 10\mu$ pokazano na rys.6.

Na rys.7 i 8 przedstawiono profile fali słabej dla dwu wartości liczb Macha: $M_1 = 1,07$ i $M_2 = 1,15$.

Ze wzrostem liczby Macha oszko profilu U i θ staje się coraz bardziej strome dając ciągle przejście od fal słabych do silnych. W przedstawionych na rys.7 i 8 przypadkach wartości $\bar{M}_1 = 1$ odpowiada $M_1 = 1,2$. Dokładniej przejście od fali słabej do silnej na przykładzie profilu temperatury gazu ilustruje rys.9.

Sz szczególnie interesująca jest ocena grubości fali uderzeniowej. Jak widać z przytoczonych wyżej wykresów, zależy ona od tego, jaki parametr przyjął za podstawę oceny. Odnosi się to zwłaszcza do fal silnych. Grubość takich fal uderzeniowych obliczona na podstawie profilu prędkości jest mniejsza, niż w oparciu o profil temperatury lub koncentracji cieczy. Należy podać pewne oceny grubości fali uderzeniowej otrzymane z profilu koncentracji cieczy /ściślej, objętości kropli/. Najprostszym i najważniejszym zarazem przykładem małej koncentracji cieczy.

Określimy grubość fali wzorem:

$$/2.70/ \quad \Delta X = \frac{V_2 - 1}{\frac{dV}{dX}|_{X=X_0}}$$

Dla silnych fal przy $\alpha_1 \ll 1$ mamy płaski odcinek na wykresie θ_c . Pochodną $\frac{dV}{dX}$ we wzorze /2.70/ znajdujemy

dla wartości:

$$U = W = U_2 ,$$

$$\theta = \theta_2 , \quad V = 1 , \quad \theta_c = \theta_{c0} ,$$

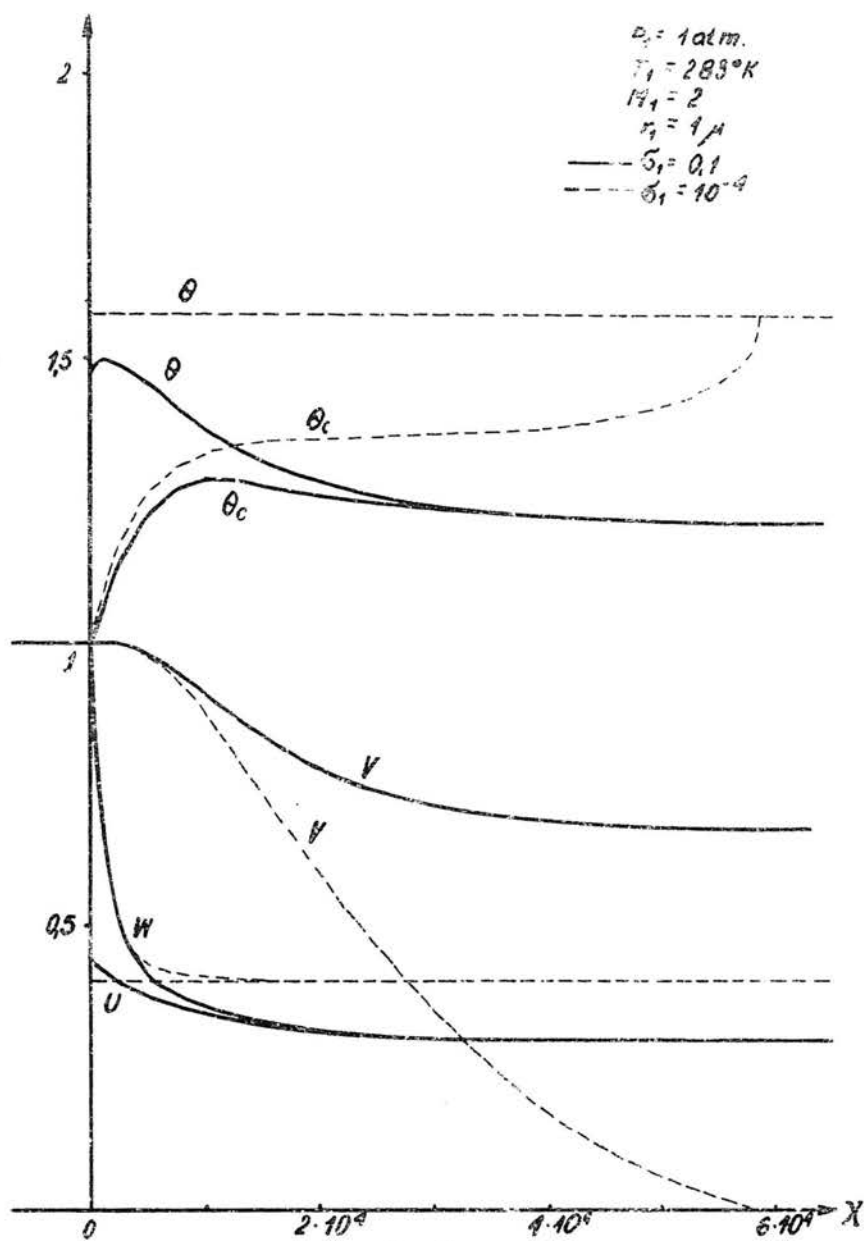
gdzie θ_{c0} oznacza wysokość plateau. θ_{c0} określamy przyrównując do zera pochodną θ_c

