VIVANTI

Il concetto

d'infinitesimo

102

102

INTRODUZIONE.

Sum

kat

GIULIO VIVANTI

Il concetto d'infinitesimo

E LA SUA APPLICAZIONE

ALLA MATEMATICA

SAGGIO STORICO

Dickstein
25/I 1894
Warszawa

MANTOVA

STAB. TIPO-LIT. G. MONDOVI

1894.

INDICE

Errata-Corrige

Pag.	17 l. 20	in vece di	*determinato*	leggi	*indeterminato*
»	19 » 17	»	1796	»	1786
»	37 » 12	»	*L. XII*	»	*L. X*
»	59 » 6	»	*rapporti*	»	*rapporti differenziali*
»	82 » 11	»	1514	»	1574
»	96 » 1	»	*Wallis*	»	*lo stesso Wallis.*

L' *infinitesimo,* il *momento,* l' *indivisibile* hanno la loro comune origine nella tendenza, che è connaturale all' uomo, a studiare i fenomeni complessi della natura, e nella necessità, da esso sentita, di decomporli a tal uopo in fenomeni parziali più semplici, più accessibili ai mezzi di ricerca di cui egli può disporre. Tale scomposizione può, come è evidente, spingersi tanto più oltre, quanto maggiore è la perfezione de' nostri stromenti, e l'esperienza, come il raziocinio, ci persuadono, non esservi alcun termine a tale progresso, non potersi pensare alcun grado di scomposizione senza che la mente, se non la mano e i sensi, ne raggiunga uno più avanzato. Però, se con un volo ardito imaginiamo compiuta tutta la serie infinita delle successive decomposizioni, ci si affaccia un problema, di cui i nostri sensi non possono nè potranno mai fornirci la soluzione: Come ci si presenterebbero le cose, qualora avessimo potuto giungere a quel termine ideale?

Abbiasi p. es. un arco di curva; per determinarne la lunghezza e le più importanti proprietà ci converrà scomporlo in archi parziali, i quali tanto meno differiranno dalle relative corde quanto più queste saranno piccole. Orbene, quando *idealmente* saremo arrivati all'estremo limite della piccolezza, di quale natura saranno le infinite parti in cui si troverà divisa la linea?

Due soluzioni ci si presentano alla mente. O queste parti sono punti geometrici, oppure tratticelli rettilinei. Ma l'una e l'altra presentano difficoltà gravissime. Il tratticello rettilineo, per quanto piccolo, non può concepirsi come indivisibile, non può quindi rappresentare l'estremo stadio della decomposizione. Pel punto geometrico l'obiezione non sussiste più, ma d'altra parte, se mediante questo elemento assolutamente inesteso vogliamo ricomporre il continuo, ci troviamo dinanzi ad un'impresa alla quale la mente nostra si rifiuta; giacchè non sappiamo concepire come un insieme, per quanto infinito, di punti geometrici possa dar luogo al fenomeno dell'estensione. Però le due difficoltà non hanno la stessa portata. La prima è logica, obiettiva; giacchè un segmento non divisibile è un concetto contraddittorio. La seconda è puramente soggettiva, e dipende dal fatto che noi non possiamo nè percepire nè concepire un insieme d'infiniti elementi ne' suoi individui, ma soltanto nella sua legge di generazione (1). Se noi pertanto imaginiamo il punto inesteso dotato d'una proprietà che lo renda atto a produrre l'estensione, avremo trovata la via d'uscire dal dilemma che ci stava dinanzi, e avremo creato l'unico concetto filosoficamente accettabile di elemento generatore del continuo.

Per meglio chiarire le idee, consideriamo il fenomeno del moto rettilineo d'un punto. Imaginando la durata del moto scomposta ne' suoi elementi, cioè in *istanti* rigorosamente privi di durata, sarà data la posizione del punto mobile in ogni istante. Però in uno stesso istante ed in una stessa posizione noi possiamo concepire punti dotati di moti diversi. Nasce quindi la domanda, in che differiscano tra loro questi vari punti mobili, ossia se esista e quale sia la proprietà caratteristica del moto che distingue un particolare movimento da un altro. A tale domanda la risposta non è dubbia; la proprietà caratteristica è la *velocità*, e i punti mobili si distinguono l'uno dall'altro per ciò che essi procedono con velocità differenti. — Così è della *direzione* (della tangente) per più linee concorrenti in un punto, della *curvatura* per più linee tangenti fra loro. — Tali proprietà esprimono in generale la *legge di generazione del fenomeno,* il modo in cui esso tende a continuare, ossia il fatto che l'elemento che si considera è atto a generare quel determinato moto, quella determinata linea. In questo senso l' infinitesimo, *considerato quale elemento generatore delle grandezze finite*, viene concepito come un ente la cui grandezza è *nulla*, ma che possiede *in un dato modo e grado* l'attitudine, la tendenza a generare grandezze. È ciò che esprimono i filosofi dicendo che l' infinitesimo è una *grandezza intensiva.*

Però questa modificazione del concetto di elemento non può, per la sua stessa natura, figurare in alcun modo nella aritmetica, la quale opera unicamente su grandezze estensive. Egli è perciò che l' elemento del continuo, quale esso si presenta nelle applicazioni analitiche, non può assumere se non l' una o l'altra delle due forme di ente inesteso e di ente dotato di estensione infinitamente piccola. Pertanto collo sviluppo della nuova analisi è avvenuto, per un fenomeno non nuovo nella storia del pensiero umano, che gli scienziati, avvezzi a trovarsi ad ogni istante faccia a faccia con queste due forme di enti, finirono, direi quasi, per famigliarizzarsi con esse dimenticando le difficoltà ad esse inerenti; e ben presto ciò che era soltanto una *finzione di calcolo* divenne, agli occhi d' alcuni di loro, l' *espressione della realtà.* Ecco perchè, fatta eccezione forse solo per Galileo, soltanto dopo Leibniz e Newton noi troviamo matematici i quali professano essere l' elemento del continuo matematico (l' infinitesimo o il differenziale) il *punto assolutamente inesteso,* o la *particella dotata di estensione infinitamente piccola*, senza por mente alle obiezioni assai gravi cui dà luogo sì l' una che l' altra ipotesi.

Occorre però rammentare, che non fu l' interesse speculativo che diede occasione allo sviluppo del concetto d' infinitesimo, bensì, e principalmente, come ho già accennato, l'applicazione di esso allo studio delle leggi naturali. Ed invero non v' ha fenomeno matematico o meccanico, all' infuori dei più semplici — linea retta e moto equabile, — dove non entri, latente o no, l'infinitamente piccolo; nè v' ha artifizio che abbia potuto *in realtà* sottrarci al potere di questo tiranno invisibile.

Gli antichi, spinti dal desiderio di mantenere il perfetto rigore geometrico, imaginarono il *metodo d'esaustione*, ma questo mal si prestava allo studio dei numerosi problemi che si affacciarono agli scienziati in epoche più recenti; e però un illustre italiano creava il *metodo degl' indivisibili*. Questo per altro non ebbe lunga vita, e venne ben tosto sostituito da altri più perfetti e più comodi all'uso; i quali possono raggrupparsi sotto due tipi principali di cui non sono che modificazioni: il *metodo degl' infinitesimi* e quello *dei limiti*.

Le cose sin qui dette suggeriscono naturalmente il piano del presente lavoro. Esso consta di due parti, di cui la prima tratta dell' infinitesimo considerato in sè stesso, la seconda della sua applicazione alla matematica (2).

La prima parte è suddivisa in 4 capitoli. Il primo concerne l' infinitesimo considerato come rigorosamente nullo; il secondo l' infinitesimo attuale, cioè considerato come una grandezza costante; il terzo è dedicato ad una questione che non differisce se non nella forma da quella trattata nei due primi capitoli, quella dell' angolo di contatto; il quarto infine si riferisce all' infinitesimo come grandezza intensiva.

La seconda parte è suddivisa pure in quattro capitoli, che trattano successivamente dei metodi d' esaustione, degli indivisibili, degl' infinitesimi e dei limiti.

Il nesso strettissimo che passa tra la questione della natura dell' infinitesimo e vari problemi filosofici, tra cui principalmente quello della composizione del continuo matematico, mi avrebbe imposto di far entrare nel quadro di questo lavoro una parte non indifferente della storia della filosofia antica e moderna. Senonchè la mia limitata coltura filosofica, e il conseguente proposito di dirigere la parola ad un pubblico quasi esclusivamente matematico, mi inducono a restringere il mio studio — salvo qualche inevitabile eccezione — a quelle opinioni che furono emesse da matematici, o almeno in vista dell'applicazione dell'infinitesimo all' analisi (3).

Ma, anche così limitata, la letteratura dell' infinitesimo è vastissima, e sarebbe impresa assai più ardua che utile raccogliere tutto quanto intorno ad esso fu detto. Però io ho creduto di potere lasciare completamente da parte i numerosissimi lavori scritti su tale argomento da autori che almeno come matematici ebbero poca o nessuna fama (4), dopo essermi convinto dall'esame d'alcuni di essi che le idee contenutevi o non sono esatte o non sono nuove.

Infine ho preso Cauchy come termine del mio studio, perchè dopo di esso la questione della natura dell'infinitesimo ha cessato di avere più alcun interesse matematico.

Nutro fiducia che questo lavoro non sarà giudicato opera superfluo. La storia delle origini del Calcolo infinitesimale fu fatta da molti; furono esaminati, discussi, confrontati i metodi i quali condussero alla scoperta del Calcolo, i problemi che diedero occasione ad aprire nuove vie nei campi inesplorati dell'analisi. Il compito che mi sono proposto è affatto diverso. Io ho voluto tentare la storia d' una idea, ho voluto seguire il filo del concetto d' infinitesimo attraverso le menti e gli studi de' vari autori, e sui metodi di calcolo mi sono arrestato solo quanto era necessario per metterne in luce l' idea fondamentale, per indurne il modo di vedere dei loro inventori rispetto all' infinitesimo. La ricerca, per quanto io so, è nuova; dimostrarne l' utilità sarebbe superflua in una epoca come questa in cui la storia delle scienze è tenuta nel dovuto onore. Se essa sia stata condotta imparzialmente e secondo le buone norme del metodo scientifico, al lettore il giudizio.

Parte Prima

IL CONCETTO D'INFINITESIMO.

Capitolo I.

L'INFINITESIMO NULLO

La creazione del calcolo leibniziano, nel dare al concetto di *elemento costituente del continuo,* sotto forma d'*infinitesimo,* diritto di cittadinanza nel dominio dell' alta matematica, lo rinchiuse per sempre nel campo delle grandezze estensive; e d'allora s' intese per infinitesimo una quantità che, moltiplicata per un numero qualunque, è sempre minore di qualsiasi quantità finita, o — ciò che è lo stesso — una quantità minore di qualunque grandezza assegnabile. Ma per quanto questo nuovo ente matematico si andasse rivelando quale uno stromento potente e sicuro d'analisi, era però necessario esaminare se la sua definizione non implicasse per avventura un assurdo, se cioè potessero concepirsi, senza cadere in contraddizione colle idee precedentemente accettate, grandezze diverse di zero e minori di qualsiasi grandezza assegnata ad arbitrio.

La prima questione che spontaneamente ci si presenta a tale proposito è, quale opinione avesse l' inventore stesso del calcolo infinitesimale. Io ho già risposto altrove (5) a tale domanda, dicendo che il concetto d'infinitesimo « non era « forse ben chiaro neppure nella mente del suo creatore »; ma poichè la risposta potrà sembrare alquanto strana, credo opportuno raccogliere in una nota le prove su cui essa si fonda (6). Nè sarà inutile osservare che parecchi dei passi tra loro contraddittori sono contemporanei, e taluni appartengono agli ultimi anni della vita di Leibniz (1646-1716), sicchè tutto fa credere che egli non si sia mai arrestato definitivamente sopra l' una o l'altra opinione. Per tal guisa si spiega come vari scrittori abbiano potuto attribuire a Leibniz concetti affatto opposti, e tutti abbiano saputo trovare un appoggio alle loro asserzioni nelle opere di lui. Così, per citarne alcuni, Wolf (1679-1764), Gerdil (1718-1802), Achard, e tra i moderni Mansion, negano avere Leibniz ammessa l'esistenza delle quantità infinitesime diverse da zero (7); Grandi (1671-1742) è dell'opinione opposta (8); Cohen e Lasswitz gli attribuiscono il concetto d' infinitesimo intensivo (9).

L' incertezza dimostrata da Leibniz intorno ai principi del Calcolo fu probabilmente la ragione principale che distolse i suoi scolari dall' avvilupparsi in discussioni teoriche sulla natura dell' infinitesimo e consigliò loro di imporre silenzio agli avversari della nuova analisi collo splendore delle vittorie riportate per mezzo di essa nei campi più elevati della geometria e della meccanica. Però essi ebbero quasi tutti occasione di manifestare più o meno chiaramente il loro pensiero riguardo al concetto d' infinitesimo. E in particolare tra quelli che negano l'esistenza di grandezze infinitamente piccole non nulle (10) troviamo insieme a Wolf (11), non senza qualche meraviglia, quello stesso Grandi che nell'attribuire a Leibniz l'opinione della divisibilità infinita della materia accettava e faceva proprie le idee del maestro (12). Nè più conseguente a sè stesso si mostra Jacopo Bernoulli (1654-1705), il quale, dopo aver detto che infinitesimo e zero sono una stessa cosa (13), dopo aver dichiarato di credere l'infinitamente piccolo una pura finzione (14), ci sorprende coll'osservazione, che le differenze di quantità eguali non sono sempre eguali perchè possono non esserlo quando esse sono infinitesime (15).

Era riservato all'empirismo degli Enciclopedisti di dichiarare apertamente la guerra ai concetti d' infinitesimo e d' infinito. Ed infatti D'Alembert (1717-1783), e nella Enciclopedia e in altri scritti, insiste sulla idea che quelle espressioni sono pure modi di dire, e che la matematica ragiona sempre e soltanto su quantità finite (16). Quali conseguenze abbia avuto la discussione, non è qui il luogo di dirlo, giacchè ciò riguarda, più che il concetto stesso d' infinitesimo, la sua applicazione all'analisi, e però dovrò parlarne a lungo nella seconda Parte.

Accennerò ora ad un matematico dei più celebri, Eulero (1707-1783), il quale, tra quelli che negano l' infinitesimo poter essere diverso da zero, merita un posto a parte, pel fatto che egli, ripugnante a considerare l'infinitesimo come un vero nulla, ne fece, con ibrido concetto, un nulla suscettibile di avere rapporti determinati con altri enti della medesima natura (17). La condanna di tale idea sta nella stessa sua opera, dove lo vediamo, impotente a servirsi dello stromento da lui creato, ricorrere a principî del tutto diversi per mettere le basi del Calcolo (18).

Eulero ragiona così. Una quantità minore di qualunque assegnabile non può essere che nulla (19); e d'altronde le equazioni che si presentano nel Calcolo non divengono rigorosamente esatte se non quando si eguaglino a zero gli infinitesimi (20). Ma, se la differenza di due zeri è sempre zero, il loro rapporto può essere un numero qualunque, esso è completamente determinato. Di qui, per una strana inversione del senso logico, Eulero deduce, non già che è assurdo parlare del rapporto di due zeri, ma al contrario che questo rapporto può essere considerato come un vero valore (21).

Le idee d' Eulero trovarono dapprima qualche seguace (22), ma ben presto esse vennero abbandonate, e non ne rimase più che la memoria.

Capitolo II.

L' INFINITESIMO ATTUALE

Ho già spiegato lungamente altrove (23) che cosa intendasi per *infinitesimo attuale* e quale sia la genesi di tale concetto, e qui non ho che a rammentare, come con questo nome soglia designarsi una grandezza *determinata* più piccola di qualunque grandezza finita assegnabile.

A proposito di questo concetto Stolz scrive (24): « Es « lässt sich in der That schwer begreifen, wie hervorragende « Mathematiker z. B. Johann Bernoulli und sein Schüler der « Marquis de l' Hospital, ja selbst noch Poisson die Behaup- « tung aufstellen konnten, es gebe Grössen, welche von Null « verschieden und gleichwohl kleiner seien als jede angebbare « Grösse ».

Quanto a Giovanni Bernoulli (1667-1748), è nota la sua lunga corrispondenza con Leibniz riguardo all' esistenza delle quantità infinite ed infinitesime (25). — Che cosa pensasse L' Hospital (1661-1704) dell' infinitesimo, non può giudicarsi dalla sua *Analyse des infiniment petits,* perchè questa è dedicata soltanto allo svolgimento del metodo infinitesimale, onde l' uso continuo che vi si fa di quantità infinitesime non prova punto che l' autore ne ammettesse l' esistenza. Un accenno in appoggio all'asserzione del Sig. Stolz si trova in una lettera scritta da Leibniz a Dangicourt negli ultimi mesi della sua vita (settembre 1716), in cui, dopo le parole riportate in una precedente nota (26), si leggono le seguenti (27): « Mais comme « M. le Marquis de l' Hospital croyoit que par là je trahissois « la cause, ils me prièrent de n' en rien dire, outre ce que « j' en avois dit dans les Actes de Leipsic, et il me fut aisé « de déférer à leur prière ».

Assieme a L' Hospital può porsi il suo commentatore Varignon (1654-1722), il quale così scriveva a Leibniz (28): « M. l' abbé Galloys.... repand ici que vous avez declaré n' en- « tendre par differentielle ou infiniment petit qu' une gran- « deur à la verité très petite, mais cependant toujours finie « et determinée, telle qu' est la Terre par raport au firma- « ment, ou un grain de sable par raport à la Terre: au lieu « que j' ay appelé *infiniment petit* ou *differentielle* d' une « grandeur, ce en quoy cette grandeur est inépuisable ».

Fontenelle (1657-1757), che ebbe l' audace idea di scrivere una geometria dell' infinito, ma di cui la forza non fu pari all' ardire, fu condotto naturalmente alla questione dell'infinitesimo, a base della quale pose il dilemma fondamentale, se gli elementi del continuo sieno estesi od inestesi, se la linea consti di punti o di elementi lineari. Questo dilemma, ad uscire dal quale ci soccorre, come dicemmo, il concetto di grandezza intensiva, presenta in ambe le sue soluzioni delle difficoltà assai gravi: e però esso molto comodamente si presta a chi, per provare la verità dell'una delle due ipotesi, si accontenta di stabilire l'impossibilità dell'altra. È ciò che fa Fontenelle, il quale per tal guisa viene alla conclusione che gli elementi della linea sono linee infinitamente piccole (29).

Accennerò di volo come Lesage (1724-1803), a cui spetta la gloria d'aver per primo imaginato un telegrafo elettrico, sembri avere concepito gli infinitesimi quali grandezze costanti. Ciò risulterebbe da un brano d'una sua lettera del 14 luglio 1786 a Lhuilier (1750-1840) riportato da questo a p. 211 della sua *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* (Berlin 1796) (30).

Infine, fra i geometri posteriori ai grandi dibattiti sui principî del Calcolo che ebbero luogo alla fine dello scorso secolo, Poisson (1781-1840) è forse il solo, nei limiti di tempo che ci siamo prefissi, il quale ammetta francamente l'infinitesimo attuale. Egli scrive (31): « Un infiniment petit « est une grandeur moindre que toute grandeur donnée de la « même nature. On est conduit naturellement à l'idée des « infiniment petits, lorsqu'on considère les variations succes- « sives d'une grandeur soumise à la loi de continuité. Ainsi, le « temps croît par des degrés moindres qu'aucun intervalle qu'on « puisse assigner, quelque petit qu'il soit. Les espaces par- « courus par les différents points d'un corps croissent aussi « par des infiniment petits, car chaque point ne peut aller « d'une position à une autre, sans traverser toutes les po- « sitions intermédiaires, et l'on ne saurait assigner aucune « distance, aussi petite qu'on voudra, entre deux positions « successives. Les infiniment petits ont donc une existence « réelle, et ne sont pas seulement un moyen d'investigation « imaginé par les géomètres ».

Capitolo III.

L'ANGOLO DI CONTATTO

Una questione, che in sostanza si riduce a quella dell'esistenza dell'infinitesimo attuale, e che ebbe grande celebrità nei secoli XVI e XVII, è quella dell'*angolo di contatto*. Si designa con tal nome l'angolo mistilineo formato dalla circonferenza e da una sua tangente.

L'occasione alla disputa viene offerta dalla prop. 16ª del L. III di Euclide, la quale asserisce che fra la circonferenza e la tangente ad essa non può condursi alcuna retta, e che l'angolo formato dalla circonferenza e dalla tangente è minore di qualunque angolo acuto rettilineo (32). Da ciò nasce spontanea la domanda: Quell'angolo è, o no, rigorosamente nullo?

La prima menzione dell'angolo di contatto *(angulus contingencie)*, trovasi, a quanto asserisce M. Cantor (33), nell'opera *De triangulis* di Giordano Nemorario (m. 1237).

Campano (fine del sec. XIII) fu condotto dalla considerazione di quest'angolo alla curiosa asserzione, che una grandezza continuamente variabile può passare da un valore più piccolo ad uno più grande di uno dato senza prendere mai questo valore (34). Il suo ragionamento è questo (35). Sieno (Fig. 1) BGA, BED due cerchi tangenti internamente, di cui il secondo abbia raggio doppio del primo. Se un raggio mobile AE percorre il quadrante BD del cerchio maggiore, e se l'asserto si suppone falso, non vi sarà alcun angolo contenuto entro un angolo retto, a cui non possa assegnarsi un angolo eguale BAE. In particolare potremo fare BAE eguale all'*angolo del semicircolo* (angolo formato dalla circonferenza e da un diametro), che è (36) « omnium « angulorum acutorum amplissimus ». D'altra parte, se bisechiamo l'arco ED in F, verremo a formare un angolo acuto

BAF più grande di BAE, e quindi più grande dell'angolo del semicircolo, ciò che è impossibile.

