L'INFINITO

352

1106

1106

L'INFINITO

NELLE

SCIENZE MATEMÀTICHE E NATURALI

PER

VALERIANO VALERIANI

PROF. DI MATEMATICA NEL R. LICEO DI PADOVA

PADOVA

TIPOGRAFIA ALLA MINERVA DEI FRATELLI SALMIN

1881.

L'INFINITO NELLE SCIENZE MATEMATICHE E NATURALI

INTRODUZIONE

> Die Welt ist so ungereimt nicht, zu denken, ein Gelehrter von Range sei der Gefahr zu irren gar nicht mehr unterworfen. — Kant.

Il concetto dell' infinito assoluto esce dai limiti d' ogni reale contemplazione, e non si può introdurre nel campo della scienza, senza cadere nelle più assurde contraddizioni.

Ma i tentativi, coi quali si è cercato di bandire dai varii campi dello scibile queste contraddizioni, ebbero da ultimo un esito felice. Ed invero la critica moderna ha almeno il vanto d' aver saputo porre le più ardue questioni in termini precisi, giungendo a distinguere pienamente il campo della scienza da quello della fede. Così il finito e l' infinito, anzichè essere due concetti contradditorii, come risulta seguendo le viete dottrine della filosofia scolastica (*), considerati nel senso relativo, si rischiarano e completano a vicenda, e sono non meno utili che necessarii l'uno all'altro (1). Onde a torto Giuseppe Ferrari nella sua pur bella ed interessante opera: *La filosofia della rivoluzione* — affermò: « Il finito e l'infinito si suppongono, si accusano e si escludono mutuamente, non vi ha scelta possibile, e dobbiamo accettare la contraddizione matematica dell'universo. »

(*) Ora invano richiamate in vigore dal Papa Leone XIII.

Queste contraddizioni dei nostri tra i maggiori filosofi (*), eziandio posteriori all'epoca del risorgimento, sono una conseguenza del male portato ai cervelli umani dalle caste sacerdotali, che ad ogni costo vollero e vorrebbero tuttora confuso il campo della scienza con quello della fede, adoperando a tale scopo tutte le torture che riescono ad affievolire l'animo e il corpo. Ma « fra chi crede e chi esamina non avvi lotta possibile. Essi camminano e sanno di camminare per opposti sentieri. »

Emanuele Kant fu l'iniziatore di questo metodo veramente sincero, libero ed indipendente di trattare la verità, la cui mercè già da un secolo si vanno studiando i più grandi problemi, i quali presentano il massimo interesse sia dal lato speculativo, che da quello pratico.

Questo giudizio sullo stato attuale della filosofia, o meglio delle scienze in generale, le quali mostransi decise di far ritorno alle idee e ai metodi del Kant, fu già espresso felicemente dal Renouvier e dal Ribot, nei loro noti e giustamente apprezzati lavori di critica filosofica; anzi, come giustamente osserva il Prof. Giacomo Barzelotti (**): «il concetto fondamentale della critica è accettato e presupposto dallo Spencer (vedi *Primi principi*) e da tutta, si può dire, la scuola filosofica scientifica in Inghilterra, e dai suoi numerosi e crescenti seguaci francesi e americani».

Ma il libro che si può citare, come il più interessante a questo riguardo, si è la *Storia* del *Materialismo* di F. Alberto Lange. Gli è a questo energico e valente scrittore, che in gran parte è dovuto il risveglio di quella scientifica filosofia, osteggiata da un lato dagli esagerati cultori dell'idealismo quasi direi immaginario, negletta dall'altro e persino dispregiata da coloro che per converso rifuggono volgarmente da ogni dottrina che tenti elevarsi nei campi non meno reali e fecondi delle idee positive, che sono il prodotto ed il cumulo dell'osserva-

---

(*) Vedi il mio lavoro: Maurizio Bufalini e il metodo sperimentale. Sassari 1877.

(**) Nel suo bel lavoro: La nuova scuola di Kant e la filosofia scientifica contemporanea in Germania. — Nuova Antologia. — Fascicolo IV, 15 Febbraio 1880.

zione e dell' esperienza e che costituiscono l' unica scorta sicura per la ragione (2).

Tuttavia non son pochi i partigiani di quella filosofia, che si potrebbe chiamar parolaia, in opposizione all'altra che merita il nome di scientifica (*), i quali vorrebbero ancora conciliare la scienza colla fede.

L'unica via di conciliazione, che però non risponde ai desideri di costoro, si è quella di lasciare ciascuna nel proprio campo, imperocchè esse non possono aver nulla di comune. La scienza infatti ha per base questo principio pratico e ragionevole, del quale l'uomo fin dal suo nascere ha continue e tremende prove: *la materia governa l'uomo;* la fede invece si fonda sull'opinione che l'uomo, o almeno la sua anima sia non solo indipendente dalla materia, ma anzi, come parte del creatore, capace di governare la materia. Da queste due opposte maniere di considerar l'uomo in mezzo l'universo, dipende l' indirizzo scientifico, morale e sociale che distingue l'età presente dall'oscurantismo non ha guari imperante in molti paesi anche civili del globo. Ma la materia continua a governar l'uomo, e paga ben caro il fio chi disconosce o dimentica anche per un solo istante l' assoluto e continuo suo impero.

Pertanto anche al dì d' oggi nello studio d' ogni scienza, ma segnatamente nella parte più elevata, cioè filosofica delle singole discipline, in una parola nella Filosofia, sono essenzialissime doti la nobiltà e l'indipendenza del carattere, e l'altezza e libertà delle vedute, senza cui lo studioso non può dar opera con retto giudizio all' investigazione del vero (3).

(*) Veggasi a questo proposito la nuova *Rivista di Filosofia Scientifica* diretta da E. Morselli, il cui primo numero uscì nel Luglio di questo anno. L'articolo (programma) *La filosofia e la scienza*, mette pienamente in rilievo l' importanza e l' indirizzo della nuova filosofia.

Come opportuni per questo argomento posso citare eziandio i seguenti miei quattro lavori:

1. I metodi nel Duhamel e la logica del Condillac. — *Rivista Europea*, anno 1875.

2 Maurizio Bufalini e il metodo sperimentale. Sassari 1877.

3. Il Verismo nell'arte e nella scienza. *Bullettino della Società Veneto-Trentina di Scienze Naturali.* Aprile 1881.

4. La teoria dell'evoluzione e la libertà. *Bullettino* medesimo. Giugno 1881

Uno dei più valenti seguaci della scuola Kantiana in Francia, che si è occupato della questione dell'infinito, è il Renouvier. E benchè io non condivida interamente tutte le opinioni sostenute da questo eletto ingegno nel suo bel lavoro: *L'infini, la substance et la liberté* (par Ch. Renouvier — Année philosophique de F. Pillon. Deuxième année — Paris 1869) — devo tuttavia dichiarare, aver egli felicemente raggiunto il suo scopo dimostrando, come l'infinito assoluto non abbia ragione di essere presso verun sistema filosofico, mentre esso conduce alle più aperte contraddizioni in ogni ramo di ricerca scientifica.

Il Renouvier nega all' infinito il nome di numero. Ciò sarebbe esatto e quindi anche necessario nel senso logico, qualora il concetto di numero si arrestasse alla comune nozione che di esso dà l'aritmetica ordinaria: ma nell'aritmetica generale questo concetto (*) va allargandosi ed estendendosi a seconda dei nuovi enti che si trova necessario ed opportuno d'introdurre, onde eziandio quello del numero infinito ha piena ragione di essere, almeno nel modo relativo, che in appresso avrò occasione di meglio dichiarare. Così la serie dei numeri si suol dire infinita nel senso, che non è possibile assegnare l' ultimo suo termine, seguendo il processo di generazione, che le è proprio; che anzi dopo averne assegnato uno qualunque per quanto grande esso sia, se ne possono immaginare di maggiori quanti si vogliono. Rappresentando col simbolo infinito quel primo termine della serie, che si suppone superiore a qualsivoglia numero finito, non si cade punto in contraddizione, purchè si mantenga al simbolo medesimo il solo significato relativo di cui è capace, cioè di numero maggiore di qualunque altro per quanto grande esso sia, sempre possibile se non attuabile, e suscettivo inoltre d'essere ripetuto (4).

In questo fatto, nel quale implicitamente è contenuta l' impossibilità di aumentare l' infinito nel senso primitivo, che già si suppone esaurito, e la possibilità invece di aumentare l' infinito medesimo in un altro senso, introducendo nella funzione una nuova variabile, trovasi conciliata l' idea relativa

(*) Veggasi il mio lavoro: Genesi delle operazioni aritmetiche. — Paravia Torino 1875.

d' infinito colla possibilità di variare, propria della grandezza ordinaria e finita. Insomma è qui, sebbene non del tutto esplicitamente e pienamente, stabilito quel principio fondamentale proprio della grandezza astratta, applicabile alla dottrina superiore degli spazii, che cioè l' infinito relativo resta ancora un concetto suscettivo di diverse determinazioni. Segue da ciò che le regole del calcolo sono applicabili al numero infinito, per la qual via il Fontenelle, come avremo occasione di vedere in appresso, giunge a notevoli conclusioni, la cui importanza è molto grande sia per il calcolo, che per la geometria.

Alla nozione dell' infinito va strettamente congiunta quella del continuo. Ora è evidente che negando all' infinito assoluto ogni attualità, debbasi pur negarla al continuo assoluto. La continuità dello spazio, del tempo, del moto e della materia, e così d'ogni varietà, hanno quindi luogo soltanto in un modo affatto relativo, nel senso del possibile cioè del limite, secondo lo stesso concetto fondamentale del calcolo differenziale. Lo zero della matematica, come avrò più volte occasione di notare, non è un nulla assoluto ma bensì relativo, giustamente chiamato dall'Hesse il Mefistofele dell'Algebra (*). È soltanto così che si evitano le contraddizioni, e si salva la realtà delle cose tenendole strettamente congiunte, cioè distinguendole senza mai dividerle assolutamente. L'addizione all' infinito e la divisione all' infinito, non sono mai attuabili realmente, e restano vere soltanto in potenza, mentre ciò è sufficiente a spiegare chiaramente la serie dei fenomeni, senza cadere in contraddizione.

Il Leibniz erasi espresso molto felicemente in proposito dell' infinito, finchè rimase nel campo delle matematiche; non così avvenne quand' egli volle trattare la questione in altro campo, cioè in quello della metafisica. Egli pure, ad onta della sua straordinaria potenza di genio, dovete cadere nell' ordinaria contraddizione che nasce dal concetto dell' infinito assoluto. Celebre è su questo proposito la corrispondenza da lui tenuta con I. Bernouilli (Leibnitii et I. Bernuillii Commercium epistolarium — Epist. 74-88). La controversia aggirasi principalmente sull' opinione espressa dal Leibniz, il quale affermando l'esistenza attuale d'un numero infinito di parti nella

(*) Vedi: Die vier Species — del Dott. Otto Hesse.

materia, negava tuttavia, contraddicendosi in modo sistematico, che queste parti possano essere attualmente infinitesime.

Ma il Professor Evellin, nel suo lavoro *Infini et quantité* (*), si unisce al Renouvier per confutare l'opinione dei fratelli Bernouilli e del De Fontenelle, i quali conseguenti ai principii fondamentali del calcolo infinitesimale secondo il Leibniz, ammettevano la realità del numero infinito e infinitesimo, estendendone il concetto ai loro ordini successivi. In questo modo di considerare l'infinito tutta la difficoltà si riduce ad intendere la relatività del concetto medesimo, relatività che del resto s'impone da se medesima ed è anzi una necessaria conseguenza di tutto il sistema, mentre essa toglie ogni contraddizione rendendo conciliabili le diverse teorie. L'autore invece assorbito dalla sua idea dell'assoluto, ch'egli non ha il coraggio di abbandonare, tende da un lato ad approvare, come logiche, dall'altro a condannare, come assurde, le conclusioni stabilite da quei grandi matematici (5).

Le obbiezioni analoghe fatte dal Buffon e da Augusto Comte a questa teoria, si fondano sulle stesse esagerazioni o meglio restrizioni mentali, che non devono far meraviglia anche in uomini pur grandissimi, ma tuttavia non entrati nello spirito della matematica odierna, i cui progressi dal lato speculativo e pratico hanno pur dimostrato che il rigore dell'antica matematica non ha anch'esso nulla di assoluto, e le stesse teorie più elementari e fondamentali hanno un senso relativo e sono soltanto suscettive di una esattezza approssimativa nel senso del limite, come chiaramente apparisce allorchè si spingono fino alle loro prime origini ovvero fino alle loro ultime conseguenze.

In altri termini è il concetto della continuità (relativa), che campeggia costantemente sia nel calcolo, che nella geometria analitica, i cui progressi hanno oggigiorno messo in evidenza la sua suprema importanza anche in parecchie questioni di calcolo, che a primo aspetto sembrano non accessibili all'indole delle sue investigazioni.

Pertanto negando ai concetti dell'infinito e del continuo la capacità di rendersi attuali nel senso assoluto, ma concedendo ad essi soltanto una realità in potenza, non viene punto scemata

(*) Paris 1881 — pag. 185.

la importanza loro sia nell'ordine reale che ideale. In tal guisa l'infinito ed il continuo acquistano anzi per noi un carattere di subbiettività molto opportuno alla trattazione delle questioni speculative, poichè facendone l'applicazione nel campo obbiettivo, la nostra mente rimane libera di abbracciare tutte le ipotesi possibili, pesandone il rispettivo grado di probabilità, dopo di averle bene analizzate e discusse mercè il doppio controllo dell'esperienza e della ragione.

Un esempio luminoso e convincente dell'opportunità e generalità di questo metodo, nella trattazione delle questioni, venne ultimamente offerto in geometria da quell'illustre scuola che ha Gauss per capo, e che applicando convenientemente il concetto dell'infinito locale, giunse a stabilire su solide basi una vera e vigorosa teoria delle parallele.

Gli è del pari coll'osservazione e coll'esperienza sussidiate dal calcolo, che Leonardo da Vinci e Galilei inaugurarono fino dall'epoca del risorgimento una vera rivoluzione in tutti i rami delle scienze fisiche e naturali (*). Ma al dì d'oggi non solo la fisiologia, ma benanco la psicologia iniziata dall'Herbart e progredita mano mano cogli studi accurati del Lotze, del Fechner, dell'Helmoltz e del Wundt, per tacere di molti altri, conseguì un indirizzo veramente sistematico e positivo, in conseguenza del quale si eliminarono molti errori e molte contraddizioni, già introdotti dalla scolastica nelle vecchie dottrine dell'anima, ed inoltre si spiegarono parecchi fenomeni secondo i quali funziona lo spirito umano, come a cagion d'esempio la legge psicofisica del Fechner: *La sensazione è proporzionale al logaritmo dell'eccitazione.*

In tal guisa si ebbe una prova ben chiara e convincente dell'identità del metodo, con cui si studiano i fenomeni del microcosmo e quelli del macrocosmo, anche quando si tratti di spiegare le leggi che regolano la nostra mente. Così la nozione pura di spazio, analizzata a priori dal Kant e dall'Herbart, e quindi dal Gauss, dal Grassmann e dal Rieman elevata al suo massimo grado di generalità e di astrazione, in quanto

(*) Si vedano in proposito i miei lavori: 1. I Metodi del Duhamel e la Logica del Codillac; 2. Maurizio Bufalini e il metodo sperimentale; 3. Il Verismo nell'arte e nella scienza.

riguarda i caratteri che servono a distinguerla e determinarla, ebbe una pratica conferma dai risultati empirici dovuti alle ricerche fisiologiche del Wundt (*).

Un processo analogo, in un senso del tutto elevato e generale, usar si potrebbe applicando il concetto dell'infinito e del continuo, nel senso relativo già accennato, alla questione della materia (**) non solo, ma ancora a quelle dell' uomo sociale e morale. E parmi che in tal guisa non sarebbe molto difficile il conciliare la dottrina della libertà colla legge dell' evoluzione dovuta al Darwin e con quella dei grandi numeri dovuta al Quetelet (***).

Negando l' infinito assoluto e attuale di quantità, rimane per ultimo senza veruna ripugnanza per la ragione: l' infinito ideale di qualità, a cui si eleva la mente figurandosi certi tipi di perfezione morale od ideale: grandi fari dell'umanità. Sotto questo notevole aspetto la critica moderna, mantenendosi appunto entro circoscritti e determinati confini, si assume un compito veramente modesto e conciliativo, risultando per essa egualmente degna di rispetto ogni speciale e peregrina manifestazione dell' umano pensiero (6).

Ma rispetto a codesto infinito ideale di qualità, mentre in massima mi associo all'opinione espressa dal Renouvier, sento tuttavia il bisogno di aggiungere alcune osservazioni.

I tipi del bello, del buono e del vero contengono vera-

(*) Vedi in proposito: *La psychologie allemande contemporaine* — par Th. Ribot — Paris 1879 — pag. 260. — « Les considérations de M. Wundt sur le concept d'espace, d'après les hypothèses de la géométrie imaginaire, l'amènent à voir dans notre Géométrie (cioè nella geometria ordinaria, come l' abbiamo ereditata dai Greci) un cas particulier d'une géométrie plus générale. »

(**) A questo scopo sto appunto elaborando un'opera col titolo: *La vecchia metafisica e la nuova fisica*, l' introduzione della quale formò già oggetto di una mia lettura tenuta nella R. Accademia di Scienze in Padova, tornata del 24 Luglio 1881.

(***) A questo proposito raccomando al lettore come assai notevole e interessante l'opera del Comm. Aristide Gabelli: *L'uomo e le scienze morali.* Seconda Edizione. Firenze 1871.

Io stesso tentai svolgere l' argomento in un opuscolo che uscì alla luce nel p. p. agosto col titolo: *La teoria dell' evoluzione e la libertà*, una parte del quale fu da me letta nell' adunanza della Società Veneto-Trentina di Scienze Naturali — tenuta a Bassano nel giorno 26 Maggio 1881, e subito pubblicata nel *Bullettino* della Società medesima, Tomo II. N. I. Padova 1881.

mente il concetto dell' infinito, ma non in modo assoluto, cioè costituiscono un infinito ideale capace di attualità ancora nel senso relativo, quello del limite. Questi tipi ideali di perfezione altro non sono che il frutto delle risultanze medie d'una serie infinita d'osservazioni, frutto con un lampo di genio, carpito alla natura dalla mente ardita dell'artista, del poeta e dello scienziato.

A questo proposito trovo opportuno di qui riprodurre un breve passo del mio lavoro già citato: *Il verismo nell'arte e nella scienza* pag. 5.

« Rispetto all' arte è chiaro che le dispute dipendono da quelli che per l' indole loro sono proni agli eccessi. Ma i grandi maestri furono sempre fedeli imitatori della natura, come Leonardo da Vinci che ingiungeva al pittore di esserne quasi lo specchio, raccomandando quella universalità accompagnata dal dubbio e dall'osservazione che elevano l'arte alla dignità di scienza. Ei fece infatti sempre consistere il suo verismo nel presentare quadri che hanno perfetta rassomiglianza colla realtà delle cose, e l'idealità delle sue belle ed utili concezioni regolò soltanto in guisa che l' insieme delle cose rappresentate si avvicinasse ai tipi medii corrispondenti all'osservazione ed all' esperienza sia del mondo materiale, che del mondo intellettuale o sociale. In questi tipi medii, che in sè raccolgono le migliori proporzioni, perchè tengonsi egualmente distanti dagli estremi, corrispondendo alle esigenze della specie, coll' uniformarsi alla comune degli uomini, si acqueta l' animo nostro cessando di oscillare tra i contrarii eccessi, che ripugnano alla nostra coscienza intellettuale o morale. Dietro la scorta dei grandi maestri, che coi loro modelli di perfezione giovarono a sviluppare il senso del vero e del bello, il cervello ben fatto dell' acuto e paziente osservatore, sopratutto coadiuvato dalle sue proprie esperienze, acquista tale squisitezza di gusto e facoltà di tradurre in atto le sue idee, da esercitare grande influenza negli uomini dei suoi tempi e dei futuri. In Leonardo abbiamo infatti un ingegno vasto e profondo quanto si può mai immaginare, mentre ei seppe abbracciare colla sua ampia intelligenza tutte le arti e tutte le scienze, investigandone i secreti, mercè la costante contemplazione del sublime poema della natura, l'unico che meriti veramente tal nome. »

« Veristi erano i grandi poeti dell'antichità, imperocchè accanto ad Achille ed Ulisse noi vediamo in Omero Tersite; l'idealità loro è riposta tuttavia nel trionfo delle idee medie; onde Tersite, che rappresenta l'uomo abbietto e maldicente, attira sopra di sè il disprezzo di tutti e le bastonate di Ulisse, mentre Achille ed Ulisse sono l'ammirazione di tutto un popolo, e anzi di tutto un mondo. Le idee del bello e del buono non escludono, ma bensì suppongono quelle dei loro contrarii, delle quali anzi l'arte approfitta per far risaltare le prime. Lo stesso avviene mercè i metodi moderni, di cui fa uso la statistica, dovuti principalmente al Quetelet, coi quali rappresentandosi l'uomo medio, la proporzione e convenienza delle sue belle membra risaltano in tutti i rapporti di queste, e spiccano nel punto culminante della curva che è luogo del termine dell'ordinato mobile, il cui piede limita l'ascissa, la quale esprime le successive gradazioni di statura, di forza, ecc. E sempre si riscontra che agli estremi, cioè all'origine e al termine dell'ascissa, dove stanno appunto (in numero scarsissimo) gli eccessi mostruosi: nani e giganti, deboli e atleti, ecc. l'ordinata diviene minima, avvicinandosi allo zero, mentre nel bel mezzo, equidistante dagli estremi, si ha il massimo per l'ordinata, e da ambe le parti di questa ordinata massima, simmetricamente disposte, in ordine decrescente, continuano le altre ordinate. »

« Non intendo con ciò concludere che in un lavoro d'arte, come si farebbe in uno di scienza, debbano apparire queste minime gradazioni, certo è però che l'artista veramente sommo deve averle avvertite. Così la scuola Greca di pittura e scultura erasi occupata seriamente a stabilire i veri rapporti che legano matematicamente l'ideale col reale, ed altrettanto fecero i grandi artisti all'epoca della rinascenza, i quali come Leonardo, Michelangelo e Durero furono grandi pittori scultori e geometri ad un tempo, in quel secolo in cui lo stesso Tasso, studiate le Matematiche sotto il Commandino, fu professore di Geometria (Histoire des Sciences Mathematiques en Italie par Guillaume Libri T. 3 p. 200.) »

« Verista e realista al sommo grado, come Dante, Shakespeare e Goethe, fu Giacomo Leopardi, le cui poesie e le cui prose presentano quell'ardimentosa originalità, ch'egli seppe cavare dall'intimo della sua grande anima, e tradurre in quelle perfettissime forme, nelle quali si sente più l'uomo che lo scrittore, e sono tuttavia sì felicemente subordinate alle più delicate e severe norme dell'arte. Tutte le composizioni del Leopardi furono a lui inspirate, o meglio anzi imposte alla grande sua anima, da una serie lunga, accurata e coscienziosa di minute osservazioni relative ai fatti del mondo materiale o sociale che si verificarono a lui d'intorno. Questo indirizzo costante dei suoi lavori poetici, spicca egualmente nelle sue prose, le quali altro non sono che un insieme ben ordinato di acute osservazioni sulle realtà delle cose, al punto che i seguaci della opposta scuola lo accusano di fatalismo, essendo egli stato verace indagatore della natura umana quanto il Quetelet (*). »

La scienza moderna, quella che i seguaci del dogma credono di offendere e condannare coll'epiteto di materialistica e atea, senza curarsi di negare l'assoluto si compiace invece di studiare le cose nella realtà loro, e quindi si limita al relativo. Il suo compito è adunque altrettanto elevato che modesto, sicuro nelle sue conquiste e libero da inutili contese.

Confido pertanto che dopo una breve ma accurata rassegna, quale mi propongo di dare circa i risultati dovuti ai più illustri scrittori e pensatori dell'epoca, circa l'entità e

---

(*) Tra i canti del Leopardi trovo opportuno di rammentare quello da lui dedicato all'Infinito, nel quale ei dice:

Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
E questa siepe, che da tanta parte
Dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminati
Spazi di là da quella, e sovrumani
Silenzi, e profondissima quïete
Io nel pensar mi fingo; ove per poco
Il cor mi si spaura. E come il vento
Odo stormir tra queste piante, io quello
Infinito silenzio a questa voce
Vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
E le morte stagioni, e la presente
E viva, e il suon di Lei. Così tra questa
Immensità s'annega il pensier mio;
E il naufragar m'è dolce in questo mare.

l' uso del concetto dell' infinito e del continuo in ordine alla matematica ed alle scienze della natura, il lettore benevolo e conscienzioso potrà pienamente d'accordo col Gauss concludere:

« Nulla avvi di contradditorio nell' uso del simbolo infinito, quando l'uomo, essere finito, non si arrischia di voler trattare ciò che è infinito siccome un oggetto dato e suscettibile d' essere abbracciato dalle sue facoltà intellettuali. Qui la questione invade tosto il terreno della metafisica. »

NOTE

(1) Il prof. Ardigò nel suo bel lavoro: *La formazione naturale nel fatto del sistema solare* — brano cavato dall'abbozzo di un libro sull'argomento « Formazione storica delle idee volgari di Dio e dell'anima, » (*Cronaca Liceale* in Mantova 1875-76) — accenna alla convenienza e anzi necessità del concetto dell'infinito, come correlativo del finito, nel modo che segue (pag. 57):

« E tale necessità dell' infinito, come fondo e ragione del finito, non è solo per la natura, ma anche pel pensiero. Anzi lo è pel pensiero precisamente perchè lo è per la natura. Anche quando il pensiero lo perde di vista, fissandosi nel distinto finito, esso lo assiste inosservato, e costituisce la stessa forza nella logica del suo discorso. »

Egli stesso poi si mostra chiaramente convinto, non potersi concedere che un senso del tutto relativo ai concetti medesimi del finito e dell' infinito, mentre alla pag. 121 osserva:

« Il grande o il piccolo, come osservammo altre volte, è affatto relativo. »

E quindi poco dopo soggiunge alla stessa pagina:

« Tanto è vero, che in ultima analisi, di tutto si può dire allo stesso modo, che è infinitamente piccolo, e in pari tempo infinitamente grande. »

A questo proposito mi giova pure citare un notevole e recentissimo lavoro d' un bravo Professore Francese. — « *Infini et quantité* — Étude sur le concept de l'infini en Philosophie et dans les sciences — par F. Evellin — Ancien élève de l'École normale supérieure, Agrégé de Philosophie, Professeur de Philosophie au Lycée Saint-Louis. Paris, 1881.

Quivi alla pag. 3 è fatta l' importante osservazione:

« L'existence réelle est le mélange du fini et de l' infini, parce que, en lui donnant l'ordre, la mesure et la loi, le fini fait passer l' infini à l'existence. »

Questo pensiero assai felice, qui però espresso in forma non abbastanza chiara ed esplicita, non parmi in appresso sostenuto con tutta coerenza dall'autore. Il quale sembra anzi voglia subito scostarsene osservando che: « Le domaine du fini c'est le réel, celui de l'infini, le possible. » opinando di mettersi in ciò d'accordo con Platone ed Aristotele. Infatti alla pag. 5 dopo avere osservato che: « En résumé, pour les plus illustres représentants de la philosophie grecque, l'infini n'est que l'indéfini, et l'indéfini qui l'indéterminé. » — egli accetta pure questa conclusione per suo conto.

È assai degna di nota l'osservazione da lui fatta alla pag. 11 dopo aver citati i più illustri filosofi dal risorgimento fino ai nostri giorni:

« Résumons-nous en quelques mots. Avant la *Critique,* deux théories opposées se trouvent en présence: Kant le met aux prises, mais le choc des antinomies, loin de les détruire l'une par l'autre, révèle l'infériorité de l'une d'elles, et tout, aujourd'hui, si nous ne sommes dupes de nos espérances, semble promettre une solution. »

Ma il Prof. Evellin cade tuttavia in qualche inesattezza usando del concetto dell'infinito e dell'indefinito, negando ad entrambe la capacità di crescere e diminuire, mentre se ciò è vero per una variazione avente un valore finito, non lo è di certo per una variazione che abbia un valore infinito. Ora egli dice: « Imaginons deux corps sous la forme de deux indéfinis actuellement parvenus à l'existence. Il ne saurait y avoir aucune différence quant au nombre des parties entre l'un et l'autre; si l'un, en effet, avait moins de parties que l'autre, il ne serait pas indéfini, ce qui contredirait l'hypothèse. »

Infine alla pag. 39 esplicitamente dichiara:

« Il est donc établi qu'on ne saurait, sans froisser le principe de contradiction et sans faire en même temps violence aux faits, supposer que la notion abstraite de l'indéfini ait quoi que ce soit de commun avec la réalité matérielle. »

Quindi alla pag. 46 viene a queste conclusioni:

« 1. Que les corps sont discontinus et, par suite, soumis à la loi du nombre. »

« 2. Qu'on ne peut, leur attribuer un nombre indéfini d'éléments: »

« 3. Que l'hypothèse d'un nombre actuellement infini de parties est également contradictoire. »

Il lettore avrà in appresso occasione di vedere fino a qual punto noi siamo disposti ad accogliere queste asserzioni alquanto azzardate dell'autore.

(2) A questo proposito così ancora s'esprime il Barzelotti:

« Ed in verità, quello che ad alcuni parve allora un ritorno al Kant, potrebbe dirsi piuttosto un incontro del suo collo spirito scientifico dei nostri tempi. L'Helmholtz affermò con ragione che egli (cioè il Kant) fu per indole e per istudi più naturalista che metafisico nel *senso antico* di questa parola. Ingegno critico per eccellenza, ebbe l'occhio fin da principio ad accertarsi di ciò che più, specie in Germania a quel tempo, solevano presupporre senza esame; mirò nei suoi primi studi sulle leggi e sulle forze della natura inanimata a saggiare innanzi tutto la solidità degli istrumenti metodici e l'efficacia dei principii di cui si serviva la scienza. »

Quindi, continuando a discorrere del Kant, un po' più innanzi così felicemente prosegue:

« Qui si noti però. Il disegno ardito di comporre in una vasta sintesi strettamente saldata in ogni sua parte mediante il calcolo, tutte le relazioni dei fatti naturali dagli ultimi moti della materia alle più alte manifestazioni del pensiero umano e della sua storia, lo tenta per un momento, ed egli sta quasi per metter mano all'opera; ma lo trattiene e lo fa desistere un pensiero, anzi un dubbio, che venuto su a poco a poco, e quasi a intervalli e a baleni nella sua mente, poi fatto gigante a un tratto finisce col dominarlo. Era il dubbio intorno alla possibilità di varcare i limiti dell'esperienza e di penetrare l'essere delle cose in sè stesse. »

Questo dubbio, dovuto alla sua delicata coscienza e allo stato della filosofia naturale dei suoi tempi, poichè il lavoro posteriore durante il corso d'un secolo ha cangiato l'aspetto a molte cose e a parecchie questioni, giungendo persino a rivelare non pochi misteri, questo dubbio non è più, al di d'oggi, ammissibile. E perchè questa non sia creduta una mia singolare ed azzardata opinione, sentiamo ciò che in proposito asserisce uno dei più grandi scienziati filosofi, che oggi vanti la dotta Germania. Il Wundt, prosecutore felicissimo degli studii del Fechner sulla Psicofisica (Vedi: Ribot La Psicologie Allemande), scienza della quale si trovano i primi germi nei lavori del grande Herbart, dopo aver portata la Psicologia nel suo vero campo, che è il fisiologico, in guisa da comportarsi rispetto alla fisiologia nello studio dell'uomo, come l'odierna metafisica si comporta rispetto alla fisica nello studio del cosmos, dando alla luce opere lodevolissime per vastità di dottrina e acume di critica (*), considera pure alcuni interessanti argomenti, che formano l'oggetto capitale di altre scienze. Egli pertanto in un suo notevole passo, eziandio citato dal Barzelotti, così eloquentemente s'esprime:

« Ora la termodinamica confida di aprire un passaggio fra la fisica e la chimica. È vero che i più fra gli studiosi di queste due scienze considerano ancora, e a buon diritto, come provvisorio il concetto che noi abbiamo della materia; ma ormai nessun scienziato dubita più che in siffatto concetto vi sia fondo di verità, e che questa non sia per divenir sempre più piena man mano che le ricerche fatte in diversi rami di scienza avranno dato risultati conformi. Nessuno oggi pensa che fisici e chimici e quanti coltivano differenti rami della fisica possano accettare ipotesi contradditorie. Più o meno consapevolmente si è fatta strada nell'animo di tutti questa opinione: *che nella scienza dei corpi non si debba più solo descrivere e collegare fra loro i fenomeni, ma si tratti ormai di penetrarne il fondo. È chiaro però che così la scienza riconosce essere suo obbligo il dar mano a comprendere filosoficamente l'unità della natura.* »

Ecco il grande problema della nuova filosofia, della nuova metafisica, ed è ben povero di spirito e folle di mente colui che osa disconoscerne, travisarne o menomarne in qualunque modo la serietà e l'importanza. E benchè resti sempre vero che l'indole e la natura intima delle nostre cognizioni non potrà raggiungere un grado assoluto, e come opinava Galileo: *ogni cognizione*

(*) Quali sono: 1. Beiträge zur theorie der Sinneswahrnehmung (an. 1862); 2. I suoi trattati di Fisica Medica e di Fisiologia Umana: 3. Untersuchungen zur Mechanik der Nerven und Nervencentren (1871-76); 4. Vorlesungen über die Menscheu und Thierseele (1863); 5. e sopratutto i suoi Grundzüge der physiologischen Psycologie (1874).

succeduta ad un'altra non diverrà mai più intrinseca di quella che io aveva per avanti, il che suona appunto l'esclusione dell'assoluto dalle umane speculazioni e contemplazioni, ad onta di ciò l'utilità teorica e pratica delle conquiste scientifiche è troppo palese, perchè non si debba apprezzare questo indirizzo, siccome l'unico veramente attendibile per tutte le scienze.

Per ultimo non trascuro di ricordare che anche appo noi l'egregio Prof. Carlo Cantoni pubblicava un'opera assai notevole coll'intendimento di richiamare in vigore gli alti e severi principii della Kantiana filosofia; *Emanuele Kant*, per Carlo Cantoni, — Volume I. La filosofia teorica — Milano 1879.

(3) È notevole ciò che un nostro egregio concittadino, il Prof. Naccari, ebbe a dire, non è molto, nella sua bella: *Introduzione alle Lezioni di Fisica sperimentale*, da lui letta il dì sei Novembre 1878 nella R. Università di Torino pag. 60-61, parlando del carattere dello scienziato, carattere del quale egli dà sì bello e raro esempio:

« Al fisico conviene non esser legato ad alcuna scuola, non seguire alcun maestro; è somma lode in lui, ciò che è riprovevole in politica, non aver partito, non rispetto ad autorità: deve diffidare di tutti e specialmente di sè medesimo. »

La quale sentenza, se è giusta e vera per il fisico, lo è a maggior ragione per il filosofo, di cui sono essenzialissime doti: sincerità, indipendenza e libertà.