$$\frac{d\theta_c}{dX} = f_5(U, \theta, W, \theta_c, V) = 0$$

i podstawiając na U, θ, W, V przyjęte wyżej wartości.

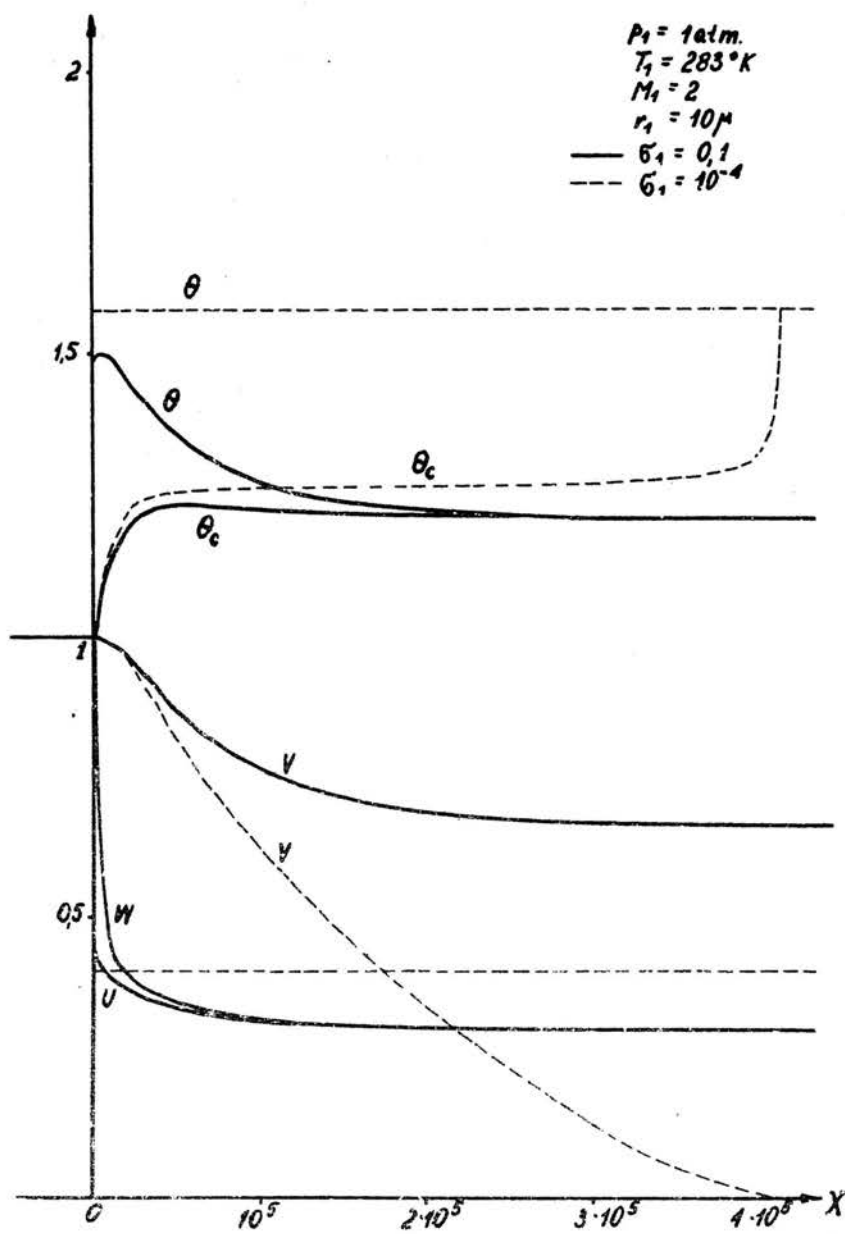
Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że grubość fali silnej praktycznie nie zależy od σ_1 . Łatwo to zrozumieć, bowiem przy dostatecznie małej koncentracji cieczy parowanie kropeł wywiera nieznaczny wpływ na parametry fazy gazowej. Krople parują praktycznie w stałym środowisku i zmiana gęstości liczbowej kropeł /odpowiadająca zmianie σ_1 / nie ma wpływu na los indywidualnej kropli. Rezultaty obliczeń grubości fali przedstawiono na rys.10 dla 2 wartości promienia kropeł.