Altrove Campano nota la contraddizione tra la prop. 16ª del L. III di Euclide e la 1ª del L. X (37); ma osserva che quest' ultima proposizione non è applicabile all' angolo di contatto ed all' angolo rettilineo, perchè essi non sono quantità dello stesso genere (38).

Dopo circa tre secoli la questione viene ripresa da Cardano (1501-1576), il quale si propone (39) di dimostrare il *paralogismo,* che si può giungere dal minore al maggiore senza passare per l'eguale. Infatti, egli dice, l'angolo mistilineo alla base d'un segmento di cerchio è minore di un retto finchè il segmento non supera il semicerchio, maggiore di un retto quando il segmento supera il semicerchio, ma non è mai uguale ad un retto. Continua poi: « Immo sequitur « majus miraculum », e cioè, che possono darsi due quantità pochissimo differenti tra loro, e tali, che moltiplicando la prima per un numero grande ad arbitrio non si raggiunge mai la seconda. Tali l'angolo di contatto ed un angolo rettilineo arbitrariamente piccolo. Del primo paralogismo Cardano dà una risoluzione su cui non vale la pena di arrestarsi; del secondo dice: « Sed secundus non eadem ratione « dissolvitur, verum multi sunt modi demonstrationum, et « longe plures assumptionum ».

Più tardi Cardano ritorna sull'argomento nel suo *Opus novum de proportionibus*. Qui egli sembra specialmente proporsi di trovare la ragione per cui l'angolo di contatto non può dividersi mediante una retta; ma non riesce a venirne bene in chiaro. Infatti, dopo aver tentato di mostrare che l'angolo rettilineo e il curvilineo non sono dello stesso genere stabilendo che non può costruirsi un angolo rettilineo eguale all'angolo formato da una retta e da una circonferenza (40), egli insegna a costruire l'angolo rettilineo eguale all'angolo di due circonferenze eguali (41), nota la contraddizione già accennata da Campano, e osserva che il fatto dell'indivisibilità dell' angolo di contatto non può addursi a prova dell'essere esso più piccolo di ogni angolo rettilineo, mentre al contrario può dimostrarsi che vi sono angoli rettilinei più piccoli dell'angolo di contatto (42). Dà poi una ragione, a dir vero assai vaga, del non potersi l'angolo di contatto dividere mediante una retta; ma si affretta a farsi due obiezioni, a cui risponde con ragionamenti punto più concludenti del primitivo (43).

Quasi contemporaneamente, de Foix Candalla o Flussate (1502-1594) nella sua edizione d'Euclide osservava (44) essere l'angolo di contatto di specie diversa dall'angolo rettilineo, e non essere quindi da stupirsi se il primo è sempre più piccolo del secondo.

Però chi per primo osò esprimere un'opinione netta ed esplicita intorno all'angolo di contatto fu Peletier (1517-1582). Egli dichiarò apertamente essere quell'angolo rigorosamente nullo (45); è questo, a suo credere, l'unico modo di mettere d'accordo l'esistenza dell'angolo di contatto colla prop. 1ª del L. X d'Euclide. La conciliazione tentata da Campano non ha alcun valore (46). Nè si può concepire la massima o la minima fra tutte le quantità; giacchè la quantità continua è divisibile all'infinito (47). Stabilito che l'angolo di contatto è nullo, cadono per sè stessi i due paralogismi di Cardano (48).

Contro Peletier sorse Clavio (1537-1612) (49), il quale dichiarò le di lui conclusioni contrarie ad Euclide stesso. Infatti, egli dice, se Euclide avesse ritenuto nullo l'angolo di contatto, non avrebbe trovato necessario di dimostrare che esso è minore di qualsiasi angolo rettilineo (50). L'angolo di contatto è una vera quantità; esso non è la minima di tutte le quantità, ciò che sarebbe inconcepibile, ma soltanto è minore d'ogni angolo rettilineo; può dividersi e moltiplicarsi (51). E neppure è vero che tutti gli angoli di contatto sieno eguali (52). L'angolo di contatto e l'angolo rettilineo, quantunque ambidue angoli piani, non sono dello stesso genere, in questo senso che il primo di essi, ripetuto un numero di volte grande a piacere, non arriva giammai a superare il secondo (53); ed è perciò che ad essi non può applicarsi la prop. 1ª del L. X d'Euclide (54).

Dopo l'ardita conclusione di Peletier, era impossibile accontentarsi delle soluzioni anodine di Campano e di Cardano; bisognava prender partito pro o contro la nullità dell'angolo di contatto (55). Pertanto la questione eccitò la curiosità di tutti i matematici di qualche grido dell' epoca. Si schierarono con Peletier Commandino (1509–1575), Vieta (1540–1603), Galileo (1564–1642), Viviani (1622–1703), Wallis (1616–1703), Jacopo Bernoulli, e un secolo dopo Karsten (1732–1787); con Clavio, Guido Ubaldo Del Monte (1545–1607), Hobbes (1588–1679), Leibniz, Newton (1642–1727), e più tardi Fontenelle.

Commandino, in seguito alla prop. 16ª del L. III d'Euclide, avverte il lettore di non credere che il cosidetto angolo di contatto sia un vero angolo, giacchè tale opinione conduce ad assurdi evidenti (56). Dimostra poi nel modo seguente che l' angolo di contatto è nullo. Se si imagina di spezzare o di inflettere una retta in modo che il primo e l' ultimo tratto riescano tra loro perpendicolari, la somma degli angoli esterni è un retto. Ora, o la circonferenza si considera come un poligono regolare di infiniti lati, ed allora ciascun angolo esterno (angolo di contatto) è una parte infinitesima d' un retto, e però è nullo (57); o la si riguarda come rigorosamente curva, e allora, essendo nullo l'angolo d' un poligono inscritto d' infiniti lati, lo è tanto più l'angolo di contatto che è minore di quello (58). — Non deve poi far meraviglia che l' angolo del semicerchio, benchè retto, non possa farsi coincidere con un angolo retto rettilineo; giacchè una circonferenza non può giammai coincidere con una retta (59).

Vieta arreca molte ragioni, di valore a dir vero ineguale, per stabilire che il cosidetto angolo κερατοειδής o *cornicolare* (angolo di contatto) non è un angolo. Eccone alcune:

La circonferenza essendo un poligono infinitilatero, la tangente coincide con uno de' lati di questo (60).

Gli angoli sono retti od obliqui, ma l'angolo del semicerchio non è obliquo, quindi esso è retto (61).

Gli angoli sono misurati dalla circonferenza. Ma nessun arco misura l'angolo di contatto, dunque esso non è un angolo (62).

Gli angoli di contatto sono tutti eguali, quindi non sono grandezze (63).

Galileo (64), dopo aver riprodotte le ragioni di Vieta, conclude: « Adunque il chiamato angolo del contatto è con « errore detto così, nè è veramente angolo, nè ha grandezza « alcuna ». Osserva inoltre che, essendo (Fig. 2) la retta DE tangente al cerchio ACB in C, e condotta per C una retta mobile ON, « se intenderemo essa retta ON girarsi sopra « il punto C da O verso D, inacutendo i detti angoli e final- « mente trapassando nello stato di GCF, sicchè l'angolo « inferiore NCB si faccia superiore, come FCB, non com- « prendo come ciò possa accadere senza passare per l'an- « nichilazione di essi angoli, la quale annichilazione non può « essere, se non quando essa retta convertibile non segasse « più la curva ACB, il che avviene quando essa si unisce « colla tangente DE. Nell' arco adunque, e nella tangente « non sono angoli, ma l'annichilazione degli angoli ».

Viviani, nel confermare le idee espresse nel citato *Parere* da lui per la prima volta pubblicato (65), osserva inoltre (66), che la definizione di angolo data da Euclide si riferisce assai probabilmente ai soli angoli rettilinei, e che i pochi accenni ad angoli mistilinei che si trovano negli Elementi sono forse interpolazioni posteriori.

Più estesamente tratta l' argomento Wallis in due opuscoli intitolati: *De angulo contactus et semicirculi tractatus* (1656) ed: *Ejus defensio* contro Clavio e Leotaud (1685) (67). Riprendendo le ragioni dei suoi predecessori, egli osserva non essere giusto il dire che l'angolo rettilineo e il curvilineo non sono grandezze omogenee, mentre, se BAD, CAE (Fig. 3) sono due semicerchi eguali, l'angolo rettilineo BAC è eguale al curvilineo DAE (68).

Di Jacopo Bernoulli abbiamo queste sole parole (69): « Angulus contactus, vel nullus est, vel est compages infini- « torum angulorum rectilineorum ».

Karsten dedica l' ultima delle sue *Abhandlungen* già citate all'angolo di contatto, riproducendo alcune delle argomentazioni che già trovammo presso Vieta e Wallis.

Tra quelli che professano opinione contraria a Peletier primo in ordine di tempo è G. U. del Monte, il quale però esprime il suo pensiero in via d'incidenza trattando una questione di meccanica. — Tartaglia (1500-1557) poneva come postulato, essere un corpo tanto più grave, quanto meno obliqua è la sua discesa rispetto alla verticale (70). Da ciò segue che, se una sbarra sospesa pel suo centro di figura e portante agli estremi due pesi eguali viene spostata dalla posizione orizzontale, il peso più alto graviterà più del più basso, perchè l'obliquità della trajettoria del secondo supera quella della trajettoria del primo di due volte l'angolo di contatto (71), e però la sbarra tenderà a riprendere la posizione orizzontale (72). Invece Del Monte (73) stabilisce che la sbarra è in equilibrio in qualunque posizione. A tal uopo egli osserva che, se ciò non fosse, potrebbe aggiungersi ad uno dei pesi un peso tale da rendere il sistema equilibrato, ma che allora il centro di gravità non coinciderebbe più col centro di sospensione, il che è assurdo. A ciò, egli dice, può obiettarsi, non potersi assegnare un peso tanto piccolo da produrre l'equilibrio, avendo la differenza di gravità proveniente dalla diversa posizione dei due pesi rispetto ad uno di questi lo stesso rapporto che ha l'angolo di contatto ad un angolo rettilineo, cioè un rapporto minore di qualunque assegnabile (« omnium proportionum minima »), ma crede di togliere la difficoltà mostrando come l'angolo di contatto non sia il minimo di tutti gli angoli (74), come anzi esso possa dividersi in infiniti angoli curvilinei più piccoli.

Hobbes, di cui avremo a riparlare più innanzi, ha sottoposto le opere matematiche di Wallis ad una critica severa ed aspra, in un opuscolo intitolato: *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae, qualis explicatur in libris Joh. Wallisii geom. prof. Saviliani in Academia Oxoniensi, distributa in sex dialogos* (Londra 1660). La prima parte del 5° dialogo tratta dell'angolo di contatto, ma gli argomenti ivi addotti contro la tesi di Peletier sono poco diversi da quelli a cui ricorre Clavio. Hobbes osserva, che le ragioni esposte da Wallis provano bensì l'angolo di contatto non essere una parte aliquota dell' angolo rettilineo, ma non escludono che i vari angoli di contatto sieno tra loro paragonabili (75). Chiama quantità *omogenee* quelle le cui misure si possono far coincidere tra loro; e conclude che l'angolo di contatto e l' angolo rettilineo non sono tali, perchè il secondo, e non il primo, è misurabile mediante archi di cerchio (76). Al contrario i vari angoli di contatto sono sempre omogenei tra loro; infatti, prese (Fig. 4) più circonferenze tangenti ad una retta CG in un punto C di essa, come misura dei diversi angoli di contatto formati in questo punto possono assumersi i segmenti CE, CD, . . . determinati dalle circonferenze stesse sopra una retta qualunque passante per C, segmenti i quali sono proporzionali ai raggi delle circonferenze (77).

Ai due fondatori della nuova analisi non poteva passare inosservata la questione dell' angolo di contatto; anzi essi dovevano vedere in questa un' applicazione interessante ed istruttiva dei loro concetti. Ed infatti Newton, considerando, oltre i cerchi, tutte le altre curve tangenti all'asse delle x nell' origine, la cui equazione in vicinanza di questa può porsi sotto la forma $y = ax^m$, essendo $a > o$, $m > 1$, fa vedere che tutte le curve per cui m ha uno stesso valore danno luogo ad angoli di contatto paragonabili fra loro, mentre così non è di quelle per cui m ha valore diverso; per modo che gli angoli di contatto corrispondenti ad un certo valore di m costituiscono una classe di grandezze infinitamente grandi od infinitamente piccole rispetto a quelli corrispondenti ad un valore maggiore o minore (78).

Leibniz (79) considera insieme all' angolo di contatto anche quello d' osculazione, cioè l'angolo formato da una curva col suo cerchio osculatore, e le sue idee in proposito si riassumono nelle parole seguenti: « Ex quo intelligi potest, « angulum communem seu duarum rectarum, angulum con- « tactus duorum circulorum, et angulum osculi (primi gradus) « quodammodo se habere, ut corpus, superficiem et lineam. « Non tantum enim linea est minor quavis superficie, sed et « ne quidem pars est superficiei, sed tantummodo minimum « sive extremum » (80).

All' epoca in cui Fontenelle diede alla luce la sua *Geometria dell'infinito* (1727), la disputa sull'angolo di contatto poteva dirsi sopita: e però egli, nella prefazione, menziona l'angolo di contatto semplicemente come una delle prove dell'esistenza di grandezze infinite ed infinitesime (81).

Una posizione curiosa prende nella questione l'abate Tacquet (1612-1660), il quale dà torto ad ambi i contendenti, e taglia il nodo gordiano dicendo che l'angolo (sì rettilineo che curvilineo) non è una *quantitas*, ma un *modus quantitatis*, e che quindi non possono applicarsi ad esso i concetti d'eguaglianza e diseguaglianza (82).

Analogamente Renaldini (1615-1698) sostiene che gli angoli non sono grandezze, e che il non essere l'angolo del semicerchio nè maggiore nè minore d'un retto non prova che esso sia eguale ad un retto, giacchè tra i due enti non può sussistere eguaglianza (83).

I concetti introdotti di recente nella matematica permettono di dare un giudizio definitivo sulla disputa a cui abbiamo assistito, e di sceverare dalle varie opinioni emesse quella parte di verità ch'esse contengono. È giusto ciò che dice Peletier, che l'angolo di contatto non è paragonabile all'angolo rettilineo; ma di qui, come osserva altrettanto giustamente Hobbes, non può punto inferirsi essere l'angolo di contatto assolutamente nullo e non essere due angoli di tal natura paragonabili fra loro. Gli angoli di contatto delle circonferenze e gli angoli rettilinei formano insieme una classe di grandezze lineari, divisa in due sottoclassi tali, che le grandezze della prima sono infinitesime rispetto a quelle della seconda. Che se poi consideriamo, come fa Newton, anche gli angoli di contatto di tutte le curve $y = ax^m$, otteniamo una classe formata d'un'infinità di sottoclassi tali, che per le grandezze d'una stessa sottoclasse ha luogo il postulato d'Archimede, mentre non è così per le grandezze di sottoclassi differenti (84). L'esistenza di classi di tal natura, mentre in noi non desta alcuna meraviglia, doveva certamente sembrare strana, anzi assurda ai vecchi matematici, i quali concepivano le grandezze sotto l'unico tipo della quantità continuamente fluente — spazio e tempo — che è il substrato dei fenomeni naturali (85). E però bene osserva Hobbes, stare in ciò la chiave del mistero, che l'angolo di contatto e l'angolo rettilineo non possono essere misurati con una stessa misura. Cioè, se OA è un raggio fisso, OM un raggio mobile, e se in O v'ha un angolo di contatto AOB (Fig. 5), mentre ad ogni angolo rettilineo AOM corrisponde un arco AM, che ne è la misura, nessun arco corrisponde all'angolo di contatto AOB; nella classe continua di grandezze (archi) generate dall'estremo del raggio mobile ve n'ha una che corrisponde ad ogni angolo rettilineo, ma non ve n'ha alcuna che corrisponda all'angolo di contatto. La grandezza (angolo di contatto) esiste, la misura (arco) no; e l'errore di Peletier e de' suoi seguaci sta nell'aver dedotto dalla mancanza della misura la non esistenza della grandezza.

Capitolo IV.

L'INFINITESIMO INTENSIVO

Il concetto d'infinitesimo come grandezza intensiva si riscontra, più o meno latente e sotto forme diverse, presso molti matematici e filosofi. Tutte queste forme però possono ridursi essenzialmente a due sole, di cui esso si è rivestito successivamente, e che dirò per brevità forma *cinematica* e forma *dinamica*; e il passaggio della prima alla seconda di esse trova la sua ragione di essere nella storia della meccanica, poichè esso non ha luogo se non dopochè Galileo colle sue memorabili ricerche ha posto le basi della dinamica scientifica.

Prendasi la linea come tipo delle grandezze estensive. Il suo elemento è il punto inesteso, ma dotato della tendenza a generare l'estensione mediante il moto. Ora la forma che dissi *cinematica* si limita a considerare il *fatto* della generazione del continuo mediante il moto del punto, mentre la forma *dinamica* si preoccupa specialmente della *tendenza (conatus, momentum, etc.)* che possiede il punto generatore. La prima segna la nascita del calcolo integrale, la seconda quella del calcolo differenziale, dacchè è principalmente in quest' ultimo che attrae la nostra attenzione la natura particolare di quell' ente che dicesi *differenziale* d' una quantità.

Il vanto di aver creato le due forme del concetto intensivo d' infinitesimo spetta a due filosofi, Giordano Bruno e Tomaso Hobbes, il ribelle frate da Nola precursore del pio gesuato milanese, e il filosofo empirista precursore del commentatore dell'Apocalisse.

Già Nicolò Cusano (1401-1464) aveva detto (86) essere la linea l' evoluzione *(explicatio)* del punto, il tempo l' evoluzione dell' istante. Ma a Giordano Bruno (1548-1600) appartiene un merito ben maggiore: quello di avere, in qualche modo, invertita la questione fondamentale che guida al concetto d' infinitesimo. Fin allora si era considerato l' elemento (atomo, monade, etc.) come l'*ultimo* risultato della divisione indefinita del continuo; Bruno fa di esso, che egli chiama *minimum,* il *primo* elemento attivo, generatore dell'estensione (87). Ma questo *minimum,* che diviene per tal modo il fondamento della natura intera, è per Bruno anche il fondamento necessario della nostra conoscenza di essa, l' istrumento senza il quale è impossibile nulla concepire, il punto da cui ogni studio deve incominciare (88).

Non sappiamo se e quale influsso abbiano avuto le idee di Bruno su Souvey o Sovero (1577-1629) e Cavalieri (1591-1647) (89). Comunque, è per l' opera simultanea di questi due matematici che il concetto di moto, quale mezzo di generazione degli enti geometrici, fa il suo legittimo ingresso nella geometria.

Sovero sostiene la geometria non poter sussistere senza l' idea di moto; e fa vedere come, mercè questa, possano alle definizioni degli antichi sostituirsene altre genetiche ed atte a darci un' idea chiara degli enti geometrici, e soprattutto ad assicurarci della possibilità dei medesimi, la quale non consegue punto dalle definizioni euclidee (90).

Quanto a Cavalieri, risulta chiaramente dai suoi scritti che l'elemento generatore delle superficie è per lui *la linea che si muove* (91). Ma questo concetto teorico non può applicarsi al problema della determinazione delle aree, che è scopo precipuo delle sue ricerche (92); e però egli deve ricorrere ad un concetto del tutto diverso, e considerare le superficie piane come *composte* d'infinite linee parallele (93). Questo non è per Cavalieri se non un semplice artificio di calcolo; ed egli si sforza anzi di mostrare come il suo metodo sia indipendente da qualunque ipotesi e ben si adatti ad ogni modo di vedere (94). Però egli non ha saputo spiegarsi abbastanza chiaramente per evitare che quasi tutti coloro che scrissero di lui fossero tratti all'erronea credenza aver egli ritenuto le superficie come formate effettivamente di infinite linee (95).

Fra quelli che accolsero l'idea della generazione del continuo mediante il moto, parrà strano trovare primo il nome di Guldino (1577-1643); il quale, mentre combatteva il concetto da lui a torto attribuito a Cavalieri, ne faceva proprio il concetto vero, esprimendolo quasi colle sue stesse parole (96). La linea è per lui la *potenza* del punto, ossia la traccia lasciata dal punto mobile; la potenza può essere di due specie, retta e circolare (97). Più esatto o più accorto di Cavalieri, Guldino si studia di evitare l'equivoco di cui questi fu vittima; e dopo avere, colle parole citate nella nota 2, distinto la *genesi* del continuo dalla *composizione* di esso, notando come la prima riguardi la scienza speculativa, la seconda la pratica, fa vedere ancor più chiaramente come il concetto di *composizione* si colleghi con quello di *misura* (98). La sua idea è questa: un corpo rotondo deve imaginarsi generato dalla rotazione d'una figura piana intorno ad un asse posto nel piano di essa; ma questo concetto non ci è di alcuna utilità per la misura del volume del corpo, e a tal uopo ci occorre scomporlo in parti elementari e calcolare separatamente la grandezza di queste (99).

Barrow (1630-1677), dopo avere enumerato i vari modi di generazione delle grandezze, dice che tutti si riducono al moto locale, e che nulla avviene nella natura senza il moto (100); aggiunge che, come la linea è la traccia del punto, così il tempo è la traccia dell' istante (101). Anch' egli trova necessario per le applicazioni analitiche di considerare il continuo come *composto* di elementi (102); e soggiunge anzi essere indifferente considerare questi come estesi o come inestesi (103).

Giovanni Ceva (104) nella sua *Geometria motus* (Bologna 1692, p. 40) scrive: « Quaelibet linea ut fluxus puncti concipi « potest ». Non è facile conciliare questo passo con un altro in cui egli dice esser lecito considerare gl' istanti non come assolutamente privi di durata ma come brevissimi (105). Nè si può supporre che questa osservazione riguardi, non il concetto stesso d'elemento, ma solo la forma sotto cui questo deve figurare nei calcoli, giacchè altrove egli dichiara esplicitamente di credere che la velocità non varia in modo continuo, ma rimane inalterata per istanti brevissimi variando a mo' di scala (106).