Quindi parlando della coscienza, con cui gli studiosi devono maturare i loro lavori, il Naccari saviamente soggiunge:

« Egli è poi necessario che rigidissima coscienza regga lo scenziato negli atti suoi. Con un esame precipitoso dei fatti, o con lo scegliere le sole esperienze conformi alle proprie congetture, rigettando le altre, o peggio con lo storcere a dirittura e forzare i valori trovati, è agevol cosa raggiungere una cotal rinomanza. Non va senza compenso, ancorchè fuggevole e vile, ciò che in modo volgare può chiamarsi la fabbricazione industriale delle memorie scientifiche. Ma il tempo fa severa giustizia di chi opera in tal modo, e ne cancella presto la traccia. Intenti ad un altissimo fine, guidati da un puro amore del vero, dobbiamo preferire, ove occorra, una illibata oscurità al mentire vilmente all'ufficio nostro. »

(4) Lo stesso de Fontenelle, il grande Segretario perpetuo dell'Accademia di Francia, fino dalla prefazione del suo libro importante: *Élements de la Géometrie de l'infini* — par M. De Fontenelle Secrétaire perpetuel de l'Académie — Suite des Memoires de l'Académie Royal des Sciences — Paris 1727. » — attribuisce all'infinito la qualità di numero in un modo più che mai esplicito, come risulta dal seguente brano della prefazione::

« Si l'on conçoit l'espace Hiperbolique divisé en parties finies égales, chacune pourra être prise par l'Unité, il en aura un nombre infini, et leur somme sera égale à cet Infini, qui est l'espace. Or une somme quelconque de nombres quelconques, ne peut être qu'un nombre. L'infini est donc un nombre, et doit être traité comme tel, ce qui preuve encore sa réalité, puisqu'il a toute celle des nombre. »

Qui è pur chiaramente dall'autore stabilita la differenza che passa fra l'infinito assoluto o metafisico e quello matematico o relativo:

« Nous avons naturellement une certaine idée de l'Infini, comme d'une grandeur sans bornes en tous sens, qui comprend tout, hors de laquelle il n'y a rien. On peut appeller cet Infini Métaphisique, mais l'Infini Géométrique, c'est-à-dire celui que la Géométrie considère et dont elle a besoin dans ses recherches, est fort différent, c'est seulement une grandeur plus grande que toute grandeur finie, mais non pas plus grande que toute grandeur. »

Anche al di d'oggi, ad onta dei grandi progressi del calcolo e della geometria dovuti all'uso franco e ingegnoso del concetto dell'infinito per parte dei più eminenti matemateci di questo secolo, non sono pochi quelli specialmente fra i geometri, che mostrano una certa timidezza e perplessità nella determinazione e nell'uso del concetto medesimo, precisamente come avveniva ai tempi del Fontenelle, il quale osserva in proposito :

« Ceux qui ont le plus traité l'Infini géométrique, ne l'ont fait jusqu'à présent qu'avec un reste de timidité, qui les a empêchés de l'approfondir autant qu'ils le pouvaient. »

E più innanzi :

« Que si cependant la Géométrie a toujours quelque obscurité essentielle, qu'on ne puisse dissiper, et ce sera uniquement, à ce que je crois, du côté de l'Infini, c'est que de ce côté-là la Géométrie tient à la Phisique, à la nature intime des Corps, que nous conaissons peu, et peut-être aussi à une Métaphisique trop élevée, dont il ne nous est permis que d'apercevoir quelques rayons. »

Questa giudiziosa e profonda osservazione dell' autore ci mostra quanto bene egli avesse presentito il lato oscuro della questione relativa alla natura intima dello spazio, precedendo in questo suo modo di vedere: Kant, Gauss, Grassmann e Riemann.

Ma alla pagina 31 dopo aver stabilita la convenienza logica della formula :

$$\infty + a = \infty$$

dove a è una grandezza finita qualsivoglia, l'autore dimostra che l'∞ è pure una grandezza suscettibile di variazione nel modo che segue :

« Mais pour la raison des contraires, et encore plus par la nature même de le chose, je puis dir

$$\infty + \infty = 2\infty$$
$$2\infty + \infty = 3\infty$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Car il faut que l'infini, puisqu'il est grandeur, soit capable d'augmentation, et je vois qu'il le sera sans fin, puisqu'il pourra être multiplié par tous les nombres naturels de suite, dont le nombre est infini. »

(5) Parlando dei quali egli, cioè il Prof. Evellin, alla pag. 187, così s'esprime :

« Ces deux mathématiciens, on ne saurait trop le répéter, n'ont fait que pousser à sa limite logique l'hypothèse de Leibniz, et, s'il en résulte des conséquences d'une absurdité palpable, c'est moins la faute des interprètes, dont les déductions sont rigoureuses, que celle de la théorie qui, les portant en son sein, devait successivement les produire au jour, comme la monade, la série continue de ses progrès. »

Ma lo stesso autore dopo aver accusato il Leibniz e i grandi che lo seguirono di aperta assurdità, è tuttavia costretto di dichiarare alla pag. 190:

« Nous n'échappons aux objections de Buffon et d'Auguste Comte que pour admettre, avec Bernouilli e Fontenelle, l'existence d'un infini de quantité dont l'impossibilité logique n'est plus à démontrer aujourd'hui. »

Infine, vinto dall'imponente realtà delle cose e dei fatti, il Prof. Evelin è costretto di trovare una via di conciliazione, e quindi alla stessa pagina soggiunge:

« Comment donc expliquer que l'analyse infinitésimale réussisse? Les faits lui donnent raison; est-il possible que la logique lui donne tort? On va le voir, le succés des procédés qu'employait Leibniz est dû à de toutes autres raisons que celles qu'il croyait devoir invoquer; les opérations de l'algorithme donnent à sa méthode, sans qu'il paraisse en avoir suffisamment démêlé la cause, toute la valeur et toute la portée de la méthode des limites, la seule qui soit théoriquement valable. Aprés Archiméde, Galilée, Cavalieri, Newton; Leibniz ne fait donc sous couleur d'opposition (*), que prêter à cette méthode une forme nouvelle et la mettre en un nouveau jour; c'est du moins ce que nous proposons d'établir. Si nous parvenons (si notino specialmente queste parole, le quali contengono un indirizzo critico e conciliativo) à rendre sensible aux yeux cette admirable unité, nous n'aurons pas seulement travaillé, pour notre modeste part, à une justification de la raison pure, de *cette raison* tant critiquée qui pourtant se montre toujours d'accord avec elle même; nous aurons montré que c'est la notion métafisique de limite que vivifie à la fois le calcul ordinaire et le calcul infinitésimal; que la mathématique enfin ne vaut avec tous ces procédés et sous tous ses formes que par un souvenir du concret et de l'absolu, que par une vérité importée du monde de la quantité en soi dans le monde imaginaire du savant. »

Ma il pensiero dell'autore si rende più esplicito e chiaro alle pag. 198-199, dove egli fa queste conclusioni:

« En tout état de cause, il faut admettre, d'une part, une grandeur qui ne se refuse à aucune division, et qui, considérée en elle-même, diminuirait à l'indéfini; de l'autre, une limite *directement ou indirectement* imposée à cette grandeur; directement, si l'on pose en principe que l'absolu est au terme du relatif, c'est le cas d'Archimède, de Cavalieri, de Newton; indirectement, si l'on dissimule derrière des quantités fixes qui l'impliquent, l'intervention nécessaire du même absolu, c'est le cas de Leibniz et de tous ceux qui ont adopté ou adoptent la méthode infinitésimale. »

Però anche quest'ultimo caso si riduce tutto a concepire l'infinito nel senso relativo più volte dichiarato.

I metodi ulteriori dovuti al Lagrangia misero pertanto in chiaro l'analogia che passa fra i metodi del Newton e del Leibniz e quelli del Descartes, anche a

---

(*) Questa asserzione non è conforme alla storia ed inoltre contiene una contraddizione, mentre ah lo scopo di sconfessare confessando la bontà del metodo.

giudizio dello stesso Carnot, spesso citato dall'autore, il quale conclude alla pag. 200:

« Il resulte de cet exposé que dans le calcul des fonctions, aussi bien que dans le calcul infinitésimal, c'est le principe de Descarte qui fonde la légitimité des procédés, et le principe de Descartes n'est qu'un appel à l'idée de limite. »

(6) A questo proposito giova qui riprodurre un passo notevole del Renouvier il quale nel suo lavoro già citato: L'infini, la substance et la liberté — trova opportuno di fare la seguente delicata distinzione (pag. 36):

« Entendons-nous bien ici et commençons par signaler une équivoque trop commune dans les livres de théologie et ailleurs. L'infini dont nous parlons n'est pas l'infini moral ou idéal qui s'envisage dans les qualités (d'ailleurs très-définies), de l'entendement, de la passion ou de la vertu, portées au suprème degré (*). *Cet infini de qualité*, ceux du même genre qu'on y pourrait joindre, dans les choses non susceptibles de quantité exacte et de mesure, n'est pas l'infini, mais bien le parfait et l'achevé, c'est-à-dire tout le contraire de l'infini. C'est une notion nette, s'il en fut jamais, réalisable ou non, il n'emporte, que celle de la justice parfaite, par exemple, ou de l'intelligence entièrement adéquate à son objet (objet déterminé), ou de l'amour à sa plus haute puissance dans une âme. Au contraire, quand'il s'agit de l'infini de quantité, il y a impossibilité de concevoir, et non seulement impossibilité passive, pour ainsi parler, mais active et, en un mot, contradiction, dans l'idée qu'on prétend se former. Soit qu'on veuille penser à des acumulations de parties en *nombre infini,* par addition au par division, dans l'espace ou dans la matière, soit qu'on entreprenne de poser des suites de phénoménes existants *sans nombre* et sans commencement dans le monde, ces idées sont contradictoires en elles-mêmes, et toutes les doctrines qui les supposent sont ruinées d'avance. »

Quest' ultime asserzioni dell' autore sono accettabili soltanto quando si pretendesse d' introdurre l' assoluto nel concetto dell' infinito applicato alla quantità.

Non è men degno di nota a questo proposito, dell'esclusione cioè dell'infinito assoluto dalle umane cognizioni, ciò che il Renouvier medesimo osserva alla pag. 160* del suo lavoro già citato:

« La négation, egli dice, à l'égard de la connaisance, de tout principe déterminé, supérieure à toutes les détérminations de la connaissance, est une espéce d'athéisme; il faut bien en convenir, en présence des dogmes théologiques et metaphisiques de la divinité. *Cet athéisme critique et scientifique,* ainsi que nous l'avons nommé quelque part, *conclut contre l'absolut des matérialistes et des panthéistes, au même titre qu'il conclut contre l'absolut des théologiens de l'École.* Nous avons dû dire, en songeant à cet athéisme, et à la loi de la rélativitè du connaitre, que l'*athéisme est la vraie méthode, la seule fondée en droite raison, la seule positive.* Mais nous n'avons pas manqué d'ajouter au même endroit: « Le véritable athéisme n'exclut point le véritable théisme, ni

(*) Circa questi tipi ideali del bello, del buono e del vero io stesso ebbi ad esprimere il mio avviso in un mio recentissimo lavoro pubblicato col titolo: *Il Verismo nell'arte e nella scienza,* Padova 1881.

dans le sens moral, ni même dans le sens anthropomorphique, intelligible, rationnel, de ce dernier mot. Tout absolu est chimére, mais la pensée cherche un point fixe au delà de certains phénomènes. L'absolu chassè de l'ètre, où il n'engendre que logomachies, reparait transformé, et se fixe légitimement, sans contradiction, dans l'idéal de la perfection moral, dont la conscience détermine à tout moment une réalité rélative. »

Questo nuovo concetto dell'assoluto, che qui è presentato in un modo alquanto oscuro, e quindi apparentemente contradditorio, contiene anch'esso, a giudizio dell'autore medesimo, alcunchè di relativo, come risulta dalle ultime parole del brano ora citato, e meglio ancora in altri notevoli punti del suo stesso lavoro.

Ma assai meno chiaro ed esplicito del Renouvier, a questo proposito del modo di considerare l'infinito in ordine alle nostre cognizioni, si è il Professore Evellin, il quale alla pag. 246 del suo lavoro già citato, riconosce pure l'importanza e generalità della questione dell'infinito, con queste assennate parole:

« Nous croyons avoir ètabli cette proposition d'une importance capitale, que le principe qui explique l'indéfini porte en germe et explique en même temps toutes nos opérations et toutes nos idées; le concept que nous nous proposions d'analyser dans ce travail n'est donc en définitive qu'un rameau détaché du tronc commun, et au même titre que tous les autres, l'effet nécessaire d'une loi unique, » Onde, escluso il concetto dell'infinito assoluto, subito dopo alla pag. 247 fa questa esplicita dichiarazione:

« Si le concept de l'infini exclu de la conscience comme contradictoire doit céder la place à une notion toute subjective qui trouve son origine et son explication définitive dans le progrès nécessaire de l'entendement, on comprendrà qu'il soit impossible d'accorder une valeur absolue aux argument qu'on désigne en théologie sous le nom de métaphysiques, et qui n'ont, semble-t-il, d'autre raison d'ètre qu'une illusion de la pensée. »

E fin qui va bene; ma alla pag. 251 egli fa ritorno al suo assolutismo o idealismo assoluto parlando dell'idea della perfezione, e quindi mostra di non aver compreso il grande critico della ragione pura, mentre dice:

« Dans l'attaque qu'il à dirigée avec tant de vigueur contre la preuve ontologique, Kant raisonne à peu près ainsi :

« L'idée de la perfection existe »

il ne le conteste pas serieusement:

« Une telle idèe implique l'existence »

« de la perfection. »

voila ce qu'il nie. — Mais, la première proposition acceptée comment rejeter la seconde? (Critiq. rais. pur., Dialectiq. Transcend. sect. IV. pag. 712 trad. Tissot). Le type idéale, continua il Prof. Evellin, que l'entendement conçoit, type superieur à toute élaboration mentale, ne peut avoir de réalitè qu'en soi et par soi; la vision nette du parfait n'est possible que si le parfait existe en dehors de l'esprit impuissant à en créer l'idée. »

Ognuno comprende come in questo modo di vedere dell'autore sia contenuto l'antico pregiudizio proprio dell'antica metafisica, in conseguenza del quale l'idea s'impone qual tipo preesistente alle nostre intuizioni, anzichè essere essa stessa un prodotto delle medesime conseguito mediante l'astrazione.

L'autore pone pertanto la questione per suo conto nel modo che segue mostrandosi esplicitamente favorevole ai dettati dell'antica metafisica, benchè ciò non sembri a prima giunta:

« Il semble donc que l'ancienne métaphysique ait absolument raison contre Kant, lorsque, dans la perfection qu'elle croit concevoir, elle constate la réalité objective de l'éxistence; mais ni Kant ni l'ancienne métaphysique ne nous paraissent avoir usé d'une critique assez sévère au sujet de l'ypothése qui sert de base à tout l'argument. Avons-nous, oui ou non, l'idée positive de l'absolu ou de l'infini intensive? Voila à notre sens, toute la question. »

Egli insomma, nell'idea della perfezione, vede un assoluto con carattere obbiettivo, senza pur sospettare che l'idea medesima altro non è che una delle tante e peregrine manifestazioni dell'antropomorfismo, con che non è punto scemato il carattere puro e razionale che la contraddistingue. Egli infatti alla pag. 256 così s'esprime:

« Mais, qu'on admette, ou qu'on rejette l'intuition immédiate de Dieux par la raison, il est certain, ne fût-ce qu'à titré de conclusion logique, que le *principe suprème* doit-être parfait. »

Quindi alla stessa pagina prosegue in forma così esplicita da non lasciar più alcun dubbio circa al suo modo di pensare, mentre egli dice:

« Aussi le philosophie et la science ont-elles affirmé de tout temps l'existence transcendante de l'absolu, sans jamais parvenir à donner à cette existence, si différente de la nôtre, un contenu certain. »

Ma da ciò che precede per noi è invece chiaro che si possono accettare l'idea della perfezione e i tipi ideali del bello e del buono senza ricorrere alla dottrina dell'assoluto, cioè non considerandoli come innati ma bensì aquisiti e di una fissità soltanto relativa, mediante un processo psicofisico. Anche in tal caso nulla di assolutamente assoluto.

Alla pag. 257 l'autore mostrasi infine partigiano dell'ipotesi della creazione e dopo aver accennate le prove più comuni e volgari sull'esistenza di Dio, così prosegue:

« Qu'on admette ou qu'on rejette l'hypothése de l'èvolution de la nature, peu importe; c'est la nature elle-même, la nature, dans le fait de son existence certaine, qu'il faut expliquer. Il est possible que les êtres se disposent comme d'eux-mèmes en une savante hiérarchie, et que d'échelons en échelons, d'âme en âme, le progrés soit venus jusqu'à l'homme; mais, dans cette série ascendante, on demanderà toujours comment s'opére le passage du moins au plus, de l'inférieur au supérieur, et, à l'origine, comment s'est opéré le passage bien autrement solennel *du néant à l'être.* »

Qui è posta, come sempre avviene ai fautori della vecchia metafisica, male e malissimo la questione. Per ispiegare ciò che è, e che non dubitiamo essere, s'incomincia dal negargli l'esistenza, almeno in un certo tempo anteriore.

Ma il Prof. Evellin, mi perdoni se parlo franco, anch'egli dopo ciò spera togliersi d'ogni impaccio, valendosi della solita asserzione gratuita, che avvicina i più famosi campioni della filosofia ortodossa al grossolano intuito della donniciuola, o del volgo ignorante e superstizioso, e senz'altro dichiara:

« C'est ce que comprende d'instinct l'homme ignorant, non moins affirmatif que le plus profond des philosophes en ce qui concerne l'existence certaine d'un Être, le primier des êtres, principe et fin de toutes choses. »

Infine alla pag. 258 chiude il suo lavoro nel modo che segue:

« Le savant et le phylosophe se heurtent plus souvent à l'hathéisme que l'homme du peuple, parce que leurs prétentions sont à la fois plus hautes et plus vaines: ces prétentions, il suffit de les formuler pour les confondre: on veut posséder l'absolu et embrasser l'infini. »

Ma chi, se non l'autore, si è in tutto il libro mostrato appunto propugnatore della teoria dell'assoluto?

La conclusione che egli fa seguire al suo lavoro, contiene ed anzi in modo sempre più esplicito le stesse contraddizioni. Da una parte la necessità dell'assoluto dall'altra la sua incompatibilità colla scienza; quest' assoluto ora figura come il punto di partenza da cui deve esser scaturito l' universo, ed ora diviene il sogno e il delirio della nostra mente.

Il dubbio le cui oscillazioni hanno una durata finita, è utile certamente al perfezionamento dell' intelletto e al progresso della scienza, ma il dubbio le cui oscillazioni hanno una durata infinita, è sinonimo di morte del pensiero, è negazione della scienza e dei fatti. L'autore ci dà di ciò un solenne esempio. Tuttavia egli ha dei periodi che mostrano il suo buon senso e le sue tendenze conciliative, che fanno in lui capolino di tratto in tratto. Così, parlando delle matematiche, alla pag. 261 egli dice:

« On ne saurait assez redire qu'une grandeur ne peut aucune façon tendre vers sa limite ni s'en approcher si peu que ce soit, dés qu'entre elle et sa limite s'interpose un infini véritable; l'infini mathématique n'est qu'un pseudo-infini, l' infini du devenir, qui se prolonge, il est vrai, sans terme dans la pensée, mais qui a commencement et fin dans les choses. »

« Ces principes posés, la mathématique est affranchie, à ce qu'il semble, de toute contradiction interne ed externe; elle est d'accord avec elle-même, d'accord avec les autres sciences, et séduite par cette harmonie, la raison se reconnaît dan le système des connaissances humanes comme elle se reconnaît dans le sistème des choses, à la marque de l'unité. »

Poteva qui l'autore più esplicitamente escludere l'infinito assoluto da tutte le scienze, dopo averlo distinto dal relativo?

PARTE PRIMA

L'INFINITO NELLA MATEMATICA.

§ 1.

Lo spazio ed il tempo — il punto, l'istante e lo zero.

Infinità e continuità dello spazio e del tempo.

Lo spazio ed il tempo sono gli enti della natura, dei quali si occupa la matematica; entrambi si concepiscono senza interruzione e senza limiti, cioè continui e infiniti.

La nostra mente, prima coll'ajuto dei sensi, che la abilitano a scorgere dovunque differenze e passaggi, e poi per forza di astrazione, nella serie continua delle sue diverse rappresentazioni, rompe la detta continuità e infinità, introducendo il fecondo concetto del limite. Così il punto rispetto allo spazio, e l'istante rispetto al tempo, sono meri concetti della nostra mente, privi affatto di obbiettiva esistenza, mediante i quali arriviamo tuttavia a formarci un'idea sempre più chiara e precisa dei fenomeni, che si effettuano nello spazio e nel tempo.

Infatti l'intuizione del tempo ha luogo in noi mediante una serie di successive rappresentazioni, ognuna delle quali svanisce gradualmente dalla coscienza, lasciandovi tuttavia una certa traccia, che dura fino a che sottentri una nuova rappresentazione in modo continuo ed indefinito. Analogamente l'intuizione dello spazio si riduce anch'essa ad una serie di successive rappresentazioni, distinte le une dalle altre nel senso locale, cioè alla percezione di oggetti esistenti fuori di noi e ognuno dei quali è fuori dell'altro, in modo parimente continuo ed indefinito (1).

A questo proposito osserveremo che le percezioni derivanti da sensazioni tattili hanno un'importanza maggiore delle visuali, anzi è d'uopo cercare in esse la prima origine delle nostre idee fondamentali d'intervallo, di distanza, di posizione, e quindi di tempo, di spazio e di moto. Il cieco che non manca di queste idee, è di ciò la prova più luminosa.

La prima distinzione avvertita, che ha luogo in noi, si riferisce a due successive e diverse sensazioni, cioè in senso lato all'intervallo che le separa, nel quale intervallo è forse, sebbene implicitamente, contenuta meglio l'idea di tempo che non quella di spazio.

Ora lo zero è il simbolo che numericamente denota il punto limite o l'istante limite per eccellenza, non solo nel senso della grandezza, benchè in un modo sempre e del tutto relativo, ma anche nel senso della posizione e della successione, imperocchè ad esso limite si paragonano o almeno si riferiscono tutti gli altri.

Pertanto quando il matematico dice che il punto è un sito, concepito senza estensione, egli fa ciò soltanto in questo senso indiretto: che la mente, già edotta dall'esperienza, anche senza l'aiuto degli organi sensorii può fissare la sua attenzione sopra un determinato luogo dello spazio, concentrandone e impicciolendone indefinitamente le dimensioni al segno da potersi ritenere il risultato di questo indefinito concentramento più piccolo di un qualsiasi esteso per quanto piccolo esso sia.

Similmente riguardo al tempo, il matematico immagina l'istante nullo o infinitesimo, come più piccolo di qualunque durata di tempo per quanto piccola essa sia.

All'opposto lo spazio, ed anche una sua determinata regione, si considerano come infiniti nel senso che si possono concepire maggiori di qualunque spazio limitato o analoga regione limitata, per quanto grandi essi sieno. L'infinità e continuità dello spazio, nel senso relativo già dichiarato, suppongono l'infinità e continuità del tempo.

§ 2.

Interruzione nello spazio e nel tempo. Continuità e infinità della materia e del moto.

Per formarsi l' idea dell' interruzione nello spazio, d' uopo è ricorrere al concetto di punto; per formarsi quella d' interruzione nel tempo, al concetto d' istante. L' interruzione dello spazio e del tempo non sono dunque che mere astrazioni della nostra mente e non hanno nessuna realità esteriore rispetto agli enti, nei quali noi le consideriamo, benchè siamo soliti a riferirle ad oggetti esistenti realmente fuori di noi.

La continuità dello spazio e del tempo si attribuisce pure alla materia, e così l' altra proprietà loro d'essere infiniti. Gli antichi dicevano infatti, sebbene impropriamente, che la natura aborre il vuoto, e sotto un certo aspetto questa ardita frase dei nostri buoni avi non è tanto infelice quanto si crede. Ma la materia è veramente eterna, continua e infinita? Il moto è esso pure continuo, eterno e infinito? — D'altronde, la quiete assoluta è forse concepibile, mentre essa sembra l' assoluta negazione della natura?

L'arduo problema dell' intima natura della materia, va diventando al dì d'oggi una questione sempre più determinata ed accessibile nel senso veramente pratico e positivo. La fisica, la chimica e la meccanica, sussidiate dal calcolo, vanno accrescendo continuamente il corredo di quelle conquiste scientifiche che ajutano o ajuteranno in un tempo, speriamo, non molto lontano, a conseguire una soluzione abbastanza sicura ed attendibile.

Questo voto, eloquentemente espresso da alcuni dei più valenti filosofi di questi giorni, fra i quali basta citare l'Helmholtz, è ormai, si può dire, specialmente proprio della nuova scuola filosofica del Kant.

Lo stesso Renouvier a questo proposito così felicemente s' esprime (*):

« La matière, idée qu'on ne scrute pas toujours assez, et

(*) Alla pag. 85 del suo lavoro già citato.

qui semble venue des sens quoique les sens ne la définissent nullement, ramène la substance et l'infini. »

Ma gli è di più, che tutto possiamo e dobbiamo aspettarci dall'analisi della materia, imperocchè, come giustamente osserva il Moleschott, e come non sarà mai abbastanza ripetuto: *la materia governa l'uomo.*

L'unità e infinità dell'universo, considerato nella sua assoluta totalità, sono due concetti inseparabili l'uno dall'altro; ma di questa unità e infinità non giova punto discorrere, siccome quelle che escono evidentemente dai limiti d'ogni reale contemplazione. Mantenendo all'infinito il carattere relativo, secondo cui esso rendesi accessibile alla nostra mente, vedremo in appresso come il Kant per primo si elevasse al concetto generale che serve di base alla dottrina superiore degli spazii, osservando inoltre come in conformità del concetto medesimo si renda pure probabile la simultanea esistenza di più mondi: « Die Bedingung, unter der es wahrscheinlich ist, dass es viel Welten gebe. » (Immanuel Kant's sämmtliche Wercke, Leipzig (1867). Erster Band, I, § 11).

In quanto al carattere di continuità da attribuirsi alla materia, sembra che la questione sia da questo lato esaminabile con maggior frutto, mentre in questo senso più difficilmente, o almeno più tardi, essa invade il terreno della metafisica. A nostro avviso il carattere di continuità si può far dipendere più direttamente dall'osservazione e dall'esperienza, e pare anzi che da qualche tempo siano a ciò rivolti gli sforzi di alcuni fra i più grandi scienziati filosofi di questi giorni; sempre s'intende mantenendo all'epiteto continuo quell'unico senso relativo, di cui è capace.

Qui alla mente dell'attento lettore si affaccierà subito l'ipotesi dell'etere, in proposito della quale credo opportuno riprodurre quello ch'ebbi a dire in una lettura fatta nella R. Accademia delle Scienze in Padova (tornata del 24 Luglio 1881) sull'argomento: *La vecchia metafisica e la nuova fisica* — parlando appunto di un quarto stato della materia, cioè dell'etere:

« Gli antichi, col loro fino e retto giudizio che tanto li distingue, perchè la loro mente scevra da pregiudizii, dava ad essi nella contemplazione della natura responsi chiari ed esatti più che non sia stato dappoi nel lungo periodo mediovale, fino all'epoca del risorgimento, periodo nel quale l'abuso della riflessione e l'innesto pregiudizievole delle diverse teofanie religiose avea guasti gli animi e gl' intelletti, gli antichi, dico, liberi da queste pesanti cappe di piombo, benchè un po' all'ingrosso in quanto riguarda lo sviluppo analitico e sistematico delle varie teoriche e discipline, in proposito dei fenomeni naturali figurano tuttavia, come felici precursori di alcune verità peregrine, le quali forse costituiscono le conquiste più meravigliose di questi ultimi secoli. »

« Essi pertanto distinguevano nella natura quattro elementi: *terra, acqua, aria* e *fuoco,* che secondo l'illustre chimico Cheveul, corrispondono ai quattro diversi stati sotto cui si può concepire la materia: *solido, liquido, aeriforme, etereo,* ove quest' ultimo si consideri, quale il risultato della più perfetta sgregazione calorifica. »

« E poichè il concetto di calore è indissolubilmente legato a quello di moto (Vedi: *Unità delle forze fisiche del P. Angelo Secchi*), secondo le più recenti teorie, che già conseguirono un pieno trionfo, chiaro risulta quanto sia grande la corrispondenza fra questo modo di considerare un quarto stato della materia, e quello che fu primieramente intravveduto dal Faraday, in parte studiato poscia dal Fusinieri e dal Bizio, e infine dichiarato in modo luminoso dal Crookes nella sua materia radiante (*), che appunto costituisce un nuovo e quarto stato della materia. »

« Qui giova rammentare alcune notevoli osservazioni fatte dal Secchi, il quale considera la tenuissima materia di cui si compongono le comete, posta in sodo dalle più recenti esperienze spettrali, onde è dimostrato che quegli astri singolari e meravigliosi posseggono luce propria (*materia radiante*) e spettro gazzoso colle righe del carbonio o vicinissime ad esse. Fenomeni analoghi si presentano rispetto alle nebulose, almeno in quanto riguarda il grado di rifrangibilità e la discontinuità

(*) Vedi: Kosmos. Les Mondes. Revue ebdomadaire des sciences par M. L'Abbé Moigno. Deuxième Série, 17 Année, Tomo L, N. 11, 12, 13, 17 — Paris 1879 — Physique de l'Avenir. La matière radiante. Conférence de M. W. Crookes, de la Société royale de Londres.

dello spettro. È quindi d'uopo concludere, che questi corpi celesti vadano muniti di un'energia molecolare pressochè eguale. Nelle comete pertanto, sottoposte all'azione calorifera del Sole, e situate in immensi spazii, il cui vuoto non ancora assoluto, si può tuttavia ritenere di un grado analogo a quello che ci è dato conseguire mediante le più perfette macchine pneumatiche, e forse maggiore, come quello dei tubi di Geissler; in questi spazii estremamente vuoti, quei corpi esili delle comete sono dotati di una enorme facoltà di diffusione e di espansione, che corrisponde eziandio al modo con cui esse si comportano e alle forme sotto cui si presentano. Qui si scorge immediatamente quanta analogia esista tra questi fatti cosmici e le belle esperienze che noi siamo in grado di effettuare nei nostri recipienti, dove, tolto colla rarefazione, l'effetto della pressione atmosferica e vinte quindi le forze di gravità e di coesione, la materia viene in tal guisa ad esser posta in condizione molta espansiva mediante l'elettricità. »

Questo importante argomento meriterebbe una lunga trattazione, specialmente per la parte che riguarda la continuità e discontinuità dell'etere. Il Secchi mostrasi invero favorevole a quest'ultima ipotesi, ma la sua teoria presenta alcuni difetti, che forse si potrebbero togliere fondendola con quella già nota relativa al fluido gravifico del Lesage come venne modificata dal Preston (*), e tenendo pur conto delle notevoli proprietà della materia radiante dovute al Crookes. In tal guisa si renderebbe sempre più accettabile l'ardita congettura di quest'ultimo grande fisico inglese, il quale nel suo lavoro prima citato ebbe a dire:

« Dans l'étude de ce quatrième état de la matière, il semble que nous ayons saisi et soumis à notre pouvoir *les petites atomes indivisibles qu'il a de bonnes raisons de considérer comme formants la base physique de l'univers.* »

In quanto all'ipotesi della continuità della materia, continuità s'intende da assumersi soltanto nel senso relativo, si pensi che secondo M. Johstom Soney (Phil. mag. Vol. XXXVI

(*) *Introduzione alle lezioni di fisica sperimentale* letta dal Prof. Andrea Naccari nella R. Università di Torino, il dì 6 Novembre 1878, — Torino Ermanno Loescher; 1878 — vedi a pag. 39.

pag. 141), un centimetro cubo d'aria contiene all'incirca un sestilione (1,000,000,000,000,000,000,000) di molecole, e che queste, o più ancora i loro atomi primitivi, i quali dovranno essere in un numero molto più grande, quando siano lanciati nel vuoto, devono muoversi con stragrande velocità in tutte le direzioni e in linea retta, in modo che il vuoto relativo supposto diviene perciò esso stesso un pieno relativo, non essendovi in esso un punto in ogni determinato istante (sempre prendendo il punto e l'istante nel senso relativo), per il quale non passi alcuno dei detti atomi.

Così forza e materia sono insieme compenetrate al punto da ridursi ad un ente primordiale unico, secondo la teoria stessa dell'indistinto e del distinto si bene dichiarata dal Prof. Ardigò. L'etere è l'indistinto, che assume colle sue successive evoluzioni nel tempo e nello spazio, la forma della materia ordinaria. Questo modo di vedere accordasi cogli ultimi risultati della scienza dovuti agli illustri fisici Secchi, Hirn, Kretz, Krookes, ecc.

La continuità e infinità dello spazio, del tempo e della materia, non sono dunque ammissibili in modo assoluto, e si concepiscono indirettamente, cioè a mezzo dell' osservazione indiretta.

Il simbolo, che in matematica serve a denotare la continuità, è lo zero, e si concepisce indirettamente come limite, effettuando il passaggio dal finito alla sua negazione, sempre valendosi del concetto di continuità.

Il simbolo ∞ si concepisce pure indirettamente, in virtù dello stesso concetto di continuità, che ci permette di affermare senza fine.

Il finito è egualmente un concetto del tutto relativo, ed ha anch'esso bisogno di quello di continuità per esser stabilito. Infatti alla nostra mente fa d'uopo considerare due o più punti distinti, o due differenti istanti per formarsi l'idea del finito rispetto allo spazio ed al tempo.

§ 3.

Carattere speciale delle matematiche.

Pertanto la mente nostra distingue gli oggetti esteriori non dal passaggio loro dall'essere al non essere, o viceversa, ma soltanto dal più al meno, dal modo diverso di essere. In altri termini, noi non abbiamo la coscienza delle cose esistenti fuori di noi considerate assolutamente, o nella loro essenza, ma soltanto nei loro rapporti.

Il matematico prescinde da molte qualità specifiche degli oggetti, delle quali invece fanno, e giustamente, moltissimo conto le altre scienze più o meno empiriche; egli non considera i fenomeni nell'atto loro, ma bensì nella loro possibilità relativa allo spazio ed al tempo, e forma tuttavia la scienza che più di tutte è idonea ad investigare i detti fenomeni, vo' dire la meccanica, poichè il moto, secondo la nota espressione del Gioberti, altro non è che la *sintesi discreta dello spazio e del tempo*. Studi, osservazioni, esperienze non si compiono, e leggi non s' investigano senza il sussidio di questa scienza.

L' indole eminentemente progressiva delle matematiche fu felicemente definita dal Prof. Ardigò nel suo già citato lavoro (*):

« La matematica, egli dice, non è mai impedita, manco momentaneamente, dal progredire, perchè versando nel medesimo astratto, le linee e il punto, essa l' ha sempre a sua disposizione e non ha più bisogno di scoprirlo. »

Il lavorio che ferve tuttora e fa progredire mirabilmente questa scienza, mantiene infatti ad essa un carattere eminentemente subbiettivo. Si può tuttavia asserire senza tema di errare che le matematiche e le scienze della natura, mentre andarono sviluppandosi e perfezionandosi quasi parallelamente nell' arringo dei sapere, si esercitano per ciò appunto una reciproca influenza. I più grandi matematici furono invero eziandio i più felici indagatori della natura, e non è raro che le più ardite speculazioni proprie alla scienza astratta della grandezza, trovino il loro punto di partenza nell' osservazione

(*) Pag. 5.

esterna, o almeno siano state da essa occasionate. La matematica è quindi la scienza che serve massimamente a collegare i due mondi nei quali si estrinseca l'umana attività e intelligenza, il mondo dei fenomeni e quello del pensiero, quale istrumento che più d'ogni altro si presta a formularne le leggi, favorendo e agevolando ad un tempo la loro indagine e la loro applicazione.

§ 4.

Idea del finito ossia del quanto.

Dir si potrebbe che il finito è termine medio fra lo zero e l'infinito, in conformità della nota formula:

$$0 . \infty = \pm (\sqrt{\text{K}})^2$$

dove $\sqrt{\text{K}}$ è un qualsivoglia numero reale o immaginario (2).

Gioverà pertanto analizzare i concetti del finito, dello zero e dell'infinito, per esempio, in ordine all'estensione.