Dla fal słabych pochodną $\frac{dV}{dX}$ można ocenić w punkcie przegięcia profilu V na podstawie wzorów teorii zlinearyzowanej /2.69/. Z /2.61/ wynika, że przy dążeniu σ_1 do zera $\frac{dV}{dX}$ maleje wraz z σ_1 , podczas gdy przedział zmienności V /dla fal z całkowitym odparowaniem/ jest stały. Grubość fal słabych określona z /2.70/ w przeciwieństwie do fal silnych zależy przy tym od koncentracji cieczy i dla małych wartości tej koncentracji jest odwrotnie proporcjonalna do σ_1 .



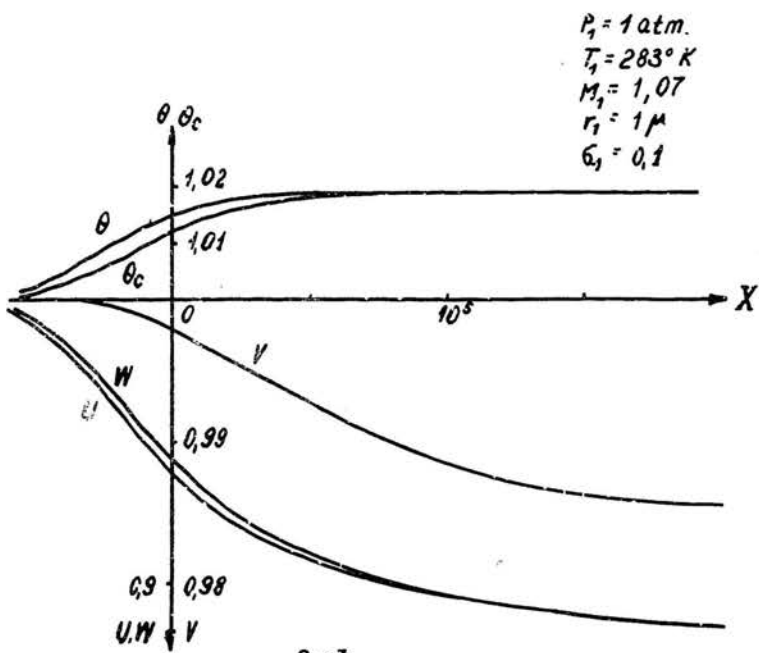
Rys.5

Struktura silnej fali uderzeniowej



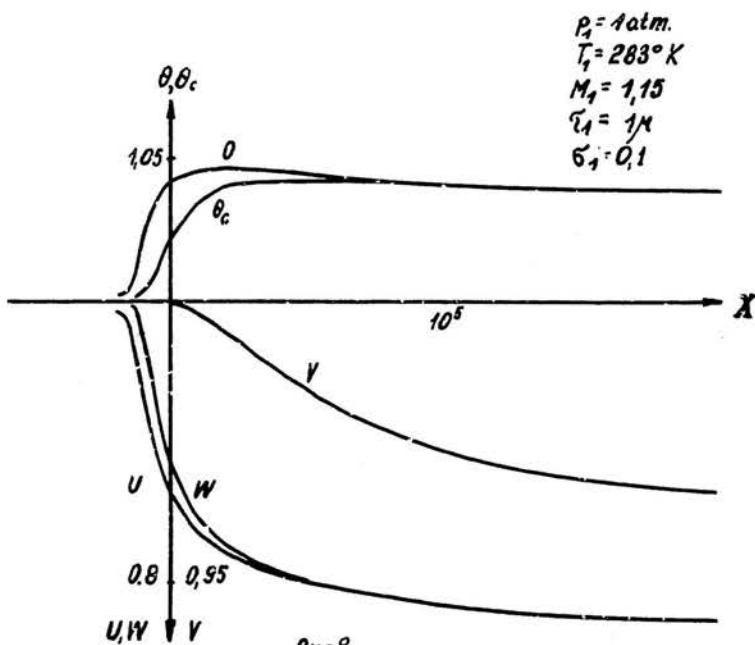
Rys 6

Struktura silnej fali uderzeniowej



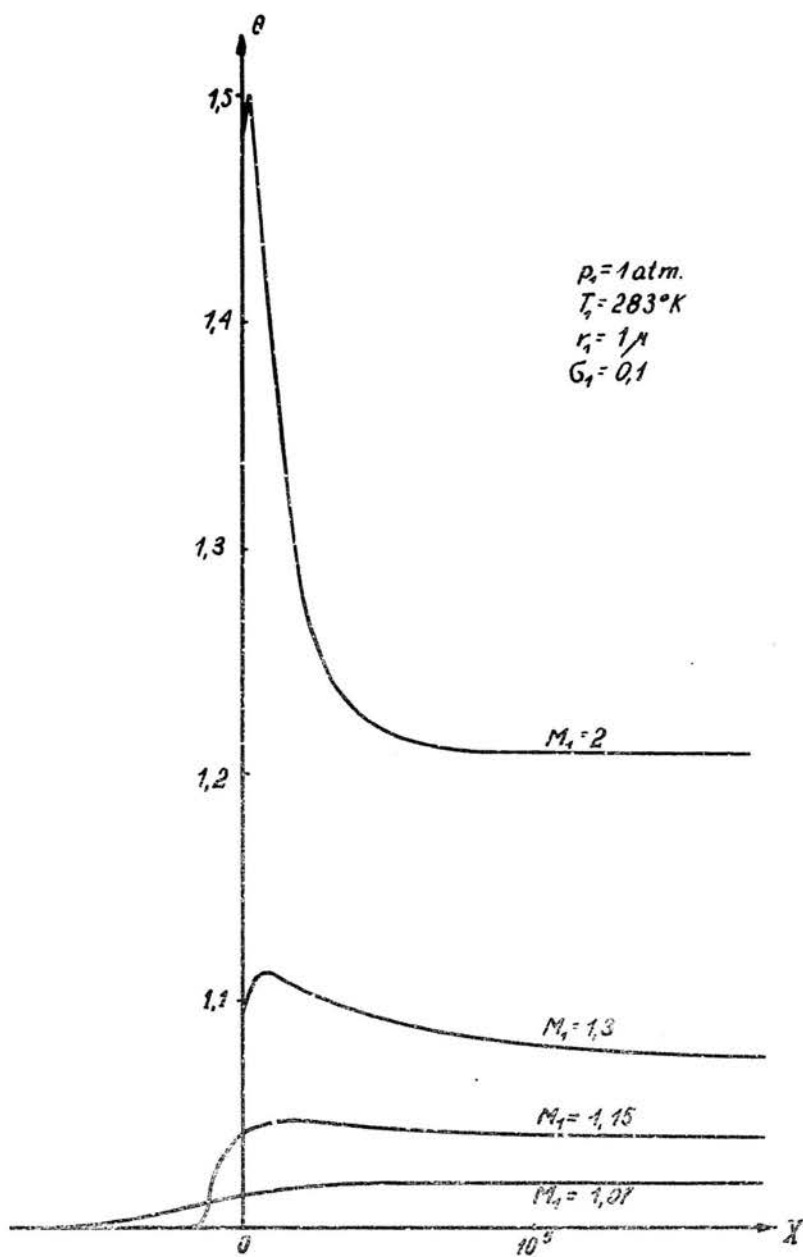
Rys 7

Struktura słabej fali uderzeniowej



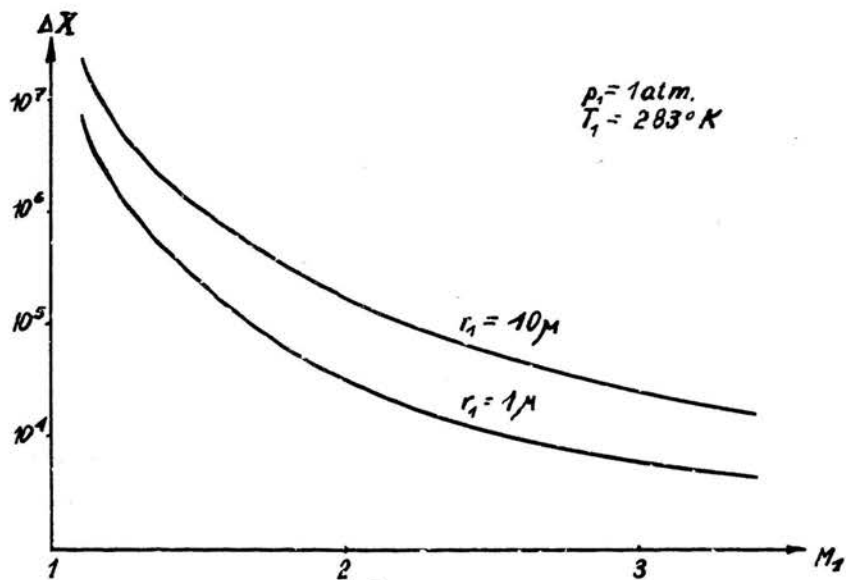
Rys 8

Struktura słabej fali uderzeniowej



Rys. 9

Profil temperatury gazu dla słabych i silnych fal uderzeniowych.