Mentre Ceva stava ancora sotto l' influenza delle idee di Cavalieri, Hobbes mostrava colla sua opera *De corpore* (1655) come i germi deposti in lui dai rapporti personali con Galileo e dallo studio delle opere di esso non avessero trovato un terreno infecondo. — Galileo fu il primo che nel fenomeno del moto considerò l' elemento dinamico, ossia la tendenza *(momento)* del punto a muoversi con determinata direzione e velocità. Ma egli non seppe trar profitto di questo concetto pel problema della natura del continuo, chè anzi, dopo avere scomposta l'estensione in parti inestese, non trovò più la via di ricomporla mediante queste parti e ricorse a scappatoie sulle quali non merita discutere (107). Hobbes invece seppe ipostasare la potenza dell'elemento inesteso generatore, lasciando al suo grande compatriota Newton il compito di tradurla in forma matematica. Egli chiamò *conato* il moto lungo uno spazio minore di qualsiasi assegnato (108). Mercè tale concetto, il moto veniva ad essere costituito, non più da infinite *posizioni* del punto mobile, ma da infiniti *conati;* e le obiezioni degli Eleatici contro la possibilità del moto dovevano cadere per non più risorgere.

Questo *conatus*, che manifesta il suo influsso su Leibniz soltanto in modo transitorio, nelle sue giovanili ricerche fisiche, diviene la pietra angolare del grande edificio elevato da Newton. Il nome stesso di *methodus fluxionum* indica assai chiaramente il concetto a cui esso s' inspira. Le quantità continue *(fluentes)* sono generate dal movimento, e gl' incrementi istantanei *(momenta)* di esse sono proporzionali alle velocità *(fluxiones)* (109). Vedremo però più innanzi come anche in Newton si abbia una prova del fatto, che l' infinitesimo intensivo non è applicabile alle matematiche.

Taylor (1685-1731) e Mac-Laurin (1698-1746), compatrioti e seguaci di Newton, ne adottarono, anche dal punto di vista de' principî, quasi completamente le idee (110).

Ma, come già dissi, col diffondersi del metodo leibniziano i matematici andarono facendosi sempre meno sensibili alle difficoltà a cui il concetto d' infinitesimo intensivo deve la sua origine; e, mentre vieppiù si accaloravano le dispute sui fondamenti dei metodi analitici, scemava l' interesse per la questione puramente filosofica della natura dell' infinitesimo. Egli è per questo che chi volesse continuare oltre la metà del settecento la storia di tale questione, e più specialmente quella del concetto intensivo d' infinitesimo, dovrebbe passare, per non più uscirne, nel dominio della filosofia; ma ciò mi trarrebbe fuor dei limiti che mi sono imposto.

Parte Seconda

L'APPLICAZIONE DELL'INFINITESIMO

ALLA MATEMATICA.

Capitolo I.

METODO D'ESAUSTIONE

Sebbene in questo metodo non figuri sotto alcuna forma il concetto d'infinitesimo, tuttavia conviene quì farne cenno, specialmente per mettere in luce in quale relazione esso si trovi coi metodi posteriori.

Tra i molti pregiudizi che le ricerche recenti hanno distrutto, v'ha quello che la matematica greca sia nata perfetta, d'un tratto solo, quale la troviamo negli *Elementi* d'Euclide, con tutto l'ordine e il rigore che distinguono quest'opera immortale. Oggidì ciò non è più ammissibile, come non può credersi che le dimostrazioni euclidee, in cui al rigore logico sono sagrificate la concisione e la naturalezza, segnino le vie per le quali si giunse alla scoperta dei veri geometrici; ed è fuor di dubbio che la matematica greca, quale noi la conosciamo è l'opera di scienziati relativamente meno antichi che, raccogliendo e riordinando i risultati ottenuti dai primi scopritori, vollero farne un tutto da cui fosse esclusa ogni considerazione e dimostrazione men che rigorosa. Così è che giammai l'idea d'infinito compare esplicitamente nella geometria antica. Eppure questa idea è così connaturale alla mente umana, anzi si impone con un tal carattere di necessità nelle ricerche che appena si elevano al di sopra delle più elementari, che è da stupirsi come la sua assenza non sia stata notata con meraviglia, quale fatto strano e degno di studio. Senonchè un dato storico, apparentemente di poca importanza (111), ce ne dà la spiegazione, mostrandoci come anche agli antichi Greci l'infinito sia apparso quale prezioso sussidio per le ricerche geometriche, e come solo più tardi per ragioni, che forse non sarebbe difficile rintracciare nella storia della filosofia greca, essi sieno stati costretti ad abbandonarne l'uso.

Antifonte (Sec. V av. Cr.) — così narra Simplicio, un commentatore del sec. VI dell'era nostra (112), — inscrisse in un cerchio un quadrato, poi un ottagono, un poligono di 16 lati, etc., ed asserì che così continuando risulterebbe inscritto nel cerchio un poligono i cui lati, grazie alla loro piccolezza, più non si distinguerebbero dalla circonferenza. Qui è evidente il concetto d'una serie di operazioni continuata all'infinito, sino a che circonferenza e perimetro del poligono vengano a confondersi rigorosamente e a non essere più che una sola cosa. Ed infatti il commentatore malignamente osserva, che l'argomentazione di Antifonte è inesatta, ma che, non essendo essa fondata su principî geometrici, non si può dimostrarne l'erroneità geometricamente.

Era così aperta la via che conduceva alla quadratura del cerchio; occorreva però sgombrarla da ciò che agli occhi dei Greci, man mano che andava fra essi sviluppandosi il gusto delle ricerche filosofiche, appariva ognor più quale un inciampo (113). Già i paradossi di Zenone (sec. V av. Cr.) avevano aperta la guerra contro l'idea d'infinito; ora stava per sorgere un nemico ben più terribile, Aristotele (384-322 av. Cr.), la cui potenza doveva durare ben venti secoli. Fu allora che Eudosso (409-356 av. Cr.?) (114) introdusse l'uso sistematico del *metodo d'esaustione*, il quale divenne ben tosto uno degli strumenti più universali della geometria greca, e non solo continuò, variando soltanto di forma, a dominare nel campo dell'alta matematica sino alla scoperta ed alla diffusione dei nuovi metodi, ma fu usato anche più tardi da autori troppo timidi o scrupolosi, come il Mac-Laurin.

Questo metodo può servire ad un duplice scopo: risoluzione di problemi e dimostrazione di teoremi.

Come mezzo di risoluzione esso consiste in ciò, che per determinare una grandezza non direttamente calcolabile si costruiscono due serie di grandezze tali che due elementi corrispondenti qualunque delle due serie comprendano tra loro la grandezza incognita, e che la loro differenza vada indefinitamente diminuendo man mano che si procede nelle serie stesse.

Come mezzo di dimostrazione, il metodo d' esaustione cerca di stabilire le relazioni esistenti fra grandezze non direttamente calcolabili, dimostrando che le stesse relazioni esistono fra grandezze prese in modo da differire rispettivamente dalle grandezze considerate di tanto poco quanto si vuole; e a tal uopo ha bisogno di fondarsi sul cosidetto postulato d'Archimede (ossia sulla prop. 1ª del L. XII degli *Elementi* di Euclide) e di ricorrere alla riduzione all' assurdo. Come esempio prendiamo il teorema, che i cerchi stanno fra loro come i quadrati dei loro diametri. La dimostrazione che ne dà Euclide (Sec. III av. Cr.) (115) può riassumersi come segue: Sieno C_1, C_2 le aree dei due cerchi, D_1, D_2 i loro diametri, e suppongasi dapprima $\frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{C_1}{E}$, dove $E < C_2$. Allora in base al postulato anzidetto può stabilirsi essere possibile inscrivere nel secondo cerchio un poligono regolare P_2 la cui area sia maggiore di E. Ma se P_1 è il poligono simile a P_2 inscritto nel primo cerchio, si ha $\frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{P_1}{P_2}$, quindi $P_1 > C_1$, ciò che è assurdo. Analogamente si ragionerebbe nell' ipotesi $E > C_2$. Dunque, poichè E non può essere nè minore nè maggiore di C_2, esso dev' essere eguale a C_2; e quindi si ha $\frac{D_1^2}{D_2^2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Gli ammirabili risultati ottenuti da Archimede col metodo d' esaustione sono troppo noti perchè occorra qui arrestarvisi. Sarebbe del pari inutile al nostro assunto seguire la traccia di questo metodo attraverso l' antichità e il medio evo; e a questo proposito basti accennare, come Luca Valerio (1552-1618) sia stato il primo (116) il quale abbia posto sotto forma generale il processo di dimostrazione che gli antichi ripetevano in ciascun caso particolare, racchiudendolo in alcuni notevoli teoremi (117). È invece importante per la storia della figliazione delle idee esaminare quale nesso esista tra il metodo d' esaustione e quelli che sorsero a sostituirlo in epoche più recenti.

Parecchi, e tra questi alcuni dei più illustri fondatori della nuova analisi, asserirono essere i metodi moderni in sostanza identici al metodo d' esaustione. — Keplero (1571-1630) crede di farsi interprete del pensiero d'Archimede dicendo che il cerchio può considerarsi come una somma d' infiniti triangoli isosceli col vertice nel centro (118). — Roberval (1602-1675) dice di aver tratto da Archimede il germe della sua teoria degli indivisibili (119). — Fermat (1601-1665) riguarda il proprio metodo come identico a quello archimedeo, salvo la soppressione dell' ultima parte, cioè della riduzione all' assurdo (120). — Wallis e Pascal (1623-1662) ritengono la teoria degli indivisibili una semplice modificazione del metodo degli antichi (121). — Leibniz stesso dice ripetutamente non essere il suo metodo se non un' abbreviazione di quello di Archimede (122). — Newton presenta i suoi lemmi semplicemente come un mezzo di evitare la riduzione all' assurdo (123). — Grandi dice che il principio dei nuovi metodi, cioè il lemma, che due grandezze la cui differenza può rendersi minore di qualsiasi assegnata sono eguali, è implicito nel metodo archimedeo (124). — Giovanni Bernoulli e Fontenelle opinano avere Archimede considerato il cerchio come un poligono infinitilatero (125).

È strano che tutti questi matematici, i quali, chi più, chi meno, concorsero alla creazione della nuova analisi, non abbiano riconosciuta la profonda differenza di concetto che esiste fra questa e il metodo degli antichi : e lo è tanto più, perchè parecchi di essi hanno mostrato di sapere assai bene apprezzare i progressi da loro raggiunti rispetto ai loro immediati predecessori. Così Wallis dice di cominciare dove Cavalieri aveva finito ; così Leibniz, come vedremo, sa valutare in giusta misura tutta l'importanza della sua invenzione. — Ma forse la ragione della cosa sta in ciò, che i fondatori dei nuovi calcoli, circondati da un pubblico diffidente e — come direbbesi oggidì — misoneista, accusati continuamente di mancare alle esigenze del rigore e della logica, credettero di acquistare favore alle loro invenzioni, coprendole coll'autorità del gran nome d'Archimede. Ma quando la battaglia fu vinta per sempre, la questione potè essere esaminata freddamente, senza alcun preconcetto; e il pensiero, a cui la filosofia kantiana aveva accresciuto potenza e allargato l'orizzonte, potè meglio penetrare nel fondo della cosa. Noi vediamo infatti parecchi scrittori della fine del secolo scorso (126) sforzarsi di porre in luce le differenze esistenti fra il metodo d'esaustione ed i metodi moderni. Tali differenze possono riassumersi dicendo (127) che il metodo d'esaustione procede analiticamente, mentre i metodi moderni procedono sinteticamente. Gli antichi si limitano ad asserire che l'area del circolo è compresa tra quella d'un poligono regolare inscritto e quella del poligono simile circoscritto, e che la differenza di queste due aree può rendersi minore di qualunque area finita aumentando opportunamente il numero dei lati dei due poligoni. Noi diciamo qualche cosa di più: noi aggiungiamo che il cerchio è un poligono infinitilatero (metodo degl'infinitesimi), oppure che esso è il limite a cui tende un poligono regolare al crescere indefinito del numero de' suoi lati (metodo dei limiti). Sia nell'uno che nell'altro modo, noi veniamo a distruggere la differenza specifica tra poligono e cerchio, ciò che gli antichi non avrebbero mai osato di fare: noi veniamo (mi si permetta il termine) a privare la misura rettilinea della sua rigidezza, come coll'introduzione degli irrazionali togliamo alla misura numerica la sua discontinuità (128).

Con ciò noi otteniamo un duplice vantaggio. Anzitutto noi soddisfacciamo ad un'esigenza (se così può dirsi) dell'estetica della scienza; poichè, come dal punto di vista geometrico nessuna differenza specifica v'ha tra circolo e poligono, così è ragionevole che al primo, al pari che al secondo, corrisponda un concetto aritmetico semplice, non dipendente da altri concetti. Il secondo vantaggio è essenzialmente pratico, ed è ad esso in gran parte che dobbiamo la creazione dei nuovi calcoli. Riprendiamo il teorema relativo al rapporto di due circoli, che vedemmo come venisse dimostrato dagli antichi. Il metodo degl'infinitesimi procede semplicemente così: Se $P_1^{(n)}$, $P_2^{(n)}$ sono i poligoni regolari di n lati inscritti nei cerchi C_1, C_2, si ha, qualunque sia n: $\frac{P_1^{(n)}}{P_2^{(n)}} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$; ma $P_1^{(\infty)} = C_1$, $P_2^{(\infty)} = C_2$, dunque: $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$. E il metodo dei limiti: Si ha: $\frac{P_1^{(n)}}{P_2^{(n)}} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$, ma $\lim_{n=\infty} P_1^{(n)} = C_1$, $\lim_{n=\infty} P_2^{(n)} = C_2$, e il limite di un rapporto è eguale al rapporto dei limiti, dunque $\frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$.

Come si vede, i metodi moderni permettono di abbreviare notevolmente le dimostrazioni, e, ciò che è più, rendono in molti casi superflua la riduzione all'assurdo che, come fu detto, convince ma non illumina.

Capitolo II.

METODO DEGLI INDIVISIBILI

Si è già detto in che consista l'idea fondamentale del metodo degli indivisibili, e come in esso si concepiscano i corpi come composti d'infinite superficie, le superficie d'infinite linee. Pare che il primo embrione di questo metodo possa farsi risalire a Leonardo da Vinci (1452-1519) (129); ma il precursore immediato di Cavalieri è, sotto questo punto di vista, indiscutibilmente Keplero. Egli infatti, per dimostrare che un cilindro ed un parallelepipedo circoscritto stanno tra loro come il cerchio base del cilindro al quadrato del suo diametro, dice che, essendo l'uno e l'altro solido *quasi piani divenuti corpi,* il loro rapporto dev'essere eguale a quello dei piani generatori (130).

Dal carteggio di Galileo con Cavalieri risulta che i due scienziati avevano contemporaneamente concepito l'idea di un'opera sugli indivisibili (131). Però il primo non ebbe agio di attuare il suo progetto, sicchè al metodo degli indivisibili rimase attaccato il nome di Bonaventura Cavalieri.

Poichè lo scopo di questo scritto è piuttosto di dare un'idea generale delle vie seguite ne' vari metodi che non di entrare nella parte tecnica di essi, io mi limiterò a esporre il principio fondamentale del metodo degl' indivisibili, rimandando per maggiori sviluppi ai lavori originali di Cavalieri ed alle opere storiche di Cantor e di Marie.

Abbiansi due superficie piane comprese fra due medesime parallele, e si imaginino condotte tutte le parallele comprese fra queste due. Il rapporto delle aree delle due superficie è eguale a quello delle somme dei segmenti intercetti rispettivamente in esse (132). Tali somme, come è evidente, sono infinite, e il loro rapporto è più esattamente il limite a cui tende il rapporto delle somme dei segmenti intercetti quando il numero delle parallele tra loro equidistanti, pur mantenendosi finito, cresce indefinitamente. Per determinare questo limite bisogna ricorrere nei singoli casi a speciali artifizi, i quali, mentre mostrano il grande ingegno dell'inventore del metodo, fanno questo di un uso difficile.

Wallis volle rendere il metodo più regolare sostituendo agli artifizi geometrici, di cui si vale Cavalieri, considerazioni aritmetiche. Per prendere un esempio semplicissimo, vogliasi dimostrare che il triangolo è la metà del parallelogramma di egual base ed altezza. Wallis comincia collo stabilire, che la somma d'una progressione aritmetica crescente, il cui termine minimo è zero, è eguale al semiprodotto del termine massimo pel numero dei termini (133). Dopo ciò, se si ha un parallelogrammo diviso in due triangoli da una sua diagonale, i segmenti delle parallele ad uno dei lati intercetti entro uno dei triangoli formano appunto una progressione aritmetica, mentre i segmenti intercetti nel parallelogramma sono tutti eguali alla base del triangolo. Ne segue che la somma dei primi segmenti sta a quella dei secondi come 1 a 2; e però nello stesso rapporto stanno le aree delle due figure (134).

Il metodo di Cavalieri, benchè combattuto da Guldino che ne negava l' originalità e l' esattezza, benchè avversato da altri parecchi (135), benchè contrastato al suo autore da Roberval che ne pretendeva la priorità (136), trovò dappertutto grande diffusione. Torricelli (1608-1647), Stefano degli Angeli (1623-1697), G. P. Casati (137), Giovanni Ceva, Guido Grandi (138) fra gli italiani, White o Albius (n. 1590), Schooten (1615-1660) (139) e Wallis (140) fra gli stranieri, lo accolsero con entusiasmo, e lo applicarono ai più svariati problemi geometrici. E più ancora sarebbero stati, se, appena 50 anni dopo, non fosse sorto il metodo leibniziano, il quale era destinato a far dimenticare tutti quelli che lo precedettero e che lo seguirono, dal metodo degli indivisibili di Cavalieri, alla teoria delle funzioni di Lagrange.

Analogo al metodo di Cavalieri almeno nella forma esteriore è quello di Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), il quale nel L. VII del suo *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Anversa 1647) chiama *ductus plani in planum* l' operazione per cui, date due linee poste in due piani perpendicolari e aventi per projezione uno stesso segmento dell' intersezione di questi, si costruisce il solido le cui sezioni normali a quest' ultima retta sono i rettangoli formati dalle ordinate corrispondenti delle due linee (141). Però il suo modo di dimostrazione è del tutto conforme al processo degli antichi; anzi fu egli uno dei primi a provare la necessità di fare del ragionamento che per l' addietro si ripeteva in ogni caso un metodo generale, che ebbe poi il nome di *metodo d' esaustione* (142).

Capitolo III.

METODO DEGLI INFINITESIMI

Il concetto fondamentale del metodo degl'infinitesimi potè dirsi creato il giorno in cui Antifonte asserì potersi considerare il cerchio come un poligono d'infiniti lati. Respinta dalla inflessibile severità della scienza greca, questa idea riapparisce timidamente dopo molti secoli, quando la geometria sta per cedere la preminenza all'aritmetica; Nicolò Cusano (143), Stifel (1486-1567) (144), Commandino (145), Vieta (146) ripetono essere il cerchio un poligono infinitilatero, e quest'ultimo ne deduce anzi una espressione notevole del rapporto della circonferenza al diametro (147). Però la prima applicazione teorica di questo concetto è dovuta a Keplero, il quale disse doversi considerare il circolo come formato d'infiniti triangoli isosceli col vertice nel centro (148). Ma egli stesso nel seguito della sua opera adottò, come già si disse, un modo di vedere alquanto diverso, aprendo così la via al metodo degli indivisibili.

Questo metodo sollevò grandi difficoltà, specialmente perchè molti trovavano inaccettabile il concetto della composizione delle superficie mediante linee (149). E dall'intento di renderne l'idea fondamentale meno contraria alle ordinarie idee geometriche nacquero i primi germi del metodo degl'infinitesimi; giacchè alle linee si sostituirono delle particelle superficiali, che di necessità dovettero supporsi infinitamente piccole. Queste particelle, determinate mediante un sistema di ordinate equidistanti, si discostano tanto meno dalla forma di trapezio quanto più grande è il numero delle ordinate, e però può dirsi, *per comodità di linguaggio*, che, quando esse sono in numero infinito, la superficie rimane divisa in infiniti trapezi. Ma un'ulteriore semplificazione può raggiungersi. Osservando infatti che l'area di ciascuna striscia è compresa tra quelle dei rettangoli di egual altezza aventi per base la massima e la minima ordinata comprese nella striscia medesima, e che, per le curve ordinariamente considerate, la somma dei primi e quella dei secondi rettangoli possono rendersi prossime l'una all'altra quanto si vuole aumentando convenientemente il numero delle ordinate, può dirsi ancora, *sempre per brevità e comodità di linguaggio,* che l'area della superficie proposta è eguale al prodotto della somma delle infinite ordinate per la distanza di due ordinate consecutive. Così il passaggio dal metodo degl'indivisibili a quello degl'infinitesimi si traduce semplicemente nell' aggiunta di un fattore costante, il quale poi sparisce ogniqualvolta si abbia a calcolare il rapporto di due aree.

Roberval, il quale, indipendentemente da Cavalieri, aveva ideato un metodo analogo a quello degl' indivisibili, si vanta che esso non dà luogo alle obiezioni sollevate contro quello del geometra italiano perchè egli considera le superficie come composte, non già di linee, ma di superficie infinitamente piccole (150).

Pascal dice che, usando il linguaggio degli indivisibili, intende per *somma delle ordinate* la somma dei rettangoli formati da queste e dai segmenti del diametro (151).