Se osservo le pareti della mia stanza, ho subito l'idea dei limiti, che nello spazio determinano la mia stanza. Questa determinazione è tuttavia pienamente relativa, perchè essi limiti non hanno una sussistenza assoluta. Infatti gli stessi limiti, cioè le mura che ne costituiscono le pareti, occupano pure uno spazio continuamente legato con quello che esse determinano, e questa determinazione non è dunque in realtà che relativa. Inoltre, il globo terrestre movendosi senza posa ad ogni nuovo istante varia lo spazio occupato dalla mia stanza. Nella quale, se fisso l'attenzione per esempio allo spigolo del muro, dove ha luogo l'incontro di due pareti contigue, sempre in virtù della nota legge di continuità, il passaggio dall'una all'altra parete è segnato da una linea di congiunzione, che si estende nel senso della lunghezza determinante una direzione unica, comune in quel luogo alle due pareti. Se poi le pareti laterali e quella del soffitto sono piane, esse s'intersecano due a due secondo tre linee rette, le quali concorrono in un luogo unico, comune alle tre pareti, chiamato punto. E quanto più le pareti saranno prossime all'ideale costruzione del piano, tanto più i tre spigoli si avvicineranno all' ideale costruzione della retta, ed il vertice all'ideale costruzione del punto.

Ma se la mia mente esce dai limiti della mia stanza e si trasporta alla considerazione dello spettacolo della natura, e colle nozioni attinte dall'astronomia, pensa agli innumerevoli astri, che ruotano per la volta celeste a smisurate distanze fra loro, allora dal concetto di punto, considerato come negazione relativa dello spazio, accompagnata dalla più precisa ed esatta determinazione di luogo, la mia mente passa all' affermazione più ampia e libera dello spazio, unita all' assoluta indeterminazione di luogo.

Ogni transito speciale dallo zero all' infinito, che la mente per via di punti o momenti effettua nello spazio e nel tempo o in qualsivoglia altro ente reale od ideale, purchè atto a fornire un concetto capace di diverse determinazioni, porge a noi l' idea del finito ossia del quanto (*). Il cogliere e fissare una di queste determinazioni è per noi arbitrario; così le forme geometriche acquistano una possibilità obbiettiva, che è subordinata all' idea del limite, e soltanto per ciò capace della maggiore possibile precisione.

La mente nostra, in virtù di queste forme da essa definite, e delle quali il fatto l' ajuta indirettamente a formarsi l' idea, arriva infine coll' analisi a scoprire un numero sempre maggiore di rapporti, che legano fra loro le dette forme, traendone da questi de' nuovi sempre più notevoli e generali.

§ 5.

Uffizio importante delle matematiche.

Benchè pertanto la precisione ed esattezza delle verità stabilite, nel modo ora accennato, non convenga mai piena-

(*) Su questa osservazione importante riposa il concetto fondamentale, che al Riemann forniva l' idea veramente positiva di grandezza astratta, svolta da lui magistralmente nella sua immortale memoria: Ueber die Ypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abilitationsschrift, 1854, aus dem dreizehnten Bande der Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. — Bernhard Riemann's gesammelte Mathematische Werke, herausgeeben unter Mitwirkung von R. Dedekind, von H. Weber — Leipzig 1876.

mente alla realtà delle cose, pure nel senso del limite le conclusioni della scienza giovano a scoprire o a confermare i rapporti che esistono o che devono esistere fra le cose medesime, sia per darsi ragione di un fine che esse sono atte a raggiungere, o sia per conseguirne altri, che noi vogliamo raggiunti da esse.

Quindi è che il Ferrari altamente compreso dell' importante uffizio che adempiono le matematiche discipline, ebbe ad uscire in questi memorabili detti:

« Quanto più una scienza si concentra nella grandezza e sulla quantità, tanto più si avvicina all' esattezza desiderata dalla scienza. L'astronomia non considera gli astri se non come tante quantità di una materia sconosciuta, non pensa alle materie, pensa alle masse, al volume, al moto degli astri e dei pianeti e diventa una meccanica celeste, un portento di esattezza. La meccanica propriamente detta non considera se non le masse, i moti, sta fedele al suo dato e quindi si svolge coll' equazione e col sillogismo. Havvi una scienza della luce perchè la luce si misura come il moto; havvi una scienza del calore, perchè il calore si muove come la luce. Da ultimo noi scopriamo una scienza dove la materia viene affatto eliminata, e si valutano le sole quantità sia nel numero e sia nell'estensione, ed è questa l' unica scienza che meriti tal nome, voglio dire la matematica. » (*)

Questo primato delle matematiche sopra le altre scienze e, quel che più monta, l' importante loro uffizio rispetto le medesime, venne posto solamente in rilievo all' epoca del risorgimento nel secolo del Galilei. Ma Leonardo da Vinci, genio non meno meraviglioso, capace di quelle vaste e profonde sintesi d'osservazione, la cui mercè si arriva alla più alta potenza dell'intuito, prima del Galilei istesso concepiva l'importanza e riconosceva l' utilità pratica del metodo sperimentale sussidiato dalle matematiche. Egli infatti adoperando continuamente un metodo rigoroso e matematico, dopo lunghe indagini e mature riflessioni, giunse a formulare e a risolvere alcuni dei più grandi problemi relativi alle leggi, che governano l'uomo e la natura. E come giustamente osserva il Libri, Leonardo non istancavasi

(*) Giuseppe Ferrari: *La filosofia della Rivoluzione,* Vol. I Cap. IX, pag. 269.

mai di ripetere: *che per giungere alla conoscenza dei fenomeni naturali e per poterne ritrarre i migliori frutti, d'uopo è cominciare dall'osservazione, passare all'esperienza* (*o all'esperimento*), *e quindi coll'aiuto di questa tendere a scoprire e determinare le cause, e per ultimo formulare una regola da subordinarsi al calcolo* (3).

In quanto riguarda il Galilei, mi basta citare il seguente memorabile passo del suo *Saggiatore*:

« *La filosofia è scritta in questo grandioso libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi* (*io dico l'universo*) *ma non si può intendere se prima non si impara a intender la lingua, e conoscere i caratteri coi quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile intendere menomamente una parte; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.* »

Creato il primo impulso, da Galileo ai giorni nostri, fu assai numerosa la schiera degli insigni pensatori, i quali con metodo rigoroso e spesso matematico fecero progredire i varii rami dello scibile. Di parecchi d' essi avrò più innanzi occasione d' intrattenermi; giovami intanto menzionare a questo proposito nuovamente il grande filosofo di Conisberga.

Il quale oltre al vanto immortale di comparire come precursore del Laplace nella teoria sulla formazione dei corpi celesti, come precursore del Darwin nella teoria dell'evoluzione che presiede allo sviluppo delle forme organiche, e come precursore del Riemann nella teoria degli spazii ad n dimensioni, merita sopratutto il nome d' instauratore della vera filosofia delle scienze secondo l'attuale indirizzo critico, del quale diedi un cenno fin dal principio del mio lavoro (*). Emanuele Kant nei suoi Prolegomeni si propone anzitutto la questione: « Wie ist reine Mathematik möglich? » Onde infine egli afferma l' indole puramente astratta di questa scienza, la quale ha già conseguito un'estensione meravigliosa, e promette tuttora di ampliarsi in avvenire, in modo indefinito, riunendo in sè il doppio carattere dell'apoditica certezza e della necessità assoluta, mentre resa

(*) Vedi anche il mio scritto: *La vecchia metafisica e la nuova fisica.*

indipendente dall'esperienza, quasi puro prodotto dell' intelletto, si presenta tuttavia come sintetica al sommo grado (4).

Sull'importanza delle matematiche in ordine alle altre scienze è pur notevolissimo un lavoro dell'Oken: *Trattato della naturale filosofia*, nel quale insieme all'apoteosi dello zero è pur fatta quella delle matematiche. Quivi l'Oken dichiara apertamente:

« La naturale filosofia essere in tanto vera, in quanto che si può ridurre a Matematica, la quale riposa sull'assioma fondamentale *ciò che è*, o (principio d' identità) che il matematico esprime formalmente coll'equazione 0 = 0 » (5).

Il Wronski distingue nel mondo fisico, e più specialmente in ciò ch'egli chiama *causalità non intelligente*, due oggetti: la *forma* e la *sostanza* (contenuto). Secondo lui le matematiche hanno per oggetto la forma presa nel suo più ampio significato: *che è il modo di essere della natura cioè del mondo fisico;* il tempo, lo spazio e le loro leggi cadono nel dominio delle matematiche.

Pertanto, secondo il Wronski, la filosofia delle matematiche sarebbe costituita dai canoni speciali che governano le facoltà intellitive dello spirito umano in ordine allo spazio ed al tempo.

Le matematiche si distinguono in pure ed applicate secondo che il loro oggetto si considera in astratto o in concreto.

Nelle matematiche pure si ha da un lato: *tempo — quantità* — successione d' istanti — numero — *algoritmo,* dall'altro: *spazio — corpo* — successioni di punti — estensione in differenti dimensioni — *geometria.*

I numeri si distinguono in particolari e generali, onde si hanno fatti e teoremi — *aritmetica ordinaria e generale.*

Analoga distinzione è fatta per la geometria in *generale e particolare*, ma questa distinzione meriterebbe una più ampia e decisa dichiarazione; essa non corrisponde in ogni modo allo stato attuale della scienza, come avremo occasione di vedere in avvenire.

Nelle quantità matematiche, in un modo molto generale, si può distinguere la natura o forma, dalle loro relazioni metriche, cioè dalla misura. Le proposizioni subordinate al primo modo di considerare le quantità, meritano il nome di teoremi, quelle che appartengono al secondo costituiscono dei fatti, che hanno bisogno di metodi o processi per essere investigati o determinati. In altri termini: i teoremi dipendono dall'intelligenza pura o razionale esclusivamente e hanno quindi un'impronta molto subbiettiva, ed un carattere apoditico o dimostrativo, mentre i procedimenti dipendono dall' azione ed osservazione esterna, ed hanno un'impronta obbiettiva, ed una indole apogogica cioè problematica. Anche nelle matematiche la scienza si può diffatti distinguere in *teoria e tecnica.* Il principio d'identità e quello d'analogia presiedono alla costruzione degli elementi e alla loro riunione sistematica; l'induzione e la deduzione concorrono poi a vicenda nella formazione solida ed armonica dell'edifizio scientifico.

§ 6.

Uffizio dei simboli zero e infinito nel calcolo e nella geometria.

I concetti dello zero e dell'infinito, adempiono entrambi un utilissimo uffizio sia nel calcolo che nella geometria. E sebbene il calcolo, scienza astratta per eccellenza, meglio si presti a stabilire le sue conclusioni subordinandole all'essenza intellettiva dei concetti medesimi, pure la geometria sì analitica che sintetica, non avrebbero potuto l'una col Descartes e l'altra col Desargues (*) conseguire i loro notevoli progressi senza il sussidio dei concetti medesimi. È poi importante l'osservare che mentre il Descartes, a giudizio dello stesso Chasles, colla sua analisi geometrica spianò la via al Leibniz e al Newton, grandi inventori del calcolo differenziale ed integrale, d'altra parte, come osserva giustamente il Prof. Luigi Cremona (**): « Il concetto degli elementi a distanza infinita è

(*) Aperçu Historique, M. Chasles. - Chap. III.^{me} § 1. — Chap. II.^{me} § 20 — Il Descartes fiorì dal 1595 al 1650; il Desargues dal 1593 al 1662.

(**) Elementi di Geometria Projettiva, Prefazione, XIV pag. — Vedi pure: Oeuvres de Desargues réunis et analysée par M. Pondra (Paris 1864) t. I.^{a} Boullion projet d'un atteint aux événement des rencontres d'un cone avec un plan (1629), pag. 104-105-106 e 205.

dovuto al celebre Desargues, il quale or fanno più di due secoli considerava esplicitamente le rette parallele concorrenti in un punto a distanza infinita, ed i piani paralleli come passanti per una stessa retta all'Infinito. » Ora la distinzione fra la geometria assoluta e la geometria ordinaria, dipende appunto dal modo, con cui si considerano gli elementi all'infinito dello spazio, mentre la condizione di projettività è indipendente dall'ipotesi su cui si fonda la geometria ordinaria (6).

§ 7.

L'infinito e lo zero nel senso aritmetico. Origine del calcolo differenziale ed integrale.

L'infinito e lo zero nel senso aritmetico hanno origine dalle due operazioni inverse *somma e differenza.*

Una differenza può essere finita o infinitesima; la prima dà origine al calcolo delle differenze finite, la seconda al *calcolo differenziale* (*), il quale trova suo fondamento nella seguente legge semplicissima: *Due quantità la cui differenza tende al limite zero sono fra loro eguali* (**).

Il Valis nella sua *Arithmétique des infinis* e il Cavalieri nella sua *Geometria degli indivisibili*, insieme ad altri aveano applicato al calcolo e alla geometria l'idea dell'infinito. Ma soltanto Fermat e Barrow coi loro lavori prepararono realmente la via ai due grandi inventori del nuovo calcolo (Aperçu historique de Chasles, Chap. IVme), il quale oltre a molti vantaggi in confronto degli antichi metodi, ha quello eziandio d'essere felicemente applicabile allo studio dei fenomeni naturali.

Newton applicando l'idea del movimento alla generazione delle curve, stabilì il nuovo calcolo (Methodus differentialis) valendosi della sua teoria delle flussioni, cioè su basi più chiare

(*) Montferrier, *Dizionario delle scienze matematiche.* Vol. III pag. 340 e 413 della versione italiana.

(**) Qui sarebbe opportuno il poter consultare la celebre opera del Wronski. *Philosofie de l'infini.*

e rigorose che non il Leibniz. È tuttavia a deplorarsi che quest'ultimo non abbia dato compimento ad un'opera, ch'erasi proposta col titolo: *De Scientia infiniti* (Leibniz, Ediz. Dutens; Epistola LXXII, ad D. Christ. Wolfium circa scientiam Infiniti). Imperocchè, come giustamente osserva il Montucla: « A chi meglio del Leibniz si conveniva l'esposizione dei principii e l'uso d'un calcolo di cui egli fu l'inventore? »

Lo stesso Montucla asserisce che ad eccezione di ciò, che è contenuto nella sublime opera del Newton: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), l'Inghilterra, che può considerarsi la patria del calcolo da noi chiamato *differenziale e integrale* o meglio *infinitesimale*, ebbe dal continente la conoscenza di questo calcolo, del quale Newton aveasi quasi interamente riserbato il secreto, e di cui diede qualche spiegazione soltanto in alcune delle sue lettere (*).

Il metodo del Leibniz è pertanto più aritmetico di quello usato dal Newton; il primo fu veramente l'inventore della teoria degli infinitamente piccoli.

§ 8.

Oppositori del nuovo calcolo.

La nuova dottrina ebbe fin dal suo nascere non pochi oppositori (Montucla, luogo citato).

L'Abate di Catelan, troppo zelante seguace del Descartes, pretese di aver dimostrato che l'analasi di quest'ultimo era sufficiente a ottenere ogni intento scientifico pur conseguito dal nuovo calcolo.

Il Nieuwentiit, autore di opere morali e d'una dimostrazione sull'esistenza di Dio, negava il principio fondamentale del calcolo differenziale. Egli pubblicò inoltre un lavoro, con cui s'accinse a stabilire su basi migliori il metodo leibniziano, impiegando un principio metafisico, la cui mercè credeva d'aver spiegato del pari i misteri della creazione. Ma prima lo stesso

(*) Vedi: Montucla. *Storia delle Matematiche*. Tomo 2,° parte IV, libro VI.

Leibniz e poi ancora più chiaramente il Bernouilli e l'Hermann dimostrarono, che questo avversario del calcolo differenziale non sapeva che si dicesse.

Non meno degno di derisione si fu il Cluver, il quale s'accinse ad attaccare indirettamente il nuovo calcolo, pretendendo d'aver scoperto la quadratura del cerchio, riducendola al problema: « *costruere mundum divina mente analogum.* »

Queste stranezze non devono far meraviglia quando si pensi che esse sono il parto di menti, che muovevano da un concetto del tutto metafisico dello spazio e del tempo, quindi anche dell'infinito.

Già fino dall'introduzione di questa opera ebbi, d'accordo al Gauss, ad osservare che l'uomo non può in modo veruno formarsi l'idea dell'infinito assoluto, e nemmeno l'idea del nulla assoluto, ma può invece concepire l'uno e l'altro indirettamente o in senso relativo, che è quello del limite. I principii di continuità e di analogia, ajutano poi la mente a formulare in modo abbastanza chiaro e preciso e certamente poi utile e pratico, la sostanza dei detti concetti, i quali rimanendo tuttavia sempre vaghi e indeterminati, non possono quindi essere pienamente subordinati alle leggi che governano quelli che hanno relazione col finito.

L'infinito ideale o assoluto, detto anche metafisico, merita pertanto siffatti nomi, non perchè esso sia innato nella nostra mente, o perchè questa possa veramente stabilirlo a priori, ma perchè il detto concetto esce dai limiti dell'esperienza nostra, sia che realmente vogliasi ritenere limitata la quantità di materia, della quale noi siamo una parte, o sia che, pur ammettendo questa illimitata, siano soltanto limitati i nostri organi, pur provveduti dei più potenti istrumenti, atti ad accrescerne di molto la portata e la forza.

§ 9.

Infinito metrico e infinito locale.

Giustamente pertanto si suole distinguere l'infinito in due specie: *l'infinito metrico, e l'infinito locale o di posizione.*

L'infinito metrico può essere di vari ordini. Ed invero anzitutto è chiaro che una grandezza finita ha collo zero un rapporto infinitamente grande. Se invece dei due fattori d'un prodotto l'uno sia costante e finito e l'altro cresca all'infinito, il prodotto sarà parimente infinito. Ora, è lecito il confondere l'infinito fattore coll'infinito prodotto? Mentre è già manifesto che essi possono avere fra loro un rapporto finito qualunque, si assume infatti qual simbolo d'indeterminazione il rapporto fra l'infinito e l'infinito. Si ha inoltre che se la base rimane costante e l'esponente cresce all'infinito, anche la potenza raggiunge il limite infinito, se la base è maggiore dell'unità. Ma sarà lecito ritenere, il valore infinito così raggiunto dalla potenza, per nulla diverso da quello che assume simultaneamente l'esponente?

Se infine i fattori d'un prodotto tendono tutti al limite infinito, il prodotto medesimo si suol considerare un infinito di quell'ordine, che corrisponde al numero dei fattori, e quindi anche in generale: *se una grandezza finita ha coll'infinita lo stesso rapporto che ha lo zero colla grandezza finita, un infinito d'un determinato ordine ha coll'infinito d'ordine immediatamente superiore il rapporto zero* (*).

Se dunque mentre noi ci proponiamo di valutare lo zero e l'infinito, entrambi suscettivi d'ordine diversi, e aventi origini differenti, crediamo pur conveniente l'attribuire ai simboli zero ed infinito un significato preciso e determinato, senza cadere tuttavia in contraddizione coi concetti primitivi tanto generali inerenti ai simboli medesimi, in realtà quando s'instituiscono rapporti fra lo zero e lo zero, fra l'infinito e l'infinito, è ormai regola comune in matematica l'assumere le notazioni:

$$0:0, \quad \infty:\infty, \quad \infty \, . \, 0 \, . \quad \infty - \infty \, .$$

siccome simboli d'indeterminazione. Ora ciò sarebbe per l'appunto in aperta contraddizione coll'ipotesi che lo zero e l'infinito avessero in se stessi un senso preciso e determinato, anche nel modo pure relativo già attribuito ai detti simboli.

(*) Montferier, *Dizionario delle Scienze Matematiche*. Vol. V, pag. 399.

§ 10.

Lo zero metrico, l'infinito metrico e locale in Geometria.

La Geometria dal suo canto presenta difficoltà di simile natura, e i singoli casi si fanno seguire da analoghe interpretazioni.

Applicando infatti il concetto metrico dello zero al punto già concepito come sito senza estensione, si deduce che una linea di determinata grandezza ha un rapporto infinito con ciascuno de' suoi punti, nel senso che un numero infinito di punti è necessario a esaurire la linea. Se quindi si considera una linea di lunghezza infinita, un segmento od arco qualsivoglia di questa linea, non potendo esaurirla giammai, cioè essendovi contenuto un numero infinito di volte, ne segue pure che la linea ha con una sua parte qualunque, un rapporto il cui valore è infinito.

Fissiamo pertanto la nostra attenzione per semplicità sulla retta in particolare. Benchè questa si consideri come infinita nel senso della lunghezza, non è mai sufficiente mediante un numero finito di volte ad esaurire una superficie rigata qualunque da essa generata. Fra la retta e una qualsiasi regione della superficie, sulla quale la prima può anche distendersi per intero, ha luogo il rapporto zero, onde la retta è da considerarsi come nulla rispetto alla regione medesima, cioè si può ritenere come una superficie di valore nullo. La retta dunque considerata in un certo senso è infinita, in un altro senso invece è nulla. Essa è per esempio nulla rispetto ad una striscia (regione del piano limitata da due rette che con una terza retta fanno angoli eguali o angoli che differiscono di 180° (*)).

Altrettanto ha luogo per una determinata area rispetto ad

(*) *Die Elemente der Mathematik*, von D. Richard Baltzer, — Leipzig 1870 — Zweiter Band, § 2, 5.

un'area infinita, e di questa rispetto allo spazio infinito a tre dimensioni. Così, a cagion d'esempio, la striscia ha col piano il rapporto zero. Qui nasce opportuna la domanda, se questo zero sia identico al precedente indicante il rapporto fra la retta e l'angolo. No certamente. Non è quindi rigorosa la conclusione: che un angolo non può essere interamente contenuto nella striscia, perchè il primo ha un rapporto finito e la seconda un rapporto zero col piano infinito (*), avvegnachè lo zero dell'angolo coincide colla retta, e questa non coincide certo colla striscia.

Ma l'infinito locale o di posizione è appunto quello rispetto cui cadono più facilmente le contestazioni. Esso ha infatti una attinenza immediata colla natura intima dello spazio, mentre l'infinito metrico, pure applicato allo spazio come grandezza estesa, cade sotto la legge comune a tutte le grandezze quantitative nel senso intensivo proprio così del continuo come del discreto.

Più innanzi avendo a considerare particolarmente l'infinito locale si vedrà, come risulta dai lavori del Riemann e di altri, che questo concetto ha diretta relazione colle ipotesi fondamentali della Geometria (7).

§ 11.

L'infinito secondo Gauss.

Nel breve ma pur preziosissimo estratto della corrispondenza fra il Gauss e lo Schumacher, furono fatte dal primo alcune notevoli considerazioni circa la natura e l'uso del concetto dell'infinito. La questione contenuta in quelle poche pagine si può presentare nel modo seguente (**):

Se in un triangolo isoscele la base rimane costante mentre l'altezza cresce all'infinito, al limite diverrá retto ciascun angolo alla base.

(*) Vedi Baltzer, luogo prima citato.

(**) Etudes géométriques sur la théorie des paralleles par N. I. Lobatschwgsky traduit de l'allemand par I. Hoüel, suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris Gautier-Villars, 1866.

Qui, come nella dimostrazione proposta dallo Schumacher (*) e nell' altra esposta dal Gauss (**) si fa un uso del tutto arbitrario dell' infinito, come lo stesso Gauss asserisce, trattandosi l' infinito come una quantità determinata (volendeten). Ed invero le conclusioni ottenute nel calcolo, partendo dal concetto dell' infinito, sono veramente rigorose finchè i simboli e le formule a cui si applicano restano pure formule, cioè meri subbietti della nostra mente più ideali che reali; ma facendone l' applicazione alla geometria, scienza dello spazio, avente quindi per suo oggetto un ente reale della natura, non è concesso il valersi d'un modo di vedere proprio della nostra mente, quando s' abbia a concludere circa a qualche cosa che è subordinata alle leggi che regolano questo ente medesimo.

Ecco pertanto come il Gauss vuole abbiasi a concepire l' infinito:

« L' infinito non è che una frase, poichè infatti trattasi del limite, al quale certi rapporti possono avvicinarsi, quanto si vuole, mentre altri son suscettivi di crescere indefinitamente. »

§ 12.

Punto all' infinito e angolo infinitesimo.

Pertanto anche in geometria e nei casi più comuni, se di due grandezze fra loro dipendenti, una diminuisce sempre più mentre l'altra cresce all' infinito, non sempre avviene che allorquando questa abbia raggiunto il suo massimo valore (infinito), la prima debba annullarsi.

Ora nella geometria astratta, cioè indipendente da qualunque ipotesi arbitraria, si ammette tuttavia che se in un triangolo un lato rimane costante mentre gli altri due crescono all' infinito, l' angolo da questi compreso diminuisce fino a divenir nullo. Qui si fa forse abuso del concetto dell' infinito?

Noi rispondiamo a questa domanda osservando, che ciò

(*) Hoüel. Etudes Géom. pag. 37.

(**) Idem pag. 59.

da un lato non sembrerebbe, poichè si tratta di grandezze estese, le quali sotto un certo aspetto, proprio della misura dell' angolo, si possono considerare come intense. Ma d' altro canto, ammesso il concetto del punto all'infinito, la questione nel senso puramente geometrico a ciò si riduce:

Mentre una retta, che gira nel piano intorno ad un punto situato a distanza finita, fa colla sua primitiva traccia o direzione un angolo sempre maggiore, al contrario quando il punto attorno cui essa gira va all' infinito, l'angolo si mantiene nullo.

Qui è inoltre d' uopo l'osservare che pur supponendo nullo il rapporto di quest'angolo al piano, come nel caso della striscia, lo zero dell'angolo ordinario non è da confondersi collo zero indicante il valore limite di quel rapporto, nello stesso modo che non è da confondersi collo zero indicante il valore limite del rapporto della striscia col piano. Lo zero dell' angolo ordinario si riduce infatti ad una retta, mentre l'angolo col vertice all' infinito e la striscia, costituiscono l'uno e l'altra una determinata regione del piano.

Pertanto nella geometria astratta, l' ipotesi dell' angolo nullo col vertice all' infinito, e l' ipotesi che da un punto ad una retta si possono guidare due parallele, ossia che la retta ha due punti all' infinito reali e distinti si possono verificare simultaneamente. Seguirebbe da ciò che l'angolo nullo di due parallele contener dovrebbe come sua parte e per intero quell' angolo che è supplemento del doppio dell' angolo del parallelismo !

Lo stesso Gauss (Hoüel, Etudes ecc. pag. 40) asserisce che nel triangolo equilatero variano gli angoli col variare dei lati; della qual cosa, il Prof. Eugenio Beltrami diede invero una elegante ed ingegnosa spiegazione nella sua importante memoria: *Saggio d' interpretazione della Geometria non-euclidea* (Giornale di Battaglini, Vol. VI, pag. 293), portando così senza dubbio molta luce sulla acuta osservazione del Gauss, nell'ipotesi della geometria non-euclidea: *che la somma degli angoli d'un triangolo rettilineo sia minore di due retti,* ipotesi che esce dai limiti della nostra esperienza. In tale ipotesi questa somma diminuisce col crescere dei lati del triangolo: è tuttavia ammissibile, che quando essi lati crescono all' infinito, tendano simultaneamente al limite zero gli angoli del triangolo ! O almeno giova farsi la domanda: quale significato geometrico è lecito attribuire allo zero di questo limite?

§ 13.

Se sia ammissibile il concetto dell' infinito assoluto in geometria.

Il Sig. Abel Transon, membro di una Società Filomatica, in un suo lavoro che ha per titolo: « *De l'infini en métaphysique et géométrie à l'occasion d'une pseude géométrie* » — (Paris, 1871) — pretende provare la falsità della geometria astratta, e nello stesso tempo rendere accettabili le dimostrazioni che il Bertrand di Ginevra ed altri hanno creduto di dare per l'assioma dell' Euclide relativo alle parellele (*).

Tutte le argomentazioni fatte da questo acuto critico per sostenere il suo difficile asserto, sono fondate sopra una sottilissima distinzione da lui stabilita fra l' infinito assoluto e l' indefinito, accettata la quale parmi non dovrebbe nemmeno ripugnare la distinzione, che nella memoria già citata fa il Prof. Beltrami fra gli spazii reali ed ideali, pur ammessa da altri pangeometri. Ma il Transon vuole che l'uomo abbia a priori il concetto dell' infinito, mentre la via opposta dell' esperienza secondo lui, non conduce che all'indefinito. Ora è ammissibile per la mente umana questo concetto chiaro ed assoluto dell'infinito, per la mente umana propria d'un essere tanto limitato e finito? Qui è d' uopo confessare col Gauss, che la questione invade il campo della metafisica. Del che il Transon per nulla si sgomenta, ma fiutato il terreno, vi cammina per entro con piena franchezza; e anzi tutto prendendo alla lettera la parola metafisica, che suona al di là delle cose fisiche, vuole che ogni idea sia un soprasensibile e come tale cada nel dominio della metafisica.

Stabilita così la necessità di considerare gli enti geometrici in un modo tanto elevato e sublime, non fa meraviglia

(*) Elementi d'Euclide editi per cura dei Professori Enrico Betti e Francesco Brioschi. Libro I. pag. 5.

se le conclusioni del Transon siano parimente sublimi ed ideali. Egli non può tuttavia esimersi dal non agevole compito di dare, e chiaramente, l' idea o almeno il concetto dell' infinito assoluto. Ma a ciò basterà forse una definizione! E poichè, se questa definizione non fosse tuttavia sufficiente sarebbe in ogni modo necessaria, a qual definizione dovrà egli per avventura ricorrere se non a quella data del Gauss, che corrisponde al concetto dell' indefinito, cioè dell' infinito relativo e non mai assoluto? (8).

§ 14.

I pangeometri e l'evidenza in geometria.

In un modo più audace (*), benchè molto spiritoso e interessante, un nostro pur valente e benemerito Geometra, non ha molto rapito alla patria e alla scienza, il Senator Prof. Giusto Bellavitis, non si peritò di scagliare gli acuti e mordaci suoi dardi, contro i cultori della nuova geometria. Egli fece ciò in un suo scritto, che tuttavia è per più rispetti lodevole ed importante. Ma chi avesse la pazienza e la cura d' intendere e meditare i lavori del Gauss, del Bolyai, del Lobatschewsky, del Riemann, del Grasmann, dell' Helmholtz, del Genocchi, del Beltrami, del Battaglini, del Caylley, del Klein (Felix), del De Tilly, del Flye, dell' Hoüel, del Frischauf, del Cassani e di parecchi altri ancora i quali con tanto amore e profitto si occuparono di questa nuova fase della geometria, tanto derisa dal Bellavitis potrebbe convincersi agevolmente quanto sieno arrischiate e anzi infondate del tutto le ipotesi e le conclusioni di quest'ultimo.

I Pangeometri giammai non fecero il ragionamento supposto dal Bellavitis, nè aveano d'uopo dell' Euclide per accorgersi, che quella proposizione nota a tutti sotto il nome di *assioma delle parallele*, non si poteva ammettere come evidente.

(*) Sembrami infatti audace il tentativo di gettare il ridicolo contro una Scuola, che ha Gauss per capo, e che conta fra i suoi seguaci quasi tutti i maggiori Geometri di questo secolo. Vedi: *Sulla Logica*. Discorso accademico del Prof. Giusto Bellavitis. (Estr. dal Vol. XVIII delle Memorie dell'Istituto Veneto).

Che due grandezze eguali ad una medesima siano eguali fra loro, è verità d'una evidenza immediata, non solo in forza dell' osservazione diretta, ma ancora in grazia del solo intuito interno. Così non è nel caso dell' impropriamente detto assioma delle parallele, il quale non è in nessun modo verificabile pienamente dall' esperienza: di esso potendosi soltanto asserire, che finora non fu mai contraddetto dalla medesima, diguisachè la nostra mente non è autorizzata a concludere essere vero assolutamente e generalmente ciò che è in esso contenuto.

Il Bellavitis vuole la Geometria tutta fondata sull'evidenza; ma potendosi questa distinguere in due ben diverse specie, secondochè nasce dall' osservazione diretta o dall' indiretta o, in altri termini, dall' intuito esterno o dall' intuito interno, giovera fare le seguenti osservazioni.

Quando si tratti d' indagine relativa alle verità geometriche del tutto primitive e fondamentali, l' esperienza diretta ajuta la mente a rintracciarle e a discovrirle, ma essa non è sufficiente quando si tratti di stabilirle e dimostrarle. Prima si coglie, per così dire, a volo la verità contenuta in una proposizione e poscia, camminando coi piedi di piombo, devesi stabilirla. Onde John Stuart Mill, nel suo grandioso Sistema di logica deduttiva ed induttiva, avea già osservato giustamente che: « I primi principii della geometria sono essi pure il risultato dell' induzione » — pag. 244; — e il Kant avea del pari presentito l' insufficienza dell' intuizione a stabilire i concetti propri degli enti particolari della geometria.

Del resto col progredire del metodo anche l' indagine si può eseguire con passi regolari, in modo che, pur senza ciò che volgarmente dicesi genio, è dato il giungere alla scoperta di nuove, utili e importanti verità; onde si è giustamente osservato che il genio consta massimamente di pazienza e buon senso, ossia del vivo e giusto sentimento dell' evidenza (*) (9).

(*) Il benemerito Professor Colletti, rapito non ha guari alla famiglia, alla patria ed alla scienza, nella sua bella prolusione letta all' apertura dell' anno scolastico 1879-80 nell'Aula Magna della nostra Università di Padova, parlando del così detto genio o criterio medico, ne diede la seguente notevole definizione: « Il genio è la sintesi dell'osservazione e dell'esperienza portata alla più elevata potenza dell' intuito. »

§ 15.

Intento pratico della geometria assoluta (*).

Tornando all'opinione espressa dal Prof. Bellavitis, il quale si dichiarò decisamente contrario alla geometria *antieuclideana*, è da notarsi che i Pangeometri, da lui per istrazio chiamati *geometri dell' avvenire*, hanno piuttosto messo in maggiore evidenza: essere la geometria ordinaria o euclidea vera soltanto entro la cerchia della nostra esperienza, e fin dove il comportano i nostri sensi pure armati dei più potenti telescopi , o di altri istrumenti di misura i più delicati e i più perfetti. Onde per essi la geometria euclidea è, nè assolutameste vera, nè assolutamente falsa, sendo subordinata ad una ipotesi, che non si è razionalmente dimostrata, ed è verificabile empiricamente soltanto in un campo ristretto e finito di osservazioni.

La geometria indipendente da qualunque ipotesi particolare, detta impropriamente aeuclidea o antieuclidea, merita piuttosto il nome di *Geometria immaginaria o astratta*, o meglio *pangeometria,* cioè geometria per tutti i casi, o anche *scienza assoluta dello spazio*, o *geometria assoluta :* nomi tutti più o meno usati dai moderni geometri, che occuparonsi di questa scienza. Essa è infatti pienamente vera, sia che abbia luogo l' ipotesi, su cui si fonda la geometria ordinaria, o sia che abbia luogo l' ipotesi contraria. D'onde ne venne che massimamente le convenisse l'epiteto di astratta per eccellenza, mentre astratta essere pur deve qualunque specie di geometria, come la pensava del pari il Prof. Bellavitis, il quale nella prefazione del suo aureo trattato di geometria descrittiva, la chiama appunto « astratta quanto si può mai immaginare. »

La geometria assoluta ebbe origine dal bisogno, sentito massimante da alcuni geometri insigni in principio di questo secolo, fra i quali è da ricordarsi lo stesso Legendre, di stabilire sopra basi più solide l' importante teoria delle parallele.

(*) La Pangeometria è detta anche Geometria assoluta, cioè vera assolutamente, perchè essa è indipendente da qualunque ipotesi.

Chi pertanto amasse formarsi un giusto e chiaro criterio sulla geometria assoluta, può consultare le opere seguenti del dott. J. Frischauf, professore di Matematica nell' Università di Graz.