Rys. 10

Srubaść silnych fal uderzeniowych

L i t e r a t u r a

- [1] R.D.Buhler - Condensation of air components in hypersonic wind tunnels, Ph.D.Thesis, Calif.Inst.of Technol., Pasadena, California 1952.
- [2] F.W.Ross - Propagation in a compressible fluid of oblique disturbances with energy exchange and change of state, Journal of Applied Physics, 22 /1951/, s.1414.
- [3] J.Grey - The effects of air condensation on properties of flow, Ph.D.Thesis, Calif.Inst.of Technol., Pasadena, California 1952.
- [4] C.F.Hansen, G.J.Nothing - Condensation of air in supersonic wind tunnels and its effects on flow about models, N.A.C.A. T.N., n.2690 /1952/.
- [5] P.P.Wegener, L.M.Mack - Condensation in supersonic and hypersonic wind tunnels, Advances in Applied Mechanics, v.5 /1958/.
- [6] J.Werle - Termodynamika fenomenologiczna, PWN Warszawa 1957.
- [11] R.J.Priem - Breakup of water drops and sprays with a shock wave, Jet Propulsion, n.10, v.27, /1957/, s.1084.
- [12] J.C.Maxwell - Collected scientific papers, v.2, Cambridge 1890.
- [13] L.Frandtl - Dynamika przepływów, PWN Warszawa 1956
- [17] J.Meixner - Allgemeine Theorie der Schallabsorption in Gasen und Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der Transporterscheinungen, Acustica, v.2, /1952/, s.101.
- [18] B.Paul - Compilation of evaporation coefficients A.R.S. Journal, n.9, v.32, /1962/, s.1321 - 1328.

- [19] Fundamentals of gas dynamics. Editor H. Simmons, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1958.
- [20] A. May - Supersonic drag of spheres at low Reynolds numbers in free flight, Journal of Applied Physics, n.8, y.28, /1957/, s.910.
- [22] H. Felachek, R.J. Seeger - Physical Review, v.84, /1951/, s.922.
- [7] Г.О. Дудяков, соотношения для расчета скорости звука в газопарообразной среде, Известия АН СССР, отделение технических наук, механика и машиностроение, в. 3, /1960/
- [8] Н.А. Фукс, Испарение и рост капель в газопарообразной среде, Издательство АН СССР, Москва 1958.
- [9] М.С. Волынский, Изучение дробления капель в газовом потоке, ДАН СССР, в.2 /1949/
- [10] А.А. Вазуков, Разрушение капель и струй жидкости воздушной ударной волной, Журнал прикладной механики и технической физики, в.2, /1963/ с.154-158.
- [14] Я.В. Зельдович, О распространении ударных волн в газе с обратимыми химическими реакциями, Журнал экспериментальной и теоретической физики, т.16/1946/, с.365
- [15] С.П. Дыков, Ударные волны в релаксирующей среде, Журнал экспериментальной и теоретической физики, в.6, т.27, /1954/, с. 728-734.
- [16] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Сосредоточен, Москва 1954.
- [21] Н.Б. Вargaфтик, Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1963.

Ударная волна в газопарожидкостной среде

Содержание

Рассматриваются плоские, стационарные ударные волны в среде являющейся смесью газа, насыщенного пара и мелкодисперсной жидкости. В первой части работы представлены условия на бесконечности для данного класса ударных волн. Особое внимание обращается на исследование влияния дисперсии звука в среде с насыщенным паром на распространение ударных волн. Исходя из факта существования двух граничных скоростей звука проведена классификация ударных волн. Во второй части работы выведены и проанализированы уравнения структуры ударной волны. В одном частном случае слабых волн получено аналитическое решение. В качестве примера решены численно уравнения для конкретной среды: воздуха с влажным водяным паром.

Propagation of shock wave in a gas-vapour mixture

with dispersed drops

Summary

The propagation of stationary shock wave in a medium consisting of gas, vapour and liquid /in form of spherical drops/ is concerned. In the first part the generalized Rankine - Hugoniot conditions for such a medium are obtained. It is shown that in considered type of medium sound velocity depends on frequency. The dispersion of sound velocity is taken as a basis of classification of shock waves used throughout in the paper. In the second part the analysis of shock wave structure is given. This is done on the basis of appropriate differential equations which are solved numerically /except one special case of weak shock waves for which solution is expressed in analytical form/.