La trasmutazione del metodo degl' indivisibili nel metodo degl' infinitesimi era, dal punto di vista aritmetico, ben poca cosa, poichè essa si riduceva all' introduzione d' un fattore costante destinato a scomparire alla fine del calcolo. Non così dal lato del concetto; poichè la particella infinitesima, una volta entrata nel dominio dell' analisi, vi si rivelò strumento utilissimo per lo studio di problemi, che attendevano ancora la loro soluzione più semplice o più generale. Voglio alludere specialmente a due classi di questioni, che costituiscono una parte importantissima dell'odierno calcolo differenziale: teoria de' massimi e minimi, e determinazione delle tangenti.

Fermat, nella sua memoria intitolata: *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* diede per la ricerca dei massimi e minimi una regola che gli valse da vari illustri matematici (152) il vanto, a mio avviso non del tutto meritato, di primo inventore del calcolo differenziale. Essa può così tradursi in linguaggio moderno: Si calcoli la funzione da rendersi massima o minima per un valore x della variabile, e per un altro $x + \varepsilon$, dove ε è indeterminata, e si eguaglino le due espressioni trovate. Resa l'equazione razionale intera, e tolti i termini comuni ai due membri, si divida il tutto per ε, indi si ponga $\varepsilon = 0$; si avrà un' equazione, la quale determinerà i valori della variabile per cui la funzione proposta è massima o minima (153).

La regola di Fermat può riguardarsi come la traduzione aritmetica dell' idea ripetutamente espressa da Keplero nella sua *Stereometria doliorum,* che in vicinanza d' un punto di massimo o di minimo la variazione della funzione è insensibile. Infatti Fermat pone il valore della funzione nel punto di massimo o minimo eguale a quello che essa prende in un punto prossimo. Però l' eguaglianza $f(x + \varepsilon) = f(x)$ non è esatta, ma lo diverrà soltanto dopo opportune modificazioni; ed egli esprime questo fatto chiamandola, non *aequatio,* ma (con termine tolto da Diofanto) (154) *adaequatio,* ossia equazione approssimata. Che poi essa divenga effettivamente esatta, egli non lo dimostra punto. Così altrove, trattando d' una quadratura, dopo aver detto che ogni trapezio mistilineo può ritenersi press' a poco eguale ad un rettangolo (155), si rimette, pel resto della dimostrazione, alla riduzione all'assurdo (156).

Huygens (1629-1695), il quale già nell'*Horologium oscillatorium* mostra d' aver adottato i concetti del metodo infitesimale (157), si propone, nella *Demonstratio regulae de maximis et minimis,* di illustrare e semplificare la regola di Fermat, di cui l' inventore non ha indicata l' origine (158). Or ecco come egli ragiona. Se x è un punto di massimo o di minimo per la funzione $f(x)$, vi saranno due valori $x - \delta$, $x + \varepsilon$ per cui $f(x - \delta) = f(x + \varepsilon)$, ossia, facendo $x - \delta = x_1$, $\delta + \varepsilon = e$:

$$f(x_1 + e) - f(x_1) = 0.$$

Il valore che risulterà per x_1 ponendo e infinitamente piccola (*infinite parva*) sarà il valore cercato di x. Per ottenerlo si dovrà dividere per e il primo membro dell' equazione, indi togliere tutti i termini contenenti e, giacchè questi sono infinitamente piccoli rispetto agli altri (159).

Quest'ultima parte della spiegazione di Huygens, la quale è quella che per noi potrebbe presentare maggiore interesse, cessa di averne alcuno, se si considera che la *Demonstratio* venne in luce nel 1693, cioè quando i primi lavori di Leibniz sul calcolo infinitesimale erano già da vari anni pubblicati, sicchè il ragionamento di Huygens è nulla più che una semplice applicazione dei lemmi fondamentali del metodo leibniziano.

Come una delle applicazioni della sua regola pei massimi e pei minimi, Fermat trattò nello scritto citato la teoria delle tangenti. Anche su questa Huygens pubblicò, pure nel 1693, una memoria dal titolo: *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum* (160).

Vent'anni prima (1674) Barrow, mediante la considerazione del *triangolo caratteristico* « dont l'usage ne finira jamais » (161), formato dagli incrementi corrispondenti dell'ascissa, dell'ordinata e dell'arco, aveva dato per la determinazione delle tangenti un metodo che racchiude in sè il germe di tutto il calcolo differenziale. Dicendo m l'ordinata, a, e gli incrementi simultanei di questa e dell' ascissa, t la sottangente, dalla natura della curva potrà dedursi una certa relazione contenente a ed e. In questa si sopprimano i termini di grado superiore al primo rispetto ad a ed e presi insieme, e quelli non contenenti nè a nè e; nell' equazione così ridotta si ponga $\frac{m}{t}$ in luogo di $\frac{a}{e}$. Si otterrà così una relazione che determinerà t (162).

L'importanza del triangolo caratteristico consiste in ciò, che esso permette di sostituire al rapporto di due grandezze infinitamente o indefinitamente piccole, e quindi indeterminate (gl' incrementi dell'ordinata e dell' ascissa), quello di due grandezze ben definite (l'ordinata e la sottangente).

Il lettore avrà notato, nell'epoca di cui parliamo, un fenomeno del tutto nuovo nella storia della matematica, almeno dacchè essa merita il nome di scienza.

Fermat e Barrow, due dei più illustri matematici del secolo, insegnano certe regole per la risoluzione di speciali famiglie di problemi, ma non tentano punto di darne la dimostrazione. Nè basta ciò; chè queste regole sono affatto contrarie a tutti quei principi la cui vantata incrollabilità faceva la gloria della matematica. Nell'aritmetica ci viene permesso, anzi imposto di sopprimere certe quantità che non sono assolutamente nulle. Nella geometria ad un'area curvilinea dobbiamo sostituire una somma d'infiniti rettangoli, trascurando la somma di infiniti triangoletti mistilinei, la quale in ogni caso è diversa da zero. Eppure questo apparente rilassamento nel rigore geometrico non conduce ad alcuna falsa conclusione, anzi in tutti i casi considerati è possibile dimostrare esattamente che le grandezze trascurate non hanno alcuna influenza sui risultati finali.

Tutto ciò faceva credere che i metodi degli antichi fossero suscettibili di notevoli semplificazioni; ma la guerra fatta incessantemente alle nuove idee ed ai loro sostenitori da Keplero a Leibniz (163) dimostra come più forte del desiderio di novità fosse in parecchi il timore di vedere sminuito il rigore delle matematiche. Nè l'opera geniale di Leibniz fu sufficiente a scacciare il verme roditore che s'annidava nei nuovi calcoli; essa riuscì soltanto a confinarlo in un punto solo. Ed invero tutte le discussioni a cui ha dato luogo il calcolo leibniziano versano sostanzialmente su questo lemma fondamentale: che un infinitesimo addizionato ad una quantità finita può trascurarsi. Oggidì il senso di questo lemma è stato omai posto in piena luce; ma lo sarebbe stato assai prima, se non vi si fosse opposta l'oscurità e l'ambiguità del concetto d'infinitesimo, che si presta a troppe e differenti interpretazioni.

Le prime tracce dell'introduzione dell'infinitesimo nella matematica possono farsi risalire, come già si disse, a tempi antichissimi; ma Leibniz per primo lo considerò come un ente a sè, e ne estese e sistematizzò l'uso nell'analisi (164). Nella sua mente l'infinitesimo ebbe una doppia origine: filosofica e tecnica. Anzitutto esso gli apparve come la rappresentazione della *legge di continuità,* che egli pose a fondamento di tutta la natura (165), come l'espressione del fatto che le cose naturali variano per gradi di tale piccolezza da essere incomparabili rispetto a qualunque grandezza finita, da sfuggire a qualunque misura per quanto piccola. — In secondo luogo l' uso metodico dell' infinitesimo fu per lui un mezzo potente per semplificare i calcoli e ridurli ad un unico algoritmo generale. E se del *metodo* infinitesimale gli fu più o meno giustamente contesa la gloria (166), il *calcolo* infinitesimale è indiscutibilmente cosa sua (167).

Il problema de' massimi e minimi, quello delle tangenti ed altri analoghi, avevano condotto alla considerazione di ciò che ora chiamiamo la *derivata* d' una funzione $f(x)$. Per determinarla, si doveva formare il rapporto $\dfrac{f(x+e)-f(x)}{e}$ dell' incremento della funzione a quello della variabile, e porre in questo $e = 0$. La cosa era in generale tutt' altro che facile, e, tranne pe' casi più semplici, non esisteva regola alcuna che permettesse di abbreviare l'operazione. Per superare ogni difficoltà, occorreva raggiungere due scopi, e cioè:

a) Saper determinare direttamente con regole generali il rapporto $\dfrac{f(x+e)-f(x)}{e}$ per tutte le funzioni elementari di cui si compone un' espressione analitica qualunque, e cioè per la somma, differenza, prodotto, quoziente, potenza, radice, logaritmo;

b) Avere un criterio per riconoscere *a priori* quali dei termini che figurano nell' espressione di quel rapporto scompariranno quando nell' ultimo risultato si porrà $e = 0$, onde poterli omettere fin da principio.

Il rapporto considerato si presenta normalmente sotto la forma: $A + Be + Ce^2$ ....., dove A, B, C, ... sono indipendenti da e; ponendo $e = 0$, quest' espressione si riduce ad A che è appunto la derivata. Ora il fatto che e deve alla fine dei calcoli essere eguale a zero può esprimersi dicendo che e *è una grandezza infinitesima;* e a giustificare il passaggio dall'espressione $A + Be + Ce^2 + ...$ all' altra più semplice A può stabilirsi la regola, che *una grandezza infinitesima deve trascurarsi quando sia addizionata ad una grandezza finita.* Questo lemma che, come già dissi, costituisce il fondamento del metodo infinitesimale, trova così la sua completa giustificazione; ed appare evidente che esso, ben lungi dall' essere un postulato, quale da alcuni fu ritenuto, è solo una *regola pratica* atta ad abbreviare i calcoli insegnando quali dei termini sono destinati a sparire e possono quindi esser omessi. — Se Leibniz abbia visto la cosa così chiaramente, non può decidersi dall' esame de' suoi scritti; certo è che essa non fu compresa a dovere dai suoi contemporanei, giacchè altrimenti non sarebbero sorti tanti dubbi sull' esattezza del Calcolo infinitesimale.

Risolto così il secondo dei due problemi, il primo veniva ad essere notevolmente semplificato, giacchè nessuna difficoltà poteva più presentare il calcolo diretto della derivata delle funzioni elementari. La teoria veniva completata mediante la regola per la derivazione delle funzioni di funzioni, e così poteva dirsi del tutto formato il *calcolo differenziale*, cioè quel complesso di norme che insegnano a trovare in modo diretto, sistematico, e direi quasi meccanico la derivata d'una funzione qualsiasi.

Per esaminare ora quale aspetto prendeva, sotto il nuovo punto di vista, il problema delle quadrature *(calcolo integrale)*, conviene accennare ad una regola, che non è se non un' estensione del lemma fondamentale. Dicasi *infinitesima d'ordine p* un' espressione che s' annulla insieme ad e, e il cui rapporto ad e^p resta finito e non nullo per $e = 0$. Se M, N sono due espressioni infinitesime rispettivamente degli ordini m, n, essendo $n > m$, e se si pone:

$$\frac{M}{e^m} = P, \quad \frac{N}{e^n} = Q,$$

dove P, Q hanno valore finito e diverso da zero per $e = 0$, sarà:

$$M + N = e^m P + e^n Q = e^m (P + e^{n-m} Q);$$

ma pel lemma più volte ricordato $e^{n-m}\,Q$ deve trascurarsi rispetto a P, sicchè si ha:

$$M+N=e^m\,P=M.$$

Di qui la regola, che *un infinitesimo d'ordine superiore deve trascurarsi se addizionato ad uno d'ordine inferiore.*

Abbiasi ora una curva la cui equazione sia $y=f(x)$, e vogliasi determinare l'area racchiusa da essa, dall'asse delle ascisse e dalle due ordinate y_0, y_1 corrispondenti rispettivamente alle ascisse x_0, x_1. Ciascuno degl' infiniti trapezi mistilinei d'egual altezza dx in cui viene scomposta la superficie mediante le ordinate consta d'un rettangolo e d'un triangolo mistilineo; ma quest'ultimo è infinitesimo di secondo ordine e però può trascurarsi rispetto al primo che è infinitesimo di primo ordine. Quindi l'area cercata è eguale alla somma dei rettangoli aventi i lati y, dx, ciò che si esprime scrivendo:

$$A=\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

Se x_1, y_1 si considerano come variabili e si denotano semplicemente con x, y, anche l'area A sarà variabile e potrà rappresentarsi con $F(x)$; cioè sarà:

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

La variazione $dF(x)$ dell'area corrispondente al passaggio da un'ordinata $f(x)$ ad una prossima $f(x+dx)$ non è altro che uno dei trapezi già considerati; ma, poichè a questo può sostituirsi il rettangolo $f(x)\,dx$, si ha:

$$dF(x)=f(x)\,dx,$$

ossia:

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=F'(x).$$

Adunque l' integrazione si presenta come l'operazione inversa della derivazione. E per ottenere l'area d'una curva $y = f(x)$, o, ciò che è lo stesso, l' integrale d' una funzione $f(x)$, non è più necessario ricorrere agli svariati espedienti geometrici di cui dovevano servirsi nei diversi casi speciali i predecessori di Leibniz; basta cercare se tra le funzioni che conosciamo ve n'abbia per avventura alcuna la cui derivata sia appunto $f(x)$. Questo processo per tentativi, ridotto in seguito sempre più — per quanto lo comporta la natura delle cose (168) — ad un complesso di regole metodiche, arricchito di criteri utili per ridurre certe estese classi di funzioni ad altre più facilmente integrabili, ha trasformato il calcolo integrale, da un insieme di artifizi più o meno ingegnosi, in un vero corpo di scienza.

A Leibniz pertanto spetta un duplice vanto: quello di avere ridotto tutto quanto poteva esservi di discutibile, di men che rigoroso nel calcolo infinitesimale, ad un punto solo, il lemma fondamentale; e quello di aver fatto del Calcolo un algoritmo, aprendo la βασιλικὴ ἄτραπος dell'alta analisi, come Cartesio aveva spianata quella della geometria.

L' importanza del progresso raggiunto fu pienamente riconosciuta sì da Leibniz stesso (169) che da' suoi scolari (170), i quali ne diedero la più convincente dimostrazione applicando il metodo leibniziano allo studio di problemi difficilissimi e prima d'allora insoluti. — Occorreva però raccogliere in un trattato le regole del nuovo calcolo; e a questa opera si dedicò L' Hospital, il quale nella sua *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* espose sistematicamente il calcolo differenziale e le sue applicazioni geometriche.

L' Hospital pone a base della teoria i due seguenti postulati, che egli dice essere evidenti e potersi anche rigorosamente dimostrare (171):

a) Due quantità, la cui differenza è infinitesima, possono prendersi l'una per l'altra;

b) Una curva può considerarsi come un poligono infinitilatero (172).

Sarebbe stato desiderabile che egli avesse dato la dimostrazione di questi postulati, perchè ciò gli avrebbe offerto l'occasione di dire che cosa intendesse per infinitesimo; e questo non sarebbe stato davvero superfluo in un' opera che dall' infinitesimo s' intitola.

L' *Analyse* ebbe tre commentatori: Varignon (173), Crouzas (1663-1748 o 1750) (174) e Paulian (1722-1802) (175). Veramente importante è il commento di Varignon, e pel nome dell' autore, illustre per le sue ricerche di meccanica, e pel valore intrinseco dell' opera, la quale è, più che un commento, un lavoro originale. Varignon parte da due postulati, di cui il primo è identico al primo di L' Hospital, e il secondo stabilisce che il prodotto di due infinitesimi è nullo (s' intende, rispetto a ciascuno di essi) (176). Però il suo infinitesimo non è se non una quantità variabile indefinitamente piccola (177), anzi egli adopera indifferentemente le due espressioni *infiniment petit* e *indéfiniment petit;* di più il suo modo di ragionare mostra una spiccata tendenza verso il metodo dei limiti (178).

Giacomo e Giovanni Bernoulli si resero celebri per le applicazioni estese del calcolo leibniziano loro dovute; il secondo scrisse anche (179), sotto il titolo: *Lectiones mathematicae de calculo integralium aliisque,* un trattato di calcolo integrale, destinato a completare il trattato di calcolo differenziale di L' Hospital.

Anche Grandi, nella sua opera già citata: *De infinitis* etc., pur combattendo l'esistenza di quantità infinitesime costanti, espose i principî del metodo infinitesimale secondo i concetti di Leibniz.

Frattanto l' introduzione dell' opera di Mac-Laurin sul continente, e l' influenza degli enciclopedisti, davano la preponderanza al metodo dei limiti, e aprivano l'adito alle lunghe dispute di cui avremo a parlare nel capitolo seguente.

Capitolo IV.

METODO DEI LIMITI

Il carattere più saliente del metodo dei limiti è questo, che esso non fa uso, *neppure come modo di parlare,* di termini implicanti l' idea di grandezze diverse dalle ordinarie grandezze finite, e quindi anche nell' apparenza è pienamente rigoroso. La differenza tra esso ed il metodo infinitesimale può sembrare soltanto una differenza di parole, consistente nel dire p. es. limite del rapporto di due quantità tendenti insieme a zero, invece che rapporto dei loro incrementi infinitesimi. Ma essa è più profonda assai. Ed invero il metodo dei limiti non invoca alcun sussidio estraneo al dominio dell' algebra, non ricorre ad alcun concetto nuovo, ad alcuna nuova convenzione; esso non ha d' uopo che dei soli teoremi riguardanti il limite d' una somma, d' una differenza, d' un prodotto, d' un quoziente. Inoltre, mentre le relazioni a cui conduce il metodo infinitesimale non sono esatte per alcun valore diverso da zero di dx, dy, quelle ottenute col metodo dei limiti sono sempre perfettamente esatte. A questo vantaggio è da contrapporsi una minor speditezza nei calcoli ed una minor facilità di esprimere mediante equazioni analitiche le condizioni dei problemi da studiarsi.

Sebbene il metodo dei limiti, nella sua generalità e sotto la sua forma più moderna, appaia per la prima volta nei *Principia* di Newton, non può tuttavia passarsi sotto silenzio uno scritto antecedente a questo di circa 20 anni, la *Vera circuli et hyperbolae quadratura* di Jacopo Gregory (1638-1675) (180). Questo lavoro, che non ebbe fortuna pari al merito, è notevolissimo, perchè contiene in germe talune delle idee che oggidì prevalgono nell' analisi, e specialmente pel modo in cui è posto il problema fondamentale della quadratura del cerchio.

Dopo aver detto che ufficio dell' analisi è, non solo risolvere le questioni, ma anche eventualmente dimostrarne la insolubilità (181), Gregory introduce il concetto di relazione analitica (182), designando come tali quelle formate mediante operazioni razionali ed estrazioni di radici, e si propone di dimostrare che una relazione di tal natura non può esistere (Fig. 6) fra l'area del settore ABIP e quelle del triangolo ABP e del quadrangolo ABFP (183). Perciò egli osserva come le sole grandezze a noi direttamente accessibili sieno le razionali, come delle irrazionali non sogliansi considerare se non quelle ottenute per estrazioni di radici, come pertanto ogni altra grandezza irrazionale ci sia nota solo in quanto è possibile trovare una grandezza razionale, od almeno analitica, che ne differisca meno d' una quantità assegnata ad arbitrio (184). La determinazione di una tale grandezza può considerarsi come una sesta operazione dopo le 4 razionali e l'estrazione di radice (185). Questa operazione può eseguirsi in modo sistematico formando una coppia di successioni $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots,$ tali che a_{n+1} e b_{n+1} si ottengano da a_n, b_n con una legge costante indipendente da n, che $a_n - b_n$ tenda a zero al crescere di n, e che la grandezza da determinarsi sia compresa fra a_n e b_n qualunque sia n; una coppia di tale natura vien detta da Gregory *serie convergente* (186). La *terminazione* della serie, ossia il limite comune delle due successioni, deve dipendere in uno stesso modo da qualsiasi coppia di elementi corrispondenti di esse, e però la sua espressione sarà data da quella funzione $f(a_n, b_n)$ che soddisfa alla condizione $f(a_{n+1}, b_{n+1}) = f(a_n, b_n)$ (187). — L'applicazione al cerchio è ovvia. La serie convergente è data dall' insieme dei poligoni regolari inscritti e circoscritti di cui ciascuno ha un numero di lati doppio del precedente; ma Gregory dimostra che non esiste alcuna funzione analitica la quale soddisfaccia alla condizione poc' anzi accennata, e da ciò può dedursi che l'area del circolo non è funzione analitica del diametro. A dir vero la dimostrazione di Gregory contiene tali inperfezioni da toglierle ogni importanza; ma resta all'autore, oltre gli altri meriti già ricordati, quello grandissimo di aver posto il problema in modo chiaro e preciso, sottraendolo alle sottigliezze scolastiche a cui per l'addietro si ricorreva per interpretarlo (188).

Il metodo dei limiti può dirsi tutto racchiuso nel Lemma 1° del L. I dei *Principia* di Newton: Due quantità, la cui differenza in un tempo finito diviene minore di qualunque quantità assegnata, divengono infine eguali (189).

Qui il concetto d'eguaglianza prende una significazione più larga di quella sinora avuta. Non può più dirsi: Due quantità, o sono eguali, o non lo sono. Le quantità con cui ora abbiamo a fare non sono già fisse ma *fluenti*; due quantità di tal natura possono variare mantenendosi, in ogni loro stadio, differenti, e ciononostante noi le chiamiamo eguali, perchè esiste sempre uno stadio nel quale la loro differenza è piccola a piacer nostro.

Questo concetto di eguaglianza era stato intravisto da Fermat, ma egli non aveva avuto l'ardire di adottarlo francamente, e l'esprimeva colle parole *adaequare* o *fere aequare*.