1.° Absolute Geometrie nach J. Bolyai — Lipsia, 1871.

2.° Elemente der Absoluten Geometrie — Lipsia 1876.

Farebbe certo cosa utile e degna chi desse la traduzione italiana almeno della seconda di queste due opere, nella quale vengono diffusamente e completamente esposte le parti più sostanziali ed interessanti dei lavori del Bolyai e del Lobatschewski. Un altro notevole ed interessante lavoro sullo stesso argomento fu di recente dato alla luce dal S. De Tilly col titolo: « Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique, Bordeaux 1879. »

Il Frischauf facendo tesoro delle ultime conquiste della scienza geometrica, mette in piena evidenza la necessltà di distinguere tre diverse geometrie, e ciò allo scopo di togliere interamente ogni pur fosse apparente contraddizione; e poichè comprendesi agevolmente, che questa distinzione si fonda appunto sul modo diverso di applicare il concetto dell'infinito, ne viene che credo opportuno il farne un breve cenno.

§ 16.

Tre diverse geometrie secondo Frischauf e secondo Klein.

Ecco pertanto le tre diverse geometrie secondo il Frischauf:

1.° *Geometria assoluta.* In cui la retta e quindi anche il piano si considerano come infiniti in ogni senso: la retta ha in tale ipotesi due punti all'infinito reali e distinti.

2.° *Geometria ordinaria o euclidea.* La retta ed il piano costituiscono due lunghi rientranti, cioè chiusi all'infinito; la retta ha un unico punto all'infinito, cioè due punti all'infinito reali e coincidenti.

3.° *Geometria della sfera e dello spazio finito.* Questa geometria ha evidentemente luogo per le figure infinitamente piccole; cioè si ha così la geometria dello spazio finito, nell' ipotesi che la retta sia non terminata e finita, cioè rientrante, caso nel quale seguono per il piano le proprietà della sfera, comportandosi la retta sul piano nello stesso modo che i cerchi massimi (linee geodetiche) sulla superficie sferica: la retta ha in tal caso nessun punto reale all' infinito, o in altri termini due punti immaginari all' infinito (*).

La geometria euclidea è un caso particolare della geometria assoluta, imperocchè allorquando i due punti all'infinito della retta, che nella geometria assoluta sono reali e distinti, vengono a coincidere in un solo, si ritorna con ciò all' ipotesi fondamentale della geometria euclidea.

La geometria della sfera comprende pure sotto di sè come caso particolare la geometria euclidea; infatti assumendo le rette non terminate di tale lunghezza, che per esse non avvengano errori apprezzabili nelle formule che valgono per la geometria della sfera, tutte le proprietà delle figure in questa geometria, valgono anche per l' euclidea. Giova infatti rammentare di bel nuovo che nella geometria dello spazio finito, come nella geometria euclidea, la retta sufficientemente prolungata deve rientrare in sè stessa.

Dopo queste distinzioni, la cui necessità rendesi subito manifesta, si può dare per la retta una definizione più generale, tale insomma che valga per tutte e tre le diverse geometrie:

La retta è quella linea, che è determinata da due dei suoi punti situati a distanza finita; se i due punti vanno all' infinito, per essi possono passare infinite rette, le quali formano due sistemi distinti o coincidenti, secondochè, i due punti che vanno all' infinito, siano essi pure reali e distinti, o reali e coincidenti.

Su questo proposito delle tre diverse geometrie, è eziandio molto importante il bellissimo lavoro di Felix Klein (Ueber die sogennante nichteuclidische Geometrie. — Mathematische Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Meumann Bd. 4), il quale partendo dalle note proprietà fondamentali dell' iperbole, della parabola e dell' elisse, che dipendono dalla considerazione dei punti all' infinito, trovò opportuno chiamare le tre

(*) Elemente der Absoluten Geometrie, pag. 106, art. 104.

diverse geometrie col nome di *iperbolica*, *parabolica* ed *ellittica* (10).

Tornerò ben presto su questo arduo e delicato argomento della geometria assoluta, intorno al quale sembrami aver già detto abbastanza per rendere manifesto quanto siano ingiuste ed infondate le accuse fattele dal Bellavitis.

E poichè questi ha inoltre voluto negare ai geometri moderni l' uso libero ed ampio del principio d' analogia, la cui mercè dallo spazio a tre dimensioni dell'antica geometria, si può passare a quello di n dimensioni, gioverà subito toccare alquanto questo argomento.

Se ad alcuni parve che il Kant, nel suo meraviglioso sistema filosofico, negasse la realtà allo spazio ed al tempo, dichiarandoli sì di sovente pure intuizioni o forme della nostra mente, è anche agevole il convincersi, mercè lo studio accurato e diretto delle sue opere, quale significato debbasi attribuire a questo suo modo di considerare lo spazio ed il tempo (11).

Qualunque siano in ogni modo le conseguenze che a torto od a ragione si trassero dalla Scuola Kantiana e massimamente dai suoi detrattori, circa il modo di concepire lo spazio ed il tempo, la realità propria di questi enti venne loro pienamente ed esplicitamente rivendicata dal grande Herbart, che lo stesso Riemann, iniziatore di una vera rivoluzione nella matematica e nella fisica, dovette additare quale compagno del Gauss nel maturare i germi filosofici e nell'escogitare le alte considerazioni critiche, in virtù delle quali egli giunse poi a stabilire delle nuove e generali vedute sul modo di concepire la grandezza e le sue successive varietà. Si vedrà ben presto tuttavia qualmente il Kant istesso è da ritenersi quale vero precursore del Riemann nell'attribuire allo spazio un numero maggiore di dimensioni.

Fa infine meraviglia che mentre il pur giustamente e sempre compianto Prof. Bellavitis, in quella parte dei suoi studi che più l'onora, mostrasi tanto conforme alle vedute del grande Möbius, abbia tuttavia creduto poter gettare il discredito sopra un'opinione condivisa dal medesimo, il quale esplicitamente ebbe a dichiarare in proposito:

« Per comprendere uno spazio ad n dimensioni bisogna esistere in uno spazio ad $n+1$ dimensioni (*). »

Intorno la dottrina degli spazii trattata nel modo più elevato sono eziandio di molta importanza le considerazioni fatte dal Grassmann, il quale nel suo ormai celebre *Ausdehnungslehre* (**), elevatosi al concetto astratto e generale della grandezza continua, ideò per le *forme* un processo di generazione, che molto si avvicina a quello dovuto al Riemann.

§ 17.

Sulle ipotesi fondamentali della geometria secondo Riemann.

Il Riemman dà principio alla sua immortale memoria: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (***), con una breve introduzione, ch'egli stesso chiama: *Piano della ricerca* (Plan der Untersuchung).

Il difetto principale della Geometria dei Greci, quale ancora s'insegna nelle nostre scuole, si è l'aver dato definizioni puramente nominali sullo spazio e sui primitivi concetti necessarii alla sua costruzione, mentre in realtà le determinazioni che servono a stabilirne le proprietà metriche e grafiche, si presentano sotto forma di assiomi. Per poco si rifletta sull'entità e verità di questi assiomi, è agevole convincersi, che si è confuso in essi il dominio della ragione con quello dell'esperienza, l'idea col fatto, il lato subbiettivo coll'obbiettivo della questione. La necessità di questa distinzione è una logica conseguenza del grandioso sistema filosofico del Kant, sistema ormai assunto per base dell'odierno indirizzo critico di tutte le scienze.

(*) Möbius. Baryceutrische Calcul, p. 181.

(**) Die lineale Ausdehnungslehre, in einer Zweig der Mathematik, Stettino 1871. — Veggasi pure: Della vita e degli scritti fisico-matematici di Ermanno Grasmann, per Antonio Favaro. Roma 1879.

(***) Vorgelesen zu Göttingen am. 10 Juni 1854 von B. Riemann in seiner Habilitationscrhift.

Soltanto una mente superiore, che in se riunisse in eminente grado le più pregevoli doti del matematico e del filosofo, poteva riuscir a formulare e a precisare l' importanza e necessità di questa delicata distinzione, che a quanto asserisce lo stesso Riemann fu presentita solo dal Gauss e dall'Herbart, ma come ebbi ancora occasione di dichiarare (*), fu anche accennata dallo stesso Kant nella prima delle sue opere pubblicata nel 1747.

Ora il Riemann facendo uso libero ed ampio del principio d'analogia, e sottopponendo al suo spirito eminentemente critico la più ardita investigazione, che abbia mai aguzzato l' umano ingegno, riuscì a stabilire il fecondo e generale concetto delle grandezze a dimensioni multiple, nel modo più astratto e indipendente che mai si possa immaginare.

Anche al Kant balenò alla mente la convenienza logica di concedere allo spazio un numero superiore di dimensioni. Egli considerò l' idea del *moto* come assolutamente necessaria al concepimento dell' esteso, e quindi delle diverse sue dimensioni, mentre è soltanto in virtù del moto, che cambiano e s' avvicendano senza posa i rapporti fra le cose, quali effetti di forze operanti.

Che tali fossero i suoi pensamenti risulta dalla sua prima opera testè accennata, nella quale si palesa la straordinaria sua indipendenza e libertà di vedute, eziandio nel modo di concepire lo spazio e le sue dimensioni, e dove sembra quasi adombrato l' alto concetto della moderna geometria, almeno per ciò che riguarda la dottrina superiore degli spazii (12).

Pertanto il Riemann, partendo da un concetto generale, e subordinando al medesimo tutta una serie di concetti affini, spianò la via alle ricerche ulteriori di altri grandi matematici, i quali con metodo più o meno analitico ne svolsero ed applicarono le idee feconde, fra i quali meritano essere specialmente mentovati: Cayley, Beltrami, Felix Klein.

Stabilito il concetto delle grandezze a dimensioni multiple, ed osservato che sotto questo punto di vista ognuna di esse è suscettiva d'una determinazione metrica particolare, ne segue necessariamente che: *lo spazio ordinario non è che un caso*

(*) Veggasi il mio lavoro: *La teoria dell'evoluzione e la libertà.* — Note.

particolare d'una grandezza a tre dimensioni. Quindi è che il concetto generale ed astratto di grandezza, non essendo sufficiente per indagare a priori le proprietà dello spazio, le quali lo differenziano da ogni altra grandezza a tre dimensioni, in questa indagine si dovette ricorrere necessariamente all'esperienza (*).

Ecco pertanto anche in Geometria negato quell'apriorismo che per tanti secoli infestò la scienza e la scuola; ecco tracciata la vera via con cui risolvere la questione. In luogo d'una certezza assoluta, che rasenta i limiti della fede, ecco sostituita quella certezza empirica e perciò relativa, della quale sono capaci i fatti possibili ma non necessari, i fatti ai quali non si può negare un' esistenza obbiettiva cioè un'esistenza fuori di noi, e che non ci è quindi concesso di raffigurare a nostro talento, ma soltanto indicarne i diversi e possibili casi, e il grado rispettivo di probabilità che loro spetta.

In tal guisa rimane alla ragione un compito non meno elevato ed importante: *assicurarsi,* come osserva lo stesso Riemann, *entro i limiti dell' osservazione, quale sia il grado di probabilità da concedersi alle diverse interpretazioni dei fatti medesimi, considerandoli soltanto come ipotesi ed indagando quanto siano attendibili le contrarie e le intermedie sotto il doppio punto di vista proprio dell'esperienza e della ragione.*

Con questo metodo di logica varamente generale, l' unico che dia carattere di assoluta certezza alla nostra mente, la scienza giunge infine a comporre la sintesi fra il reale e l'ideale, cioè a creare o almeno a stabilire su solide basi, quel campo intermedio e quel terreno neutrale (Veggasi a questo proposito l' *Introduzione*), nel quale essa rendesi tanto più utile e feconda colle sue investigazioni e coi suoi portati, quanto più questi sono attinti esclusivamente alle limpide fonti del positivismo o del determinismo scientifico.

(*) Veggansi a questo proposito i già citati prolegomeni del Kant, e specialmente l'articolo: Ist reine Mathematik möglich? Lo stesso Grassmann avea considerata la Geometria come l'applicazione d' una dottrina più generale, di cui stabiliva i principii ed i metodi nella sua Ausdehnungslehre.

§ 18.

Concetto generale di grandezza e genesi delle successive varietà.

Nei più comuni trattati di matematica elementare, i quali circolano nelle nostre scuole, si suol dare il concetto di grandezza o quantità dicendola: *tutto ciò che è suscettivo di aumento e di diminuzione* (*). Questa definizione ha intanto carattere troppo obbiettivo, e non è abbastanza astratta e generale, quanto almeno è richiesto dall'astrazione e dalla generalità del soggetto definito; essa meritava quindi d' essere formalmente e sostanzialmente modificata.

Il Riemann soddisfece pienamente a questo bisogno, partendo dalle seguenti considerazioni.

Il concetto di grandezza si rende anzitutto accessibile alla nostra mente soltanto allora che noi giungiamo a possedere qualche concetto generale, che sia suscettivo di diverse determinazioni (Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein algemeiner Begriff verfindet, der verschiedene Bestimmemgsweise zulässt).

Se nella grandezza concepita, il passaggio dall' una altra determinazione si effettua in modo continuo, le determinazioni successive della grandezza medesima costituiscono nel loro insieme una *varietà continua* (**). Ma se invece queste determi-

---

(*) Questa definizione trovasi pure nel Trattato di Aritmetica di Giuseppe Bertrand — versione italiana di Giovanni Novi.

Il Baltzer ed altri pochissimi fanno eccezione in proposito. Ma il Prof. Giusto Bellavitis avea già fatta la seguente osservazione, assai degna di nota: « Da moltissimi anni ho combattuto la comune opinione, che la quantità sia tutto ciò che è suscettibile d'aumento e di diminuzione. » — Riassunto delle Lezioni di Algebra date dal Comm. Giusto Bellavitis — Capo I.° — Art. 1.°

(**) Varietas, varieté, Mannigfaltigkeit, varietà, ... sono vocaboli usati tutti nel senso qui voluto dall'autore ed eziandio dai più rinomati geometri dei giorni nostri. Nel concetto gererale di varietà, giova osservare, essere pure implicitamente contenuto quello di serie.

nazioni sono tali, che non sia possibile il passare dall'una all'altra in modo continuo, esse compongono una *varietà discreta*.

Le determinazioni proprie d' una varietà continua diconsi *punti* (nel senso generale di: elementi infinitesimi — punti geometrici — istanti — differenziali — infinitamente piccoli, ecc. come nell' Ausdehnungslehre del Grassmann); invece le determinazioni, che servono alla costruzione di una quantità discreta diconsi *elementi* (nel senso parimente generale di: parti — unità — segmenti — numeri — archi — gradi — differenze finite — elementi finiti . . .).

Una parte d' una varietà, distinta da ciò che rimane di essa mediante un segno, mediante un limite o contorno, determina ciò che dicesi il *quanto della varietà*. Le quantità si paragonano fra loro enumerandone gli elementi finiti, se trattasi di grandezze discrete, a mezzo invece della misura se trattasi di grandezze continue.

Tra le due specie di grandezze così distinte meritano speciale attenzione le continue, delle quali non si danno che rarissimi esempi, in natura, e che non s' incontrano con frequenza fuorchè negli studi più elevati di Matematica.

Fra le grandezze continue sono anzitutto da distinguersi quelle, i cui rapporti metrici (ottenuti mediante misura, ossia confronto per sovrapposizione) sono determinabili, da quelli i cui rapporti non si possono determinare. Queste ultime si distinguono anche dalle altre, per la seguente proprietà caratteristica: *che non si possono considerare come esistenti indipendentemente dalla loro posizione, nè come esprimibili a mezzo di un' unità, ma soltanto concepire come certe regioni della varietà cui appartengono.* L' autore restringe quindi il suo compito, primieramente a stabilire il concetto di una varietà a più dimensioni, e in secondo luogo a ridurre la determinazione nel senso locale d' una varietà a determinazioni quantitative, cioè in altri termini: le questioni relative alla costruzione dello spazio, a determinazioni metriche del medesimo, dal qual fatto si vedrà scaturire con piena evidenza il carattere essenziale d' uno spazio ad n dimensioni.

Si parta pertanto da un concetto suscettivo di diverse determinazioni, e nel passaggio dall' una all' altra di esse, si proceda in guisa che ne risulti una varietà continua, le cui determinazioni succedansi l'una dopo l'altra in un determinato senso avanti e indietro. La proprietà caratteristica di questa varietà, derivante dalla sua stessa legge di generazione, consiste in ciò che partendo da un suo punto qualunque, è sempre possibile muoversi nella medesima secondo due opposte direzioni, cioè avanti e indietro. La varietà così ottenuta dicesi *varietà ad una dimensione*.

Avuta così una varietà ad una dimensione, è sempre possibile il farle assumere lo stesso uffizio prima assegnato al punto (considerandola essa stessa come punto), che l'ha generato, supponendo cioè che essa muovasi per intero in un senso determinato, in guisa da porgere le determinazioni successive e continue d'una nuova varietà, che risulta del tutto distinte dalla prima. Ogni punto della varietà corrente (generatrice) trasportasi in un punto determinato della varietà che immediatamente le succede (infinitamente prossima), onde il sistema complessivo delle nuove e successive determinazioni, ottenute mediante questa costruzione, viene a costituire un'altra varietà la quale risulta composta delle prime succedentesi in essa in modo continuo. Questa varietà così generata va distinta dalla precedente, cioè dalla sua generatrice, col nome di varietà a due dimensioni. Nello stesso modo si passerà ad una varietà a tre dimensioni, assumendo come generatrice una varietà a due dimensioni; ed è facile il comprendere come per nulla ripugni alla nostra mente il continuare la costruzione così cominciata, fino ad arrivare al concetto generale d'una varietà ad $n+1$ dimensioni, mediante il movimento in un senso determinato o nell'opposto di una varietà ad n dimensioni.

Se da queste considerazioni puramente sintetiche e subbiettive, si vuol passare ad altre d'ordine analitico ed obbiettivo, almeno nel senso formale, altro non resta che a risolvere ciò che è stato prima composto. A tale scopo si sostituisce al concetto suscettivo di diverse determinazioni, il suo obbietto particolare; diguisachè ogni nuova variazione, avente un senso determinato e distinto da quello già ideato, introduca nella varietà una nuova dimensione. Segue da ciò che l'accennata costruzione si potrà designare come una variabilità ad $n+1$ dimensioni, risolubile in una variabilità ad n dimensioni, combinate con una varietà ad una sola dimensione. Continuando questo processo di risoluzione si viene facilmente a concludere, che la determinazione d'una varietà ad n dimensioni nel senso locale, cioè come regione (Ortbestimmung), riducesi ad n determinazioni metriche.

A chiarire quest' ultima conclusione giova pertanto il far uso del linguaggio proprio della geometria, tanto opportuno e spesso anzi necessario per concepire le relazioni esistenti in ogni varietà diverse dallo spazio.

Intanto è sempre possibile fissare un punto in un luogo determinato della varietà considerata, mentre essa si estende in un campo noto ed accessibile. Quindi a partire da questo punto, che si assume come origine, si può immaginare costruita una porzione d'una varietà ad una dimensione (cioè guidata una linea) di natura determinata, ma variabile di posizione in tutti i sensi, e la cui lunghezza sia calcolata riferendola a quel punto fisso, in guisa che i diversi valori, che può assumere quella porzione col variare del suo termine, (in ogni determinato senso), sieno paragonabili fra loro, e ad ogni variazione del detto termine corrisponda una variazione della assunta porzione e ciò in modo continuo. Con diverso linguaggio, ciò torna lo stesso che supporre presa entro la varietà una funzione continua di essa (luogo), tale però che non si mantenga costante per tutta l' estensione di una sua parte. Qualunque sistema di punti pei quali la funzione assume un valore costante, viene a costituire una varietà continua di un numero di dimensioni minore di quello della data. Queste varietà vanno a coincidere l'una con l'altra in modo continuo, e si può quindi immaginare che ognuna di esse derivi dall' altra: ciò può avvenire generalmente nell' ipotesi, che ogni punto dell'una vada a coincidere con un determinato punto dell'altra, prescindendo dai casi che formano eccezione in proposito, casi la cui ricerca ed il cui studio presentano tuttavia grande interesse.

Da queste osservazioni emerge più chiaramente la possibilità prima accennata di ridurre il problema della determinazione nel senso locale d'una varietà continua, a un numero finito di determinazioni metriche, da stabilirsi nel campo della varietà medesima.

Si danno tuttavia certe varietà rispetto le quali le questioni locali non sono riducibili a un numero finito di determinazioni metriche, ma esigono invece una serie infinita, oppure una varietà continua di determinazioni metriche. Tali varietà costituiscono a cagion d' esempio le determinazioni possibili di una funzione assunta in una sfera determinata, o le forme possibili d' una figura dello spazio.

§ 19.

Il principio d' analogia
ed alcune importanti teoriche matematiche.

Un altro caso notevole, nel quale fecesi uso sapiente e proficuo del principio d' analogia, caso avente del resto molta relazione coi concetti fondamentali della teoria superiore degli spazi, testè accennata, si è quello che inspirava al Professore Beltrami, una delle sue più belle e interessanti memorie (*).

La teoria dei parametri differenziali, originata da uno studio del Laplace sull' attrazione degli sferoidi, e stabilita primieramente dal Lamé nella sua bella e ingegnosa teoria delle *coordinate curvilinee* (Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs divers applications - par G. Lamé. Paris 1859. Deuxième Leçon pag. 17), venne poi successivamente sempre più ampliata dal Jacobi, dal Neumann, dal Chellini e finalmente dal Prof. Brioschi nella sua classica opera: *Teoria dei determinanti* (Pavia 1854, § X, cq. 114). Quivi dall' illustre matematico lombardo è data con moltissima semplicità una trasformazione generale della somma delle derivate seconde di una funzione ad n variabili; ma il Prof. Beltrami conseguì tuttavia una generalità maggiore nel suo lavoro prima citato, del quale egli chiude l' introduzione con le notevoli considerazioni, che qui trovo opportuno di riprodurre per intero:

(*) *Sulla Teorica generale dei Parametri differenziali.* — Memoria del Prof. Eugenio Beltrami, letta nella Sezione 25 Febbraio 1869 nell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna.

« Prima d'entrare in materia chiedo licenza di adoperare talvolta il linguaggio geometrico, non ostante che il numero delle coordinate possa essere maggiore di tre. Le presenti ricerche al pari di tutte quelle che si collegano coll'integrazione multipla, appartengono essenzialmente (come ha detto Gauss a proposito d'altra investigazione analitica) « ad un campo « superiore della dottrina astratta della grandezza, che è indi- « pendente da ogni concetto di spazio e che ha per oggetto « la combinazione di grandezze succedentesi con continuità, « campo che al tempo nostro è ancora ben poco coltivato, e « nel quale *non si può fare un passo senza invocare la fra- « seologia propria delle figure che esistono nello spazio.* » (Memorie di Gottinga, t. 4. 1850).

Gli è del pari applicando il principio d'analogia, che lo Steiner e l'Hesse ampliarono, in modo veramente magistrale, il noto teorema del Pascal sull'esagono iscritto in una conica, e quindi anche il suo correlativo del Brianchon (*). L'Hesse poi, valendosi delle proprietà geometriche di quella figura sì meravigliosa, trovò inoltre occasione di stabilire il suo stupendo *Ciclo di equazioni fra determinanti,* offrendo in tal guisa un nuovo ed insigne esempio, di che sia capace un chiaro e potente ingegno mediante l'uso dell'analogia.

Lo stesso principio applicato all'involuzione permetteva al nostro Prof. Battaglini di stabilire una legge più generale dell'ordinaria *dualità,* immaginando un'involuzione più generale, cui diede il nome di *involuzione di diversi ordini*, ond'egli ha il merito comune col Pluecker d'aver preceduta quella luminosa scoperta fatta sette anni or sono dai geometri Sophus Lie e Felix Klein, i quali dimostrarono mediante lavori del più

(*) Das Hexgrammum mysticum und die Steiner'sche Erweiterung derselben. Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Géométrie, zweiler Theil, Seite 126. Zweite Auflage, Leipzig 1876.

Ciclo di Equazioni fra determinanti (generalizzazione analitica del teorema di Pascal) del D. Otto Hesse. Traduzione dal tedesco del D. Valeriano Valeriani. Vol. XI, pag. 309 del Giornale di Battaglini.

Questo importante argomento venne non ha guari ripigliato seriamente in esame da un valente giovane, il Prof. Giuseppe Veronese, il quale nell'anno 1877 presentava un suo lavoro all'Accademia di Lincei, che questa pubblicava nei suoi atti col titolo: *Nuovi teoremi sull'exagrammum mysticum.*

alto interesse, che la trasformazione omografica è un caso particolare d'una trasformazione d'ordine più elevato (*).

Lo stesso principio d'analogia suggeriva al Prof. Armenante una bella e ingegnosa memoria sui determinanti cubici (**), dal concetto dei quali si potrà probabilmente salire a determinanti d'ordine o grado ancora più elevato.

§ 20.

La geometria ordinaria è vera entro i limiti della nostra esperienza.

Tornando all'argomento della geometria assoluta, non posso astenermi dal citare alcune assai notevoli e pratiche osservazioni fatte dal Günther allo scopo di provare che la geometria ordinaria è vera entro i limiti dell'esperienza nostra, mentre lo spazio considerato come ambiente dei fenomeni reali da noi osservati, e la quantità di materia in esso contenuto sono finiti.

Il Günther, dopo aver anch'egli rammentati gli autorevoli nomi di Gauss, Bolyai e Lobastchewsky, accenna specialmente alla conclusione fatta da quest'ultimo: *essere la geometria ordinaria o euclidea vera soltanto entro i limiti della nostra esperienza,* o meglio quella geometria, secondo che dice il Baltzer (Planimetria pag. 29), la quale non è contraddetta dall'esperienza. Il Lobatschewscky ha infatti verificato, che la somma dei tre angoli d'un triangolo rettilineo è 180° eziandio

(*) *Teoria elementare delle forme geometriche,* per G. Battaglini, suo Giornale di Matematica. Vol. I. anno 1862 pag. 29 e 232.

Neue Geometrie des Raumes von Julius Pluecker, Leipzig 1868-69.

Mathematischen Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann Bd. V. Ueber Complex, isbesondere Linien und Cugel Complex, mit Anwendung auf dic Theorie partiellen Differentiale Gleichungen. Von Sophus Lie in Christiania. — Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie. Von Felix Klein in Gōttingen.

(**) *Sui Determinanti Cubici,* per Angelo Armenante. Giornale di Battaglini Vol. VI. pag. 175.

pei triangoli, i cui lati avevano all'incirca una lunghezza eguale a quella che segna la distanza fra la terra e il Sole (*); al quale proposito così s'esprime il Günther:

« Per quanto singolare questa prova possa apparire a coloro che non hanno ancora appreso « *a liberare il pensiero dai ceppi dell'intuizione* » pure lo è assai più la relazione che secondo Zöllner (**) esisterebbe fra la geometria *non-euclidea* e certi fenomeni della natura. Questo celebre fisico riferendosi ad una asserzione di Riemann (Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen), crede di poter dimostrare che può esister solo una quantità finita di materia e che perciò anche lo spazio, nel quale questa materia segue le leggi a noi ben note, deve necessariamente esser finito. È con ciò strettamente connesso il fatto che alcuni moderni geometri hanno cominciato a concepire l'infinito *in un senso del tutto diverso da quello che sembrava finora ammissibile.* É caratteristica a questo riguardo la seguente osservazione di Sturm (***):

« Non v'ha un'alternativa: o la legge della polarità è vera, ed è falsa l'antica teoria delle parallele; oppure quella è falsa, vale a dire non è vera in generale, essendo soggetta ad inumerevoli eccezioni, e questa è vera. »

« Una necessaria conseguenza di questo modo di vedere è l'asserzione che: — il punto in cui s'intersecano due parallele esiste realmente, sebbene sia per noi inaccessibile — asserzione che ha fatto negli ultimi tempi tanto parlar di sè, e che è stata vivamente combattuta da Kober (Ueber die Definition der Parallelismus, ibid. pag. 49). »

§ 21.

Scopo della pangeometria secondo il Prof. Beltrami.

Il lavoro, testè citato, del Günther ha lo scopo utilissimo e pratico, di conciliare le vecchie dottrine della classica geo-

---

(*) Absolute Geometrie nach J. Bolyai, bearbeitet von J. Frischauf. — Lipsia 1871 pag. 56. — Anmerkung.

(**) Ueber die Natur der Cometen, Lipsia 1872 pag. 306, 55.

(***) Die neure Geometrie auf dic Schule. — Giornale di Hoffmann per l'insegnamento matematico e di scienze naturali. — I. annata, pag. 486.

metria dei greci, coi positivi e generali risultati della scienza moderna. Animato da eguali intendimenti, benchè con mezzi pienamente diversi, l'egregio Prof. Beltrami nel suo interessante lavoro: *Saggio d'interpretazione della geometria non-euclidea*, parlando dei tentativi fatti dagl' illustri pangeometri che aveanlo preceduto, così s' esprime:

« Siffatti tentativi di rinnovamento radicale dei principii, s'incontrano non di rado nella storia dello scibile. Oggi poi essi sono un portato naturale dello spirito critico, cui a buon diritto si vanno sempre più informando tutte le indagini scientifiche. Quando questi tentativi si presentano come frutto d' investigazioni conscienziose o di convinzioni sincere, quando esse trovano il patrocinio di un' autorità imponente e fin qui indisputata, il dovere degli uomini di scienza è discuterle con animo sereno, tenendosi lontani egualmente dall' entusiasmo e dal disprezzo. D' altronde nelle scienze matematiche il trionfo dei concetti nuovi non può mai infirmare le verità acquisite, esso può soltanto mutarne il posto e la ragione logica, e crescere o scemarne il pregio e l'uso. Nè la critica profonda dei principii può mai nuocere alla solidità dell'edifizio scientifico, quando pure non conduca a scoprire e riconoscere le basi vere e proprie. »

Questa classica e originale memoria del Prof. Beltrami, e così pure l' altra da lui pubblicata col titolo: *Teoria degli spazii di curvatura costante* (Milano 1868), ebbero fino dal 1870 l'onore d'una traduzione francese negli: *Annales scientifiques de l'École Normale Superieure*, T. VI.

Pertanto è molto degno di nota ciò che sull' importanza della prima, d' altronde strettamente connessa colla seconda, ebbe a dirne lo stesso suo traduttore, il quale è del resto uno dei più valenti matematici che oggi vanti la Francia: il Sig. Hoüel (*).

In quell' epoca aveva infatti levato un po' di romore un lavoro del Sig. Carton, lavoro che il Bertrand presentava al-

(*) Note sur l' impossibilité de démontrer par une costruction plane le *Principe de la Théorie des paralleles dit Postulatum d'Euclide,* par I. Hoüel, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux (Extrait des Procès verbaux des Séances de la Société de Sciences phisiques et naturélles de Bordeaux: Séance du 30 Decembre 1869).

l'Accademia delle Scienze di Parigi, appoggiandolo coll' autorità del suo nome. Quel lavoro aveva appunto lo scopo di provare con uua costruzione piana l'assioma dell'Euclide sulle parallele. Ora il Sig. Hoüel mise ben presto in chiaro l'assurdità di questa pretesa dimostrazione, assumendo qual fondamento delle sue argomentazioni i concetti rigorosi esposti dal Prof. Beltrami, dei quali anzitutto ei presenta una bella e succinta esposizione.

Il Prof. Beltrami interpretando sapientemente, coi suoi lavori testè citati, le idee luminose del Gauss e del Riemann, fu primieramente indotto ad occuparsi d'un genere particolare di superficie, cui diede il nome di *pseudo sferiche*, in grazia delle analogie che alcune delle loro proprietà presentano con quelle delle sfere.

Essendo noto che la *curvatura* d'una superficie in un suo punto, è il prodotto delle curvature delle sue sezioni principali in quel punto, ne segue che la curvatura medesima sarà positiva o negativa, secondochè le due sezioni principali rivolgono la loro convessità nello stesso senso o in senso opposto.

Il Gauss ha dimostrato, che la curvatura d'una superficie rimane inalterata, allorchè essa si deformi per semplice flessione, cioè senza estensione, nè contrazione del suo elemento lineare, come ha luogo allorquando si applica un piano ad una superficie sviluppabile o viceversa.

Le superficie di curvatura costante positiva o superficie *sferiche*, comprendono la sfera e le superficie che derivano da questa mediante semplice flessione. Le superficie di curvatura costante negativa o superficie *pseudo-sferiche* formano l' oggetto del sullodato lavoro del Prof. Beltrami.

Queste due classi di superficie avendo un limite comune, raggiunto il quale, diviene nulla la curvatura della superficie, la questione delle parallele, viene interamente a dipendere dal modo con cui si fissa questo limite. Lobatchschewsky avea già chiamato *sfera limite* od *horisfera,* la superficie di curvatura nulla, limite della sfera di raggio infinito. In questa superficie conservando alle linee geodetiche il loro carattere, si ha che in ogni triangolo formato da linee geodetiche, la somma degli angoli interni è eguale a due retti. La questione delle parallele è adunque ridotta ad esaminare se l'*horisfera,* coincide o no col piano.

Si hanno pertanto tre diverse geometrie secondochè si studiano le proprietà delle figure formate da linee geodetiche sulla pseudosfera, sull'horisfera o sulla sfera. Queste tre diverse geometrie corrispondono a quelle già accennate (§ 16) dovute al Klein, il quale ebbe a distinguerle coi nomi di *iperbolica, parabolica* ed *elittica*.

Ma venendo per ultimo alla dimostrazione del Carton, essa ha per suo fondamento la possibilità dell' esistenza d' un esagono, il quale in sè comprenda un numero indefinito di triangoli d'area finita, tutti fra loro eguali, e che abbia inoltre il perimetro che non s' intersechi. Questa costruzione, fino ad un certo limite, riesce eseguibile tanto sulla pseudosfera quanto sul piano; ma sulla prima essendo impossibile che l'esagono aumenti indefinitamente senza che il suo perimetro s' intersechi, non è lecito concludere diversamente per il piano fino a che non si dimostri che questo coincide coll'horisfera. Ed infatti il piano possiede bensì tutte le proprietà caratteristiche della pseudosfera, ma non tutte quelle della sfera, (rispetto alle geodetiche dell'una e dell'altra superficie), onde rimane dubbio se esso abbiasi o meno da identificare coll' horisfera.

La pseudosfera del Prof. Beltrami, qual pietra logica di paragone, serve quindi a mettere in piena evidenza l' errore occultato dal più ingegnoso parallogismo; insigne esempio che almeno in parte ci ajuta a comprendere qual potere abbia l'analisi eziandio nelle più ardue investigazioni.

§ 22.

Il principio dell' evoluzione applicato alla scienza astratta della grandezza.

I concetti del continuo e dell' infinito assunti nell' unico senso relativo, proprio della nostra mente, conducono al principio d' evoluzione, che immagineremo anzitutto applicato alla scienza astratta della grandezza.

Espressi i rapporti di quantità o di posizione, che hanno luogo in una o più variabilità, mediante simboli, ai quali giova l'attribuire, almeno in potenza, il carattere del continuo e dell'infinito, l'idea di forma diviene sì generale da abbracciare ad un tempo ogni specie di grandezza, appartenente all'uno o all'altro campo, in cui si suole dividere generalmente la matematica.

Per via di successive e sistematiche trasformazioni si passa dall'uno all'altro campo e dall'una all'altra forma (*). In tal guisa da nn teorema si derivano i suoi correlativi non solo ma ancora si inducono e deducono molti altri, giungendosi così a costituire l'insieme organico e razionale proprio di ogni teoria determinata. Il legame esistente fra le varie e diverse forme; la possibilità di far variare ciascuna di esse in modo continuo ed indefinito, ci danno appunto l'evoluzione considerata nel senso più astratto e generale.

I concetti di serie e di linee hanno d'uopo entrambe di quelli del continuo e dell'infinito, per rendersi accessibili alla nostra mente: e vengono a costituire altrettante forme, nelle quali campeggia il principio di evoluzione. Le combinazioni delle forme, le conseguenze di queste combinazioni, e la loro mutua dipendenza; l'utilità pratica delle loro applicazioni, e il loro uso nella risoluzione delle questioni siano astratte che concrete, questioni che conducono alla scoperta o alla dimostrazione di una legge, che talvolta trovasi inclusa in una più generale, tal altra invece si induce mercè le analogie che sussistono tra alcune forme simili: sono altrettante operazioni discorsive o logiche dello intelletto, che debbonsi considerare come subordinate al principio d'evoluzione.

Questo principio di importanza capitale ha quindi il supremo compito di presiedere e coordinare i diversi rapporti astratti delle forme, in modo che esse abbiano tra loro il legame che le rende armonizzabili, chiare e consonanti in un unico fine, spesso voluto, talvolta soltanto subodorato e talora persino neppure sospettato, ma in ogni caso altamente utile e pratico.

(*) Qui la parola forma suona in generale: formula o complesso di formule nel calcolo, nell'algebra e nell'analisi; figura o complesso di figure nella geometria ordinaria e superiore.

§ 23.

Il concetto dell'evoluzione applicato allo spazio ed i germi della nuova geometria.

Il moto è la causa permanente e necessaria con cui s'effettua l'incessante e continua trasformazione degli esseri; il principio d'evoluzione facendo capo alle leggi che regolano in modo sistematico detta trasformazione, è coordinato ai molteplici anzi infiniti sistemi di forze in virtù delle quali avviene il passaggio dell' una all' altra forma. Questa parola qui adoperata in un senso tanto generico, e quindi anche indeterminato, non ismentisce il suo carattere geometrico nemmeno restando nel campo più concreto proprio delle manifestazioni successive della materia. La natura materiale sia organica che inorganica ha infatti anch' essa il suo punto, quale elemento primordiale o fondamentale da cui derivano tutti gli altri, come avviene nello spazio puro, cioè considerato astrattamente; sebbene nell'ordine d' idee proprio di questo ente, la cosa riesca sempre alquanto libera perchè in gran parte subbiettiva, così succedendo per ogni campo di grandezze astratte in generale. L' importanza delle quali è appunto perciò massima eziandio nell' ordine concreto, sia materiale che morale, per la corrispondenza necessaria che esiste fra l'intuito interno e l'esterno, fra l'osservazione diretta e l'indiretta, fra l'idea ed il fatto (*). E veramente la stessa trasformazione degli esseri si effettua mediante un continuo avvicendamento e mutamento di rapporti di grandezza, che vuol dire anche di posizione delle parti loro infinitesime, come provano mirabilmente i progressi della *Fisica-Matematica*, le cui elevate dottrine sono tanto applicabili alla chimica considerata come statica o dinamica degli atomi delle varie sostanze, quanto alla meccanica celeste.

(*) Come più volte ebbi ancora occasione di dichiarare nei due miei scritti: *I Metodi del Duhamel e la Logica del Condillac. — Maurizio Bufalini e il Metodo Sperimentale.*

Ora i corpi hanno una individualità determinata, solo perchè nella loro complessiva costituzione e nelle parti loro piccolissime quanto si può mai immaginare, presentano rapporti determinati di posizione, e quindi forme speciali e determinate, in virtù delle quali acquistano certi peculiari caratteri o meglio qualità fisiche, chimiche cioè meccaniche. Gli è tenendo conto di questo intimo legame esistente fra la forma e la materia, evidentemente generato dalla forza insita nella materia stessa e da essa inseparabile (Vedi Büchner: Kraft und Stoff), che le scienze matematiche si resero utilmente applicabili a quelle della natura, riuscendo anzi per esse di massimo e sicuro sussidio ed istrumento, senza del quale le medesime non avrebbero potuto conseguire i loro rapidi progressi, rimanendo ora attaccate ad un empirismo meschino ed infecondo, ed ora abbandonandosi a teorie ed ipotesi arrischiate, e quindi facili a condurre all'errore (13).

La mente umana collo studio della grandezza si è aperto un campo libero e fecondo d' investigazione. Ma ciò che dimostra non mai venir meno il legame fra il cosmos e il microcosmos, fra l'esperienza e la ragione, fra il reale e l' ideale, fra l'obbietto ed il subbietto, fra il mondo dei fenomeni e la sua rappresentazione, si è appunto il carattere sempre più spiccato di spontaneità e naturalezza, del tutto analogo a quello con cui la materia si svolge nei suoi processi, che pur ebbero non ha guari a raggiungere l'odierno calcolo e la moderna geometria, carattere che, in un ordine ancor più elevato e generale d'idee e di concetti, brilla eziandio presso la scuola evoluzionista dell'Hegel, scuola che ormai impera sovrana sui più eletti ingegni dell' Europa civile (14).

Le basi di questo gran mutamento in virtù del quale la scienza moderna si è resa tanto diversa e distinta da quella degli antichi, furono quasi tutte gettate nel secolo del Galilei. E benchè questo sommo ingegno non abbia che indirettamente contribuito a rendere necessario questo speciale indirizzo delle scienze matematiche, imperocchè egli figura più come filosofo e come astronomo e fisico, che come matematico propriamente detto nelle scientifiche investigazioni dei suoi tempi, non è tuttavia mai da dimenticare che a lui massimamente è dovuta la gran massima scientifica del fecondissimo metodo sperimentale, in grazia del quale ogni disciplina si è elevata a quell'alto grado di severità e di utilità senza del quale ognuno di esse avrebbe continuato ad aggirarsi negli oscuri labirinti dell'errore (*).

Venendo pertanto in particolare alla scienza dello spazio, gioverà dare un breve cenno storico e critico sui primi germi della nuova geometria, allo scopo di mettere in maggiore evidenza il principio evolutivo che lo governa.

Fu già osservato che il Desargues e il Pascal, con processi puramente grafici e descrittivi, mentre il Descartes con metodo del tutto analitico, stabilirono i principii fondamentali della nuova geometria, valendosi di semplici e naturali trasformazioni, nelle quali spiccano chiaramente, da un lato il principio d'analogia e dall'altro quello d'evoluzione (15).

D'altra parte il Newton e il Leibniz colla scoperta del calcolo differenziale ed integrale, riuscirono a rendere proficuo lo stesso principio evolutivo anche per la scienza più astratta e generale della quantità, abilitandola a trattare questioni, nelle quali campeggia nel suo più largo senso la legge di continuità. Ma veramente il primo e importante passo in questa via, che condur doveva al fecondo connubio dei simboli coll'idea geometrica, semplice ma eloquente rappresentazione del continuo, è dovuto al Descartes (1596-1650), il quale colla sua geometria analitica introdusse il nuovo e meraviglioso concetto delle coordinate, concetto che pure ammettendo fosse noto agli antichi, come lo Chasles opina (16), soltanto dal Descartes venne chiaramente ed esplicitamente determinato in guisa da condurre alla rappresentazione d'un luogo sotto forma d'una equazione, nella quale entrano le variabili come coordinate e le costanti come parametri arbitrarii (17).

Stabilito il concetto che serve di base alla generazione organica delle curve, concetto che corrisponde all'evoluzione sistematica delle figure nello spazio, e in generale si verifica sia nelle proprietà grafiche che nelle metriche, il metodo del Descartes fece miglior fortuna di quello dovuto al Desargues e al Pascal, forse per la sua immediata e palese attinenza col-

(*) Vedi ancora il già citato mio lavoro: *Maurizio Bufalini e il Metodo Sperimentale.*

l'algebra, e quindi col calcolo in generale, che colla grande scoperta di Newton e Leibniz avea a sè attirata l'attenzione di tutti i più insigni geometri di quei tempi e dei posteriori per circa due secoli. Avvegnacchè gli studii d'ordine puramente geometrico non furono ripresi dalla generalità degli studiosi che in principio di questo secolo colla scuola del Monge (18).

Pertanto seguendo la via tracciata dal Descartes introdussero nuovi perfezionamenti e progressi nelle dottrine geometiche, oltre a Fermat, Roberval e de Beune, eziandio i seguenti illustri geometri.

Anzitutto Schooten (1611, 1659) colle sue *Exercitationes Geometricae*, e col suo *Traité de la déscription organique des coniques.* — Invece Sluze (1623-1685), Hudde (1640-1704) perfezionarono i metodi dovuti al Descartes e al Fermat, per condurre le tangenti e determinare i massimi e i minimi.

Il grande Huygens (1629-1695) benchè profondo conoscitore dei metodi del Descartes, rimase tuttavia fedele a quelli dell'antica geometria, giungendo a grandi e meravigliose scoperte, che gli guadagnarono la stima e l'ammirazione dello stesso Newton. Nella terza parte del suo celebre trattato *De horologio oscillatorio,* stabilì la teoria delle sviluppate, tanto importante per lo studio e per la generazione delle curve, sotto il titolo: *De evolutione et dimensione linearum curvarum.* — Mentre Tschirnhausen, il famoso inventore della teoria dei caustici, ha considerato la curva che è inviluppo dei raggi rifratti. Huygens nel suo *Traité de la lumieré*, considerò invece la curva normale a questi raggi, la quale come lo Chasles asserisce, è più semplice ed inoltre meglio si presta allo studio delle proprietà ottiche delle curve. L'Huygens merita quindi di preferenza in questa materia il nome di precursore delle scoperte dovute al Quetelet, il quale valendosi delle curve, che corrispondono alle onde rifratte dell'Huygens, da lui chiamate *caustici* secondarii, stabilì la legge ormai nota sulla rifrazione della luce.

Ma il Tschirnhausen oltre al merito principale d'essere stato uno dei primi e maggiori precursori dell'odierna *Fisica-matematica,* è eziandio meritevole di grande elogio per aver fortemente cooperato coi suoi lavori e colle sue osservazioni critiche al perfezionamento dei metodi geometrici, studiandosi d'introdurre in essi quella facilità e naturalezza di processi e di vedute, mercè le quali la scienza divenne alla fine sì bella ed attraente, quasi partecipe della sovrana poesia dell'arte.

Questo indefinito perfezionamento dei metodi, secondo l'indirizzo accennato dal Tschirnhausen, è a parere dello Chasles conseguibile colle norme che seguono:

1.° Generalizzare sempre più le proposizioni particolari allo scopo di conseguire mano mano ciò che vi ha di più generale, che si vedrà anche essere sempre il più semplice, facile e naturale.

2.° Non accontentarsi nella dimostrazione d'un teorema o nella soluzione d'un problema del primo risultato ottenuto, il quale si potrebbe ritenere come buono e sufficiente qualora si trattasse d'una ricerca particolare e indipendente dal sistema complessivo proprio d'una certa parte della scienza, ma al contrario dichiararsi soddisfatti d'una dimostrazione o d'una soluzione allora soltanto che esse si presentino sotto una forma molto semplice ed inoltre dedotte come immediata e intuitiva conseguenza da qualche teoria nota, in modo infine che la questione di cui si tratta scorgasi chiaramente connessa alla vera dottrina da cui dipende per sua natura (19).

Quasi contemporaneamente i metodi dovuti al Pascal e al Desargues, tanto opportuni al perfezionamento della pura geometria, trovarono nel La Hire (1674-1718) un promotore felicissimo. Egli nel suo: *Traité de Coniques* (1685), si mostra non solo originale espositore di tutte le proprietà conosciute ai suoi tempi rispetto a queste curve ma, quel che più monta, riesce eziandio a dare all'insieme di quelle proprietà, un andamento ed assetto sistematico ad un tempo uniforme ed elegante. Molte di queste proprietà sono d'altronde a lui dovute, per esempio la più fondamentale proposizione della teoria dei poli e dei polari (Chasles, Aperçu, pag. 123). Ma ciò che colloca veramente La Hire nel novero dei più benemeriti gloriosi fondatori della Geometria moderna, è il suo trattato pubblicato nel 1675 col titolo: *Nouvelle méthode en Geométrie, pour les sections des superfices coniques et cylindriques* — Nella seconda parte di quest'opera, cioè nella *Planiconiques*, egli insegna un metodo abbastanza generale per operare la *trasformazione delle figure in altre dello stesso genere,* con principii e processi analoghi a quelli di cui si fece uso più tardi nella moderna *geometria di derivazione* (*) e meglio ancora nella teoria delle figure omologiche dovute al Poncelet, teoria che con semplicità meravigliosa emana dalla proprietà fondamentale dei triangoli prospettivi del Desargues (**).

Ad onta dei felici risultati a cui pervenne La Hire coi suoi studii, l'indirizzo puramente geometrico delle dottrine dovute al Pascal e al Desargues, non era allora destinato a conseguire un vero e deciso trionfo. Questo fatto inspirava allo Chasles la seguente notevole osservazione.

L'ammirazione destata da questa prima produzione del La Hire ebbe breve durata; e quest'opera ad onta del suo incontestabile merito è già da un secolo piombata nell'oblio; del che non è a stupirsi qualora si pensi che ciascuna epoca ha le sue questioni del momento, e che le migliori e più feconde idee per essere bene accolte, devono arrivare al tempo in cui gli spiriti sentonsi già inclinati verso il soggetto principale al quale si riferiscono. Lo studio delle scienze presenta ad ogni passo la prova di questa verità (20).

La Hire ebbe tuttavia un valente compagno nelle sue ricerche in La Poivre, il quale con metodo analogo a quello ora accennato, stabilì la maniera di trasformare il cerchio in una conica sul piano.

Già in epoca alquanto anteriore Stevin, Gregoire de Sain-Vincent e prima di essi eziandio il celebre pittore Alberto Duréro, derivarono l'elisse dal cerchio costruendo le ordinate di questo rispetto ad un asse fisso e prolungandole di segmenti aventi fra loro un rapporto dato. Un altro metodo meno generale di trasformazione è quello che dipende dalle proprietà delle figure omotetiche, il quale corrisponde al precedente quando all'asse si sostituisce il centro di omotetia.

Analogo a quello del La Hire si è pure il metodo ideato dal Newton (1642-1627) per eseguire nel piano la trasformazione delle figure, da lui esposto nel primo libro dei suoi immortali

---

(*) Vedi in proposito Bellavitis: *Lezioni di Geometria descrittiva*, pag. 168. Nota — *Principii della Geometria di derivazione.*

(**) Cremona. *Elementi di Geometria Projettiva*, pag. 7, § 3. — Omologia. § 4. Figure omologiche a tre dimensioni.

Principii, dimostrando come valendosi del medesimo sia possibile il trasformare una conica qualunque in un cerchio, riuscendo in tal guisa alla semplificazione di difficilissimi problemi.

La teoria delle curve a doppia curvatura e la geometria analitica dello spazio a tre dimensioni, apparvero veramente per la prima volta in Clairaut (1713-1765) nel suo celebre *Traité de Courbes à double courbure* (1731), da lui composto all' età di 16 anni, mentre quattro anni prima, cioè all' età di 12 anni, egli erasi già presentato al mondo scientifico con successo, mediante una sua memoria intorno a quattro curve geometriche, giudicata degna d'esser pubblicata nella raccolta dell'Accademia di Berlino.

Troppo lungo sarebbe tener dietro allo sviluppo analitico delle dottrine geometriche contenute nelle opere del Newton, del Maclaurin, del Eulero, del Simson, dello Stewart, del Lambert e di altri eminenti geometri, i quali oltre a favorire colle loro speciali investigazioni, i progressi della geometria, contribuirono eziandio potentemente a far sì che essa si rendesse feconda per le sue applicazioni allo studio dei fenomeni naturali, servendo di guida alle grandi scoperte sul sistema del mondo, mercè delle quali divennero tanto celebri questi filosofi (Chasles, Aperçu, Chap. IV. Quatrième Epoque).

§ 24.

La Scuola del Monge e i progressi della nuova geometria dovuti al Pluecker.

Il principio evolutivo che serve alla generazione e trasformazione delle figure nel piano e nello spazio, fu portato alla massima potenza dell' intuito e conseguì quindi il suo maggiore sviluppo e perfezionamento al cominciare di questo secolo, cioè in quello scorcio di tempo che lo Chasles nel suo *Aperçu* chiama *quinta epoca* della *Geometria*, e che eziandio appellar si potrebbe col nome glorioso del *Monge*, segnatamente in quanto concerne la pura geometria.

Questo sovrano ingegno fu infatti capo di quella grande e numerosa scuola, che assumendo un nuovo e largo indirizzo nelle sue ricerche, riuscì a determinare la vera rinascenza degli studii geometrici in conformità dei primi impulsi dati dal Desargues, dal Pascal e dal La Hire.

Il genio inventivo del Monge si appalesa pienamente nella nuova dottrina da lui creata: la *Geometria Descrittiva,* la quale utile si presenta ad un tempo sia alla sintesi che alla analisi, come vero e necessario complemento della Geometria Analitica del Descartes.

Col suo mezzo si rappresentano in un piano le figure concepite nello spazio, onde è possibile eziandio il dedurne le loro proprietà metriche valendosi di queste rappresentazioni in modo opportuno, mentre esse costituiscono un linguaggio dei più chiari, ad un tempo e dei più precisi ed efficaci.

Questo doppio carattere rese la Geometria Descrittiva feconda di utili risultati dal lato pratico servendo di guida ad alcune arti, che prima di essa procedevano senza norme sicure e razionali, e dal lato teorico ajutando la mente a stabilire le concezioni geometriche in modo ampio ed esatto. Quindi è che lo Chasles così presso a poco s' esprime in proposito nel suo Aperçu (pag. 190).

Ed invero la Geometria Descrittiva traducendo graficamente le proprietà delle figure considerate nella Geometria generale e razionale, servì qual fiaccola ad agevolare le ricerche e a dirigere l' apprezzamento dei risultati dovuti alla Geometria Analitica. In grazia della natura stessa delle sue operazioni che conducono a stabilire una corrispondenza completa e severa fra figure tracciate affettivamente sopra un piano e figure (corpi fittizii) immaginate nello spazio, essa ci rende familiare la forma di queste figure ajutandoci a concepirle con prontezza e precisione, e raddoppiando in tal guisa i nostri mezzi d' investigazione rispetto alla scienza dell' esteso.

Quindi lo Chasles felicemente conclude:

In breve la Geometria Descrittiva contribuì massimamente a irrobustire e a sviluppare la nostra potenza di concezione; a dare più chiarezza e severità ai nostri giudizii; maggior precisione e perspicuità al nostro linguaggio: onde sotto tutti questi rapporti essa riuscì infinitamente utile alle scienze matematiche in generale (21).

Tutto ciò che serve a mettere in rilievo l'importanza e l'utilità della Geometria Descrittiva ridonda al certo in onore del Monge; non è però men degno di considerazione quello che ebbe a dire in proposito Alfredo Clebsch nella sua commemozione del Pluecker, pubblicata nel tomo 16 delle Memorie della Società Reale di Gottinga, nel 1872, commemorazione della quale il Prof. Beltrami diede una bella traduzione nel Vol. XI del Giornale di Battaglini pag. 153.

Questo notevole scritto del Clebsch, al quale ricorrerò ancora più innanzi parlando del Pluecker in particolare, è a giudizio del Prof. Beltrami « al tempo stesso un bel lavoro di critica scientifica » epperò sotto il duplice rapporto storico e critico serve come di complemento all'opera dello Chasles sulla storia della geometria.

Ecco pertanto ciò che dice il Clebsch in proposito del Monge:

« Nell' ultimo svolgimento della geometria niuno ha avuto parte maggiore di Monge. Questi trovò la via di risvegliare l' interesse geometrico in una cerchia assai estesa; le sue ricerche sull' applicazione della geometria ad argomenti analitici, misero in luce l' efficacia di questa scienza sì lungamente negletta anche in materie che ne parevano del tutto estranee. I suoi scolari, tutti compresi del vero spirito geometrico, seppero concepire le nuove idee nel loro organismo logico e trasformarle. Mentre alcuni di essi, seguendo l' indirizzo del Maestro, coltivarono l' applicazione dell' analisi a problemi metrici, altri elevaronsi a considerazioni puramente projettive. Da questi doveva svolgersi quell' impronta organica che distingue la geometria moderna, e che la rende così diversa dalla geometria degli antichi. »

Senza parlar qui dei metodi di trasformazione e di rappresentazione, già divenuti molto famigliari, di cui fa uso la geometria descrittiva, mi limito ad osservare come la loro natura eminentemente organica si presti in modo meraviglioso al doppio compito prima accennato, contenendo in sè al massimo grado il fecondo concetto dell' evoluzione applicato alla generazione delle forme e delle figure dello spazio. Questi processi grafici hanno fra gli altri vantaggi quello d' aver dimostrato che lo spazio addirittura abbracciato nella sua totalità, cioè a tre dimensioni, felicemente si presta all' indagine delle proprietà delle figure piane, e quindi anche dal lato didattico non è altrimenti vero che giovi nè sia necessario, eziandio per un insegnamento il più elementare, l' incominciare dal piano per poi passare allo spazio nello studio delle proprietà delle figure, ma al contrario sia più agevole ben di sovente passare dallo spazio al piano (22).

Infine sono di grande importanza le osservazioni fatte dallo Chasles nella V. Epoca del suo Aperçu, in proposito del metodo di trasformazione dovuto al Monge: *Metodo o principio di relazioni contingenti.*

Questo metodo che ha valore soltanto per l' analisi finita, venne poi meglio stabilito e sviluppato dal Poncelet: nel suo celebre: *Trattato delle proprietà projettive*, e da lui presentato col nome di *principio di continuità*. Tuttavia il metodo veramente generale ed analitico di deformazione è quello che fu esposto per la prima volta dallo Chasles nella *Correspondence politecnique* (tomo III. pag. 326) sotto il titolo di *déformation homografique*, il cui scopo generale venne da lui dichiarato nel modo che segue:

« Le mode de déformation que nous venons d'indiquer est une *véritable méthode de généralisation*, qui transport à une figure, d' une construction tout à fait général, les propriétés connues d' une figure d' une construction particulière. » (Aperçu pag. 203).

Ora come avrò meglio occasione di dichiarare più innanzi, tutto il magistero della moderna geometria analitica, che tanto spicca nelle classiche opere di Pluecker, Hesse, Salmon, Fiedler, Chasles, Clebsch, Cremona, Battaglini e di altri ancora illustri geometri dei tempi nostri, si è principalmente dovuto ai varii metodi di trasformazione, ed è soltanto in virtù dei medesimi che questa scienza potè rendere all' analisi segnalati servigi, fra i quali fino dai tempi del Monge sono specialmente da notarsi anzitutto quello di offrire una spiegazione e interpretazione degli *immaginarii*, e quello d' aver favorito il riscontro d' analogie ed affinità, rimaste occulte per molto tempo fra le forme o grandezze geometriche e i simboli del calcolo; di guisachè, come nei più recenti e lodati lavori di Klein e Lie, lo stesso Monge aveva già stabilito l'*integrazione delle equazioni differenziali a più variabili.* (*)

Dopo il Monge contribuirono massimamente ai progressi della geometria pura: Poncelet, Carnot e Brianchon, e più tardi Staudt e Steiner.

Ma nella generalità e fecondità di vedute proprie della geometria moderna, il merito principale è dovuto a Pluecker, sia pei numerosi, importanti, originali ed esatti dettagli con cui ha condotto le classiche e colossali sue opere, che per la importanza ed utilità delle osservazioni in esse contenute. Quindi è che lo stesso Sophus Lie ebbe a dire:» È noto che i rapidi progressi della Geometria nel nostro secolo sono strettamente congiunti alle considerazioni filosofiche sulla essenza della geometria analitica del Cartesio, considerazioni che nella forma più generale furono esposte dal Pluecker nelle sue prime opere (Analytisch geometrische Entwickelungen).»

Lo stesso Clebsch nella già citata commemorazione del Pluecker, esprime l' opinione che questo grande geometra meriti appunto il titolo di *unico e vero inventore della moderna geometria analitica.*

«In tal guisa, egli scrive, la geometria analitica ricostituita coi materiali che presentano perfetta analogia colla sua indole, potè rivelarsi da ultimo come fondamento d' altre dottrine in apparenza eterogenee ed acquistare così un' importanza sempre maggiore per l' insieme complessivo di tutti i rami delle matematiche. Era riservato ad una successiva evoluzione la scoperta che le sole funzioni algebriche sono interamente esaurite dalle nostre conoscenze, che tutte le altre funzioni più importanti sono germogliate nel terreno algebrico, e che perfino le funzioni abeliane scaturiscono da considerazioni cui conduce lo studio delle curve algebriche.»

Questa scoperta tanto meravigliosa presentasi tuttavia spontanea e naturale qualora si pensi che eziandio nell' analisi algebrica applicata alla teoria delle curve, campeggia senza restrizione il fecondo principio di continuità, sussidiato da quello dell' evoluzione.

(*) Si consulti in proposito l'Essai critique et historique sur le services et les travaux scientifique de Gaspare Monge, par M. Ch. Dupin - pag. 199-248 dell' edizione in 8.º

Fino dal 1829 nell' ora citata sua opera il Pluecker svolse la teoria della retta, del cerchio e delle coniche valendosi della *notazione abbreviata*, di quel principio cioè sì semplice e fecondo, del quale fecero poscia sì mirabile uso l'Hesse e il Salmon nonchè parecchi altri geometri valentissimi nelle belle e svariate loro opere.

Di capitale importanza pei progressi della geometria è parimente il grandioso principio di dualità, che circa nell' epoca in cui videro la luce le: *Analytisch geometrisch Entwickelungen,* ebbe a nascere dalle gare rivali di Gergonne e Poncelet, i quali furono i primi a formularlo in maniera chiara e precisa (23). Tuttavia il Pluecker prendendo parte importante a queste dispute, riuscì a dare un vero e stabile fondamento al principio medesimo, liberandolo da ogni apparente idea metafisica, come lo stesso Clebsch osserva, e facendo sì che esso stesse veramente a sè, senza l' introduzione di alcun estraneo elemento, e rivendicandogli la sua vera natura tutta geometrica e propria dell' entità dello spazio. L' occulto pregiudizio di considerare il punto come unico elemento primordiale dello spazio, subito come fatale eredità del passato, da tutti i più grandi geometri in 25 secoli da Talete a Monge, fu finalmente dal Pluecker abbandonato per la prima volta. Egli assunse invece il punto, la retta ed il piano con pari uffizio quali elementi dello spazio.

Da questa libertà di scelta nell' elemento primordiale dello spazio, ne nacque di conseguenza pari libertà nella scelta opportuna delle coordinate, che poteronsi costituire di elementi reciproci, onde la dualità e reciprocità delle forme geometriche riuscì plasmata chiaramente e quasi con evidenza riprodotta in quella dei simboli, che servono a rappresentarle. Ed infatti fu per questa via semplice e rigorosa ad un tempo che la condizione dell' esistenza del punto nella retta nel caso del piano, o del punto nel piano nel caso dello spazio, fu simmetricamente stabilita colle coordinate dei due enti primordiali costituenti ciascuna coppia.

Di qui ne nacquero chiari e distinti i concetti duali d' ordine e di classe riferiti alle curve ed alle superficie, e in generale la capacità che ha ogni figura d' essere suscettiva d' una doppia generazione come luogo di punti, o come inviluppo di linee o di superficie.

Spingendo più oltre l'arbitrarietà nella scelta dell'elemento primordiale dello spazio, lo stesso Pluecker aveva nel 2° Vol. delle Entwickelungen potuto elevarsi dalla correlazione ordinaria di reciprocità lineare, ad un concetto più elevato e generale di correlazione d'ordine superiore: la quadratica, concetto ultimamente studiato ed esteso con molto profitto da alcuni viventi geometri : Battaglini sotto il titolo ; *Involuzione di diversi ordini.* Sophus Lie e Felix Klein nei lavori seguenti : (*)

« La generalizzazione del concetto dei fuochi, continua Clebsch, data da Pluecker nel t. 10 del Giornale di Crelle (1833), venne poi con felice successo ripigliata da Cummer (1847), il quale si rese celebre per questo genere di ricerche, e ultimamente eziandio da Salmon e da Hart, che ebbero occasione di svolgere la teoria in modo veramente completo e magistrale. La scoperta di punti singolari all' infinito fatta da Chasles, misero in piena evidenza l' importanza e necessità logica di quel concetto generale, che ora può dirsi essere divenuto famigliare per chi si dia a studii abbastanza elevati di Geometria, determinandosi in modo chiaro e preciso nel vero campo della geometria projettiva, rendendosi accessibile ai metodi dell' algebra moderna e capace di analitica interpretazione mediante la teoria generale della metrica dovuta a Cayley. »

Del Pluecker si annoverano altre cinque opere maggiori le quali costituiscono veramente dei trattati completi ed originali. Tra questi è massimamente da ricordarsi la *Geometrie des Raumes* (1846), che a giudizio dello stesso Clebsch appalesa maggiore elaborazione, e nella quale il Pluecker ebbe per incidenza ad enunciare il largo e grandioso concetto della geometria della retta o dei complessi, da lui però svolto pienamente soltanto nel 1864, nel suo stupendo lavoro : *Neue Geometrie des Raumes* (1868).

Così la geometria analitica, che durante alcuni anni era stata da lui abbandonata per darsi a belli e svariati studi di fisica sperimentale, ebbe per la seconda volta a ricevere dal

---

(*) Ueber Complex, isbesondere Linien und Cugel Complex, mit Anocudung auf die theoria partiellen Differentiale Gleichungen. Von Sophus Lie, in Christiania.

Ueber Liniengeometrie und metrische Goometrie. Von delix Klein, in Göttingen. — Mathematischen Annalen, herausgegeben von A. Clebsch und C. Neumann Bb. V.

genio di lui un nuovo e notevolissimo impulso, mercè del quale fu spianata la via alle felici scoperte della nuova algebra, si ricca di pronti ed inattesi risultati.

I Metodi del Pluecker furono principalmente seguiti con successo in Germania dall' Hesse, dal Clebsch, dal Fiedler, dal Felix Klein e dal Sophus Lie; in Inghilterra dal Salmon; in Italia dal Battaglini, dal Cremona, dal Chellini, dal D' Ovidio, dall'Aschieri e da altri valenti cultori della odierna geometria analitica. Fu in tal maniera e per opera di cotesti benemeriti geometri, che il patrimonio della scienza andò sempre più arricchendosi di nuove e luminose scoperte.

CONCLUSIONE

I concetti del continuo e dell'infinito, anche ristretti al già vastissimo campo delle matematiche, presentano tanti e svariati argomenti, danno luogo a tante e interessanti questioni, che troppo lungo sarebbe l' occuparsene per disteso, mentre discendendo ai particolari, cioè presentando le singole materie con dettaglio, sarebbe necessaria una cultura infinita, che a nessun uomo può esser concesso di possedere.

Pertanto nel tratteggiare le linee principali dell' arduo e vastissimo soggetto, anche per amore di brevità, e inoltre per non istancare con troppe e diffuse dichiarazioni e citazioni, ho creduto opportuno il mantenermi più strettamente attaccato a quei generali precetti (profili), e a quelle superiori e indipendenti considerazioni, che d'altronde possono interessare egualmente un numero abbastanza grande di lettori.

Per mostrare poi qualmente da queste idee generali e d' indole schiettamente filosofica, si può discendere a risultamenti speciali, i quali hanno il vantaggio di offrire per quelle idee la più ampia conferma, nella seconda parte di questa mia opera mi propongo di trattare distesamente e anzi con minuto dettaglio le applicazioni dei concetti dell'infinito e del continuo, assunti pure nel senso del tutto relativo da me propugnato, alla scienza assoluta dello spazio, valendomi anche in ciò del meglio che mi fu dato raccogliere, in proposito dell'argomento, dagli autori più fortunati che se ne occuparono con successo. Altrettanto mi propongo di fare in appresso per le altre parti, nelle quali saranno trattate le applicazioni dei concetti dell' infinito e del continuo alle scienze fisiche e naturali, e alle scienze morali, economiche e sociali.

Spero intanto che il metodo critico, e l'indirizzo moderno da me seguiti sia nel pesare, che nel confrontare le opinioni e le vedute di tanti e rinomati pensatori e scrittori, come nel presentare i risultati, modesti sì ma coscienziosi, dei miei studi, avranno persuaso il benigno e attento lettore dell' importanza, e dell' opportunità del tema elevatissimo che io impresi a trattare, tema intorno al quale si imperniano tante questioni del più alto interesse pratico e speculativo ad un tempo.

FINE DELLA PRIMA PARTE.

NOTE

(1) Il prof. Evellin parlando della continuità o discontinuità dello spazio, presenta uno studio accurato dell'antico problema di Achille e la tartaruga, facendo alcune obbiezioni sulla continuità dello spazio, obbiezioni che in fondo a ciò si riducono: Se lo spazio reale fosse assolutamente continuo, nessun passaggio sarebbe possibile da un punto ad un altro; ma d'altronde la ragione e l'esperienza dovendo accordarsi, quale delle due ipotesi: continuità e discontinuità dello spazio deve accettarsi? — L'autore crede togliere ogni difficoltà supponendo che l'elemento primo dello spazio sia inesteso: «admettons, egli dice, que l'élément de l'espace soit inétendu; aussitôt l'antinomie disparait». Ma non ripugna assai più questa assurda ipotesi alla ragione? D'altronde, accettata la medesima, non si ha subito nello spazio reale quella assoluta continuità negata dall'autore? Nulla dunque, nulla di veramente assoluto.

L'elemento primordiale dello spazio è da considerarsi d'un'estensione nulla soltanto in un senso relativo; escludendo l'assoluto si tolgono le contraddizioni: ma non altrimenti. Gli è seguendo quest'ordine d'idee semplici e naturali, che si può francamente rispondere alla domanda fatta dall'autore a pag. 78 in fine di questo articolo 1.° nel modo che segue:

«Comment un tel concept devient, dans la pratique, analogue si non adéquat, à la réalité des choses, c'est ce que le plan que nous nous sommes imposé nous interdit d'examiner en ce moment, il sera temps d'aborder cet intéressant et délicat problème, lorsque aprés avoir étudié la quantité sous sa forme la plus abstraite, nous aurons à demander dans quelle mesûre le phénomène pourrait répondre au nouméne, l'étendue géométrique au lieu en soi.»

Rinunziando all'assoluto, subito rispondiamo, almeno per la scienza se non lo si vuole per la fede; o almeno considerando l'assoluto in un modo abbastanza relativo per non dar luogo a contraddizioni, cioè siccome il limite d'ogni nostra attendibile relatività d'ogni momento e regione determinata, poiché anche questo limite od assoluto perderebbe ogni significato se si volesse tale da abbracciare tutti i tempi e tutte le regioni. Questo assoluto interamente appriorístico ed apoditico, senza numero e senza misura, nonché senza senso e senza ragione, fu pur troppo il capriccio e il martirio di tutte le vecchie scuole, che trovarono in lui ad un tempo le loro dolci illusioni e la loro rovina. È noto infatti che come per il calcolo così per tutte le scienze siano speculative o sperimentali, il fecondo e razionale concetto del limite si rende necessario per armonizzare i luminosi portati dell'esperienza colle esigenze logiche della ragione pura. Questa verità altrettanto modesta che conciliativa è una delle più belle conquiste dovute alla metodologia statistica, e in un ordine elevato e generale si può considerare come un frutto veramente prezioso e maturo della filosofia e della storia.