Però Newton, volendo adattare ai bisogni dell'analisi il suo modo di vedere circa la generazione delle grandezze continue, si serve d'una doppia nomenclatura, di cui l'una è quella rigorosamente matematica del metodo dei limiti, l'altra è fondata sull'idea delle quantità evanescenti e nascenti. La cosa è veramente strana. Newton, quando s'accinse allo studio delle leggi dell'universo, ben comprese che era inutile voler partire da un'ipotesi sulla vera essenza dei fenomeni naturali, che interessava piuttosto trovare un principio matematico, in base al quale potessero stabilirsi le leggi generali, fosse pure questo principio l'espressione d'una idea fisicamente insostenibile (190). Ma egli non ispiegò la stessa libertà di spirito nello studio del continuo matematico. E di quanto danno ciò sia stato all'evidenza ed alla semplicità della sua esposizione, riesce chiaro a chi osservi come egli, per giustificare matematicamente le sue quantità nascenti ed evanescenti, debba pur sempre ricorrere al concetto di limite (191).

Del metodo dei limiti Newton volle fare un algoritmo creando il *metodo delle flussioni* (192), collo scopo precipuo di evitare l'uso di grandezze non finite. Calcolate infatti, col processo di passaggio al limite, le flussioni o derivate delle diverse quantità variabili, si hanno in esse grandezze proporzionali agli incrementi istantanei di queste, e che possono quindi in ogni caso sostituirli (193).

Il metodo delle flussioni trovò un dotto e coscienzioso espositore in Mac-Laurin. Però questi, pur facendo un uso costante del concetto di velocità, che è la base dell' idea di flussione, rinuncia ad uno de' principali vantaggi dei metodi moderni, conducendo tutte le dimostrazioni *more archimedeo*, colla riduzione all' assurdo. A fondamento della teoria egli pone quattro assiomi. Il primo (194) asserisce che lo spazio descritto nel moto accelerato è maggiore di quello che sarebbe descritto in egual tempo con moto uniforme e colla velocità iniziale; il secondo paragona il moto accelerato al moto uniforme colla velocità finale; il terzo ed il quarto si riferiscono al moto ritardato. L' uso di questi assiomi verrà chiarito dal seguente semplicissimo esempio (195). Vogliasi trovare la flussione di A^2, essendo a quella di A. La flussione di A^2 è compresa fra $(A + a)^2 - A^2$ e $A^2 - (A - a)^2$, ossia fra $2Aa + a^2$ e $2Aa - a^2$. Supposto che essa fosse maggiore di $2Aa$, e per esempio eguale a $2Aa + pa$, e preso a tanto piccolo che sia $p > a$, sarebbe $2Aa + pa > 2Aa + a^2$, ciò che è assurdo; analogamente supponendo che essa fosse minore di $2Aa$. Dunque essa è eguale a $2Aa$.

Nel C. 12 del L. I l'autore tratta del metodo degl' infinitesimi, facendone vedere la concordanza col metodo dei limiti.

L' opera di Mac-Laurin, pregevolissima per le importanti questioni geometriche, meccaniche e fisiche che vi sono trattate, è difettosa pel principio da cui parte. Infatti la definizione di velocità, quale la dà Mac-Laurin (196), e quale si trova nei trattati elementari, non è certo atta a darne una idea netta; per chiarire che cosa sia velocità, è indispensabile ricorrere al concetto di limite. Ciò posto, perchè non trattare direttamente l'analisi col metodo dei limiti, e senza introdurvi un concetto ad essa estraneo, e che a sua volta ha bisogno dell' idea di limite per essere chiaramente formulato?

Del tutto analogo al metodo delle flussioni è quello degli *incrementi*, che forma oggetto dell'opera principale di Brook Taylor (197).

Di Eulero già si disse, che il concetto d' infinitesimo da esso adottato, oltre che per sè stesso mal definito, si rivelò inadatto alle applicazioni analitiche. Egli infatti si era proposto di far uso di infinitesimi rigorosamente nulli, ma il cui rapporto fosse determinato; ma in realtà il suo metodo si riduce alla ricerca del limite del rapporto di due quantità che decrescono insieme indefinitamente (198).

L' idea, che l'analisi non ha bisogno di grandezze diverse dalle ordinarie finite, propugnata da D'Alembert, andava ognora più diffondendosi. Landen (1719-1790), nella sua opera: *The residual analysis, a new branch of the algebric art* (Londra 1764), Kramp (1760-1826) e Arbogast (1749-1811) cercarono dei metodi i quali fossero affatto indipendenti dall' infinitesimo. Più noto, benchè fallito, è il tentativo di Lagrange (1736-1813), il quale, prima in una memoria pubblicata nel 1772, poi nella *Théorie des fonctions analytiques* (Paris 1797), si propose di fondare l'analisi sullo sviluppo in serie di Taylor, e prese, per definizione, come derivata il coefficiente della prima potenza della variabile in tale sviluppo. Con ciò l'analisi veniva a perdere molto della sua semplicità e naturalezza, essa cessava di essere la traduzione scientifica del processo spontaneo della nostra mente, la quale, per indagare le leggi d' un fenomeno, è naturalmente portata a studiarne e paragonarne due o più fasi elementari successive. Le ricerche dei geometri posteriori hanno inoltre posto in chiaro, che non tutte le funzioni possono mettersi sotto la forma adottata da Lagrange come assolutamente generale. E però il suo metodo, difettoso nel principio, artificioso nella forma, venne meritamente abbandonato (199).

Appunto verso la fine dello scorso secolo, e precisamente nel 1784, l'Accademia di Berlino, di cui Lagrange era presidente, apriva un concorso sulla questione dell' infinito matematico ne' termini seguenti (200):

« L'utilité qu' on retire des Mathématiques, l'estime « qu' on a pour elles, et l'honorable dénomination de Sciences « exactes pour excellence qu'on leur donne à juste titre, sont « dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs « démonstrations, et à la précision de leurs théorèmes. — Pour « assurer à cette belle partie de nos connoissances la conti- « nuation de ces précieux avantages, on demande.

« Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle « *Infini* en Mathématique.

« On sait que la haute Géométrie fait un usage conti- « nuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cepen- « dant les Géomètres, et même les Analystes anciens, ont « évité soigneusement tout ce qui approche de l' infini ; et « de grands Analystes modernes avouent que les termes « *grandeur infinie* sont contradictoires.

« L'Académie souhaite donc qu' on explique comment on « a déduit tant de théorèmes vrais d' une supposition contra- « dictoire, et qu' on indique un principe sûr, clair, en un mot « vraiment mathématique, propre à être substitué à l'Infini, « sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches « qu' on expédie par ce moyen. On exige que cette matière « soit traitée avec toute la généralité, et avec toute la « rigueur, la clarté et la simplicité possibles.

« On invite les savants etc. ».

Il premio fu vinto da Lhuilier colla già citata *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs* (201), in cui egli si propose come scopo principale di mostrare che il metodo degli antichi, opportunamente esteso, è sufficiente ai bisogni dell' analisi (202). In sostanza però egli segue il metodo dei limiti fondandolo su alcuni teoremi di cui i principali sono i due seguenti (Cap. I):

Se due quantità variabili e suscettibili di limiti hanno un rapporto costante ed eguale ad 1, anche i loro limiti hanno lo stesso rapporto.

Se due quantità variabili e suscettibili di limiti hanno un rapporto variabile ma suscettibile di limite, il rapporto dei loro limiti è il limite del rapporto (203).

Egli definisce poi il *rapporto differenziale* di due quantità variabili come il limite dei loro rapporti, il *calcolo differenziale* come la ricerca dei rapporti delle quantità variabili.

Il Capitolo II tratta delle tangenti, il III dei rapporti differenziali di diversi ordini (204), il IV dei massimi e minimi, il V dei flessi, regressi, raggio di curvatura ed evoluta, il VI dei logaritmi, il VII e l' VIII delle quadrature e rettificazioni, il IX e il X del volume e della superficie dei solidi rotondi. Il Cap. XI è dedicato specialmente allo svolgimento della prima parte del programma di concorso; in esso l'autore critica le idee di L' Hospital, Fontenelle ed Eulero, mostra come il metodo infinitesimale si riduca a quello dei limiti, e dice potersi considerare il metodo da lui adottato come quello di Newton, reso indipendente dal concetto di moto, o meglio come lo sviluppo delle idee di D'Alembert. Il Cap. XII ed ultimo riguarda le applicazioni dell'analisi alla fisica ed alla meccanica (205).

Un' altra Memoria a cui diede occasione il concorso di Berlino, benchè non destinata ad essere presentata all'Accademia, è la prima delle già citate *Mathematische Abhandlungen* di Karsten, portante il titolo: *Vom Mathematisch-Unendlichen mit Rücksicht auf eine im Jahr 1784 aufgegebene Preisfrage.* A proposito di questo lavoro mi limito a dire, che in esso l'autore cerca di dare il senso vero delle regole del calcolo infinitesimale, e che a tal uopo ricorre, come è naturale, al concetto di limite.

Maggior celebrità ebbero le *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* di Carnot (1753-1823), di cui ho citato sopra la traduzione tedesca con note storiche di Hauff. A dir vero, quest' opuscolo avrebbe dovuto trovar posto nel capitolo precedente, potendo esso definirsi una difesa del metodo infinitesimale (206); ma ho preferito parlarne qui, perchè esso, od ebbe origine dal programma di Berlino (207), od almeno risponde, come Hauff osserva, alla prima parte di esso.

La via che segue Carnot per far vedere in qual modo avvenga che i risultati del calcolo infinitesimale, apparentemente soltanto approssimati, sieno in realtà esatti, non è certo la più semplice. Egli ricorre a due considerazioni, delle quali l'una — quella dell'arbitrarietà dei cosidetti infinitesimi — basta da sola a stabilire l'esattezza del metodo leibniziano, e l'altra — quella della compensazione degli errori — è semplicemente una conseguenza della prima, e non serve che a complicare la trattazione. — L'errore, egli dice, che nasce sostituendo ad una quantità un'altra che ne differisca per un infinitesimo, è arbitrario, e può rendersi piccolo a piacere; anzi io posso commettere parecchi errori di tal natura, pur rimanendo arbitro del grado di precisione del risultato. Ma v'ha di più: questi errori si distruggono a vicenda, poichè nei risultati finali non compare più alcuna quantità arbitraria (208). — Ora, che avvenga la compensazione degli errori, non v'ha chi possa negarlo; ma occorre cercare la ragione del fatto (209). E questa consiste appunto in ciò, che ciascun errore separatamente tende ad annullarsi, sicchè è lecito chiedersi se sia propriamente esatto parlare di *compensazione*. Ciò che poi finisce di confondere le idee, è l'introduzione delle *quantità evanescenti* (210), le quali non sono se non lo zero considerato come limite d'una e d'un'altra quantità variabile, ed hanno una grande affinità cogli infinitesimi nulli d'Eulero « qui gardent la trace de « leur origine » (211) e danno luogo a rapporti determinati.

Però, per giudicare dell'importanza delle *Réflexions*, è d'uopo considerarle come uno scritto polemico d'attualità (212). Era il tempo in cui andavano ripetendosi i tentativi di scalzare dalle fondamenta il calcolo leibniziano. Una delle prime Accademie d'Europa, presieduta da uno dei più illustri matematici dell'epoca, aveva invitato i dotti di tutto il mondo a discutere e criticare le basi del metodo infinitesimale, e poco dopo sanciva colla sua autorevole approvazione la proposta di abbatterle e sostituirle con altre più salde e incrollabili. Fu allora che Carnot, non peranco travolto dal vortice della politica, sorse in difesa del metodo leibniziano, mostrando come esso fosse degno della maggior fiducia, e protestando energicamente contro la smania degli avversari di lasciare una via comoda e piana per un sentiero tortuoso ed irto di spini. Certo i mezzi di difesa da lui usati non sono nè i più semplici nè i più perfetti; ma essi hanno aperto la via all'assetto definitivo dell'alta analisi, sicchè Carnot può veramente considerarsi come il precursore di Cauchy.

Cauchy (1789-1857), raccogliendo il germe gettato da Carnot, ben s'avvide che l'arbitrarietà dell'infinitesimo era sufficiente a stabilire l'esattezza del metodo leibniziano. Egli pertanto definì (213) l'*infinitesimo* come una grandezza variabile avente per limite zero; e disse una grandezza β *infinitesima d'ordine n* rispetto ad un'altra α se il limite di $\frac{\beta}{\alpha^n}$ al tendere a zero di α è finito e non nullo. In base a tali premesse il lemma fondamentale si riduceva, come già dissi, ad una regola pratica rigorosamente dimostrabile, e d'ora innanzi niuno avrebbe più potuto contendere al Calcolo infinitesimale il posto che gli spetta fra le scienze esatte.

Nella nostra rapida scorsa attraverso le varie epoche storiche noi vedemmo l'infinitesimo apparire timidamente per un istante in tempi assai remoti, rientrare poi dopo molti secoli nel campo delle matematiche, e quivi essere ritenuto dagli uni come uno zero, dagli altri come una quantità non nulla ma minore di qualunque assegnabile, da altri ancora come un ente inesteso ma avente in sè l'attitudine a generare l'estensione. Lo vedemmo introdotto nell'analisi, ora apertamente in forma di indivisibile o di differenziale, ora celato entro il concetto di limite; ed assistemmo alle vivaci discussioni che furono la necessaria conseguenza delle varie interpretazioni a cui poteva dar luogo il concetto d'infinitesimo.

Ora finalmente, dopo secolari dibattiti, s'operava la conciliazione tra il metodo degl'infinitesimi e quello dei limiti, e la loro fusione in uno solo. La forma ed il linguaggio dèl metodo infinitesimale, preziosi sotto tanti rapporti, venivano conservati in tutti i loro particolari; ma al concetto indeterminato dell' infinitesimo leibniziano veniva sostituito un concetto rigorosamente definito in base all' idea di limite. Il nome d' *infinitesimo* diveniva un appellativo improprio d' una quantità finita variabile e tendente a zero; ed appariva finalmente in chiara luce la verità già da molti preconizzata (214), che fra le grandezze le quali si presentano nello studio dei fenomeni della natura non ve n' ha alcuna che non appartenga al campo delle ordinarie grandezze finite (215).

NOTE.

(1) Du Bois-Reymond (*Die allgemeine Functionentheorie*, Tübingen 1882 § 30) scrive: « In der That ist eine unend- « liche Operation, ohne eine Vorschrift nach welcher sie « fortgesetzt werden soll, eine *contradictio in adjecto* ».

(2) È notevole il passo seguente di Guldino, ispirato alle idee stesse a cui s' informa la divisione qui adottata: « Quemadmodum autem in potestatibus directis, eas » (le po- « testà rotonde, cioè gli enti geometrici generati mediante rotazione) « concipimus aliter generari, et aliter quodammodo « componi. Genesin enim imaginamur nobis fieri per motum « continuum continui, abstrahendo nimirum mentem a par- « tibus.... Compositionem vero ex partibus instituimus, et qua « ratione totum inde colligatur attendimus, motu illo imagi- « nario continuo continui interim quasi seposito. Et sic ge- « nesis theoricam tantum spectat, et speculationem pure « geometricam: compositio vero factionem et praxim quodam- « modo simul aritmeticam ». Guldino, *De centro gravitatis*, L. II, Vienna 1640, p. 145.

Nè è raro il caso di scienziati i quali abbiano concepito l' infinitesimo sotto una data forma, e l' abbiano introdotto nelle loro ricerche analitiche sotto forma del tutto diversa. Basti citare due nomi illustri: Bonaventura Cavalieri e Leonardo Eulero.

(3) Chi voglia approfondire la parte filosofica dell' argomento potrà ricorrere, per la filosofia greca, alla classica *Philosophie der Griechen* di Zeller, e per l' evo medio e mo-

derno, all'eccellente *Geschichte der Atomistik vom Mittelalter bis Newton* di Lasswitz (Hamburg und Leipzig, 1890), nonchè alla monografia di Cohen: *Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte* (Berlin 1883).

(4) Ecco i titoli d'alcuni di tali lavori:

Barbieri, *Considerazioni sopra la metafisica del calcolo differenziale propriamente detto,* Modena 1804.

Caluso, *Sul paragone del calcolo delle funzioni derivate coi metodi anteriori,* Verona 1808.

Clemm, *Erste Gründe aller mathematischen Wissenschaft,* Stuttgart 1777.

Collalto, *Identità del calcolo differenziale con quello delle serie, ovvero il metodo degli infinitamente piccoli di Leibnizio spiegato e dimostrato colla teoria delle funzioni di Lagrange,* Milano 1802.

Conti, *Della vera esposizione del calcolo differenziale,* Padova 1817.

Fiorentino, *Saggio sulle quantità infinitesime, e sulle forze vive e morte,* s. l. e a. (Napoli, fine del secolo scorso).

Genty, *Influence de Fermat sur son siècle,* Orléans 1784.

Krafft, *Dissertatio de infinito mathematico,* Tübingen 1752.

Langsdorf, *Über Newton's, Euler's, Kästner's und Konsorten Pfuschereien in der Mathematik,* Heidelberg 1807.

Pfleiderer, *Kepleri methodus solida quaedam sua dimetiendi illustrata et cum methodis geometrarum posteriorum comparata,* Tübingen 1795.

Ploucquet, *Methodus tractandi infinita in mathematica,* Berlin 1748.

Romagnosi, *Dell'insegnamento primitivo delle matematiche,* Milano 1822.

Saladini, *Elementa geometriae infinitesimorum,* Bologna 1760.

Spehr, *Neue Principien des Fluentencalculs,* Braunschweig 1826.

Tobiesen, *Principia atque historia inventionis calculi differentalis et integralis nec non methodi fluxionum,* Göttingen 1793.

(5) *Sull' infinitesimo attuale,* Rivista di matematica, T. I p. 135–153, 248–255. Prima ancora G. Cantor ha notato come Leibniz si trovi in contraddizione con sè stesso riguardo al problema dell' infinito. V. *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre,* Leipzig 1883, p. 16.

(6) Ecco alcuni passi delle opere di Leibniz, in cui è espressa l' idea che l' infinitesimo attuale non esiste, e che le cosidette grandezze infinitesime del Calcolo sono quantità finite variabili.

« Concipitur in illis » (nelle serie di numeri) « terminus « ultimus, numerus infinitus, vel infinite parvus, sed omnia haec « nihil aliud sunt, quam fictiones. Numerus omnis finitus est « et adsignabilis, omnis linea simili se habet ratione, et infinita « aut infinite parva nihil aliud significant, quam magnitu- « dines, quae tam magnae aut tam parvae sumi queunt, « quam libuerit, ut nimirum ostendatur, errorem esse minorem « quolibet dato, hoc est, errorem revera nullum esse ». Leibniz, *Opera omnia*, ed. Dutens, Ginevra 1768, T. I p. 107 (1710). — « Je leur » (all' abate Gallois e ad altri) « témoignai que « je ne croyois point qu' il y êut des grandeurs véritablement « infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n' etoit que « des fictions.... Et plus on faisoit la proportion ou l' inter- « valle grand entre ces degrés, plus on aprochoit de l'exacti- « tude, et plus on pouvoit rendre l' erreur petite et même la « retrancher tout d' un coup par la fiction d' un intervalle « infini, qui pouvoit toujours être réalisée à la façon de dé- « montrer d'Archimède ». Ivi, T. III p. 500–501 (1716). — « Pour dire le vray, je ne suis pas trop persuadé moy même, « qu' il faut considerer nos infinis et infiniment petits autre- « ment que comme des choses ideales ou comme des fictions « bien fondées. Je croy qu' il n' y a point de creature au « dessous de la quelle il n' y ait une infinité de creatures, « cependant je ne crois point qu' il y en ait, ny même qu' il « y en puisse avoir d' infiniment petites, et c' est ce que je « crois pouvoir demonstrer. Il est que les substances simples « (c' est à dire qui ne sont pas des estres par aggregation) « sont veritablement indivisibles, mais elles sont immate-

« rielles, et ne sont que principes d'action ». Leibnizens *ma-*
« *thematische Schriften herausgegeben von* Gerhardt, Berlin « 1849-1850, Halle 1855-1863, T. IV p. 110 (1702). — « Caeterum mea sententia est, saepius exposita, infinite par- « vas pariter atque infinitas quantitates esse fictiones quidem, « sed utiles ad ratiocinandum compendiose simul ac tuto. Et « sufficere ut capiantur vere tam parvae quam opus est, ut « error sit minor dato; unde ostenditur, nullus ». Ivi p. 218 (1713). — « .... nego, proprie dari numerum infinitum vel « infinite parvum.... Itaque jam olim judicavi, cum infinite « parvum esse errorem dicimus, intelligi dato quovis minorem, « revera nullum ». Ivi, T. V p. 389 (1712). — « Et uti in- « finiti sunt numeri fracti assignabiles, alii aliis majores, ut « tamen non sit necesse venire ad infinite parva, ita idem « de lineis sentio. Geometria non probat dari quantitates « infinitesimas ». *Briefwechsel zwischen Leibniz und Chr. Wolf*, *herausgegeben von* Gerhardt, Halle 1860, p. 141 (1711).

Dai passi seguenti risulterebbe invece avere Leibniz ammesso l' infinitesimo attuale:

« J' appelle *grandeurs incomparables* dont l'une multi- « pliée par quelque nombre fini que ce soit, ne sçauroit ex- « ceder l'autre ». Leibniz ed. Gerhardt, T. II p. 288 (1695). — « Putem praestare, ut elementa vel differentialia momen- « tanea considerentur velut quantitates more meo, quam ut « pro nihilis habeantur ». Ivi, T. IV p. 54 (1698). — « Les « infinis et les infiniment petits sont tellement fondés que « tout se fait dans la geometrie, et même dans la nature, « comme si c'estoient des parfaites realités ». Ivi, p. 93 (1702). — « Caeterum aequalia esse puto, non tantum quo- « rum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia « est incomparabiliter parva; et licet ea Nihil omnino dici non « debeat, non tamen est quantitas comparabilis cum ipsis, « quorum est differentia. Quemadmodum si lineae punctum « alterius lineae addas, vel superficiei lineam, quantitatem « non auges. Idem est, si lineam quidem lineae addas, sed « incomparabiliter minorem. Nec ulla constructione tale aug- « mentum exhiberi potest. Et hoc ipsum est, quod dicitur

« differentiam esse data quavis minorem ». Ivi, T. V p. 322 (1695). — « Dantur et quantitates *inassignabiles*, eaeque vel « infinitae, vel infinite parvae seu infinitesimae, eaeque rursus « varii gradus ». Ivi, T. VII p. 68. — « Sciendum est autem « non componi lineam ex punctis, nec superficiem ex lineis, « nec corpus ex superficiebus, sed lineam ex lineolis, super- « ciem ex superficieculis, corpus ex corpusculis infinite par- « vis ». Ivi, p. 273.

Assai più numerosi sono i passi in cui Leibniz si confessa incerto sull'esistenza delle quantità infinitesime, oppure dichiara essere indifferente considerare i differenziali come attualmente infinitesimi o come arbitrariamente piccoli. Eccone alcuni:

« Il suffit aux mathématiciens, pour la rigueur de leurs « démonstrations, de prendre, au lieu des grandeurs infiniment « petites, d'aussi petites qu'il en faut, pour montrer que « l'erreur est moindre que celle qu'un adversaire vouloit « assigner, et par conséquent qu'on n'en sauroit assigner « aucune; de sorte que quand les infiniment petits *exacts*, qui « terminent la diminution des assignations, ne seroient que « comme les racines imaginaires, cela ne nuiroit point au « calcul infinitésimal ». Leibniz ed. Dutens, T. II p. 91 (1702). — « Ego philosophice loquendo non magis statuo magni- « tudines infinite parvas quam infinite magnas, seu non ma- « gis infinitesimas quam infinitas. Utrasque enim per modum « loquendi compendiosum pro mentis fictionibus habeo, ad « calculum aptis, quales etiam sunt radices imaginariae in « Algebra. Interim demonstravi, magnum has expressiones « usum habere ad compendium cogitandi adeoque ad inven- « tionem; et in errorem ducere non posse, cum pro infinite « parvo substituere sufficiat tam parvum quam quis volet, « ut error sit minor dato, unde consequitur errorem dari « non posse » Ivi, p. 267-268. — « Hinc pro infinite magnis « et infinite parvis sumo utcunque magna et utcunque parva, « et si sic error possit fieri dato minor, tuta est methodus ». Leibniz ed. Gerhardt, T. III p. 81 (1703). — « Fortasse in- « finita, quae concipimus, et infinite parva imaginaria sunt ».

Ivi, p. 499 (1698). — « .... sed illud adhuc quaeritur, an ulla « usquam portio detur materiae, quae ad aliam portionem « habeat rationem inassignabilem, seu an detur recta utrinque « terminata, quae tamen ad aliam rectam habeat rationem in- « finitam vel infinite parvam. In Calculo haec utiliter assu- « mimus : sed hinc non sequitur extare posse in natura ». Ivi p. 516 (1698). — « Verae enim an fictitiae sint quantitates « inassignabiles, non disputo... itaque notavi, si quis incom- « parabiliter vel quantum satis parva pro infinite parvis sub- « stituat, me non repugnare ». Ivi, T. IV p. 63 (1699). — « Mon dessein a esté de marquer, qu'on n'a point besoin « de faire dependre l'analyse mathematique des controverses « metaphysiques, ni de s'asseurer qu'il y a dans la nature « des lignes infiniment petites, à la rigueur, ou comparaison « des nostres, ny par consequent qu'il y a des lignes infini- « ment plus grandes que les nostres. C'est pourquoy à fin « d'eviter ces subtilités, j'ay cru que pour rendre le raison- « nement sensible à tout le monde il suffisoit d'expliquer « icy l'infini par l'incomparable, c'est à dire de concevoir « des quantités incomparablement plus grandes ou plus pe- « tites que les nostres.... Et c'est pour cet effet que j'ay « donné un jour des lemmes des incomparables dans les « Actes de Leipsic, qu'on peut entendre comme on veut, soit « des infinis à la rigueur, soit des grandeurs seulement, qui « n'entrent en ligne de compte les unes au prix des autres. « Mais il faut considerer en même temps, que ces incompa- « rables communs mêmes n'estant nullement fixes ou deter- « minés et pouvant estre pris aussi petits qu'on veut dans « nos raisonnements geometriques, font l'effect des infiniment « petits rigoureux ». Ivi, p. 91-92 (1702). — « Ex his jam in- « telligitur, calculum differentialem posse concipi tamquam « si fieret non nisi in quantitatibus ordinariis, tametsi origo « ex inassignabilibus petenda sit, ut abjectionum seu destruc- « tionum ratio reddatur ». Ivi, T. V p. 327-328 (1695). — « .... on n'a pas besoin de prendre l'infini à la rigueur.... « car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend « des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut ».

Ivi, p. 350 (1701). — « Itaque si quis nolit adhibere infinite « parvas, potest assumere tam parvas quam sufficere judicat, « ut sint incomparabiles et errorem nullius momenti, imo dato « minorem producant ». Ivi, T. VI p. 151. — « .... so wird « er leicht sehen, wie dergestalt, wenn man infinite parva nur « ad incomparabiliter parva reduciret, der error dato minor, « id est nullus, zu machen ». Ivi, T. VII p. 364.

Infine nella *Hypothesis physica nova* (Leibniz ed. Gerhardt, T. VI [1670]) Leibniz adotta l'idea di *conatus* introdotta da Hobbes (su cui vedi più avanti). Allo stesso concetto sembrano alludere le parole seguenti:

« .... vel saltem per infinite parvum intelligitur status « quantitatis evanescentis vel nascentis, ad instar magnitu- « dinum jam formatarum conceptus ». Leibniz ed. Dutens, T. I p. 107 (1702).

(7) « Infinite parva impossibilia sunt.... Quoniam quanti- « tates infinitae et infinite parvae mathematicorum non sunt « verae quantitates, sed saltem imaginariae; *infinitum mathe- « maticorum tantummodo modus loquendi est, quo plura adesse « dicimus, quam quae numero comprehendi possunt.* Monuit « hoc jam Leibnitius in Actis Eruditorum A. 1712 p. 168 « qui, cum studium metaphysicae cum studio geometriae con- « junxisset, inter reale et imaginarium distinxit et a concep- « tibus chimaericis sibi cavit ». Wolf, *Philosophia prima sive ontologia*, III ed., Verona 1736, p. 357-358.

« Leibniz.... reduisit ses infiniment petits à n'être que « des incomparables.... Cette idée ne s'accorde guere à la « vérité avec l'exactitude géométrique des calculs, mais elle « fait voir du moins que Leibniz étoit bien éloigné d'admettre « cette sorte d'infinis ». Gerdil, *De l'infini absolu considéré dans la grandeur*, Misc. Taurinensia, T. II (1760-1761) P. III p. 4.

« M. de Leibniz, pour éviter toute équivoque, les appe- « loit des incomparables, aux quels il n'attribuoit aucune « qualité infinie; bien loin de là dès l'année 1684 il avoit « dit que le mouvement le plus rapide est contradictoire, et « en 1712, peu de temps avant sa mort, car il est mort en

« 1716, il donna un mémoire aux Actes de Leipsic par le-
« quel on peut se convaincre qu' il n' admettoit ni lignes ni
« nombres réellement infinis; qu' il soutenait au contraire po-
« sitivement que l' infini ne pouvoit avoir lieu, que le terme
« en étoit permis, mais qu' il faloit l' entendre comme une
« maniere de parler ». Achard, *Réflexions sur l' infini mathé-matique,* Hist de l'Ac. de Berlin, T. I (1745) p. 153.

« Il existe relativement à Leibniz une tradition inexacte,
« d'après laquelle il aurait admis l' existence des pseudo-
« infiniment petits » (quantità attualmente infinitesime) « ... En
« réalité, Leibniz a employé, comme la plupart de ses con-
« temporains, le langage conventionnel de la méthode des
« indivisibles, mais en l' interprétant dans le sens de la mé-
« thode des indéfiniment petits. Quelques citations caracté-
« ristiques suffiront pour le prouver ». Mansion, *Esquisse de l' histoire du calcul infinitésimal,* Gand 1887, p. 28.

(8) « Quaevis materiae particula, si doctissimum Leibnit-
« zium audias, infinita est, non potestate dumtaxat, sed actu
« ipso, ut Scholae loquuntur: en ejus verba.... » Grandi, *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica,* Pisa 1710, p. 97.

(9) Cohen, op. cit., p. 52 e segg. — Lasswitz, op. cit., L. V C. III.

(10) Prima di parlare di Leibniz e de' suoi scolari, avrei dovuto, per l' ordine cronologico, accennare a Galileo. Però siccome egli non ha fatto servire l' idea della divisibilità infinita del continuo ad applicazioni matematiche, ma al contrario si è valso della matematica per stabilire il suo asserto, così basterà farne qui un breve cenno. Nei suoi *Discorsi e dimostrazioni matematiche* egli discute a lungo la questione, e conclude, per bocca di Salviati: « e così abbiamo il continuo
« composto d' infiniti indivisibili » (*Opere* di Galileo Galilei, Milano 1811, T. VIII p. 63). Più oltre (pag. 84 e segg.) dice che, non solo la retta è divisibile in infiniti non quanti o indivisibili, ma che tale divisione può anche idealmente effettuarsi piegando la retta in forma di circonferenza. Le stesse idee si trovano riprodotte nelle *Postille alle esercita-*

zioni filosofiche d'Antonio Rocco, dove si leggono le seguenti parole:

«.... vi rispondo concedendovi esser difficile, e sin qui «stata quasi inintelligibile, ma non giammai falsa la compo- «sizione della linea di punti, e del continuo d'indivisibili.... «dico, che è verissimo, e necessario che la linea sia com- «posta di punti, ed il continuo d'indivisibili». Ivi, T. X p. 345.

(11) V. sopra nota 7. Assai meno decisa era la sua opi- nione sull'impossibilità dell'infinitesimo attuale al principio della sua carriera scientifica; infatti egli scriveva (*Dissertatio algebraica de algorithmo infinitesimali differentiali,* Leipzig 1704, p. 3-4):

«Quantitatem igitur omni assignabili majorem vocamus «*infinitam*: omni assignabili minorem *infinitesimam*.... Quo- «niam infinitesima infinities sumenda, antequam datam adae- quat, cujus pars infinite parva existit; ejus neglectus producet «errorem infinite parvum, h. e. omni assignabili minorem, «consequenter nil obstat, quominus in calculo analytico pro «nihilo habeatur respectu datae».

(12) Prima delle parole riportate nella nota 8 si trovano le seguenti:

«.... magnitudinum quippe finitarum divisibilitas in infi- «nitum tot physicis et geometricis argumentis demonstrata, «et apud sapientes omnes jam inconcussa, arguit ipsasmet «ad quoddam infiniti genus pariter pertinere, tametsi, quia «nobis ordinarie tractandae occurrunt, ab infinitis secerni et «peculiari nomine finitarum designari consueverint.»

Invece a p. 25 della stessa opera si legge:

«Caeterum hic pariter observandum est, nec magnitu- «dines has infinite parvas concipi debere velut determinatas «aut determinabiles quasdam portiones quantitatum, quae cer- «tam et definitam parvitatem obtineant; quascunque enim «portiunculas linearum.... acceperimus, aut designaverimus, «hae semper reipsa finitae erunt, non infinite parvae: itaque «non sunt intra certos terminos, quantumvis proximos coarc- «tandae, sed concipiendae sunt ex una dumtaxat parte, ad

« summum limitatae.... ex altera vero parte fixum limitem « non habentes, sed alteri extremo semper propius acce- « dentem.... intervallo utrisque interposito infra quamlibet « assignabilem magnitudinem perpetuo decrescente.... Unde « hae magnitudines semper ut decrescentes ac perpetuo di- « minuendae accipi debent, ut suo infra omnem assignabilem « quantitatem decremento sub ratione infinite parvarum sive « infinitesimarum partium intelligi possint ».

(13) « Nihilominus quia in arithmetica infinitorum linea « ut pars infinitesima corporis concipitur; potest ejus ad su- « perficiem *ratio* dici *infinite exigua* ». Iac. Bernoulli, *Opera*, Ginevra 1744, p. 371.

« Finitum quoque ad infinitum, licet homogeneum, linea « finita ad infinitam, rationem nullam, vel, si dicere mavis, « infinite exiguam habet ». Ivi. — « Quod data quavis quan- « titate minus est, illud est non-quantum seu nihil ». Ivi, p. 379.

(14) « Sicut nec corpus infinitum, ita nec atomum dari « posse credo; sed utrumque nudam mentis fictionem esse « puto, quae postquam corpus corpori aliquandiu addidit « ademitve, pertaesa tandem operationis sine fine repetendae, « omnes multiplicationes vel divisiones uno immani saltu tran- « silit, ultimamque jam factam esse, quam tamen umquam « fieri repugnat, προληπτικῶς supponit ». Ivi, p. 400. — « Je « conjecture donc que votre illusion procede de ce que vous « envisagés le dy comme quelque chose de determiné dans « la nature, au lieu que ce n'est qu'une fiction d'esprit, et « ne consiste que dans une fluxion perpetuelle vers le neant, « qui est cause que cette raison $\frac{2yy + dy^2}{4yy - dy^2}$ est toujours va- « riable, et ne devient fixe, que lorsque dy est parfaitement « rien et la raison ne differe plus aucunement de la soûdou- « ble ». Lettera di Iac. Bernoulli a Detlef Clüver 27 gennaio 1697 (Leibniz ed. Gerhardt, T. III p. 55).

(15) « Axioma Euclideum: Si ab aequalibus aequalia « auferas, residua sunt aequalia, absolute verum non est, « quando residua haec incomparabiliter parva sunt respectu

«datarum vel ablatarum magnitudinum». Iac. Bernoulli, *Opera*, p. 765.

(16) «Quand une fois on l'aura bien comprise» (la metafisica del calcolo differenziale) «on sentira que la suppo-«sition que l'on y fait de quantités infiniment petites n'est «que pour abréger et simplifier les raisonnemens; mais «que dans le fond le calcul différentiel ne suppose point «nécessairement l'existence de ces quantités; que ce calcul «ne consiste qu'à *déterminer algébriquement la limite d'un «rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, et à «égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes «que l'on cherche*». *Encyclopédie française*, art. *Différentiel*. — «.... l'*infini*, tel que l'analyse le considère, est propre-«ment la *limite* du fini». D'Alembert, *Mélanges de littérature, d'histoire et de philosophie*, Amsterdam 1766-1767, T. V p. 240. — (le espressioni in cui entra l'infinito) «*ne doivent «être regardées que comme des manières abrégées de s'expri-«mer, que les mathématiciens ont inventées pour énoncer une «vérité, dont le développement et l'énoncé exact auraient de-«mandé beaucoup plus de mots*». Ivi, p. 244.

(17) Sul concetto d'infinitesimo secondo Eulero vedi:

Karsten, *Mathematische Abhandlungen*, Halle 1786, p. 92 e segg.

Stolz, *Die unendlich kleinen Grössen*, Berichte des naturw-med. Vereins in Innsbruck, T. XIV, 1884, p. 21-43.

Stolz, *Grössen und Zahlen*, Leipzig 1891.

(18) Non è quindi del tutto esatto il dire che il Calcolo di Eulero sia «fondé sur la théorie des infiniment petits «nuls» (Mansion, op. cit., p. 31).

(19) «Sed quantitas infinite parva nil aliud est nisi «quantitas evanescens, ideoque revera erit = 0. Consentit «quoque ea infinite parvorum definitio, qua dicuntur omni «quantitate assignabili minora; si enim quantitas tam fuerit «parva, ut omni quantitate assignabili sit minor, ea certe «non poterit non esse nulla; namque nisi esset = 0, quan-«titas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypo-«thesin. Quaerenti ergo, quid sit quantitas infinite parva in

« mathesi, respondemus eam esse revera $= 0$ ». Eulero, *Institutiones calculi differentialis*, Pavia 1787, § 83.

(20) « Haecque idea aliis occasionem praebuit analysin « infinitorum accusandi, quod non veras quantitates eliciat, « sed tantum vero proximas; quae objectio semper aliquam « vim retineret, nisi infinite parva prorsus nihilo aequalia « statueremus ». Ivi, § 122.

(21) « Verum quamquam duo quaevis cyphrae ita inter « se sunt aequales, ut earum differentia sit nihil: tamen, cum « duo sint modi comparationis, alter arithmeticus, alter geo- « metricus; quorum illo differentiam, hoc vero quotum ex quan- « titatibus comparatis ortum spectamus; ratio quidem arith- « metica inter binas quasque cyphras est aequalitatis, non « vero ratio geometrica ». Ivi, § 84. — « .... cuilibet enim « notum est, cyphram per quemvis numerum multiplicatam « dare cyphram, esseque $n. 0 = 0$, sicque fore $n : 1 = 0 : 0$. « Unde patet fieri posse, ut duae cyphrae quamcumque inter « se rationem geometricam teneant.... In calculo autem infi- « nite parvorum nil aliud agitur, nisi ut ratio geometrica inter « varia infinite parva indagetur ». Ivi, § 85.

(22) Torelli (*De nihilo geometrico libri duo,* Verona 1758; v. Stolz, *Grössen und Zahlen,* p. 15), Carnot, (*Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal,* Paris 1797).

(23) Mem. cit.

(24) *Grössen und Zahlen*, p. 14.

(25) Leibniz ed. Gerhardt, T. III. Cito soltanto il seguente curioso passo d'una lettera di Giov. Bernoulli a Leibniz in data 7 gennaio 1699 (ivi, p. 563): « Propositionem hanc: « Si infiniti numero sunt termini in serie, ut $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots,$ « existit infinitesimus, ita facile probo: Si decem sunt ter- « mini, existit utique decimus; si centum sunt termini, existit « utique centesimus; si mille sunt termini, existit utique « millesimus; ergo si numero infiniti sunt termini, existit « infinitesimus ».

(26) Nota 6ª, seconda citazione.

(27) Leibniz ed. Dutens, T. III p. 501.

(28) Leibniz ed. Gerhardt, T. IV p. 89. Si vedrà più innanzi come Varignon, dal punto di vista analitico, considerasse invece l'infinitesimo come una quantità finita continuamente decrescente.

(29) « Un point n'a aucune étendue, c'est zéro d'étendue. « Or $0 \times \infty = 0$. Donc un point, quoique infiniment répété, ne peut faire une étendue ou une ligne.

« Mais $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$. Donc il faut concevoir la ligne « finie comme formée, non par des points, mais par une in- « finité de lignes infiniment petites.

« Ce n'est pas qu'on ne puisse concevoir le point, et « qu'on ne doive même le supposer en géométrie : mais il « ne faut pas le concevoir comme élément ou partie infini- « tième de la ligne : et si la ligne est réellement composée « de points, elle l'est d'une manière qui nous échappe, et « qui ne tombe pas sous notre calcul. La géométrie est toute « intellectuelle, et a pour objet non la grandeur physique « précisément, mais la grandeur telle que nous sommes « obligés de la concevoir.

« S'il y a quelque ligne qu'il faille concevoir comme « composée de points, c'est la courbe. La nouvelle géométrie « qui considère les courbes comme formées de droites infi- « niment petites, passe pour ne donner qu'une supposition « infiniment approchante du vrai, une approximation infinie « des courbes réelles, qui n'ont aucunes parties droites, et « par conséquent ne sont formées que de points. Ceux même « qui ont fait naître, ou le plus perfectionné cette géométrie, « semblent en convenir, et il se contentent d'avoir donné « un grand nombre de méthodes infiniment avantageuses « fondées sur cette supposition. Cependant j'ose avancer que « les courbes réelles ne sont point composées de points, ou « du moins ne peuvent être conçues sous cette idée.

« Une droite n'est point par elle-même divisée en parties, « elle n'a que celles que lui donne une division arbitraire : « mais la nature de la courbe réelle consistant dans une « *flexion* continuelle, elle a par elle-même pour parties élé-

« mentaires et composantes, celles que cette flexion rend « distinctes les unes des autres. Or il s'agit de savoir si « ces parties sont des points ou des droites infiniment petites.

« Tous les géomètres conviennent, qu'une courbe est « toujours différemment inclinée à son axe, ou, ce qui revient « au même, que ses parties élémentaires sont toutes diffé- « remment posées par rapport à cette axe. Ce ne sont donc « pas des points, car des points n'ont aucune position par « rapport à une droite, ce sont donc des lignes infiniment « petites.

« Tout le monde convient aussi que toutes les courbes « peuvent être décrites par des mouvemens, et il y en a un « grand nombre, telles que les spirales, les cycloides etc, que « l'on conçoit nécessairement comme décrites de cette ma- « nière, et l'on convient de même que ces mouvemens, qui « tracent des courbes, doivent changer de direction à chaque « instant. Or un mouvement ne peut changer de direction à « chaque instant, s' il n' en a une pendant chaque instant, et « pour en avoir une, il faut qu'il suive une ligne droite, qui « sera infiniment petite, puisque la durée du mouvement selon « cette direction sera un instant infiniment petit. Donc etc.

« Les courbes réelles ne sont donc que des polygones « rectilignes infinis, et les courbes *rigoureuses*, ou *exactes*, « qu'on opposoit à ces courbes polygones, ne sont point « réelles ». Fontenelle, *Élémens de la géométrie de l'infini*, Suite des Mémoires de l'Académie Royale des Sciences (1725), Paris 1727, p. 449-450.