Ma a questo modo di considerare la questione è pur costretto di avvicinarsi l'autore di tratto in tratto, onde alla pag. 79 egli dice:

« Les instants de la durée en soi, aussi bien que les points de l'etendue en soi, ne sauraient être que contigus. Les instants réels en éffet, marquant la trace des phénomènes élémentaires et leur servant de point d'attache dans le temps, se conçoivent comme distincts les uns des autres, et jouissent à ce titre d'une individualité *relative*; par suite, ils doivent se grouper en nombre définis. Ces nombres, à la vérité, nous échappent, mais rien ne doit moins nous surprendre; il nous suffit de savoir *à priori* que tout ce qui est conçu comme donné, doit être conçu comme déterminé. »

Si può intanto osservare che questa determinatezza non ha nulla di assoluto, ed è soltanto relativo il grado a cui può pervenire in ogni dato momento e in ogni data regione. Quindi è che sotto questo punto di vista, massimamente subbiettivo, il determinato e l'indeterminato, il finito e l'infinito, il distinto e l'indistinto sono concetti che non solo si suppongono a vicenda, ma anzi hanno lo stesso modo di essere che è relativo, null'altro che relativo. Pertanto allorchè l'autore parla di numeri che ci sfuggono « qui nous échappent » che vuol dir ciò se non che essi sono da ritenersi come infiniti, cioè per grandezza incommensurabili?

Ora egli stesso, in proposito del continuo, così chiaramente si esprime alla pag. 81:

« De là, pour la conscience aussi bien que pour le sens, l'illusion de la continuité, *continuité toute rélative*, et qu'explique seul le point de vue phénoménal où l'esprit ce place. » — Ma avvi forse altro compito che a noi sia lecito imporre alla ragione? mentre la cosa in sè, come vorrebbe l'autore, non può esser da noi in verun modo concepita? (*). L'autore s'ostina tuttavia a voler parlare di spazio in sè, tempo in sè e movimento in sè, contro l'opinione dei più accreditati filosofi moderni, i quali ormai intesero benissimo, che senza negare la realità allo spazio, al tempo e al moto, noi non possiamo tuttavia formarcene che una idea del tutto relativa, non essendoci concesso di considerarli in sè. Tutto è per noi relativo e non mai assoluto.

D'uopo è quindi concludere, che la continuità e infinità, sempre relativa, del tempo, dello spazio e della materia sono concetti che si compendiano nell'ipotesi dell'etere, ipotesi resa ormai celebre dal Padre Secchi. Ora poichè a confessione stessa di parecchi illustri filosofi moderni, la scienza non può far senza del concetto d'infinito, del che è una prova assai patente il titolo stesso del libro del Prof. Evellin, questi non sarebbe caduto così di frequente in inesattezze, nè in contraddizioni, mediante asserzioni che sanno troppo dell'assoluto, se

---

(*) Vedi ancora il mio: *Verismo nell'arte e nella scienza*, pag. 13. Nota 1.

avesse tenuta a lui presente, qual canone fondamentale, la massima seguente, ch'egli espresse felicemente alla pag. 121:

« Quoi qu'on fasse, quelque biais que l'on imagine, on n'échappera pas à cette conclusion: *La science pure ou appliquée se meut dans le relatif.* »

(2) Il significato di questa formula venne da alcuni filosofi esagerata al punto, da vedere in essa *l'espressione algebrica della creazione* (per es. Gratry e Grandet). Secondo i medesimi il secondo membro dell'equazione in sè contiene il termine arbitrario, che il creatore determina senza punto perdere della sua potenza (*). Vedremo ben presto che il Prof. Carlo Conti attribuiva al filosofo tedesco Oken un modo analogo di vedere in proposito dello zero. Il tutto dipende dal significato che si pretende dare alle parole: nulla, infinito e creazione, alle quali si è soliti concedere comunemente un' importanza obbiettiva, che in realtà non hanno.

Notevole è il seguente passo del Newton in proposito dell'antico pregiudizio di confondere le cose, cioè le grandezze, coi rapporti che servono a rappresentarle, del quale errore si può considerare come singolare esempio l'assurda interpretazione data alla formula prima accennata.

Pertanto il grande autore dei principii così s'esprime (*):

« Quantitates relativae non sunt igitur eae ipsae quantitates, quarum nomina prae se ferunt, sed sunt earum mensurae illae sensibiles (verae an errantes) quibus vulgus loco quantitatum mensuratarum utitur. At si ex usu definiendae sunt verborum significationes; per nomina illa Temporis, Spatii, Loci et Motus proprie intelligendae erunt hae mensurae sensibiles; et fermo erit insolens et pure Mathematicus, si quantitates mensuratae hic intelligantur. Proinde vim inferunt Sacris Literis, qui voces hasce de quantitatibus mensuratis ibi interpretantur. Neque minus contaminant Mathesin et Philosophiam, qui quantitates veras cum ipsarum relationibus et vulgaribus mensuris confundunt. »

Circa il passaggio possibile dal finito all'infinito, che certamente deve aver luogo subordinatamente al principio di continuità, è molto degno di nota ciò che ebbe a dirne il De Fontenelle. Il quale alla pag. 59 del suo lavoro citato, trova necessario l'introdurre una nuova specie d'infinito, detto da lui infinito intermedio e rappresentato col simbolo $\propto$, come a designare la sua natura di infinito non pienamente divenuto tale, cioè di una quantità di sì smisurata grandezza da doversi considerare come abbastanza prossima al vero infinito. Questa nuova specie d'infinito incontrasi p. es. nella serie dei numeri naturali il cui complesso è dall'autore rapresentato col simbolo *A* ed il cui limite superiore essendo l'∞, ne segue che ogni $\propto < \infty$, e tutti gli $\propto$ precedono l'∞ in numero $\propto$.

Il De Fontenelle pertanto dopo aver giustamente osservato che le nostre concezioni e i nostri calcoli si riferiscono soltanto agli estremi della serie *A*, nei quali sono situati i finiti fissi al principio e gl'infiniti fissi alla fine, conclude essere chiaro che quanto vi ha di me-

(*) Vedi Renouvier: *L'infini, la substance et la liberté* — pag. 172.

(*) Philosophiae naturalis principia mathematica — Tomo I. pag. 18.

raviglioso, e qualche volta anche, almeno in apparenza, di paradossale nel passaggio del finito all'infinito, dipende appunto dallo studio e dalla conoscenza de' termini intermedii.

Volendo quindi in certa guisa coonestare, appoggiandoci alla legge di causalità o necessità, l'apparente paradosso che l' infinito, (quello almeno che corrisponde ai primi gradi proprii di questo concetto, cioè il finito prossimo a divenire infinito) nasce dalla composizione del finito, giova paragonare la serie A, con quella che si ottiene da essa elevandone a quadrato i termini, serie che l'autore denota simbolicamente con $A.^2$

In questa nuova serie intanto è d'uopo ammettere che, come nella precedente, i passaggi successivi da termine a termine avvengano in modo abbastanza graduale, potendosi l'unità di A immaginare piccola quanto si vuole senza toglier forza al nostro ragionamento. Pertanto ciò che è infinito in A si presenta come infinito di secondo ordine in A^2; ora se ciò che è finito in A si presentasse sempre come finito in $A,^2$ la serie A^2 conterrebbe un passaggio assai brusco da un certo suo termine a quello che immediatamente gli succede. D'uopo è quindi ammettere che certi finiti abbastanza prossimi agli infiniti di A, coll' essere elevati a quadrato diano luogo a certi infiniti di $A,^2$ e così di seguito in modo da conseguire anche in A^2 una certa gradazione.

Ciò premesso l'autore alla pag. 66 dà la seguente definizione, nella quale trovasi contenuta la parte più sostanziale della sua ipotesi:

« J'appelle *finis indéterminables*, les termes finis de A qui deviennent infinis dans A^2 par l'élévation au quarré, car comme ils sont dans le passage que fait A^2 du Fini à l'Infini, ils ne peuvent jamais être connus ni déterminés, comme les termes qui sont à l'origine de A ou de $A.^2$ »

« Un terme quelconque de A^2 étant n^2, n^2 exprime aussi le quantième il est dans A, et sa racine n le quantième il est dans A^2. Ainsi 16 est le 16^{me} terme de A, et est le 4^{me} de A^2; 100 est le 100^{me} terme de A, et le 10^{me} de A^2. Donc si n^2 est le premier terme infini de A^2, et par conséquent si n est le I^{er} terme fini indéterminable de A qui soit devenu infini dans $A,^2$ n^2 n'est qu'à une distance finie de 1, premier terme de $A,^2$ car sa racine n, qui est finie, exprime son quantième dans A^2, et ce quantième n'est doné que fini. Donc le premier terme infini de A^2 n'est qu'à une distance finie de 1 son I^{er} terme »

Questo passo parmi sufficiente a far comprendere chiaramente il concetto dell'autore. Secondo il cui modo di vedere nella serie A debbonsi incontrare certi numeri, i quali mentre da un lato si possono considerare come finiti sono tuttavia indeterminabili, cioè incommensurabilmente grandi, in guisa che il loro quadrato deesi considerare come un numero infinito (∞). Segue da ciò che nella serie $A,^2$ vi è un numero finito di termini finiti; un numero infinito di termini ∞, e un numero infinito, maggiore del precedente, di termini ∞^2.

L'autore passa quindi a considerare la natura delle serie $A,^3$ A^4 ... $A,^n$ e le sue giustissime e giudiziose osservazioni conducono sempre più a concludere, che tutte le difficoltà e gli apparenti paradossi, che noi incontriamo nello studio del finito e dell' infinito dipendono dall' ignoranza in cui siamo circa la natura di quei numeri intermedii, che il principio d'analogia e la legge di continuità, non solo acconsentono ma mostrano necessarii, numeri che l'autore distingue da un lato col nome di *finiti indeterminabili* e dall'altro col nome d'*infiniti indeterminabili.*

Riguardo ad essi non resta per ora al matematico altro conforto di non dover dubitare della loro esistenza, mentre del resto si mantengono abbastanza occulti.

(3) In generale la scienza è eminentemente progressiva, e l'arte invece quasi stazionaria. Onde per esempio le opere di Omero, di Raffaello e del Canova sono da tutti calcolate tipi insuperabili di perfezione, mentre Galileo, esso pure quasi perfetto come scrittore, in quanto alla scienza da lui posseduta sarebbe ora poca cosa in confronto di un buon licenziato di Liceo o di Istituto Tecnico.

Pertanto solo in secoli di vera e matura civiltà è possibile il felice e desiderato connubio della scienza coll'arte. Difatti dapprima l'intuizione passiva della natura, e più tardi l'attiva accompagnata dalla riflessione creò le arti, le quali col sussidio del metodo sperimentale e matematico diedero infine origine alle scienze. Il punto di partenza è sempre la natura, la quale s'impone all'uomo rilevandosi a lui mediante gli organi sensorii, d'onde nasce lo spirito d'osservazione e la possibilità di riunire nel vasto e anzi smisurato teatro del pensiero, coll'aiuto della memoria, una serie infinita di cognizioni, che un po' alla volta fissate ed ordinate partoriscono le idee generali e per ultimo vengono elevate in forma di principii, sui quali la ragione fonda le sue induzioni e deduzioni, cioè le scienze. A questo proposito veggansi i miei due lavori ancora citati: 1.° *I metodi del Duhamel e la Logica del Condillac;* 2.° *Maurizio Bufalini e il metodo sperimentale.*

Studiar pittura, nel senso veramente positivo di questa parola, nel quale l'intesero gli artisti grandi, vuol dire studiar l'uomo e l'universo. Non dee far quindi meraviglia se quasi tutti i sommi pittori furono eziandio grandissimi in ogni altra arte o scienza, e spesso anzi creatori dei principii e autori delle scoperte, che formano il vero nucleo di quelle arti e di quelle scienze.

(4) Si consulti a questo proposito il già citato libro dello Strauss: *Der alte und der neue Glaube.* — e specialmente l'articolo III, che porta il titolo: Wie begreifen wir die Welt? — seite 149. — Die Kant'sche Kosmogonie — seite 153. — Bildung unsres Sonnensystems nach Kant. Kant und Laplace — seite 157. — Kant als Vorgänger Darwin's — seite 185.

Credo opportuno riprodurre il seguente notevole passo dello Strauss:

« Niemand hatt über diesen Punkt grossartigere, obwohl noch nicht völlig geläuterte Gedanken geäussert als eben Kant in seiner Allgemeinen Geschichte und Theorie des Himmels vom Jahr 1755 (*), einer Schrift, die mir immer nicht weniger bedeutend erschienen ist als seine spätere Vernunftkritik. Ist hier die Tiefe des Einbliks, so ist

---

(*) Ecco il preciso titolo dell'opera del Kant, citata dallo Strauss:

— Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels, oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newton'schen Gründsätzen abgehandelt. — Immanuel Kant's sämmtliche Werke. — Bd. I s. 207. — Leipzig 1868.

dort die Weite des Umblicks zu bewundern; haben wir hier den Greis, dem es vor allem um die Sicherheit eines wenn auch beschränkten Erkenntnissbesitzes zu thun ist, so tritt uns dort der Mann mit dem vollen Muthe des geistigen Entdeckers und Eroberers entgegen. Auch ist er durch die eine Schrift ebenso der Begründer des neuren Kosmogonie, wie durch die andere der neuren Phylosophie geworden. »

Ho citato questo passo, perchè in esso trovo molto felicemente posta in rilievo la straordinaria potenza del genio acuto e profondo del grande critico della ragione pura. In altra nota parlerò di Lui come precursore del Riemann.

Ecco intanto un breve passo originale del Kant, in cui è solennemente dichiarate l'indole delle matematiche scienze:

« Hier ist nun eine grosse und bewährte Erkenntniss die schon jetzt von bewundernswürdigen Umfange ist und unbegrenzte Ausbreitung auf die Zukunft verspricht, die durch und durch apodiktische Gewissheit d. i. absolute Nothwendigkeit bei sich führt, also auf keinen Erfahrungsgründen beruht, mithin ein reines Pruduct der Vernunft, überdem aber durch und durch synthetisch ist. »

(5) Vedi: *L'apoteosi dello zero ossia principii della naturale filosofia* di Oken, del Prof. Carlo Conti. — Le obbiezioni che il Conti fa al modo di vedere dell'Oken, il quale vede nello zero l'idea madre delle matematiche, perdono assai della loro efficacia qualora si pensi alla generalità, varietà e variabilità d'uffizii e di espressioni, di cui è capace questo simbolo, giustamente dal grande Geometra Otto Hesse chiamato il Mefistofele dell'algebra (Vedi: *Die vier Species*). Lo zero infatti, quando ben si consideri sotto un aspetto veramente ampio e generale, serve a rappresentare l'elemento infinitesimo (punto nel suo più largo significato geometrico), di cui si compone ogni varietà continua; quindi esso pure, secondo la sua simbolica significazione, entra in guise infinitamente diverse a formar parte di quel concetto fondamentale, suscetivo di diverse determinazioni, che il Riemann pone come necessario per formarsi l'idea di grandezza in generale.

Sulla filosofia delle scienze, cioè sull'unità dei metodi che presiedono alla loro formazione, ed inoltre sul nesso che specialmente le scienze d'osservazione hanno colle matematiche, trovo opportuno il rammentare i due miei lavori già citati: 1.° *I metodi del Duhamel e la Logica del Condillac; 2. Maurizio Bufalini e il Metodo sperimentale.*

Per rendere poi adequatamente apprezzabile quali passi abbia fatto ai nostri giorni la vera filosofia delle scienze, cioè per valutare l'influenza che la filosofia esercita sulle scienze della natura, influenza che del resto è da considerarsi come reciproca, mentre è reciproco il nesso che esiste fra l'esperienza e la ragione, credo opportuno il fare qui una esposizione critica d'un breve ma assai notevole scritto del Wundt: — Ueber den Einfluss der Philosophie auf die Erfahrungswissenschaften. — Akademische Antrittsrede gehalten zu Leipzig am 20 November 1875. — Von Wilhelm Wundt — Ordentlicher Professor der Philosophie. Leipzig, 1876

In questo notevole opuscolo di sole 27 pagine, l'autore si propone appunto di considerare quale influenza eserciti la filosofia sulle scienze sperimentali. E poichè il numero delle discipline, che meritano questo nome, và crescendo ogni giorno, ed esse inoltre per qualità ed estensione acquistano una importanza sempre maggiore, sarebbe troppo arduo e forse superiore alle forze e cognizioni di un solo, il cercarne il nesso e la loro mutua dipendenza, con che si potrebbe anche riunirle in una vasta sintesi subordinata ai concetti fondamentali ed al metodo della nuova filosofia. Volendo pertanto giungere a qualche cosa di pratico ed utile in questa ricerca, giova il restringere le proprie osservazioni alle scienze più capitali fra quelle che entrano nel dominio dell'esperienza.

Ora l' esperienza si può distinguere in esteriore ed interiore; o meglio in altri termini, nell' investigazione del vero, si può far uso dell'osservazione diretta od indiretta. Colla prima noi ci accingiamo specialmente a studiare i fenomeni del mondo esterno, mediante quella fra le scienze della natura, che ha per oggetto il cosmos, cioè l' investigazione delle leggi che regolano la materia e le sue manifestazioni; colla seconda, cioè coll'osservazione indiretta, noi ci proponiamo di indagare segnatamente, benchè in un modo assai generale e alquanto vago, i principii ed i metodi che rampollano dalle verità psicologiche, formando uno speciale studio dell'anima. Pertanto la logica e la metafisica, parte precipua della filosofia pura, al dì d'oggi sono ridotte: la prima a ricercare il modo con cui funzionano le facoltà del sentire, del volere e dell' intendere; la seconda, cioè la metafisica, a stabilire le leggi con cui si spiegano l' intima natura e le metamorfosi della materia.

La matematica pertanto, sia come scienza dello spazio e del tempo e sia come istrumento esattissimo di linguaggio per dar forma conveniente e rigorosa alle nostre rappresentazioni e cognizioni, è pur essa una finissima e potentissima logica, che ha recato grande giovamento al progresso delle scienze sperimentali, più che non abbia potuto fare la logica formale delle scuole. Lo stato d'incremento e di perfezione a cui è pervenuta dipende tuttavia dall'essersi attenuta a quei procedimenti d'investigazione, che spesso contengono la vera sostanza del metodo induttivo, e quindi assomigliano agli stessi processi naturali, onde può dirsi senza tema di errare che nessun linguaggio umano è, come il matematico, così ordinato e fedele rappresentante dei fatti.

Reciproca è pertanto l' influenza che fra loro si esercitano le scienze sperimentali e la filosofia, mentre quelle costituiscono la base ed il corpo della piramide scientifica nel cui asse s' impernano le scienze filosofiche e sulla cui cima elevata s' estolle l' odierna metafisica. Ma come nella formazione dello scibile umano, giammai non cessa il legame misterioso ma necessario che unisce il cosmos col microcosmo, il fatto colla ragione, l'esperienza esterna coll' interna mentre essi servonsi a vicenda di guida, d' ajuto e d' incremento, così la filosofia ormai stabilita su solide basi, esercita essa pure la sua benefica influenza sulle scienze sperimentali, soccorrendo l' intelletto nello scorgerne le reciproche attinenze, e nel dare ad esse quella giusta ed armonica disposizione che tutte le fa risplendere di luce maggiore.

A buon diritto la filosofia formata sul campo vivo e perenne dell' esperienza, non partorita dalle chimeriche speculazioni d' idealità vuote o vaporose, ma fondata sull'accurata osservazione dei fatti, e sulle leggi generali che emergono da essi in ordine all' uomo e alla natura, deve poter presiedere e indirizzare le successive evoluzioni delle scienze sperimentali, senza loro pregiudizio, ma anzi servendo ad esse di guida modesta e sicura, pronta sempre ad aggiungere al patrimonio già aquisito il frutto delle nuove investigazioni, in piena armonia colle altre scienze, elevandosi così verso la meta di quell'edifizio, i cui materiali vengono dati dall'esperienza, ma di cui essa forma l'idea archetipo e la forza costante che insieme li tiene congiunti in quell'ordine e simmetria che loro fornisce ad un tempo solidità e bellezza.

Kant, il maggiore dei filosofi di tutti i secoli, anzitutto grande naturalista e matematico, prendendo a base de' suoi studi, fatti ed esperienze, seppe elevare e mantenere la filosofia a quel giusto livello che render doveala veramente utile e rispettata. Ciò devesi massimamente alla maniera del tutto critica e positiva, con cui cercò l'origine delle nostre cognizioni, allo scopo di collegare i fenomeni del mondo esterno colle interne nostre rappresentazioni, e rintracciando nei nostri organi e nel centro delle sensazioni la capacità di ordinare e plasmare i materiali dal di fuori aquisiti, in modo da comporne un tutto sensibile ed intelligibile.

Da Aristotile e Schopenhauer, i grandi filosofi che vollero fondare i loro studii sull'osservazione e sull'esperienza, non attenendosi esclusivamente e sistematicamente all'infelice appriorismo che per tanti secoli infestò la scuola e la scienza, cercarono nelle sensazioni, e meglio ancora come di recente si va con molto inpegno facendo, nella costituzione organica dei sensi, e nel loro modo di funzionare, sia isolato ovvero concorde, le vere basi che legano logicamente il soggetto coll'obbietto, dimostrando qualmente la formazione delle idee generali, ch'altri si compiace di considerare come innate, è anch'essa il prodotto di atti ripetuti e di subite modificazioni, delle quali si è cominciato ad aver la coscienza in modo confuso, fino a conseguire quella estrema lucidezza, vastità e generalità d'intuito che costituisce appunto l'idea nel senso esatto ma positivo di questa parola. Talchè ogni idea del nostro cervello è, si può dire, il risultato d'un lavoro secolare, che mediante successive trasformazioni condusse l'organo a rendersi idoneo a funzionare in quella guisa determinata, che corrisponde all'attività e potenza, di cui è capace.

A questo proposito il Wundt, imprende ben tosto ad esaminare una questione assai importante, che non parmi da Lui pienamente risoluta; gioverà quindi fermarsi su di essa con qualche larghezza.

La questione sarebbe questa: I nostri giudizii come atto primo della nostra mente, resa veramente attiva per forza di reazione, cominciano essi dai concetti propriamente detti, ovvero dalle rappresentazioni (che corrispondono alle sensazioni complete costituenti le immagini degli obbietti)? Nè anzitutto giova, come fa l'autore, considerar questa senz'altro una semplice questione di parole, pag. 10:

« Die Frage also, ob Vorstellung oder Begriff das element des logischen Denkens sei, ist, wie ich glaube, in wörtlichen Sinne genommen, ein Wortstreit. »

Io trovomi sinceramente disposto a concedere alla parola una grande importanza nell'organizzazione del nostro pensiero, ma credo tuttavia che questa importanza non debba essere assoluta, ma relativa, propria cioè dell'atto del nostro pensiero, in quanto che esso è il frutto di un abito lungo e continuato del nostro cervello, che ridusse già a parole ed a segni le sensazioni, le percezioni e i concetti nostri. Ma se noi risaliamo alla genesi interamente primitiva e sostanziale dei nostri giudizii, è necessario loro concedere una base od elemento, che non può essere altrimenti diverso dalla sensazione o rappresentazione.

Ed invero, lo stesso fatto che la parola è un insieme di suoni articolati, l'uso di essa nel senso voluto dal discorso, di cui è già capace la nostra mente, presuppone un lavoro di composizione e risoluzione, cioè una serie di giudizii, che non si avrebbero potuto costituire altrimenti che di pure sensazioni e rappresentazioni, fra le quali in qualche guisa si giunge a constatare un certo grado di somiglianza o dissimiglianza. E d'altronde l'atto, con cui la nostra mente con sua libera scelta attribuisce un segno parlato o scritto, non può che essere posteriore, poichè suppone già una serie abbastanza lunga di giudizii, la cui mercè si sono potute scorgere qui differenze essenziali, là somiglianze perfette.

Nè parmi del tutto esatto ciò, che quasi a conforto del suo modo di vedere, poco dopo soggiunge il Wundt, il quale così s'esprime:

« Mit demselben Rechte, mit dem man jene Processe als unbewusste Denkacte bezeichnet hat, kann man sie, wie es in der That geschehen ist, auch wortlose nennen. »

Ora l'incoscienza essendo uno stato di passività manifesto, nel quale noi subiamo soltanto le modificazioni senza averne l'interna consapevolezza, il passaggio da questa allo stato cosciente avverrà solo quando le subite modificazioni, cioè le sensazioni, o percezioni, o rappresentazioni siano in noi individuate, o distinte ammezzo della parola. Ma fra lo stato di perfetta incoscienza e passività dell'organo funzionale senziente, e l'opposta di perfetta consapevolezza ed attività cerebrale, non devono necessariamente esistere passaggi intermedii, anzi continui gradi che conducono successivamente dall'uno all'altro punto? Ora il problema sta per l'appunto nel determinare come e dove cominci il primo stadio dell'attività e se per questo sia necessario l'uso della parola. A me sembra che una assoluta necessità della parola per costituire l'atto cosciente, porterebbe logicamente a queste conseguenze: che la parola stessa preceder dovrebbe l'attività cerebrale, non potendosi in nessun modo concepire l'una e l'altra come del tutto simultanee. Ma d'altronde la parola, o essa stessa è un atto incosciente, e come tale perderebbe ogni efficacia; ovvero è cosciente, ed allora l'attività la precede.

Alla spiegazione ed allo studio dei fenomeni naturali occorrono due concetti fondamentali, i quali si sogliono designare col nome di fine e causa. Queste parole ormai aventi per noi un significato troppo formale ed anzi metafisico, nel senso antico ed improprio di questa parola, vanno da noi considerati ed esplicati specialmente nel caso nostro, nel quale intendiamo di riconoscerli come necessarii alla formazione di quei processi logici, costituenti i discorsi mentali relativi alle scienze che si fondano sull'osservazione e sull'esperienza.

Questi concetti sono entrambe essenziali ad ogni specie d'investigazione, come ad ogni via da percorrere è necessario il punto di partenza e il punto d'arrivo; essi hanno un'importanza del tutto subbiettiva, il che nulla toglie all'entità loro e alla laro importanza nell'ordine mentale. Nella serie dei fenomeni, che noi siamo soliti ad osservare, è sempre possibile lo scorgere una certa continuità o un certo legame, in modo che un dato fenomeno genera l'altro, e questo si può quindi considerare come di quello una conseguenza e spesso anzi una trasformazione. Ora solo per fissar le idee in rapporto a noi stessi e alle cose che ci attorniano siamo soliti ed anzi costretti di considerare questa serie, come avente un fenomeno che serve di primo termine, a cui diamo il nome di causa cioè generatore per eccellenza, ed un altro fenomeno a questo posteriore e da esso più o meno discosto, che si può considerare ed anzi noi consideriamo come ultimo, mentre ad esso tendono tutti quelli che lo precedono, e merita quindi il nome di scopo o fine. Questo legame esistente in ogni serie di fenomeni o fatti, ha pur luogo fra le rappresentazioni che vi corrispondono. Dunque il discorso logico è esso pure una serie di concetti legati fra loro dalla legge di continuità, la quale in sè comprende i due concetti fondamentali di causalità e di fine; onde la nostra mente nel suo mondo più o meno esteso di concetti e di idee, ragionando non fa che comporre una serie, la quale ha il suo principio, la sua fine e i suoi intermedii anelli. Queste cose son tanto vere che tutti le intendono; ma se uno si attenta di elevarle a grado di verità scientifica, e le assume quindi come semplice e chiaro fondamento di spiegazione di certi fatti mentali, che una filosofia nebulosa pretendeva confinare in una sfera immaginaria e sovranaturale, allora si grida allo scandalo e si condanna col nome di visionario o di volgare l' ingegno modesto e coscienzioso che volle a tutti additarne l' utilità e l' importanza (*). Ma è tempo che i più veggano le cose come sono, abbandonando una volta tanti e dannosi pregiudizii.

La sostanza dei concetti causa e fine, benchè in un modo forse meno esplicito di quello che fu fatto per noi, trovasi pure dichiarata dal Wundt.

Il quale qui pure con fino ingegno, ricerca il nesso fra il cosmos e il microcosmos, cioè fra il modo con cui procedono i fenomeni del mondo esterno nella serie che li compone, in un tutto speciale e determinato, e il modo con cui si seguono i nostri giudizii nella catena delle deduzioni. Questo legame che noi scorgiamo o vogliamo scorgere nei fenomeni del mondo esterno e che quasi per riverbero, ed anzi nel senso ideale, cioè subbiettivo e riflesso, con maggior precisione, forza ed esattezza noi introduciamo nel discorso mentale, viene ad esser concepito come una necessità cosmica da un lato, e come una necessità logica e psicologica dall' altro. Esso è uno dei concetti più fondamentali, in virtù dei quali acquista carattere razionale la mente nostra; anzi tutta la nostra logica o capacità di ragionare, sia nell' indurre che nel dedurre (essendo queste due operazioni inverse del nostro spirito), consiste appunto in ciò, e senza ciò verrebbe a mancare dell' unica e vera ragione di sua esistenza.

Su questo principio medesimo poggia il moderno concetto del determinismo scientifico, in conseguenza del quale si ammette che un dato fenomeno avvenga soltanto colla ragione sufficiente della sua esistenza.

Quindi l'autore volendo stabilire fra quali limiti può esercitarsi

---

(*) A questo proposito credo opportuno di rammentar nuovamente i miei due lavori già citati: 1. *I metodi del Duhamel e la logica del Condillac;* 2. *Maurizio Bufatini e il metodo sperimentale.*

l'influenza della logica sulle nostre cognizioni scientifico-sperimentali, esprime apertamente l'avviso che segue, il quale contiene un'opinione che può forse militare in favore d'un'altra da me antecedentemente espressa in proposito del giudizio logico rispetto alla sensazione o rappresentazione.

Egli dice infatti alla pag. 14:

« Ich kann also z. B. schon die Empfindung ein Urtheil nennen, wenn ich mich zwischen verschiedene Empfindungen gestellt denke und sie vergleichend gegen einander abwäge. »

Dopo ciò, egli porge l'esempio della percezione d'una distanza di spazio, al concepimento logico della quale, ch'ei si propone di concludere, trova necessarii diversi elementi: *angolo delle visuali*, *punto di vista*, *differenza fra le due immagini della retina*, dei quali elementi è d'uopo tener conto per formarsi un'idea esatta o scientifica della distanza. Convengo coll'autore circa la necessità dei diversi elementi; non sarebbe però facile il decidere quanti e quali siano necessarii. Anche qui gioverebbe distinguere la possibilità di formarsi il concetto di distanza per diverse vie e più o meno esattamente, e non è facile lo stabilire quando uno dei concetti di distanza così formato meriti o meno il nome di scientifico. Se non si attribuisce sufficiente importanza pratica al mondo esterno dei fenomeni, base unica e vera delle nostre interiori speculazioni e di tutte le operazioni del nostro intelletto, delle conclusioni e delle definizioni o proposizioni in generale, che vengono da noi stabilite, si corre sempre il pericolo di naufragare nel malaugurato subbiettivismo ideale e contemplativo, spesso anche chimerico che raggiunse nel Fichte il suo massimo sviluppo, mentre questo filosofo idealista finì col subordinare tutto lo scibile ad un movimento logico del pensiero.

È appunto l'ordine, cioè il nesso causale e finale, che noi riscontriamo prima fra i fenomeni singoli costituenti una data serie, e poi delle serie fra loro, le quali nel loro insieme complessivo ed infinito costituiscono il cosmos, che fornisce alla nostra mente l'attitudine e quindi l'abito del ragionare, cioè di trovare il doppio nesso nelle serie dei fatti siano reali od ideali.

Quest'ordine, che noi constatiamo nella natura, ha la sua obbiettiva realtà; e la nostra attività intellettuale, la quale lo rivela alla nostra coscienza, non ha che un'importanza secondaria, non potendo essere essa creatrice dell'ordine medesimo, il che porterebbe all'idealismo subbiettivo di Fichte e di Hegel, a torto da alcuni attribuito al Kant; e nemmeno è da considerarsi necessariamente come una attività intellettuale unica e signoreggiante l'universo, cioè la materia, perchè distinta e superiore ad essa, mentre ciò condurrebbe all'ontologismo o deismo propriamente detto.

Il dilemma posto poco dopo dal Wundt sul modo di concepire l'ordine, che almeno in parte corrisponde alle due distinzioni qui ora fatte, non parmi abbia sicure basi, mentre io non vedo che un sol modo di considerare l'idea che noi ci facciamo dell'ordine. Il quale come ogni altro fatto a noi apparisce siccome una costante, perenne e fulgida manifestazione della materia, la cui eterna vita contiene in sè la ragion sufficiente di esso, nè deve accattarlo da altri. E noi ed anche, se sia possibile, come nella cosmogonia del Fechner, gli esseri superiori a noi, dobbiamo subirne l'influenza, in virtù della quale ci è dato possedere intelletto e ragione, e quella attività mentale che ci rende idonei a concepirlo, e persino, con un traviamento dell' immaginazione, a plasmarlo in un modo abbastanza erroneo ed arbitrario; gli errori nostri essendo ad un tempo la prova maggiore della nostra libertà come della nostra dobolezza.

È bensì vero che l'autore, nella seconda maniera con cui vuole si possa spiegar l'ordine, s'esprime in guisa da far comprendere ch'egli vuole attribuire al Kant un idealismo piuttosto critico che subbiettivo, parmi però ch' egli poteva in questo punto cardinale adoperare una forma più esplicita, imperocchè è dall' idealismo del Kant, che a torto od a ragione rampollarono le vedute filosofiche, le quali condussero a quell' idealismo assoluto dell'Hegel, la cui scuola prevalse in Europa per tutta la prima metà di questo secolo, togliendo alle dottrine filosofiche quella realità fondamentale, senza cui perdono anche il vero carattere di scienza. Lo stesso Wundt, esplicando da poi il suo modo di vedere in proposito, è costretto di confessare che circa i fondamenti che, sotto questo punto di vista, si possono concedere alla logica, il Kant riesce in certa guisa alquanto oscuro:

« Bei Kant selbst ist die logische Grundlage dieses Standpunktes noch einigermassen verdunkelt. »

Ed io non esito ad asserire, che siffatta oscurità in lui dipese dal non aver potuto interamente abbandonare il pregiudizio, secondo il quale si ammette come assolutamente innata nei nostri organi la disposizione sufficiente, che li rende capaci del meccanismo logico. Ma il campo obbiettivo e il subbiettivo sono invece così inseparabili, che è d'uopo cadere nell'arbitrario e nell'erroneo volendoli anche per un solo istante disgiunti. Onde ben a ragione la moderna scuola psicologica portò le sue tende nel campo della fisiologia, e lo studio del microcosmo è una continuazione di quello della fisiologia come lo studio del macrocosmo è una continuazione di quello della fisica. In quest'ordine d' idee entra pure e pienamente il nostro autore, con quella convinzione profonda che i larghi ed accurati studi da lui fatti debbongli impartire, come lo dimostrano gl' importanti suoi lavori di Fisica Medica e di Psicologia-fisiologica, nonchè parecchi altri aventi molta relazione con questo argomento. Pertanto dopo aver osservato giustamente, che come al di d'oggi l' indagine della natura è al sommo grado poggiata sull' esperienza, e tuttavia vi sono non pochi fisici, i quali reputano necessarii certi elementi a priori per ispiegare i fenomeni naturali, e sopra tutto stimano come indispensabile e necessario il principio di causalità, egli prosegue venendo a questa notevole conclusione:

« *Ursache ist nur was eine Wirkung hervorbringt.* »

La quale definizione di causa contiene appunto il concetto di fenomeno e della sua manifestazione.