« Venons aux plans. Je dis qu' ils ne sont pas formés « précisément de lignes. S' ils l' étoient, il faudrait concevoir « un parallélogramme fini comme formé d' une infinité de « lignes posées sur un de ses côtés parallèlement à l' autre, « et toutes égales, dont la somme feroit l' aire du parallélo- « gramme. Or la somme de toutes ces lignes finies égales « seroit infinie. Donc cette idée n'est pas vraie ». Ivi, p. 452.

Veggasi pure la Prefazione di Fontenelle alla *Analyse des infiniment petits* di L' Hospital, la quale si trova anche nelle opere di Fontenelle, Parigi 1766, T. X p. 31-44.

(30) Eccone il tenore: « Exposition de mon ancienne « façon de concevoir les Infiniment petits de tout ordre. — « Mon but, dans cette ancienne recherche, étoit d'assigner, « une bonne fois, aux Infiniment-petits de tout genre et de « tout ordre, une constitution, qui me permît ensuite et tou- « jours, de les traiter hardiment comme des quantités déter- « minées, finies mais négligibles; et qui fût applicable aux « êtres réels, comme aux êtres hypothétiques.

« Pour cet effet je substituai aux quantités moindres « qu'aucune assignée, et à celles qu'on pourroit prétendre « être moindres qu'aucune assignable, des quantités moindres « qu'aucune qu'on assignera réellement jamais; ou plutôt, « des parcelles qu'on peut négliger relativement à leurs touts, « sans aucune erreur qui devienne jamais réellement sensible.

« Effectivement, de telles quantités sont vraiment déter- « minées, puisque toute application qu'on fera réellement « jamais, de quelque proposition que ce soit, est déterminée « en soi, quoique actuellement inconnue: vu que tous les « futurs contingents sont déterminés, n'y eût-il même aucun « être qui les prévît, ni aucun *Nexus* entre ces futurs-là et « le présent ».

(31) Poisson, *Traité de mécanique,* III ed., Bruxelles 1838, p. 6-7.

(32) « Recta quae ad diametrum circuli in termino per- « pendicularis erigitur, extra circulum cadet, nec in spatium « inter rectam et ambitum ulla alia recta interponetur, et « angulus semicirculi quovis acuto angulo rectilineo maior « est, reliquus autem minor ». Euclidis *Elementa* ed. Heiberg, T. I, Leipzig 1883, p. 209.

(33) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* T. II, Leipzig 1892, p. 71.

(34) Questa asserzione, mentre per alcuni ha servito di arme per combattere l'idea che l'angolo di contatto sia una grandezza, fu invece accettata da altri senza difficoltà. P. es. Stifel scrive (*Arithmetica integra,* Norimberga 1544, f. 226 a): « Argumentum hoc physicum est, si sic colligas, Dabile est « quadratum circulo dato majus, et dabile est quadratum cir-

« culo eodem dato minus, ergo dabile est quadratum illi « eidem circulo aequale. Non sequitur ». — E Alberto di Sassonia (n. 1390) nel trattato *De quadratura circuli* (pubblicato da Suter nella Zeitschrift für Math. und Phys., T. XXIX, 1884, Hla. p. 81-101): « potest enim fieri transitus « de minore ad majus transeundo quodlibet punctum inter « majus et minus, et nunquam pervenire ad equale. Verbi « gratia: aliquis enim angulus rectilineus est minor angulo « portionis et aliquis est major eodem, sicut est angulus rec- « tus: et possibile est quod angulus rectilineus acutus con- « tinue augeatur, donec fit equalis angulo recto, et tamen « nunquam fit equalis angulo portionis ».

(35) Euclide, ed. Campano, Basilea 1537, p. 67.

(36) Ivi, p. 66.

(37) Ecco il tenore di questa proposizione: « Propositis « duabus magnitudinibus inaequalibus, si a majore plus quam « dimidium subtrahitur, et a reliqua plus quam dimidium, « et hoc semper fit, magnitudo relinquitur, quae minor erit « proposita magnitudine minore ». Eucl. ed. Heiberg, T. III, Leipzig 1886, p. 5.

(38) « Attendere autem oportet, quod huic propositioni » (prop. 1, L. X) « videtur quinta-decima tertii contradicere, « proponens angulum contingentiae minorem fore quolibet « angulo a duabus lineis rectis contento. Posito enim angulo « quolibet rectilineo, si ab ipso majus dimidio dematur, item- « que de residuo majus dimidio, necesse videtur hoc toties « posse fieri quousque angulus rectilineus minor angulo con- « tingentiae relinquatur, cuius oppositum quintadecima tertii « syllogizat. Sed hi non sunt univoce anguli, non enim ejus- « dem sunt generis simpliciter curvum et rectum. Et vero « nec angulum contingentiae toties contingit sumi, ut qua- « lemcumque rectilineum excedat, quod necessarium est (ut « ex praehabita demonstratione patet) ad hoc ut consequens ex « antecedente sequatur. Planum ergo est etiam quemlibet « angulum rectilineum infinitis angulis contingentiae esse ma- « jorem ». Eucl. ed. Campano, p. 244.

(39) *De subtilitate*, L. XVI (*Opere*, Lione 1663, T. III).

(40) « Nullus angulus rectilineus aequalis esse potest « alicui angulo contento recta et circuli portione ». Cardano, *Opere*, T. IV p. 543.

(41) « Dato angulo contento duabus peripheriis aequa- « lium circulorum se secantium aequale rectilineum illi fa- « bricare. Ivi, p. 544.

(42) « Praeterea illud repugnare videtur ipsimet Euclidi, « dicenti duabus magnitudinibus propositis inaequalibus, si « de majore earum plus dimidio detrahatur, atque idem de « residuo majus dimidio, et rursus de eo quod relinquitur « plus dimidio, necesse erit ut tandem minor minore quan- « titas relinquatur. Neque illud argumentum videtur conclu- « dere, angulus contactus ex recta et circuli circumferentia « non potest dividi, et rectilineus potest dividi, ergo rectili- « lineus semper major est angulo contactus, quia hoc contingit « in angulo contactus propter modum anguli, non parvitatem: « sicut etiam valet de figura *a* lunari et quadrangulo *b* » (Fig. 7) « Nam potest *b* dividi ab angulo ad angulum recta et *a* « non potest, et tamen *a* majus est quam *b*, cum contineat « ipsam ». Ivi, p. 545. — Il ragionamento che segue per dimostrare che l'angolo di contatto è maggiore di qualche angolo rettilineo trovasi riprodotto in M. Cantor, op. cit., T. II p. 492.

(43) « Ratio autem quod omnis angulus contactus indi- « viduus est, seu duorum circulorum, seu circuli cum recta, « est, quoniam cum fuerint duae rationes contrariae, et una « perpetuo minuitur, alia manet, necesse est, ut tandem, quae « minuitur, superetur ab ea quae manet: cum ergo circuli « curvitas maneat, et angulus tendat in punctum perpetua « diminutione, necesse est, ut curvitas circuli impediat divi- « sionem rectae: sed hoc habet duplicem obicem etc ». Car- dano, ivi, p. 546.

(44) Cantor, op, cit., T. II p. 510-511.

(45) « Ex his emerget hoc pronunciatum, quod in geo- « metria nemo hactenus admittendum esse cogitavit, Anguli « qui fiunt a diametro et peripheria, sive intra sive extra « circulum, recti sunt et rectis rectilineis aequales ». Eucl

ed. Peletarius, II ed., Ginevra 1610, p. 132. — V. anche ivi p. 299 (lettera a Cardano).

(46) Ivi, p. 129.

(47) « Primum enim extra intelligentiam est, ut inter « quantitates minima dari possit... Nihilo magis convenit, ut « maxima quantitas detur.... Quantitatis etiam continuae in « infinitum sectio est ». Ivi p. 128.

(48) Ivi, p. 133. — Peletier scrisse pure, nel 1579, una *Apologia* contro le prime obiezioni di Clavio, che non mi fu possibile di consultare.

(49) Dapprima nella 1ª ed. d'Euclide (1514), poi, in seguito all'*Apologia* di Peletier, in un'opera sui triangoli sferici (1586) e nelle edizioni successive di Euclide.

(50) « Si enim Euclides sensisset, angulum contactus « nihil prorsus esse, et angulum semicirculi aequalem recto « rectilineo, quid, obsecro, tantopere desudasset, ut demon- « straret, angulum contactus esse minorem omni acuto recti- « lineo, angulum vero semicirculi majorem? » Eucl. ed. Clavius, Roma, 1589, T. I p. 360.

(51) « Quapropter angulum contactus vere esse angulum « ac quantitatem affirmamus; atque adeo angulum semicirculi « recto rectilineo minorem.... Primum igitur extra intelligen- « tiam esse fatemur, ut inter quantitates minima dari possit; « sed inficiamur, nos asserere, angulum contactus esse mi- « nimam quantitatem; immo vero assereramus, quemvis an- « gulum contactus, etsi ab Euclide minor ostensus est omni « acuto rectilineo, dividi posse in partes infinitas, non quidem « per lineam rectam, ut Euclides demonstravit et optime, « sed per lineam circularem.... Pari ratione asserimus, angu- « lum contactus augeri posse infinite, ita ut quovis angulo « contactus proposito dentur alii majores sine numero ». Ivi, p. 360-361.

(52) « Quod autem anguli contactus sint inaequales inter « se.... ex eo manifestum est, quod angulus quilibet consistit « in uno puncto, et linearum inclinatione, quae non in direc- « tum jacent, ut constat ex anguli plani definitione. Hinc « enim fit, ut aequalitas angulorum ejusdem generis requirat

« eandem inclinationem linearum, ita ut lineae unius con-
« veniant omnino lineis alterius, si unus alteri superponatur.
« Ea enim aequalia sunt, quae sibi mutuo congruunt. Cum
« igitur in angulis contactus, nec non in angulis semicircu-
« lorum, nequaquam reperiatur semper eadem inclinatio, quod
« (uno superposito alteri) lineae eorum non sibi respondeant,
« sed prorsus inter se dissideant.... non erunt omnes anguli
« hujuscemodi inter se aequales ». Ivi, p. 362-363.

(53) « Ego angulos illos ejusdem generis esse negavi hac
« solum de causa, quod angulus contactus quantumvis mul-
« tiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat....
« quemadmodum eadem de causa recta finita et infinita non
« censentur esse ejusdem generis, cum altera ad alteram pro-
« portionem non habeat, quamvis sub eodem genere magni-
« tudinis, nimirum sub linea recta, comprehendantur ». Ivi,
p. 374.

(54) « Deinde non est, quod anxium reddat Peletarium
« prima propositio X 1. Ea enim intelligenda est tam de
« quantitatibus ejusdem generis, quam diversi, dummodo utravis
« multiplicata alteram excedere possit; cujusmodi non sunt
« angulus contactus et angulus acutus rectilineus ». Ivi,
p. 363.

(55) Queste due opinioni corrispondono manifestamente ai
due modi di vedere considerati nei Cap. I e II.

(56) « Cave, ut existimes, id quod vulgo angulus con-
« tactus dicitur, quodque jacet inter tangentem AE et circum-
« ferentiam AHC vere angulum esse, angulumque semicir-
« culi qui comprehenditur diametro AB, et circumferentia
« AHC, esse acutum, et angulo recto rectilineo minorem. Haec
« enim tamquam vera a nonnullis interpretibus admissa, illos
« in manifestissima compulerunt absurda; quod qui viderint
« plerique, ista Euclidis non esse dixere, sed ab aliena manu
« inserta. Quisquis sit auctor, putamus non esse angulum id,
« quod vulgo angulus contactus dicitur, angulumque semicir-
« culi rectum esse, et aequalem angulo recto rectilineo ». Eucl.
ed. Commandinus, Napoli 1786, p. 90-91.

(57) « Qua de re si ita incurvari supponatur recta AP,

« ut flexus fiat infinitis lineis parvis, sitque is quadrantalis, « sive circuli quadranti aequalis, aequipollens uni angulo « recto, et curvatura sit uniformis; quilibet ex his angulis « externis erit infinitesima pars anguli recti, hoc est nullius « quantitatis, sive non angulus. Atqui hic esset angulus con- « tactus hujus polygoni infinitorum laterum, cum is nulla « linea recta secari posset, quia nullius est quantitatis. Et « sic inflexa recta AP convertitur in lineam curvam, et qui- « dem circularem. Ergo angulus contactus nullius est quan- « titatis, sive non angulus ». Ivi, p. 92.

(58) « At si quis scrupulosius agere velit, arcumque AF « circularem non concipiat, ut ex lineis rectis, quamvis in- « finite multis conflatum, sed ut continuam curvam lineam « absque ulla fractione, vel angulo, cujus nulla pars utcumque « minuta sit recta: non ideo angulus contactus evadet ullius « quantitatis; imo ex hoc clarius erit, nullam ipsum habere « quantitatem, angulumque non esse. Nam cum.... is omni « acuto angulo rectilineo minor sit, minor quoque erit uno- « quoque ex angulis externis polygoni infinitorum laterum; « sed quilibet horum angulorum est nullius quantitatis, ut « ostensum est. Ergo eo magis angulus hic, qui perperam an- « gulus dicitur, nullius est quantitatis, ac proinde non an- « gulus ». Ivi.

(59) « Sed quare mutuo non congruunt? » (l'angolo del semicerchio e l'angolo retto rettilineo) « Respondeo, ob infle- « xionem circumferentiae, quae congruere non potest cum recta « linea. Quae inflexio quamvis sit ejusdem quantitatis in ma- « joribus, atque in minoribus circumferentiis, quia tamen in « minoribus circumferentiis est in minori longitudine, citius « minores circumferentiae recedunt a tangente; atque ideo fit, « ut anguli semicirculorum, quorum nempe eadem diameter « constituit unum latus, at non eadem, aut aequales circum- « ferentiae faciunt aliud, quamvis inter se aequales sint, ut- « pote qui omnes recti sunt, non invicem congruant; unde « hujusmodi anguli, et quilibet etiam segmenti angulus, sive « is sit majoris, sive minoris segmenti, imo etiam omnes « quicumque anguli, qui a recta linea, et qualibet linea curva

« constituuntur, ad angulos reducuntur, qui constituuntur « praedicta recta linea, et tangente ejusdem curvae, ducta « nempe a puncto, in quo mutuo intersecantur recta, et curva « linea ». Ivi, p. 92-93.

(60) « Circulus enim censetur figura plana infinitorum « laterum et angulorum, linea autem recta contingens quan- « tulaecumque sit longitudinis coincidit in eandem lineam « rectam nec angulum facit ». Vieta, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII,* Tours 1593, f. 22 b.

(61) « Anguli ex ipsa Euclidis partitione recti sunt aut « obliqui. Obliqui vero aut sunt acuti vel obtusi. Cum itaque « angulus semicirculi non sit obtusus neque acutus, videtur esse « rectus, is vero qui existimatur reliquus recto et κερατοειδής « solet vocari angulus imaginarius γωνία εἰκονική ». Ivi.

(62) « Angulos circumferentia definit. Nulla circumfe- « rentia definit diverticulum κερατοειδές. Diverticulum igitur « non est angulus ». Ivi.

(63) « Cum itaque decrementum non suscipiat, magnitudo « non est, neque enim datur magnitudo ἐλαχιστή aliter quam « intellectu ». Ivi, f. 23 a.

(64) *Parere di Galileo Galilei intorno all'angolo del contatto.* — *Opere*, T. X p. 281-287.

(65) Viviani, *Quinto libro degli Elementi d'Euclide etc. aggiuntevi cose varie del Galileo e del Torricelli etc.*, Firenze 1674, pag. 107-110.

(66) Ivi, p. 111-113, 150-151. L'ipotesi di Viviani, già prima di lui emessa da altri (v. nota 56), sembra contraria alla verità, giacchè può ritenersi con sicurezza che gli angoli mistilinei sieno stati considerati e studiati ancor prima d'Euclide. V. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* L. I, Modena 1893, p. 124.

(67) Wallis, *Opere*, Oxford 1695, T. II p. 603-630, 631-654.

(68) Senza insistere di più sugli opuscoli di Wallis, mi limito a citare le parole seguenti (ivi, p. 625): « Praemittam « tamen hoc sive axioma sive postulatum: quod est omni « positiva quantitate minus, illud est non-quantum ».

(69) *Opere*, p. 82.

(70) « .... e più grave esser quello, che nel suo sito ouer « luoco doue se riposa, ouer giace ha il descenso manco « obliquo ». Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse,* Lib. VIII, Quesito XXV.

(71) Di qui si rileva che Tartaglia, sebbene riconosca essere il rapporto dell'angolo di contatto a qualunque angolo rettilineo minore d'ogni quantità assegnabile (v. op. cit., L. VIII, Q. XXXIII), non riguarda però quell'angolo come assolutamente nullo.

(72) Ivi, L. VIII, Q. XXXII.

(73) G. U. del Monte, *Mechanicorum liber,* Pesaro 1577, f. 6 b.

(74) « .... quamquam angulus MDC » (l'angolo di contatto) « sit omnibus rectilineis angulis minor; non idcirco sequi- « tur, absolute simpliciterque omnium esse angulorum mini- « mum ». Ivi.

(75) « Sequitur quidem inde angulum contactus nullam « partem esse anguli qui continetur a diametro et circumfe- « rentia, non autem, quod non habet suam sibi quantitatem; « nec quod angulus contactus unus altero non possit esse vel « major, vel minor, vel aequalis ». Hobbes, *Examinatio et emendatio etc.*, p. 108. — V. anche *De corpore*, p. 172 (*Opera philosophica quae latine scripsit omnia,* Amsterdam 1668, T. I).

(76) « Homogeneae quantitates sunt quarum mensurae « applicari possunt una ad alteram ita ut congruant ». *Examinatio et emendatio etc.*, p. 110. — « Praeterea angulus « rectilineus cum angulo rectilineo congruere potest, cum « possint per arcum circuli ambo mensurari; arcus autem « cum arcu ejusdem circuli congruere potest. Anguli autem « contactus mensura cum anguli rectilinei mensura congruere « non potest, quia angulus rectilineus non mensuratur per « lineam nisi circularem, et quidem quatenus circularem, « mensura autem anguli contactus est linea recta quatenus « recta ». Ivi.

(77) « Recta a puncto contactus cum secet omnes cir-

« culos interiores transeuntes per C proportionaliter, determinabit quantitatem curvitatis arcuum aequalium in unoquoque circulo sumptorum, et proinde earum curvitatum est mensura; quae mensura cum sit linea recta CED, partes ejus omnes applicatae sibi invicem aequales cum aequalibus congruent. Quare anguli contactus inter se homogenei sunt, habentque quantitatem; et sunt angulis rectilineis heterogenei ». Ivi, p. 111-112.

(78) Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, L. I, Scholium ad Lemma XI. Ho riportato il passo originale in una nota pubblicata nel T. V (1891) della *Bibliotheca mathematica* sotto il titolo: *Sur une classe de grandeurs infiniment petites considérée par Newton.*

(79) *Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas,* Leibniz ed. Gerhardt, T. VII p. 326-329.

(80) Ivi, p. 327. — In uno scritto probabilmente di data assai più vecchia Leibniz mostra di vedere le cose molto meno chiaramente. Ecco infatti le sue parole (ivi, T. V p. 191-192): « Atque hoc sensu angulus quem vocant semicirculi ABCR (Fig. 8), seu angulus arcus circuli ABC ad rectam CR curvae perpendicularem seu ad radium, idem est cum angulo DCR aut ECR, quem facit recta CE vel DC ad rectam RC; et sic angulus contactus DCBA quantitatem non habet, alioqui ejus quantitas foret differentia inter quantitates angulorum DCR et ABCR: quantitatem, inquam, non habet quae per mensuram anguli rectilinei aestimari possit. Si qua vero est ratio aestimandi angulos contactus comparandique inter se, oritur ex diverso plane principio et ad aliam plane mensuram refertur. Si quis vero ex eo saltem angulum contactus contendat esse quantitatem et quidem minorem quovis rectilineo ut FCD, quia DCB cadit intra DCF, is crassius loquitur, et recurrit ad quantitatis genus imperfectum quod nullam habet mensuram continuam, ubi etiam non habet locum ratio vel proportionalitas. Neque enim assignari recta potest, quae sit

« ad rectam, ut est angulus contingentiae DCB ad angulum « contingentiae DCG, quod in angulis rectilineis fieri posse « jam ostendimus. Porro angulum contactus non habere quan- « titatem mediam inter angulum rectilineum nullum et ali- « quem ut FCD, ex eo patet, quod movendo rectam FC circa « punctum C, donec recta FC incidat in rectam DC, seu an- « gulus evanescat, patet per angulos omnes medios transiri « inter angulum nullum, cum FC incidit in DC, et rectili- « neum FCD, quoniam continuus est transitus, ergo necesse « est angulum contingentiae non esse medium quantitate inter « angulum nullum et aliquem rectilineum. Ac proinde plane « est diversi generis, et respectu anguli rectilinei ne quidem « ut infinite parvus considerari potest, qui utique inter nul- « lum et assignabilem collocatur. Itaque hac in re Peletario « contra Clavium assentior; et Euclides cum angulum con- « tactus dicit minorem quovis rectilineo, locutus est paulo « laxius, per minorem intelligens, cujus initia intra prioris « spatium cadunt. Non autem ideo perfectam quantitatem an- « gulo contactus respectu rectilinei tribuisse censeri debet. « Atque haec est conciliatio Archimedis et Euclidis, quos « summus vir, Franciscus Vieta, sibi opposuisse visus est, « et valde peccavit Clavius, cum hoc axioma negavit, quo « affirmatur, quod transit ab uno extremo ad aliud et quidem « per omnia intermedia, debere transire per aequale, eaque « ratione Thomae Hobbesio occasionem dedit geometris in- « sultandi. Itaque valde notanda est haec distinctio inter quan- « titatem vel aestimationem perfectam seu geometricam, et « imperfectam seu popularem, quam hoc loco secutus est « Euclides, cum angulum contactus quovis rectilineo minorem « dixit ».