Ma più innanzi egli si rende anche più chiaro distinguendo pienamente, ciò che si volle mantenere da altri confuso: il principio di causalità e il fondamento delle nostre cognizioni; onde la legge di causalità è essa stessa un prodotto dell' esperienza. Egli dice infatti alla pag. 18:

« Nicht der Causalbegriff, sondern das Princip des Erkenntnissgrundes ist uns angeboren. In diesem Sinne können wir sagen, dass das Gesetz der Causalität aus der Erfahrung stamme, und das es doch gleichzeitig auf die ursprünglichen Eigenschaften unseres Bewusstseins sich stütze. »

Benchè il significato di quest'innato (angeboren) attribuito dall'autore al fondamento delle nostre cognizioni, non si può altrimenti intendere che nel senso fisiologico, secondo le dottrine di cui egli è sì valente propugnatore, parmi tuttavia pericoloso, nello stato attuale della scienza, l'adoperare senz'altro questo vocabolo, che può dar luogo ad un'erronea interpretazione. Qui l'innato vuol soltanto significare: quello stato organico dei sensi e del comune sensorio, in virtù del quale essi, secondo il principio della selezione naturale, risultano capaci dell'atto del conoscere. Quindi è che la legge di causalità, come forma logica fondamentale della mente nostra, essendo subordinata alla capacità del conoscere, è pure dall'autore considerata quale un portato della facoltà pensante, di cui è capace il nostro cervello ed inoltre delle complessive e successive impressioni che sopra lui vanno facendo gli oggetti esterni; al quale proposito egli così mirabilmente s'esprime, concludendo:

« So ist dieser Begriff einerseits zwar ein Reflex unseres denkenden Geistes, anderseits aber ist seine besondere Form von den Objecten der Erfahrung bestimmt, von welchen er reflectirt wird. »

Fin qui pertanto, volendo dare una spiegazione dei fenomeni del mondo esterno, qualunque sia il sistema abbracciato, si scorge una decisa tendenza a ridurre all'unità, o almeno a pochissimi punti di partenza, i fondamenti che servono a stabilire la serie delle deduzioni, rappresentanti l'ordine cosmico naturale. Questi punti di partenza, detti anche ipotesi, o principii fondamentali o meglio assiomi in numero minimo possibile, sono tali che ammettendo alcune intime proprietà della materia, nasce da ciò la possibilità di derivarne, col solo sussidio degli assiomi relativi alla scienza astratta della grandezza, alla geometria e alla meccanica pura, tutto ciò che è ammissibile avvenga nella natura. A questo metodo e a questo fine, va sempre più accostandosi la Fisica-Matematica, il cui maggiore perfezionamento si attende da una più precisa rivelazione che la scienza ogni giorno più promette dare sulla intima struttura della materia.

Secondo il Wundt, tutto il problema filosofico della teoria delle cognizioni consiste nello stabilire e precisare i limiti fra ciò che vien dato alla nostra attività intellettuale, e che a noi s'impone come un fatto esterno, che su di noi esercita influenza, e ciò che noi di ricambio rendiamo reagendo, cioè quello che noi mettiamo del nostro: problema che ha eziandio la sua grande importanza per le scienze sperimentali.

La logica e la metafisica, come parti della filosofia, hanno per loro rispettivo obbietto, la prima le forme generali, ossia il metodo, con cui riusciamo a stabilire ed a svolgere le nostre cognizioni; la seconda invece il contenuto generale e fondamentale, cioè la materia primordiale delle medesime.

La logica precede e la metafisica presiede nell'indagine, esse a vicenda si ajutano e completano raggiungendo il loro mutuo perfezionamento, che consiste appunto nel far sì che il vero rendasi sempre più chiaramente e agevolmente accessibile all'intelletto, divenendo oltrecchè necessarie sempre più utili alle scienze sperimentali, i principii delle quali hanno stretta relazione colla metafisica, e i loro procedimenti colla logica.

Ma venendo piu direttamente a dichiarare l'influenza della filosofia sulle scienze sperimentali, si può ridurre la medesima a due punti capitali, che corrispondono ancora al microcosmo e al cosmos, all'idea e al fatto, alla rappresentazione mentale e al fenomeno esterno, onde costituiscono eziandio i punti di partenza o le basi fondamentali della psicologia e delle scienze della natura. Le quali due capitali questioni si riferiscono l'una al modo con cui funziona lo spirito umano, l'altra alle leggi che regolano l'eterna circolazione della materia.

Il problema della psicologia è entrato anch'esso in una fase del tutto sperimentale, occupando il campo fisiologico; il problema relativo alla natura della materia è ora ridotto a studii di fisica, di chimica e anzi di meccanica.

Di qui ne viene che la nuova filosofia e sopra tutto la nuova Metafisica, per la natura dei problemi affrontati, collegandosi strettamente alle diverse scienze sperimentali, i cultori delle medesime, a qualunque ramo essi appartengano, ma specialmente il fisico e il chimico propriamente detti, sono al di d'oggi costretti di riverire, ed anche di coltivare questa scienza, che non ha guari, pel modo vieto sotto cui presentavasi, meritava di esser derisa e disprezzata dai savii cultori delle scienze della natura (*). Ma i nostri grandi dell'epoca del risorgimento, come Leonardo da Vinci e il Galilei, da questo lato si possono considerare come precursori dell'attuale indirizzo scientifico sperimentale oggi imperante anche nelle più in apparenza disparate discipline, come la fisica e le metafisica.

Questo modo di vedere relativo allo stato della filosofia in quanto concerne le scienze sperimentali, è dichiarato apertamente dal Wundt nelle ultime pagine della sua tanto importante memoria.

(6) Alla pagina 226 del suo lavoro già citato, il Fontenelle viene a considerare le serie di termini in numero infinitamente infinito (doppiamente infinito) e così dice in proposito:

« Nous n'avons encore consideré que des Suites dont les termes étoient en nombre infini de l'ordre de ∞. Mais le nombre infini des termes peut être infiniment plus grand, ou d'un ordre superieur à ∞. Par exemple, on peut introduire entre 1 et 2 une infinité de moyen arithmetiques ou geometriques, de même entre 2 et 3, ... de sorte qu'en concevant tout ces termes disposés de suite, on aura une Suite qui aura autant d'infinités de termes qu'il y a de termes dans la Suite naturelle, et qui en aura par conséquent un nombre $= \infty . \infty = \infty^2$. Il est clair qu'on peut imaginer une infinité d'autres Suites pareilles qui auront d'autres Loix. Je les appelle *infiniment infinies*, à la difference des autres qui sont *simplement* infinies, et je suppose que le nombre de leurs termes ne passe point l'ordre de ∞^2, parce qu'il seroit absolument inutile de pousser cela plus loin. »

Da questi concetti larghi e generali assunti per l'infinito come numero, l'autore passa a farne l'applicazione alla retta considerata come lunghezza atta a crescere senza limiti, onde per lui in tale occasione coll'introduzione del concetto di angolo infinitesimo e di punto

(*) Veggansi a questo proposito i miei due lavori: *Il Verismo nell'arte e nella scienza. — La teoria dell'evoluzione e la libertà.*

all'infinito, ne nasce il vero concetto di parallelismo, subordinato cioè a vedute sì ampie e generali ed inoltre indipendenti, da rasentare quelle dei più arditi e robusti pangeometri dei nostri giorni.

L' importanza e peregrinità della materia mi obbligano a riprodurre senz'altro in questa nota alcuni passi dell'autore, nei quali egli con tutta chiarezza espone i detti concetti fondamentali, i quali al di d' oggi divennero soltanto famigliari a quei pochi che coltivano con amore e profitto l'odierna pangeometria, argomento del quale mi occuperò del resto con proposito speciale nella parte seconda di questa mia opera.

Nella Sezione VIII del suo libro il De Fontenelle facendo, come egli stesso dice, l'applicazione delle teorie precedenti alla linea retta così s' esprime:

« Il n'y a point de nombre qui ne puisse exprimer quelque Ligne droite, ni reciproquement de Ligne droite qui ne puisse être exprimée par quelque nombre commensurable ou incommensurable. Donc à tous les nombres infiniment grands ou petits répondent des lignes infiniment grandes ou petites. Commençons par les Infinies. »

« Donc il y a des lignes Infinies possibles de tous les ordres d'Infini (*), c'est-à-dire de l'ordre de ∞, ou de ∞^2 . . . et en géneral de l'orde de ∞^n, ou de l'ordre de $\infty^{\frac{1}{n}}$, . . . et elles auront entre elles les mêmes rapports finis ou infinis, que les Infinis qui les exprimeront, cest-à dire, des rapports finis, si les lignes infinies sont du même ordre, infinis, si elles n'en sont pas. »

« Si l'on conçoit un triangle fini quelquonque, ses trois côtés peuvent toujours croître à l'infini, et le triangle être toujours semblable, et par conséquent trois lignes infinies feront entr'elles trois angles finis égaux aux premiers.. Donc en général des lignes infinies peuvent faire entr'elles tous les angles finis quelconques. »

« Si le primier triangle fini qu'on pose d'abord est isoscele, et que l'on conçoive qu'il n'y a que les deux côtés égaux qui croissent, la base de l'angle du sommet demeurant toujours la même, l'angle du sommet décroîtra toujours, et les deux égaux sur la base croîtront toujours, et enfin les deux côtés égaux étant devenus infinis, l'angle du sommet sera infiniment petit, et le deux autres égaux chacun à un droit, moin la moitié de l'angle du sommet, c'est-à dire egaux, chacun à un droit. Donc les deux côtés égaux du triangle isoscele seront devenus deux lignes infinies paralleles, et la base toujours finie sera infiniment petite par rapport à elles. Et comme elle sera perpendiculaire à l'une et à l'autre, elle mesurera leur distance.

« Donc en general ce qu'on appelle dans le fini deux lignes paralleles, *sont deux lignes qui prolongées à l'infini, font entr'elles à leurs point de rencontre infiniment éloigné un angle infiniment petit, dont la base est la distance finies des deux paralleles.* »

(*) Giova subito l' osservare che questa illazione, vera in tutta la sua estensione nel senso astratto e subbiettivo, non è del tutto applicabile in concreto, cioè allo spazio del mondo fisico; quindi le ipotesi dell'autore sono tutte assolutamente vere a priori, ma abbiamo bisogno dell'esperienza qualora vuolsi verificare entro quali limiti una di esse abbia luogo realmente.

« Si l'on concevoit deux paralleles infinies du secondordre, dont la distance fût toujours finie, l'angle de la recontre des paralleles dans l'Infini serait infiniment plus petit qu'il n'était dans l'art. précédent, car la base serait de deux ordres au dessous des côtés. »

Quest' ultima osservazione è molto degna di nota, mentre essa contiene in genere l' idea di collegare la distanza delle parallele col-l'angolo infinitesimo formato da esse all' infinito.

L' autore poscia continua:

« Et comme on peut concevoir des lignes infinies de tous les ordres, et qui seront paralleles, et auront des distances finies, on trouvera que ces paralleles feront toûjours des angles infiniment petits d'un ordre plus bas. »

Donc en général il peut y avoir des angles infiniment petits de de tous les ordres. »

« Les lignes infiniment petites d'un ordre quelconque répondent aux $\frac{1}{\infty^n}$, qui ont une grandeur, et ne sont pas des zero absolus, et par conséquent elles ne sont pas des points, mais elles ont une étendue. »

Il punto matematico qui corrisponderebbe pertanto allo zero assoluto, il punto fisico allo zero relativo, come risulta da quello che segue:

« Cela n'empèche pas qu'elles ne soient des points *phisiquement* ou *sensiblement*, comme les $\frac{1}{\infty^n}$ sont des zero relatifs, mais en elles mêmes, ou geometriquement, ces sont des étendues. »

« Donc tout ce qui appartient aux lignes finies, leur appartient aussi. Elles peuvent être perpendiculaires à d'autres lignes quelconques obliques, paralleles, en un mot, elles ont une position que des points absolus n'ont pas. »

O meglio, entrando bene nel concetto dell' autore, queste rette infinitesime hanno una direzione unica, mentre il punto matematico assoluto, non ne ha nessuna o ne ha un numero infinito.

« On peut aussi bien concevoir un triangle infiniment petit, dont les trois côtés seront des lignes infiniment petites d'un ordre quelconque, qu'un triangle infiniment grand, ou même fini, et les trois côtés du triangle infiniment petit feront aussi entr'eux des angle finis, tant qu'ils seront des infiniment petits du même ordre. »

« Mais si deux lignes infiniment petites du même ordre font entr'elles un angle dont la base soit de l'ordre immédiatement inferieur, cet angle est infiniment petit, et les deux lignes paralleles. Et plus la base sera d'un ordre inferieur à celui des côtès, plus l'angle infiniment petit baissera d'ordre. »

« *Donc aussi si deux lignes finies qui se rencontrent ont une base infiniment petite du 1er ordre, elles font entre elles un angle infiniment petit, et sont paralleles. Et leur angle est encore infiniment plus petit, si leur base est du 2d ordre d'Infiniment petit, etc.* »

Si noti che quest' ultimo modo assai generale di considerare il parallelismo delle rette coincide perfettamente colle vedute più recenti dovute ai più illustri pangeometri dei nostri giorni, come avrò meglio occasione di render palese in appresso (*). Quindi l'autore così prosegue:

(*) E meglio nella seconda parte di quest' opera: *L'Infinito nella scienza generale dello spazio.*

« Donc en général deux lignes qui se rencontrent sous un angle dont la base est infiniment petite par rapport à elles, sont paralleles, et font entr'elles un angle infiniment petit, et cet angle est d'un ordre d'Infiniment petit d'autant plus bas, que la base est d'un ordre plus inferieur aux côtés. »

« Réciproquement si deux lignes d'un ordre quelconque se rencontrent sous un angle infiniment petit, la base de cet angle est d'un ordre inferieur à elles, et d'autant plus inferieur que l'angle infiniment petit est d'un ordre plus bas, et ces lignes sont paralleles. »

« Il est possible, mais non pas necessaire, de concevoir deux paralleles comme faisant entr'elles un angle infiniment petit. Car on peut les concevoir comme étant toujours paralleles, même l'orsqu'elles seront prolongées à l'infini, de même qu'elles l'étoient dans le fini. Mais si, lorsqu'elles seront prolongées à l'infini, on les conçoit comme se rencontrant sous un angle infiniment petit, elles seront encore paralleles à cause de l'infinie petitesse de l'angle. Ainsi on peut concevoir leur parallelisme, *ou comme absolu, exact et rigoureux, ou comme infiniment peu different de celui-là, et il n'y a pas de necessité de le concevoir de la 2de façon, mais seulement possibilité.* »

« Si deux lignes finies se rencontrent sous un angle infiniment petit, il n'y a que possibilité de les concevoir comme paralleles, et leur parallelisme ne peut être absolu, mais seulement infiniment peut different de l'absolu. Ainsi dans ce cas-là on peut les considerer encore selon l'angle infiniment petit qu'elles font entre elles. »

« Il en va de même de deux lignes infiniment petites, qui font entre elles un angle infiniment petit. »

« Le parallelisme non-absolu consistant donc toûjours en ce que deux lignes font entr'elles un angle infiniment petit, si deux lignes sont paralleles de ce parallelisme, elles ne peuvent se rencontrer qu'à une distance qui soit de l'ordre immédiatement superieur à celui dont est la base de l'angle infiniment petit. Ainsi si la base de cet angle est une ligne finie, les deux lignes paralleles ne peuvent se rencontrer qu'à une distance infinie, ou dans l'Infini (*). Si la base est infiniment petite de 1er ordre, les deux paralleles se rencontrent à une distance finie, etc. »

« Le parallelisme absolu n'est point susceptible de plus et de moins, mais le non absolu en est susceptible, car l'angle infiniment petit peut être plus ou moins grand (**). »

« Le parallelisme non-obsolu est même susceptible de tous les ordres, puisque l'angle infiniment petit peut-être de tout les ordres infiniment petit. »

« *Donc deux lignes paralleles d'un parallelisme non absolu peuvent être plus au moins paralleles à l'infini, et infiniment plus au moins paralleles selon tous les ordres d'Infini que deux autres paralleles.* »

« On peut le voir encore ainsi. Soient deux droites égale A et B,

---

(*) Si può però osservare che resta dubbio a priori se questo punto d'incontro avvenga ad una distanza il cui valore è $\propto$ ovvero ∞.

(**) Da questo modo notevole di concepire la possibilità dei diversi parallelismi a quello delle diverse geometrie, secondo i moderni pangeometri, ognun vede quanto sia breve il passo.

perpendiculaires sur une même base droite C; la ligne D qui passera par leurs extrémités sera parallele à la base C. Si B est plus grand que A d'une difference infiniment petite, D sera encore parallele à C, mais, non d'un parallelisme absolu comme dans le 1[er] cas (*). Plus la difference de A et B sera grande, étant toûjours de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, moins D et C seront paralleles, et enfin elles ne cesseront entierement de l'être, ou ne deviendront obliques l'une à l'autre, que quand la difference de A et de B sera finie. Que si au contraire la difference de A et de B, étant de l'ordre de $\frac{1}{\infty}$, était decroissante, D et C seraient toûjours plus paralleles, et enfin quand cette difference serait devenue $=\frac{1}{\infty^2}$, D et C seraient infiniment plus paralleles, mais non encore d'un parallelisme absolu. Et il ne le deviendrait que quand la difference aurait passé par tous les ordres d'Infiniment petit, et serait devenue zero absolu. »

« Dans les recherches géométriques, et dans le calcul, le parallelisme non absolu est le même que l'absolu, comme $1+\frac{1}{\infty}=1$, et par la même raison. Mais quoique la difference de ces deux especes de parallelisme nous échape, il y a des occasions où il est bon de les distinguer: comme il y en a où il faut prendre $1+\frac{1}{\infty}$ tel qu'il est, et non pas $=1$. »

Da questo lungo passo dell'autore qui riprodotto emerge chiaramente come egli, sebbene in un modo più sintetico che analitico, ma non meno chiaro, franco e sicuro, siasi formato un giusto e generale concetto del parallelismo, dando ad esso un'estensione forse maggiore di quella che oggi devesi indubbiamente concedere in grazia degli accurati studi dei più illustri geometri di questi ultimi tempi.

Ma il De Fontenelle applicando gli stessi principii al caso della perpendicolarità, deduce per questa analoghe distinzioni: perpendicolarità assoluta e relativa, varietà di questa e sue differenti ordini. Dalle quali distinzioni facilmente ne scaturisce il concetto fondamentale della geometria assoluta, cioè generale: l'angolo del parallelismo preso forse anzi in un senso anche più pratico di quello che fin qui si è fatto.

Pensando poi che tutte queste felici conclusioni del grande segretario dell'Accademia di Francia, relativamente ad una questione, che ai suoi tempi trovavasi perfettamente al buio, sono dovute al modo libero di considerare il concetto dell'infinito e dell'infinitesimo, mantenendo ai medesimi un carattere al tutto relativo, si può da ciò solo

---

(*) Nella 2ª parte di quest'opera: *L'infinito nella scienza assoluta dello spazio*, la distinzione dei diversi parallelismi riposa sul seguente teorema da me dimostrato assolutamente vero:

Se due rette sono perpendicolari, ed una di esse venga intersecata da una obliqua, questa obliqua è tale che:

1. Dalla parte dove forma angolo acuto colla perpendicolare che la incontra, ha tutti i suoi punti che fino ad un certo limite vanno avvicinandosi all'altra perpendicolare;

2. Dalla parte dove forma angolo ottuso, tutti i suoi punti vanno allontanandosi senza fine da questa medesima perpendicolare.

apprezzare quanto mai convenga in ogni caso l'attenersi a questo metodo fecondo di ottimi risultati.

(7). A questo proposito, credo opportuno richiamare l'attenzione su quanto il De Fontenelle dice alla pag. 449 del suo già citato lavoro sull'Infinito in Geometria.

« Ce n'est pas qu'on ne puisse concevoir le point, et qu'on ne doive même le supposer en Géométrie, mais il ne faut pas le concevoir comme élément ou partie infinitième de la ligne, et si la ligne est réellement composée de points, elle l'est d'une manière que nous échape, et que ne tombe pas sous notre calcul. La Géométrie est toute intellectuelle, et a pour objet, non la Grandeur Phisique précisement, mais la Grandeur telle que nous sommes obligés de la concevoir. »

Quest'importante osservazione contiene da un lato la necessità di attribuire al concetto di punto un significato relativo quando lo si vuol collegare con quello di linea, dall'altro la convenienza logica di considerare la questione geometrica come subbiettiva, almeno per quanto concerne la concezione dei suoi elementi fondamentali, con che questi guadagnano in generalità, e quelli in chiarezza e precisione. Così la distinzione fra la linea materialmente descritta e quella ideale cioè puramente geometrica, non si può negare presenti qualche interesse e qualche importanza.

(8) Pertanto le osservazioni fatte ai § 11, 12 e 13 rendono manifesto che eziandio nella matematica pura è d'uopo procedere con molta cautela qualora si vuole applicare il principio d'analogia nello studio relativo al concetto dell'infinito, il calcolo del quale ha bisogno di metodi ed artifizi speciali.

Avvi poi un'altra maniera di procedimento, del resto utilissimo per l'analisi, la quale aumenta la probabilità di cadere in erronee conclusioni, quando si applichi alla Geometria. Intendo parlare dell'arbitrarietà, che entro certi limiti, esiste nella interpretazione o rappresentazione geometrica delle formule analitiche.

A questo proposito si consulti la bella opera del dott. Felice Casorati: *Teorica delle funzioni di variabili complesse* — Pavia, 1868, § 14, pag. 183. »

(9) Sull'argomento dei principii fondamentali della geometria avremo ben presto occasione di fermarci in appresso; in quanto riguarda l'evidenza in generale credo opportuno qui riprodurre ciò che ebbi a dire nella mia *Introduzione all'opera: La vecchia metafisica e la nuova fisica.* (*) Quivi parlando delle definizioni e dell'evidenza ebbi ad esprimere i concetti che seguono.

« A tutti è noto il deplorevole abuso che nelle diverse discipline e in tutti i tempi si è fatto delle definizioni; sicchè il sottoporle ad un esame coscienzioso torna utile sotto il duplice aspetto teorico e pratico. »

« In ogni scienza, ma più specialmente nella geometria, nel calcolo, nelle scienze naturali, giuridiche e sociali, si possono addurre esempi di definizioni che per secoli furono ritenute perfette, ma infine si è provato chiaramente che esse erano non poco sbagliate. Di qui ne venne la necessità di considerare i concetti e i vocaboli che com-

(*) Discorso letto nella R. Accademia delle Scienze di Padova, tornata del 24 Luglio 1881.

pongono le definizioni medesime; ed eziandio quelle che essendo precisamente proprie d'un determinato ente o subbietto scientifico, si potevano ritenere abbastanza late ed estese, per un certo periodo della scienza, col progredire di questa dovettero essere di nuovo allargate: come avvenne pei concetti fondamentali di unità e di numero, per quelli di punto, di retta e di spazio, per quelli di animale, di libertà e di legge, ecc In tal guisa si è soddisfatto ad un bisogno sorto dalle successive evoluzioni della scienza. »

« Ampliando i concetti fondamentali delle diverse discipline, e basando il loro sviluppo teorico sopra ben fatte definizioni, si è pertanto raggiunto lo scopo di rendere sempre più spiccato quel distintivo carattere del loro rigoroso perfezionamento che dicesi evidenza. Ma questa parola non ha più anch'essa l'antico significato di ciò che s'impone come assolutamente vero, cardine dell'appriorismo con tutti i suoi vieti e falsi sistemi, con tutte le puerili e sterili sue conseguenze: l'evidenza, nel sistema complessivo di tutte le scienze, come in ogni singolo ramo di esse, è da considerarsi qual meta a cui concordi e sorelle tendono tutte le scienze, sussidiate dalle matematiche e dalla metodologia statistica: come il vertice insomma di quella piramide scientifica, che si compone di strati infiniti alla base, in guisa che l'evoluzione successiva di tutte le scienze, consiste appunto nel sovrapporre ad uno strato vecchio uno nuovo tendendo al centro del grandioso edifizio. »

« Due infatti sono i modi distinti con cui l'evidenza giunge a rischiarare l'orizzonte più o meno vasto delle nostre cognizioni: l'*osservazione diretta* e l'*indiretta* (Nota 4). Ora questi due modi, o meglio metodi, i quali corrispondono alle due diverse facoltà della percezione e della riflessione, vengono attuati nella loro massima efficacia qualora si ricorra da un lato all'osservazione dei fatti raccogliendoli e ordinandoli nel modo più opportuno secondo le norme dovute alla scienza statistica, dall'altro elevandosi alla loro interpretazione, mediante il più possente degli strumenti logici, di cui può disporre la mente umana: vo' dire le *matematiche*. Infatti l'importanza di queste scienze, anche in ordine alla statistica, non è punto menomata, mentre se quest'ultima scienza vuole assumersi l'importante uffizio del metodo nella interpretazione della natura, sia nella scoperta delle leggi che regolano l'ordine cosmico o fisiologico, morale o psicologico, politico o sociale, sia nella determinazione del grado probabile di certezza da attribuirsi alle leggi medesime, essa ha d'uopo sempre dei metodi matematici per concretarsi, mettendo in formule esatte e sicure il contenuto di una sintesi, come conseguenza dell'analisi, che ha preceduto e presieduto alla sua formazione. »

« Il positivismo dei fatti, che si specchia nel mondo esteriore, riceve la sua più ampia conferma dal realismo delle idee, ridotte a puri rapporti del mondo interiore; l'armonia dei primi si rivela nella simmetria dei secondi, il che conduce al massimo grado della certezza cioè all'evidenza. »

In quanto riguarda i principi fondamentali della geometria credo opportuno il seguente notevole e recente lavoro:

« Essai sur les Principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique, par I. M. De Tilly — Major d'Artillerie. — Membre de l'Accadémie Royale des Sciences. Membre honoraire de la Société des Sciences Physiques et naturelles de Bordeaux — Bruxelles, 1879. »

Questo libro è accompagnato da una relazione letta dall'Hoüel nella seduta del 14 novembre 1878, della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux.

Ora l'Hoüel uno dei pochi scienziati francesi che con sincero impegno si è occupato in diverse e notevoli occasioni delle questioni relative alla scienza dello spazio studiata rigorosamente, nel fare questa relazione sul lavoro del De Tilly, porge anzitutto un cenno storico su questo genere di ricerche, le quali si possono considerare siccome un portato del nuovo indirizzo critico dell'odierna filosofia scientifica, ossia dei suoi principii e del suo metodo, applicati allo studio delle più elementari e primitive proprietà dello spazio.

Egli pertanto alla pag. I. così osserva in proposito:

«Aussi peut-on dire sans éxagération que la *Géométrie philosophique*, comprenant la discussion des vrais principes fondamentaux, des vraies hypothèses préliminaires, sur lesquels la Géométrie doit s'appuyer à son début, ainsi que la recherche de l'emploi le plus rationnel de ces principes, n'a fait aucun progrès réel depuis l'époque d'Euclide jusqu'à celle de Gauss, de Lobatchefsky, de Bolyai et de Riemann, c'est-à-dire jusqu'à notre siècle.»

Io non esito tuttavia ad asserire, che un' indagine critica più vasta e profonda, conduce pienamente a riconoscere nel Kant, vero creatore della filosofia moderna, i primi germi dell'attuale scienza dello spazio secondo Grasmann e Riemann, come risulta dalla sua prima opera pubblicata nel 1747 (N. 12). Per altra via, circa nell' istessa epoca il grande Segretario perpetuo dell'Accademia di Parigi, il De Fontenelle nella sua Geometria dell'Infinito (N. 6), elevavasi egli pure a concetti indipendenti e generali in proposito della questione delle parallele, considerando le medesime sotto un aspetto del tutto analogo a quello che fu appunto in questi ultimi anni apertamente accolto da molti illustri, oltre ai citati, Pangeometri.

Ora l'Hoüel volendo ben tosto rendere accorto il lettore dove sia il lato oscuro e veramente vulnerabile dell'antica geometria, parlando del sunto da lui fatto di una Nota inserita nella raccolta della Società Matematica di Praga: *Sur le role de l'experience dans les Sciences exactes*, così felicemente s'esprime:

«L'objet de cette dernière Note était de préciser d'une manière plus nette qu' on ne le fait d' habitude les caractéres distinctifs qui séparent la Géométrie des Sciences physiques, et d'écarter des raisonement mathématiques les preuves fondées sur cette chose si mal définie qu'on appelle l'*évidence* ou l'*intuition*. Il ne faut pas se lasser de répéter: l'*intuition n'est autre chose que l'expérience faite sans se déranger, et dans laquelle la mémoire remplace l'activité physique.*»

Siamo soliti infatti ad appellare intuitive quelle verità, che sebbene esse pure siano il frutto dell' osservazione diretta e dell' esperienza, sono tuttavia già da lungo tempo stabilite in modo sicuro nella nostra mente, la quale è abituata ad usarne con franchezza senza punto dubitare della loro esattezza. Ma risalendo alle prime origini di quelle verità, sorgono subito delle difficoltà che scemano la chiarezza, d'ordinario soltanto formale ed apparente delle medesime.

L'Hoüel osserva giustamente il grande nesso esistente fra gli assiomi o principii fondamentali propriamente detti della geometria e quelli della Meccanica, nesso in parte non isfuggito al nostro autore.

In quanto concerne la geometria, il criterio fondamentale che lo ha guidato nel comporre questo suo importante lavoro, e di modificarne gli elementi in guisa che gli assiomi necessarii alla loro costruzione siano soltanto quelli che sono ad un tempo necessarii e sufficienti; mentre nei trattati, che pur al dì d'oggi circolano per le scuole, questi assiomi sono ad un tempo insufficienti e sovrabbondanti.

L'assioma deve essere anzitutto indimostrabile e di una assoluta necessità, e servire inoltre di punto di partenza, cioè di primo termine alla serie delle deduzioni, che vogliamo stabilire col di lui mezzo, nonchè delle altre possibili in numero indefinito, benchè racchiuse in un campo limitato dall'attuale stato della scienza, che tuttavia resta suscettiva di nuove evoluzioni.

Per distinguere ciò che è dimostrabile da quello che non lo è, d'uopo è liberar la mente *dai duri ceppi dell' intuizione*, il quale immenso vantaggio si consegue appunto col sussidio dell'analisi anche in geometria, mentre l'uso delle figure nelle dimostrazioni, può facilmente indurre in errore, favorendo per la ragione l'illusione dei sensi.

L'autore si propone infine di soddisfare ad un bisogno logico e razionale, che lo stesso Bellavitis, accennò nel suo lavoro *Sulla Logica*, di sottoporre ad una critica discussione tutti i principii della Geometria; al quale proposito lo stesso Hoüel dice:

« L'Auteur a cherché à réaliser certaines *desiderata* émis par lui-même dans le Bulletin des *Sciences Matématiques et astronomiques* (f. VII, p. 305): apporter plus de rigueur qu'on ne l'a fait jusqu'à présent dans l'établissement des principes antérieures à l'assiome XI d'Euclide; une fois ces principes admis, ne plus recourir aux trois dimensions pour la recherche des lois de la Géométrie plane; enfin, déduire d'une même théorie les trois systèmes de Géométrie possibles. »

Gli autori che prima del De Tilly meglio riuscirono a stabilire i principii fondamentali della Geometria, a giudizio dell' Hoüel sono: Riemann, Beltrami ed Helmholtz. Il primo di questi fa uso di una forma così concisa e parte da concetti tanto elevati, d'una sì grande comprensione e generalità, che non è lecito il proporsi d'introdurre il suo sistema nell'insegnamento elementare. Il secondo, cioè il Beltrami, si può considerare quale un interprete felice del primo, benchè in un altro suo lavoro siasi valuto piuttosto dei concetti fondamentali e dei metodi proprii del Gaus. In ogni modo questi due lavori del nostro distinto geometra italiano sono presentati in una forma propria dell'analisi. L' Helmholtz fu di tutti il più pratico ed accessibile nel senso didattico, quantunque l'esposizione dei suoi assiomi, che qui giova riprodurre, siano anch'essi subordinati al linguaggio analitico. Eccoli infatti:

« 1.° Il punto è l'elemento primordiale dello spazio, e la sua posizione viene determinata da tre grandezze fra loro indipendenti, cui si dà il nome di *coordinate*. Ad ogni movimento d'un punto corrisponde una variazione d'una almeno delle sue coordinate, variazione che si effettua in modo continuo. ».

« 2.° Se un corpo si muove nello spazio, si ammette che esso costituisca tuttavia un sistema rigido, cioè che due qualunque dei suoi punti mantengono sempre fra loro la medesima distanza. Questa proprietà è esprimibile analiticamente mediante una equazione fra le sei coordinate di quei due punti, equazione indipendente dal supposto movimento del corpo. »

« 3.° Per la determinazione di posizione d'un corpo, occorrono sei costanti. Infatti fissato in esso un punto, per la determinazione di un secondo punto restano di arbitrarie soltanto due coordinate ed una sola per un terzo; tutte le rimanenti sono in conseguenza determinate. »

« 4.° Se in un corpo che si muove due punti restano fissi, continuando il movimento del corpo in un determinato senso, esso può essere restituito nella sua primitiva posizione. »

Ecco pertanto come l'Hoüel istesso accetta uno dei punti cardinali della Geometria del De Tilly:

« On peut définir la position d'un point de l'espace avec une *approximation indefinie*, sans avoir besoin d'aucune comparaison directe des portions de l'étendue, en concevant l'espace rempli par trois systèmes de surfaces dont on peu subdiviser à l'infini les intervalles, et auxquelles on attribuerait des numéros d'ordre. Entre deux points ainsi définis, il existe une certaine relation, dont nous n'avons d'idée que par le sentiment de la constance de l'impression qu'elle produit sur nos sens: c'est la *distance*. Cette quantité depend des numéros des surfaces qui determinent les deux pointes. »

Comprendo ed approvo questa maniera di considerare la determinazione di un punto soltanto nel senso relativo dell'approssimazione indefinita, ossia del limite; d'altronde questa è la via unica realmente possibile, anzi l'unica che non conduca a contraddizioni. Ma nel processo logico presentato dall'autore per questa determinazione mi sembra tuttavia essere contenuta una petizione di principio. Ed infatti la determinazione d'un unico punto nel senso locale, è subordinata ed anzi suppone necessariamente la determinazione d'un numero indefinito di superficie successive, le quali devono essere estese in tre sensi diversi. Ora ciascuna di queste tre diverse serie di superficie, si può ritenere davvero determinata, mentre resta ignota e indeterminata la natura e la posizione d'ogni singola superficie che ne fa parte? Non sarebbe invece necessaria la determinazione dei suoi elementi e la legge di sua formazione? I numeri d'ordine possono pertanto servire a individuare nominalmente i diversi punti dello spazio, ma non mai saranno suficienti a determinarli.

Questo è un modo più generale di coordinare gli elementi dello spazio, che non parmi abbia dal lato logico bastevole sussistenza, dal momento che si vuol conseguire una determinazione partendo da ciò che è ancora troppo vago e indeterminato.

A proposito dell'idea di distanza, che l'autore vuole sia da noi conseguita mediante la coscienza costante dell'impressione che in tal guisa serve a riferire due punti fra loro, mercè l'uso dei nostri organi sensorii cioè colle percezioni tattili e visuali, in noi producenti eziandio l'idea di spazio non separabile da quelle di distanza, gioverà consultare il Ribot. Il quale alla pag. 104 del suo importante lavoro già citato: *La Psicologie Allemande*, asserisce egli pure, che la nozione degli oggetti tattili riposa in ultima analisi sulla possibilità di distinguere le parti diverse del nostro corpo, come occupanti ciascuna un posto differente nello spazio. Onde il me rimane sempre l'unico e sicuro termine di paragone, con cui ci è dato l'apprezzare gli oggetti anche i più astratti ed ideali, il me posto in relazione s'intende col mondo esteriore. Qui si ritorna alla teoria delle rappresentazioni ideata dal Kant, ed oggidì sostenuta dai filosofi più valenti dell'Europa e dell'America. Lo stesso Helmholtz, abbracciando questa teoria che a torto si accusa di subbiettivismo esagerato, ebbe a dire (vedi il citato libro del Ribot a pag. 116): «Le sensazioni sono, per la nostra coscienza, dei segni la cui interpretazione rimane libera per la nostra intelligenza.»

L'Hoüel termina quindi la sua relazione con una succinta recensione del libro del De Tilly; io lascio questo argomento sul quale tornerò in altra occasione, proponendomi di presentare un esame critico abbastanza lungo ed accurato di questo libro, esame che troverà miglior posto nella 2ª parte di quest'opera: *L'infinito nella scienza generale dello spazio* — che spero di pubblicare fra non molto.

(10) Per togliere ogni oscurità al lettore su questo importante argomento delle tre diverse geometrie, gioverà richiamare l'attenzione su alcune osservazioni fatte dallo stesso Frischauf in principio della seconda delle sue opere già citata (pag. 5, libro primo, 5).

Quivi l'autore, approfittando di una opportuna distinzione, dichiarata per la prima volta dal Riemann, fra ciò che è *non-terminato* (unbegrenzte) e ciò che è *infinito* (unendlich) (veggasi il § 17), divide le forme geometriche, considerate come serie di elementi, in quattro grandi categorie: *forme terminate e non-terminate, forme finite ed infinite.*

Queste denominazioni, più propriamente applicabili alle serie di termini, convengono pure alle forme geometriche, quando queste si considerino come generate da un determinato elemento o ente geometrico (punto in generale, secondo Riemann), il quale si muova con legge determinata e in un determinato senso. Pertanto nella stessa guisa che una serie di termini si dice terminata, allorchè non si può sempre passare da un suo termine ad un altro prossimo senza invertire il processo di generazione che le è proprio, cioè il senso secondo il quale si procede da un termine al successivo; così una forma geometrica sarà non-terminata allorquando da un suo punto (preso in senso lato) si può passare ad un altro senza mutare il senso del movimento secondo cui è generata.

Una porzione qualunque di una linea è una forma terminata; se la linea è chiusa cioè rientrante, come una circonferenza od una elisse, essa ci dà l'idea d'una forma non-terminata. Si può quindi annunziare il teorema:

Ogni serie terminata è pure finita; ma non ogni serie finita è terminata.

Se infatti una serie non-terminata è tale, che partendo da un suo termine qualunque, si possa tornare al termine medesimo seguendo il processo di generazione che le è proprio, allora la serie dicesi anche finita. Del pari una forma non-terminata dicesi finita se seguendo il processo di sua generazione, da un suo elemento si può tornare al medesimo.

Ma se, mentre è possibile l'andare da un termine ad un altro prossimo, non si può tuttavia far ritorno al primo seguendo il processo di generazione che le è proprio, la serie non-terminata dicesi allora infinita. Così la serie dei numeri naturali è non-terminata ed inoltre infinita. Ogni serie infinita è evidentemente non-terminata. Lo spazio reale è evidentemente una forma non-terminata; se il concetto dello spazio reale si estende all'ideale, esso diviene del pari una forma infinita.

Dopo queste generali definizioni sulla natura delle serie e delle forme geometriche nasce spontanea la domanda: come si possano concepire la retta ed il piano. In conformità delle date definizioni hanno luogo per questi enti le accennate diverse ipotesi, che conducono alle tre diverse geometrie.

A questa medesima conclusione si può pervenire per diverse vie. Così il De Tilly nel suo lavoro già citato comincia col distinguere la distanza di due punti in tre diverse specie:

1. *Le distanze ideali,* che possono essere funzioni qualsivogliano delle sei coordinate di due punti (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2).

2. *Le distanze analitiche, razionali o astratte,* le quali sono anch'esse funzioni delle coordinate medesime, ma tale che soddisfino a certe condizioni, le quali nel linguaggio analitico si possono esprimere così:

a) La funzione F delle dette sei coordinate deve variare in modo continuo rispetto ad esse.

b) Denotando per brevità con 1 il punto (x_1, y_1, z_1) e con 2 (x_2, y_2, z_2) e dato un altro punto $2'$ (x'_2, y'_2, z'_2) in modo che

$$F_{12} = F_{12'}$$

esiste un sistema di punti, ai quali appartengono i due dati 1 e $2'$, in guisa che relativamente alle distanze comprese fra le singole coppie di punti corrispondenti ha luogo identicamente:

$$1234\ldots \equiv 1\,2'\,3'\,4'\ldots.$$

Quindi l'autore valendosi di un processo semplice ma ingegnoso arriva alla seguente notevole conclusione:

« Ainsi la question de savoir si la fonction F peut représenter une distance analytique se trouvera résolue *après un nombre limité de calculs determinés.* »

Questa conclusione la troveremo del pari accennata nell'immortale memoria del Riemann: Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grande liegen.

Il De Tilly dimostra infine, che la distanza analitica, cioè la funzione F, nell'ipotesi che debba soddisfare alle suddette condizioni, non può presentarsi che sotto una delle tre forme seguenti:

$$1^\circ \quad F_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

$$2^\circ \quad F_{12} = \frac{A}{\pi}.arc.cos.hyp.\frac{1 - th\frac{\pi x_1}{A}th\frac{\pi x_2}{A} - th\frac{\pi y_1}{A}th\frac{\pi y_2}{A} - th\frac{\pi z_1}{A}th\frac{\pi z_2}{A}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(1 - th^2\frac{\pi x_1}{A} - th^2\frac{\pi y_1}{A} - th^2\frac{\pi z_1}{A}\right)\\ \times\left(1 - th^2\frac{\pi x_2}{A} - th^2\frac{\pi y_2}{A} - th^2\frac{\pi z_2}{A}\right)\end{array}\right\}}}$$

$$3^\circ \quad F_{12} = \frac{D}{\pi} \quad arc.\ cos. \quad \frac{1 + tg\frac{\pi x_1}{D}tg\frac{\pi x_2}{D} + tg\frac{\pi y_1}{D}tg\frac{\pi y_2}{D} + tg\frac{\pi z_1}{D}tg\frac{\pi z_2}{D}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{l}\left(1+tg^2\frac{\pi x_1}{D}+tg^2\frac{\pi y_1}{D}+tg^2\frac{\pi z_1}{D}\right)\\ \times\left(1+tg^2\frac{\pi x_2}{D}+tg^2\frac{\pi y_2}{D}+tg^2\frac{\pi z_2}{D}\right)\end{array}\right\}}}$$

In queste formule la lettera π e così quelle che denotano le diverse funzioni circolari ed iperboliche, non hanno un significato geometrico (vedi Baltzer, Parte 2).

La 2ª e la 3ª di queste formule coincidono rispettivamente colle prime quando si ponga in esse $A = \infty$, o $D = \infty$; la terza coincide colla seconda ponendo $D = \pm A\sqrt{-1}$. La terza è adunque di tutte la più generale.

Pertanto a seconda che si assume come fondamentale piuttosto l'una che l'altra di quelle tre formule, si hanno tre diversi sistemi di geometria. La prima formula conduce alla geometria ordinaria o euclidea (parabolica); la seconda alla geometria non ordinaria, aeuclidea (astratta, gaussiana, iperbolica); la terza alla geometria doppiamente astratta, del Riemann (elittica, sferica).

3. La distanza fisica infine è anch'essa una funzione delle sei coordinate di due punti, nel senso concreto e sperimentale, che dipende dai nostri sensi e dagli strumenti materiali di misura effettiva che stanno a nostra disposizione, e dei quali possiamo valerci per confrontarla obbiettivamente con altre, allo scopo di constatarne l'identità. Resta però dubbio a priori a quale delle tre forme indicate soltanto possibili, si debba praticamente far corrispondere questa distanza fisica, mentre l'apparente identità, che ha luogo fra le distanze di due copie di punti materiali, rimane per noi una nozione vaga, che non sappiamo sia suscettiva d'essere con rigore analiticamente rappresentata. Certo è però che se ciò fosse possibile, non potrebbe avvenire altrimenti che per mezzo di una delle tre forme stabilite. Questo fatto può in gran parte acquetare il nostro spirito, tanto più che le tre forme medesime sono strettamente legate fra loro.

(11). Vedi: Immanuel Kant's Prolegomena — von Benno Erdmann 1878 — e specialmente: Der trascendentalen Hauptfrage erster Theil. Wie ist reine Mathematik möglich? — e le note Iª, IIª, IIIª. Infine di quest'ultima nota è molto da considerarsi la seguente dichiarazione esplicita dell'autore:

« Denn dieser von mir sogennante Idealismus betraf nicht die Existenz der Sachen (die Bezweiflung derselben aber macht eigentlich den Idealismus in recipirter Bedentung aus), denn die zu bezweifeln ist mir niemals in den Sinn gekommen, sondern bloss die sinnliche Vorstellung der Sacheu, dazu Raum und Zeit zuoberst gehören; und von diesen, mithin überhaupt von allen Erscheinungen habe ich nur gezeigt, dass sie nicht Sachen (sondern blosse Vorstellungsarten), auch nicht den Sachen an sich selbst angehörige Bestimmungen sind. Das Wort trasschendental aber, welches bei mir niemals eine Beziehung unserer Erkenntniss auf Dinge, sondern nur aufs Erkenntnissvermögen bedeutet, sollte diese Missdeutung verhüten ».

(12). Ecco pertanto il titolo di questa importante opera del Kant: « Gedanken von der wahren Schätzung der lebendigen Kräfte und Beurtheilung der Beweise, deren sich Herr von Leibnitz und andere Mechaniker in dieser Streitsache bedient haben, nebst einigen vorhergehenden Betrachtungen, welche die Kraft der Körper überhaupt betreffen 1747 — Immanuel Kant's sämmtliche Werke, Leipzig (1867), Erster Band.

Al § 9 di questo lavoro tanto notevole per più rispetti, egli stabilisce questa proposizione:

« Wenn Diese Substanzen keine Kraft hätten ausser sich zu wirken, so würde keine Ausdehnung auch kein Raum sein »

Quindi prosegue facendo senz' altro questa esplicita dichiarazione:

« Der Grund von der dreifachen Dimension des Raumes ist noch unbekannt. »

con cui è apertamente accennato il lato oscuro della questione. Quindi nel § 10 espone come probabile l'opinione:

« Es ist wahrscheinlich, dass die dreifache Abmessung des Raumes von dem Gesetze herrühre, nach welchem die Kräfte der Substanzen in einander wirken. »

Alla quale tien seguito l'altra:

« Die dreifache Abmessung scheinet daher zu rühren, weil die Substanzen in der Existirenden Welt so in einander wirken, dass die Stärke der Wirkung, sich, wie das Quadrat der Weiten umgekehrt verhält. »

Ma qui è appunto dove in lui si palesa grande ampiezza e libertà di vedute, eziandio sul modo di concepire lo spazio e le sue dimensioni. Infatti assunta la legge ora accennata, come fondamento delle sue osservazioni, tosto ei soggiunge:

« Drittens, dan dieses Geselz wilkürlich sei, und dass Gott dafür ein anderes, zum Exempel der umgekehrten dreifachen Verhältnisse hätte wählen können; dass endlich viertens aus einem anderen Gesetze auch *eine Ausdehnung von anderen Eigenschaften und Abmessungen gelfossen wäre. Eine Wissenschaft von allen diesen möglichen Raumesarten wäre ohnfelbar die höchste Geometrie, die ein endlicher Verstand unternehmen könnte.* »

Sublime sentenza, nella quale sembra quasi adombrato l'alto concetto della moderna Geometria, almeno per quella parte che risguarda la dottrina superiore degli spazii.

Il Kant spiega pure in qual guisa la mente nostra, già assuefatta a subire i *duri ceppi dell' intuizione*, trovisi per ciò appunto vincolata a concepire lo spazio in un modo del tutto ristretto e limitato. Egli infatti osserva immediatamente:

« Din Unmôglichkeit, die wir bei uns bemerken, einen Raum von mehr als drei Abmessungen uns vorzustellen, scheinet mir daher zu rühren, weil unsere Seele ebenfals nach dem Gesetze der umgekehrten doppelten Verhältniss der Weiten die Eindrücke von draussen empfängt, und weil ihre Natur selber dazu gemacht ist, nicht allein so zu leiden, sondern auch auf diese Weise ausser sich su wirken. »

Ma nel § 11 egli spinge infine l'occhio limpidissimo dell' audace ma sicura sua mente, a ricercare l'esistenza probabile di più mondi, proponendosi la questione:

« Die Bedingung, unter der es wahrscheinlich ist, dass es viel Welten gebe. »

svolgendo la sua tesi nel modo che segue:

« Wenn es möglich ist, dass es Ausdehnungen von anderen Abmessungen gebe, so ist auch sehr wahrscheinlich, dass sie Gott wirklich irgendwo angebracht hat. Denn seine Werke haben alle die Grösse und Mannigfaltigkeit, die sie nur fassen können. Räume von dieser Art könnten nur unmöglich mit solchen in Verbindung stehen, die von ganz anderem Wesen sind; daher würden dergleichen Räume zu unserer Welt gar nicht gehören, sondern eigene Welten ausmachen müssen. In dem Vorigen habe ich gezeigt, dass mehr Welten, im metaphysischen Sinne genommen, zusammen existiren könnten, allein hier ist zugleich die Bedingung, die, wie mir deucht, die einzige ist, weswegen es auch wahrscheinlich währe, dass viel Welten, wirklich existiren. Denn wenn nur die einzige Raumesart, die nur eine dreifache Abmessung leidet, möglich ist, so würden die anderen Welten, die ich ausserhalb derjenigen setze, worin wir existiren, mit der unsrigen dem Raume nach können verbunden werden: weil sie Räume von einerlei Art sind. Daher würde sich's fragen, warum Gott die eine Welt von der anderen gesondert habe, da er doch durch ihre Verknüpfung seinem Werke eine grössere Vollkommenheit mitgetheilt haben würde; denn je mehr Verbindung, desto mehr Harmonie und Uebereinstimmung ist in der Welt, da hingegen Lücken und Zertrennungen die Gesetze der Ordnung und der Vollkommenheit verletzen. Es ist also nicht wahrscheinlich, dass viele Welten existiren, (ob es gleich an sich möglich ist), es sei denn, dass vielerlei Raumesarten, von denen ich jetzo geredet habe, möglich sind.»

« Diese Gedanken Können der Entwurf zu einer Betrachtung sein, die ich mir vorbehalte. Ich kann aber nicht leugnen, dass ich sie so mittheile, wie sie mir beifallen, ohne ihnen durch eine längere Untersuchung ihre Gewissheit zu verschaffen. Ich bin daher bereit sie wieder zu verwerfen, sobald ein reiferes Urtheil mir die Schwäche derselben aufdecken wird. »

Ben si vede frattanto qual luce porti a queste congetture, il modo tanto libero ed ampio, quanto esatto e sicuro, col quale il Riemann ebbe a concepire la grandezza, e quindi a stabilire la genesi delle successive varietà.

(13) Fino dalla più remota antichità la scuola Pitagorica aveva assunte l'Aritmetica e la Geometria quali fondamenti delle sue ricerche filosofiche. Anzi l'importanza dato al numero dai Pitagorici fu così grande, che a torto od a ragione da molti e competenti giudici si volle attribuire a loro perfino l'assurda esagerazione di confondere i numeri colla sostanza delle cose. Sul quale proposito mi limito ad osservare, che i rapporti di misura e di posizione che noi riscontriamo e notiamo nei corpi, hanno in ogni modo un valore obbiettivo, che è realmente inseparabile dalla particolare essenza costitutiva dei corpi medesimi, quantunque siano meramente subbiettivi i simboli che rappresentano quei rapporti.

Ecco pertanto come lo Zeller presenta la dottrina Pitagorica nella sua importantissima opera: *Die Philosophie der Griechen* — Tübingen (1856). Zweite völlig umgearbeitete Auflage — pag. 251.

« Diess also ist der Sinn der pythagoreischen Grundlehre:

« Alles ist Zahl, d. h. Alles besteht aus Zahlen die Zahl ist nicht blos di Form, durch welche di Zusammensetzung der Dinge bestimmt wird, sordern auch die Substanz und der Stoff, woraus sie bestehen, und eben das gehört zu den wesentlichen Eigenthümlichtkeiten des Phythagoreischen Standpunkts, dass die Unterscheidung nou Form und Stoff noch nicht vorgenommen, dass in den Zahlen, worin wir freilich nur einen Ausdruck für das Verhältnis der Stoffe zu sehen wissen, umittelbar das Wesen und die Substanz des Wirklichen gesucht wird. Was die Pythagoreer auf diese Annahme geführt hat, war ohne Zweifel, wie diess auch Aristoteles sagt (Metaph I, 5. *XIV*, 3, S 246, 1. 2) und Philolaus bestätigt, die Bemerkung, dass alle Erscheinungen nach Zahlen geordnet, dass namentlich die Veroaltnisse der Himmelskörper und der Töne, überhaupt aber alle mathematischen Bestimmungen, von gewissen Zahlen und Zahlenverhältnissen beherrscht seien, eine Wahrnehmung, die selbst ihrerseits wieder an den uralten Gebrauch symbolischer Rundzahlen, und an die bei den Griechen, wie bei andern Völkern, verbreiteten, anch in den pythagoreischen Mysterien vohl von Anfang an vorkommenden Meinungen über die geheime Kraft und Bedentung gewèsser Zahlen anknüpft. »

Quindi più innanzi alla pag. 279, il valente filosofo tedesco così prosegue in proposito:

« Es ist eine Verwechslung von Symbol und Begriff, cine Vermischung des Acoidentellen und Substantiellen, die wir nicht auflösen dürfen, wenn wir nicht die innerste Eigenthümlichkeit der pythagoreiscweisen Denkweise verkennen wollen. So wenig sich daher behaupten lässt, die Körper seien den Pythagoreern nichts Materielles, weil sie aus Zahlen bestehen sollen, ebensowenig dürfen wir umgekehrt schliessen, die Zahlen müssen etwas Körperliches sein, weil sie sonst nicht Bestandtheile der Kôrper sein könnten; sondern bei den Körpern wird an das gedacht, was sich der sinnlichen Wahrnehmung, bei den Zahlen an das, was sich dem mathematischen Denken darbietel, und Beides wird unmittelbar, indentisch gesetzt, ohne dass man die Unzulässigkeit dieses Verfahrens bemerkte. »

Qualunque sia in ogni modo l' interpretazione che dar si voglia ai principii fondamentali propri della Scuola Pitagorica, è fuor di dubbio che serbandosi propugnatrice di quel metodo matematico, del quale fece uso nello studio di fenomeni naturali, metodo a cui dovettero far ritorno tutte le scienze da Leonardo da Vinci a Galileo fino ai nostri giorni, essa rese all' umanità i più segnalati servigi. Lo stesso Chasles ebbe quindi a dichiarare in proposito: « Cet fut principalement à Pythagore, qui incorpora la Géométrie dans sa philosophie, et à ses disciples, que cette science dût ses premières découvertes. »

(14) « L'idée de l'évolution a été élevée par Hegel à sa plus haute puissance. La Logyque, la physique et l'histoire traitées comme des branches d' une seule et même méthode ont soumis à *Hegel la vaste série qui constituerait l'intégralité du monde dans le temps*. Hegel est incontestablement la plus grande figure philosophique du siècle. Sa doctrine est aujourd'hui très-répandue en France. Un des plus indépendants et des plus profonds de nos philosophes, le plus savant, le plus estimé de tous, M. Vacherot, a adopté en grande partie la doctrine hégélienne. D'autres grands esprits tourbillonnent, on peut le dire, autour des mêmes conceptions. » Così il Renouvier nel suo importante lavoro: *De la Philosophie du XIX siècle en France*. Vedi *L'Année philosophique, par M. F. Pillon. Première Année*. (1867). Paris 1868. pag. 89.

(15) Alcuni teoremi elementari della geometria projettiva trovansi

pure in Euclide (285 a. C), in Apollonio da Perga (247 a. C), in Pappo d'Alessandria (4 secoli a. C.), come osserva il Prof. Luigi Cremona nei suoi belli: *Elementi di Geometria Projettiva*. Prefazione pag. III.

Si hanno notizie più diffuse in proposito dalla già citata opera dello Chasles, *Aperçu*, pag. 9 §§ 6, 7, 8, 9, 11. In quest' ultimo paragrafo alla pag. 17 così s'esprime l'illustre Geometra Francese: «Ce fut Apolonius qui considéra, le premièr, les coniques dans un cône oblique quelconque à base circulaire; jusque - là, on ne les avait conçues que dans le cône droit, ou de revolution; et encore avait-on toujours supposé le plan coupant perpendiculaie à l'une des arêtes du cône.»

(16) Aperçu pag. 274. *Sur les Porismes d'Euclide.*

Alla pag. 276 lo Chasles apertamente conclude:

«La doctrine des porismes était donc la *Géométrie analytique des Anciens;* et peut-être, si elle nous était parvenue, y trouverait-on le germe de la doctrine de Descartes; nous croyous au moins que l'équation de la ligne droite (abstraction fait de la forme algébrique sous laquelle nous l'amployons) a fait partie des porismes mêmes d'Euclide; et c'est pour cela que nous l'avons choisie pour exemple de porisme dans le texte du dixcours. Nous appuierons cette opinion de plusieurs preuves, dans un autre moment. Et si ces premières conjectures ne paraissent pas dépourvues de toute vraissemblance, nous ajouterons qu'il n'a manqué à Euclide que l'usage de l'Algèbre pour créer les systèmes de coordonnées qui datent de Descartes.»

(17) Ecco infatti come lo stesso Chasles giudica la nuova dottrina geometrica dovuta al genio meraviglioso del Descartes: «Cette doctrine da Descartes, dont aucun germe ne s'est trouvé dans les écrits des géomètres anciens, est la seule peut-être dont on puisse dire, comme Montesquieu de son *Esprit des lois; Prolem sine matre creatam*, cette doctrine, dis-je, eut pour effet de donner à la Géométrie la caractère d'abstraction et d'universalité qui la distingue essentiellement de la Géométrie ancienne.» Aperçu, pag. 94.

(18) È assai notevole e significante sia dal lato storico che da quello critico, per ciò che concerne l'intero assetto della Geometria, la seguente sommaria osservazione di Chasles:

«Ainsi donc nous voyons la Géométrie divisée en trois branches.»

«La première comprend la Géométrie des Anciens, aidée de la doctrine des indivisibles et de celle des mouvements composés:»

«La deuxième est l'analyse de Descartes, acrue des procédés de Fermat, dans sa méthode de *maximis et minimis*, pour calculer l'infini: »

«La troisième enfin est cette Géométrie pure, qui se distingue essentiellement par son abstraction et sa généralité, dont Pascal et Desargues ont donné les premières exemples dans leurs traités des coniques, et dont nous verrons que Monge et Carnot, au commencement de ce siècle, ont assis les fondements sur de principes larges et fecondes.»

(19) Ecco qui riprodotto il passo originale dello Chasles:

«I. Généraliser de plus en plus les propositions particulières, pour arriver de proche en proche à ce qu'il y a de plus général; ce qui sera toujours, en même temps, le plus simple, le plus naturel et le plus facile.»

«II. Ne point se contenter, dans la demonstration d'un théorème ou la solution d'un problème, d' un premier résultat, qui suffirait, s'il s'agissait d'une recherche particulière, indépendante du système général d'une partie de la science; mais ne se satisfaire d'une démonstration on d'une solution, que quand leur simplicité, ou leur déduction intuitive de quelque theorie connue, prouvera qu'on a rattaché la question à la véritable doctrine dont elle dépend naturellement.»

(20) L'originale dice:

«L'éclat que jeta cette première production de la Hire fut de peu de durée; et cette ouvrage, malgré son mérit incontéstable, est, depuis plus d'un siècle, tombé dans l'oubli; ce dont nons nous étonneriont si nous ne savions que chaque époque a ses questions du moment, et, que les idées les mellieures et les plus fecondes, pour être bien saisies, doivent venir dans le temps où les esprits sont tournés vers l'objet auquel elles se rapportent. L'etude des sciences nons offre, à chaque pas, la preuve de cette vérité.»

(21). Ecco i due brani originali dello Chasles:

« La Géométrie Descriptive, en effet qui n'est que la traduction grafique de la Géométrie generale et rationelle, servit da flambeau dans les recherches et dans l'appreciation des résultats de la Géométrie Analytique; et, par la nature de ses opérations, qui ont pour but d'établir une correspondence complète et sûre entre des figures effectivement tracées sur un plan et des corps fictifs dans l'èspace, elle familiarisa avec les formes de ce corps, les fît concevoir idéalement, avec exactitude et promptitude, et doubla de la sorte nos moyens d'investigations dans la science de l'étendue.»

«La Géométrie Descriptive en un mot, fut propre à fortifier et adevélopper notre puissance de conception; à donner plus de netteté et de sûreté à notre jugement, de precision et de clarté a notre langage; et, sous ce première rapport, elle fut infiniment utile aux sciences mathématiques en général.»

(22) Ecco un esempio offerto dallo Chasles allo scopo di rendere evidente la cosa:

« Prenons, par esemple, l'épure ou il s'agit de trouver le point d'intersetions des trois plans, ce point sera à l'intersetion des trois droites suivant lesquelles ces plans se coupent deux a deux; les projections de ces trois droites sur l'un de deux plans de projection passent donc par un même point; se fait, evident, devient l'expression des théorème suivant. »

« Si l'on a dans un plan deux triangles dont les cotés concurent deux á deux en trois point situés sur une même droite *L*, et que par un point, pris arbitrairement, on mène trois droites aux sommets du premièr triangle; qu'on les prolonge jusqu'à ce qu'elles rencontrent en trois point la droit *L*; qu'on joigne ces trois point, respectivement, aux trois sommets du seconde triangle, par trois droits, ces droites iront concourir en un même point. »

« Ce théoréme serait susceptible de plusieurs consequences: nous nous bornerons à faire remarquer qu'on en conclut comme corolaire, le théoreme de Desargues dont nuos avont parlé (deuxieme Epoque, § 28); il suffit de supposer que le point pris arbitrairement est le point de concours de deux des trois sommets du premièr triangle respectivement aux sommets correspondants du seconde. »

Il Prof. Bellavitis nelle sue belle *Lezioni di Geometria Descrittiva*, pag. 29, dalla soluzione del problema: *Trovare i punti che hanno date distanze da tre punti determinati* — deduce iu modo semplice ed elegante il teorema noto di planimetria: *le corde comuni a tre cerchi che si tagliano due due* (assi radicali, Housel, Introduction à la Géométrie Superieure, pag. 33. — Potenzlinien, secondo Jacob Steiner — Vorlesungen über synthetische Geomètrie — Erster Theil — Leipzig, 1875. § 2. seite 7) *s' incontrano in un medesimo punto*. Questo teorema fu in modo analogo stabilito dallo stesso Monge, come lo Chasles aserisse nel suo Aperçu, pag. 207: « Ainsi, la circostance que l' axe radical de deux cercles est leur corde commune quand ils se coupent, a conduit Monge à demontrer, en considérant trois cercles sur un plan comme les sections diametrales de trois sferes, que le axes radicaux de ces cercles, pris deux à deux, passent par un même point. »

Questi due notevoli benchè semplici esempii, i quali vanno legati ai nomi di due dei più illustri geometri di questi tempi mi sembrano bastevoli a far comprendere l'opportunità e l' importanza dell' osservazione precedente. Lo Chasles del resto presenta subito dopo altri esempii meno semplici, mediante i quali deduconsi notevoli proprietà per le coniche, accennando eziandio al modo con cui si può collegare lo studio di queste curve con altre di grado superiore, mediante lo stesso principio di trasformazione dovuto al Monge, il quale principio continuamente campeggia nella sua geometria descrittiva.

(23) In proposito della *Legge di Dualità* si consultino, oltre alle memorie citate nella nota precedente, eziandio le seguenti opere: Poncelet-Traitè des proprietés projectives des figures. — Pluecher, oltre alle Analytisch-geometrische Entuickelungen, anche la Geometrie des Raumes ed inoltre la Neue Geometrie des Raumes. In quest'ultima opera Pluecker fa un'importante applicazione alla Meccanica del principio di dualità. Egli osserva che la *forza e la rotazione* propriamente dette possono adempiere lo stesso uffizio, cioè essere fra loro connesse nella stessa guisa che il punto e il piano, onde rispetto a quelle si verifica la stessa reciprocità che si ammette fra il punto ed il piano. Ed invero come due punti o due piani determinano una retta, così due forze o due rotazioni determinano ciò che il Pluecker chiama *Dyname*, cioè la causa o potenza generante il movimento d'un sistema rigido. — « .... die Ursache einer beliebigen Bewegung eines starren Systems, oder, da sich die Natur dieser Ursache, wie die Natur einer Kraft überhaupt, unserem Erkennungsvermögen entzieht, die Bewegung selbst: statt der Ursache die Wirkung, bezeichnet.»

Lo Chasles nel suo Aperçu tratta pure molto chiaramente e diffusamente di questa legge: pag. 224, 225, §. 4. — pag. 266 §. 19. — Nota V.ª pag. 288. Note XXIX,ª XXX,ª pag. 375. — Nota XXXIV,ª pag. 408, 575, §. §. I,° II,° III.° e seguenti.

È degno di molta attenzione ciò che lo Chasles conclude in virtù delle precedenti osservazioni e dimostrazioni da lui esposte nei §. §. precedenti — pag. 261, §. 10: « Le idee che nascono dal principio di dualità da noi applicate nei precedenti paragrafi a due dottrine geometriche: *il metodo delle coordinate cartesiane e la teoria delle trasversali* — ed inoltre ad una questione di calcolo: *l' integrazione delle equazioni parziali differenziali*, possono essere egualmente estese ed applicate ad altre parti della matematica e principalmente alla dinamica. »

Nella nota XXXIV.ª trovansi sviluppate le idee più fondamentali relative a questo principio. Quivi dopo aver egli pure osservato come la geometria moderna si distingue dall'antica per aver saputo sostituire all'unico elemento punto; quale elemento primordiale, la retta nel caso del piano e il piano in quello dello spazio, rendendo così possibile lo scambio di questi elementi in entrambe i casi, nel che appunto è riposto il suddetto principio, così felicemente s'esprime.

« Dans la seconde Géométrie, ou regarde la *droite*, ou le *plan*, suivant qu'on opère sur un plan ou dans l'espace, comme l'*être primitif*, ou l'*unitè* qui doit servir à former toutes les autres parties de l'étendue. »

« Cette division de toutes les proprietés de l'ètendue en deux classes distinctes, reposant sur deux idées premièrs essentiellement differentes, est un fait que nous parait, comme à M. M. Gergonne et Poncelet, qui l'ont montré dans tout son jour, d'une haute importance dans la Géométrie. »

« Mais nous étendons cette importance à plusieurs autres parties des sciences mathématiques, où il nous semble que, prévenu par cette belle loi de l'étendue figurée, la *dualité*, et guidé par ce dualisme de l'être primitif qu'on peut prendre pour élément et point de départ dans la Géométrie, on serà conduit à chercher quelque chose de semblable. »

Quindi dopo aver sapientemente osservato « qu'un *dualisme universel* est la grande loi de la nature, et régne dans toutes les parties des conaissances de l'esprit humain » egli passa ad applicare questo fecondo e meraviglioso principio, che serve di base ad ogni generazione sì ideale che materiale, sia organica che inorganica: I. *Alla maniera di costruzione dovuta al meccanismo del tornio;* II. al *Sistema del mondo* e alle *leggi generali della meccanica.*

La prima applicazione dipende dal fatto che il tornitore può eseguire in due modi reciproci la sua opera: 1.° fissando l'oggetto e facendo muovere l'ordigno; 2.° reciprocamente fissando l'ordigno e facendo muovere l'oggetto. Enuncia quindi nel modo seguente le condizioni geometriche, in virtù delle quali vengono fra loro legate queste due diverse maniere di descrizione proprie del tornio:

« Quand une figure plane est en mouvement dans son plan, l'un de ses points dècrit une courbe. »

« Le mouvement de cette figure est déterminé par des relations constantes, qui doivent avoir lieu entre elle et des points ou des lignes fixes tracées dans son plan. »

« Ces points et ces lignes forment, par leur ensemble, une seconde figure, qui reste fixe pendant le mouvement de la première. »

« Que l'on considerè maintenant la première figure dans une de ses positions, et qu'on la suppose fixe; puis, qu'on fasse mouvoir la seconde figure, de maniere qu'elle se trouve toujours dans les mêmes conditions de position par rapport à la primière figure. »

« Un stylet fixe, placé au point dècrivant de la primière figure. tracera, sur le plan mobile de la seconde figure, une courbe mobile avec ce plan, et qui sera identiquement la même (sauf la position) que celle qu'aura tracée d'abord le point dècrivant de la primière figure, quand celle-ci était en mouvement. »

La seconda applicazione nasce dal considerare il doppio movimento di *traslazione e di rotazione* a cui vanno soggetti i corpi celesti. E poichè la scienza va sempre più rendendo manifesta l'analogia che regna in tutte le parti della natura, onde la legge stessa ora accennata del doppio movimento dei corpi celesti si verifica in ogni movimento elementare d'un corpo solido, cioè in ogni movimento infinitesimo di questo corpo, ne segue la possibilità di applicare anche alla meccanica in generale il doppio movimento nel senso della dualità, come si può vedere in Pluecker.

L'opinione espressa dal D'Alembert che in natura il movimento d'un corpo debbasi effettuare in un sol senso, secondo Chasles ebbe origine dall'abitudine inveterata di considerare soltanto il punto quale elemento primordiale dello spazio mentre considerando come tale pure il piano, subito ne viene la possibilità anzi l'opportunità d'introdurre la rotazione quale altro elemento di moto come forza applicata all'elemento piano, avendosi così un'altra forma di movimento che si può considerare come correlativa a quella che d'ordinario s'immagina applicata all'elemento punto.

Alla generalità e indipendenza dl questi concetti fondamentali della meccanica (Vedi: Ermann Klein e De Tylli) giova pure la sostituzione definitiva delle forze ai movimenti fatta dal Varignon: substitution si heureuse, continua lo Chasles, qui sous d'autres rapports, nous parait avoir contribué puissament aussi à fonder les doctrines de la Mecanique actuelle, qui reposent sur l'idée premiér de plan, consideré comme l'élément de l'étendue. »

Ognuno può agevolmente comprendere quanto la Meccanica in particolare (Veggasi a tale scopo le opere di Chellini, Battaglini, Turazza ed altri) e la scienza della natura in generale, verrebbero a guadagnare dalla franca applicazione di questo principio.

La teoria dinamica delle *coppie,* pubblicata dal Poinsot, trovò pure l'approvazione di Augusto Comte, il quale nel suo corso di Filosofia positiva conclude che in virtù dei concetti introdotti dal Poinsot medesimo, la coppia può essere considerata come l'elemento naturale generante il moto di rotazione, nello stesso modo che la forza lo è per quello di traslazione.

Le idee dello Chasles in proposito furono meglio ancora realizzate in un opuscolo del Poinsot, da questi pubblicato col titolo: *Théorie nouvelle de la rotation des corps.*

In quanto riguarda generalmente la lagge di dualità, si consultino pure le opere seguenti: Staudt, Geometrie der Lage, § 6, Seite 30. — Fiedler, Die Darstellende Geometrie Seite 66-69. — Analitische Geometrie des Raumes - von George Salmon. — Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler (Leipzig, 1874) VII Kapitel, 122-128. — Di quest'ultima opera trovo opportuno trascrivere i seguenti notevoli passi:

« Es ist in der That unschwer zu erkennen, dass die Theorie der reciproken Polaren (Kegelschn. Art. 381 f.) ohne wesentliche Veränderung auf die Probleme der Geometrie sich überträgt. »

« Wir denken die Polaren in Bezug auf irgend eine Fläche zweiter Ordnung (Σ) gebildet. *Jedem punkte entspricht eine Ebene und umgekert, und jeder geraden Linie als der Verbindung zweier Punkte entspricht eine gerade Linie als Durchschnitt zweier Ebenen. Einer Fläche S als einem*

Orte von Punkten entspricht daher in Allgemeinen eine Fläche S *als Enveloppe von Ebenen.* » Si lega pure l'articolo 156.

« Hesse: Geometrie des Raumes, fünfte Vorlesung. — Geometrie der geraden Linie -- viert und zwölfte Vorlesung.

Cremona: Introduzione ad una teoria Geometrica delle curve piane, § 5. — Elementi di Geometria Projettiva, Prefazione e § 6.