(81) « Les anciens ont vu que l'angle de contingence, « formé par la circonférence d'un cercle et par la tangente, « il ne pouvoit passer aucune ligne droite qui le divisât. « C'est là unangle infiniment petit ». Fontenelle, op. cit., Pref.

(82) « Peletarius, ut his paradoxis se expediat, negat, an- « gulum contactus esse quantum. Rem confecerat, si dixisset, « nullum angulum esse quantum. Sed is vehementer errat, cum

« inde infert, omnes semicirculi angulos esse aequales, quod « plane non inferret, si intelligeret, quod de contactus angulo « asseruerat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio « nostro in sua illa adversus Peletarium apologetica dispu- « tatione assentior. Mea quidem sententia uterque fallitur, hic « dum omnes omnino angulos esse putat quantitatem, ille « dum omnes, praeter angulum contingentiae. Alii se, existi- « mant, hac una responsione omnes difficultates solvere, si « dicant, curvilineos angulos et rectilineos esse incompara- « biles, rogati vero, cur sint incomparabiles, respondent, quia « angulus contactus quantumcunque multiplicatus nunquam « potest aequare rectum, vel acutum.

« Atqui hoc est paradoxum omnium maximum, cujus « explicatio petebatur, qui nimirum fieri possit, ut angulus « contactus anguli recti pars sit, et tamen quotiescunque mul- « tiplicatus eundem superare nequeat. Respondent, angulum « contactus non esse partem recti, quia eum non potest « adaequare. At paradoxorum assertores replicant hinc solum « sequi, non esse partem recti aliquotam, verum tamen esse « partem, eo quod cum semicirculi angulo rectum componat. « Unde, qui hac via difficultates volebant dissolvere, de- « buerant ostendere, angulum contactus nullo sensu partem « esse rectilinei anguli, neque addito sibi semicirculi angulo « rectum componere: id quod facturi deinceps nos sumus. — « Mihi videtur res omnes ex Euclidea definitione anguli pen- « dere. Haec enim, si penitus expendatur, manifeste docet, « nullum angulum esse quantum, quo uno errore sublato, « paradoxa omnia evanescent. Sentio igitur. Nullus angulus « est quantitas, sed modus quantitatis.... Quoniam anguli « non sunt quantitas, sed modus quantitatis, eorum inter se « comparatorum relatio non est aequalitas et inaequalitas, sed « similitudo, et dissimilitudo. Cum igitur anguli inter se com- « parati aequales dicuntur, aut inaequales, non aliud intel- « ligi potest, quam eos similes esse inter se, aut dissimiles....

« Similes porro anguli sunt, quorum ambo latera supe- « rimposita congruunt. Dissimiles quorum non congruunt « latera....

« Itaque manifestum est nullum angulum curvilineum « aequalem dari posse ulli angulo rectilineo....

« Quare... non erit unus angulus pars alterius... neque « angulus auferri ab angulo poterit... ut igitur simul omnia « expediam, dico, paradoxa illa, si in proprio verborum sensu « accipiantur, ad unum omnia esse falsa. Sic enim accepta « non conveniunt nisi quanto; anguli autem quanti non sunt, « ut jam ostendimus.

« Itaque angulus contactus neque minor est quovis acuto, « neque pars est anguli rectilinei, neque in rectilineo conti- « netur infinities, imo ne semel quidem; nihil enim harum « linearum inclinationi potest competere, quae tota anguli « essentia est: si vero non proprie, sed analogice accipiantur, « jam nihil continent, quod a communi sensu, ac ratione alie- « num sit. Sic enim angulum contactus OAC esse minorem « quovis acuto, et semicirculi angulum acuto omni majorem, « non aliud significabit, quam infra tangentem CA nullam « posse duci rectam ad contactum, quin secet peripheriam ». Tacquet, *Elementa geometriae planae ac solidae*, Padova 1694, p. 74-79.

(83) « Angulum veram magnitudinem non esse hinc fa- « cile quidem intelliges. Quoniam magnitudo omnis, vel linea, « vel superficies, vel corpus existit, ita ut quod rationem « unius ex his non habet, nec magnitudinis rationem habere « possit: sed hunc in modum se se habere angulum, cuicum- « que perspicuum est, quamobrem angulus magnitudinis ra- « tionem obtinere non poterit.... Deinde illud accedit, quod « Angulus planus est duarum linearum in plano se mutuo « tangentium, et non in directum jacentium, alterius ad al- « teram inclinatio, ergo non ad quantitatis, seu magnitudinis, « sed potius ad relationis genus pertinebit ». Renaldini, *De « resolutione et compositione mathematica*, Padova 1668, p. 23. — « Si namque fieri posset, ut aliquis angulus rectilineus « foret aequalis angulo mixto, contento scilicet linea recta, « et curva, bene liceret inferre: angulus semicirculi non est « major, nec minor recto; ergo est illi aequalis. At angulus « rectus constituitur a linea recta perpendiculariter cadente

« super aliam lineam rectam, unde anguli qui sunt deinceps « sunt aequales inter se; ita tamen ut uterque contineatur « lineis rectis; at angulus factus a linea recta, et curva, « quamvis recta caderet sic supra curvam, ut faceret angulos « deinceps aequales, unde esset aeque inclinata ex utraque « parte, sicuti contingit in angulo recto rectilineo; tamen in- « clinatio rectae ad curvam non admittet aequalitatem cum « inclinatione rectae ad rectam ». Ivi, p. 237.

Altrove (*Ars Analytica mathematum,* P. III, Padova 1684, p. 23) Renaldini dà ragione a Clavio contro Peletier, i cui argomenti chiama sofismi.

La questione dell'angolo di contatto fu ripresa in questo secolo da G. Scorza (1781-1843); vedi Loria, *Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce,* Genova 1892, p. 97.

(84) Bettazzi, *Teoria delle grandezze,* Pisa 1890.

(85) V. i miei articoli già citati sull'infinitesimo attuale.

(86) Lasswitz, op. cit., T. I p. 277.

(87) « Ergo linea nihil est nisi punctus motus, superficies nisi linea mota, corpus nisi superficies mota, et con- « sequenter punctus mobilis est substantia omnium ». Jordani « Bruni *Opera latine conscripta,* T. I P. III, ed. Tocco e Vitelli, Firenze 1889, p. 148. — « Primum fluente puncto est « linea recta ». Ivi, p. 273. — Linea per longum tum conti- « nuatio puncti ». Ivi, p. 284.

(88) « Si minimum non subsistit, nihil subsistat oportet. « Si minimum certa ratione non cognoscatur, quantum nullum « cognoscatur oportet ». Ivi, p. 21-22. — « Minimum quan- « titate est virtute maximum.... In minimo ergo vis omnis « est ». Ivi, p. 24. — « Est autem atomus minima pars seu « prima ». Ivi, p. 33. — « Ejus » (del minimo) « est componere, « augere, formare ». Ivi, p. 146. — « Si ergo contemplatio « naturae vestigia persequitur, a minimo incipiat, et in mi- « nimum contemplando desinat oportet ». Ivi, p. 149. — « .... quid nomine minimi intelligere possunt » (gli avversari) « praeterquam primam partem, qua non est prior? Numquid « in omni et quotcumque ordine partium non debet esse

« prima? Numquid si primum non extiterit, aliquid ejus or- « dinis esse poterit post ipsum? ». Ivi, p. 159. — « Sicut igitur « naturae ordo requirit, a contemplatione minimi ad lineae pro- « grediendum est contemplationem ». Ivi, p. 273. — « Est *mi-* « *nimum* cujus pars nulla est, prima quod est pars ». Ivi, p. 284.

(89) Cantor (op. cit., T. II p. 649) dimostra essere il 1591, e non il 1598 come è ritenuto comunemente, l'anno di nascita di Cavalieri.

(90) « Ajo neque geometriam esse absque motu neque « ejus veritatem sine motu intelligi posse. Nemo est qui phi- « losophiam a limine salutarit, cui notum non sit matheseos « subjectum esse quantitatem: hanc autem vel continuam « esse vel discretam; illam geometriae, istam arithmeticae ma- « teriam praebere: rursus continuam vel permanentem esse « vel successivam: successiva comprehendi motum atque tem- « pus, ideoque motum materiae tamen inquinamentis expur- « gatum geometriae ditione teneri. Sed et assero permanentis « ipsius quantitatis veritatem in profundissimis tenebris im- « mersam latitare ni eam inde motus in apertam lucem eruat. « Supponit Stichiota lineam esse quae in longitudine exten- « ditur, latitudine omnino caret; et rectam dici cum ex aequo « sua interjacet puncta. Ego vero hac de re plurimum non « dubito, cum enim neque lineam rectam, neque lineam in « rebus individuis unquam viderim, num ea sit, aut omnino « esse possit, vel si utrumque sit, utrum recte suis terminis « circumscripta sit, ac probe definita certe statuere non pos- « sum. Prodeat in medium motus ac punctum afficiat, fluat « illud, ac sui velut vestigium relinquat, an non statim in- « telligis progressu illo longitudinem delineari latitudine ca- « rentem? ni velis asserere punctum a quo producitur secari « posse, quod individuae ipsius naturae omnino adversatur: « quod si idem punctum brevissimo intervallo ex uno in « alium terminum contendat, ita ut ab eo ne tantillum quidem « deflectat, nunquam subsultet, nunquam subsidat: an non « statim manifestum evadit et lineam rectam esse posse, et « recte esse definitam? neque aliter de superficie statuendum; « sed apertius forte assertioni fidem astruit circulus, et quae

« ex eo figurae seu planae seu solidae derivantur. Circulus, « inquit elementorum artifex, est figura plana una linea contenta « quae circumferentia vocatur, ad quam ab uno puncto eorum « quae intra superficiem sita sunt omnes rectae incidentes « inter se sunt aequales. Hic amarum renidebit morosus ve- « ritatis perscrutator, ac quassato capite fronteque caperata « negabit hujusmodi figuram reperiri posse, neque si extet « signum suo complexu continere a quo ejus ambitus paribus « undequaque radiis attingatur. Sed advocetur linea recta, ac « in plano aliquo circa alterum sui extremum tanquam car- « dinem convolvatur dum eo unde motus exordium sumpsit « regrediatur: momento circulum efformatum intelligis, ac « verticem immobilem circa quem designatrix linea conversa « est centrum non dubitas affirmare, a quo omnes rectas ad « peripheriam aequales ideo audacter pronuncias, quod sin- « gulae cum linea mota coincidant, ideoque cum ei, tum inter « se, quod ex primo pronunciato constat, sint aequales.... « Neque eam tantum matheseos partem quae in contempla- « tione versatur illustrat intelligibilis hic motus, sed et ei « quae veluti effectione quadam perficitur adeo necessariam « operam navat, ut sine ea constare nulla ratione possit. « Quod enim problema intelligi, nedum solvi queat in qua « aut rectae a signo ad signum non moveantur, aut in in- « finitum producantur, aut ad certos angulos inflectantur, aut « additione vel subtractione augeantur minuanturve, aut in « partes secentur, aut aliis hujusmodi mathematicis motio- « nibus non cieantur? » Sovero, *Curvi ac recti proportio*, Padova 1630, p. 271-272.

(91) « .... nempe circulorum congeriem quae intra cylin- « drum et conum veluti vestigia plani a basi ad oppositam ba- « sim continuo illi aequidistanter fluentis quodammodo relinqui « intelliguntur... ». Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna 1635, Prefazione. — (Si domanda) « Quamlibet rectam lineam indefinite ita posse « moveri, ut semper unicuidam fixae sit parallela, sive in « eodem, sive in pluribus planis, in tali motu existat ». Ivi, L. I p. 18. — « Sit figura plana quaecunque ABC, duae

« ejusdem oppositae tangentes utcunque ductae EO, BC, in-
« telligantur autem per EO, BC indefinite extensa duo plana
« invicem parallela, quorum quod transit per EO ex. gr. mo-
« veatur versus planum per BC, semper illi aequidistans,
« donec illi congruat, igitur communes sectiones talis moti,
« sive fluentis plani, et figurae ABC, quae in toto motu
« fiunt, simul collectae a me vocantur: Omnes lineae figurae
« ABC ». Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex,* Bologna 1647, p. 6. — « Rursus concipiamus alterum istorum aequi-
« distantium planorum moveri continuo versus reliquum ». Ivi, p. 198-199. — « Nusquam enim... continuum voluerim per
« frequentes lineas parallelas scindere in minimas particulas ». Ivi, p. 211.

(92) Basti considerare a quanti controsensi fu condotto G. Bruno, il quale volle fondare la matematica sul suo concetto di minimo. V. Bruno, op. cit., passim; Lasswitz, op. cit., L. II, C. IV, § 3.

(93) Si rammentino le parole di Guldino riportate nella nota 2.

(94) « Vel enim continuum nihil est praeter ipsa indi-
« visibilia etc.... veluti hoc non obstat in continuo, sive ergo
« continuum ex indivisibilibus componatur sive non ». Cavalieri, *Geom. indiv.*, L. I p. 17-18. — « Quoad continui autem
« compositionem manifestum est ex praeostensis ad ipsum ex
« indivisibilibus componendum nos minime cogi ». Ivi, L. VII Pref. — « ... poichè siccome non siamo certi che il continuo
« sia composto d'indivisibili... ». *Lettere d'uomini illustri del Sec. XVII a Giannantonio Rocca filosofo e matematico reggiano,* Nuovo giornale dei letterati d'Italia, T. 31-35, Modena 1785-1786. Il passo citato fa parte d'una lettera di Cavalieri (ivi, T. 33 p. 5-6).

(95) « .... nunquam enim superficies vocari potest plures,
« vel omnes lineae ». Guldino, op. cit. L. IV, Vienna 1641, p. 340. — « Respondeo continuum esse divisibile in infini-
« tum, non autem constare partibus infinitis actu ». Ivi, p. 342. — « Unde ex vulgaribus geometris plerique, sed et
« quidam ex superbis illis sciolis qui soli docti haberi volunt,

« quique si nihil aliud, certe hoc unum satis habent, ut in « magnorum virorum opera insurgant, quod a se minime « profecta esse invideant, occasionem carpendi Cavallerii ar- « ripuerunt, tanquam si ille aut superficies ex lineis, aut so- « lida ex superficiebus revera constare vellet ». Lettera di Roberval a Torricelli, *Divers ouvrages de mathématique et physique par M.rs de l'Académie Royale des Sciences,* Parigi 1693, p. 286. — « Continuum quodvis (secundum Cavallerii geo- « metriam indivisibilium) intelligitur, ex indivisibilibus numero « infinitis constare ». Wallis, *Opera*, T. I p. 645. — « Caval- « lerius et recentiores contemplarunt partes istas in infinitum « diminutas. Sed hi omnes, contemplando geneses quantitatum « per additiones partium, non satis consuluerunt severae isti « ἀκριβεία geometrarum ». Taylor, *Methodus incrementorum directa et inversa*, Londra 1717, Prefazione. — « .... qui licet « solida ex infinitis superficiebus, et superficies ex infinitis « lineis contextas supponit... ». Grandi, op. cit., p. 4. — « Dans la méthode des indivisibles, on conçoit la ligne comme « composée de points... ». Mac-Laurin, *Traité des fluxions,* trad. par Pezenas, Parigi 1749, T. I p. I. — « Il » (Cavalieri) « considère les plans comme formés par des sommes infinies « de lignes ». Fontenelle, op. cit., Pref. — « .... lineas nempe « ex infinitis punctis constare... ». Newton, op. cit., commento (di Leseur e Jacquier) allo Scolio del Lemma XI, L. I. — « Il Cavalieri incominciò veramente dal considerare la « linea come composta d'infiniti punti ». Frisi, *Elogio di Bonaventura Cavalieri,* Raccolta di prose e lettere scritte nel sec. XVIII, Milano 1829, T. I p. 103. — « Cavalleri imagina le continu comme composé d'un nombre infini de « parties, qui sont ses derniers élémens, ou les derniers termes « de la décomposition qu'on peut en faire en le soudivisant « continuellement en tranches parallèles entr'elles ». Montucla, *Histoire des mathématiques*, Paris, an VII, T. II p. 38. — « .... egli » (Cavalieri) « riguarda le superficie piane come « formate da somme di infinite linee ». Bossut, *Saggio sulla storia generale delle matematiche,* trad. di G. Fontana, Milano 1802-1803, T. II p. 106.

Meno chiaramente si esprimono Wallis e Giovanni Ceva. Il primo scrive (*Opera*, T. I p. 297): « Suppono in limine « (juxta B. Cavallerii Geometriam indivisibilium) planum quod- « libet quasi ex infinitis lineis parallelis conflari . — Il secondo (*Opuscula mathematica*, Milano 1682, in fine): « Qui « processerunt methodo Cavalleriana, intellexerunt quasdam « innumerabiles lineas inter se aequidistantes, quae veluti « parallelogramma complerent aliquam superficiem ».

A tutti questi può contrapporsi G. Piola, il quale nel suo *Elogio di B. Cavalieri* (Milano 1844, p. XXII) così si esprime: « Posso citarvi parecchi passi del nostro autore, « dove la genesi delle grandezze per mezzo del movimento « è apertamente dichiarata, ed oltre l'idea evvi replicatamente « suggerita altresì la parola adottata di poi dal sommo in- « glese ».

(96) « Quo motu rei illius quam circumferimus, post se « quasi vestigia relinquentis, describimus lineam et superficiem « rotundam, corpusque rotundum ». Guldino, op. cit., L. II p. 2. Si confrontino queste parole e quelle della nota seguente colle parole di Cavalieri riportate nella nota 91; e si osservi pure l'analogia con quelle di Sovero trascritte nella nota 90.

(97) « Potestas geometrica juxta duplicem speciem motus « simplicis, rectum ac circularem, duplex est, *directa* videlicet « et *rotunda*.... Primus gradus nascitur ex motu puncti.... « potestas quippe puncti est linea. — Enimvero si punctum « cogitetur moveri supra planum aliquod in directum, vesti- « gium relictum est longitudo recta: et sic generatur potentia « primi gradus.... potestas rotunda est vestigium quod relin- « quit post se aliquod punctum, in eodem plano cum centro « sui motus situm, in orbem circumductum ». Ivi, p. 133-135.

(98) « Atque hoc modo per compositionem venitur etiam « ad mensurationem, ac cognitionem quantitatis potestatum « directarum. Nam dum componimus, simul etiam mensura- « mus, et potestas composita potestas est etiam mensurata « ac nota, si mentem eo reflectamus ». Ivi, p. 145. — È degna di nota la cura che mostra Guldino di avvertire il lettore sotto quale dei due punti di vista egli si pone in ciascuna

parte della sua opera. Eccone alcuni esempi: « Ea quae « hucusque hoc Capite praemisimus ad genesin videbantur « spectare potestatum rotundarum ». Ivi, p. 145. — « De ge- « nesi quidem per motum continuum satis diximus in prae- « cedentibus: in compositione vero non aliter quam in di- « recta, quantitatem rotandam revocare oportet ad partes, « easque notas ». Ivi, p. 145-146.

(99) V. le ultime parole della nota precedente.

(100) « De magnitudinum intelligo generatione... Horum, « et si qui sunt aliorum modus primarius, et quem alii cuncti « quodammodo supponant oportet utpote sine quo nil pro- « creari potest, est iste, *qui per motum localem*... cum in na- « tura... quicquid fiat, a motu fiat, aut certe non absque « motu ». Barrow, *Lect. opticae et geom.,* Londra 1674, Lectio I.

(101) « Sicut, inquam, linea puncti promoti censetur ve- « stigium, a puncto habens quod aliquatenus divisibilis sit, « a motu vero quod uno modo, secundum longitudinem di- « vidi possit; ita tempus velut instantis continuo labentis « vestigium concipitur, ab instante nonnullam divisibilitatem « habens, a successivo fluxu quod eatenus dispertiri queat... ». Ivi. — « eo modo... quo linea e punctorum appositione, vel « motu, tempus ex instantium successione vel fluxu proge- « nitum imaginamur ». Ivi.

(102) « Nam posito tempora e momentis componi, etiam « lineae componentur e punctis ». Ivi.

(103) « .... nihil admodum refert, utrum lineam ex innu- « meris punctis, an ex indefinite parvis lineolis compositam « intelligamus ». Ivi. — « Sin hoc » (il considerare la linea composta di punti) « absonum cuipiam videatur, et nullo « sensu motus admittatur instantaneus, eo recurrendum est ut « per instantia nil aliud, quam indefinitas temporis particulas « intelligamus; quibus respondeant certo velocitatis gradu, alio « atque alio, percursa indefinite minuta spatiola velocitatis « gradibus adproportionata ». Ivi.

(104) Non ho potuto trovare le date estreme della sua vita. Quelle indicate in due opere recenti (Marie, *Histoire*

des sciences mathématiques et physiques, Parigi 1883-1888, T. VII p. 61; Fink, *Kurzer Abriss einer Geschichte der elementar-Mathematik,* Tübingen 1890, p. 242) devono riferirsi al di lui fratello Tomaso, poeta italiano e latino assai stimato (20 dicembre 1648 — 3 febbraio 1737), i cui *Opuscula mathematica* (Milano 1699) avrò a citare in seguito.

(105) «.... utilissimum est observare, quomodo liceat uti « temporis instantibus, non ut punctis prorsus geometricis, « sed ut quantitatibus dicam minoribus quibuscunque datis ». Giov. Ceva, *Geometria motus,* p. 12.

(106) « Et hic rursus notatu dignissimum est, nulli errori « obnoxium esse, quod aequabiles in illis minimis spatiolis « intellexerimus motus, quamvis potius deberet videri, in « iisdem intervallis reperiri innumeras, ac inaequales veloci- « tates... Cur ista se ita habeant, hic non est nobis dispu- « tandum, ego enim puto, non ex indivisibili velocitates alias « succedere, sed revera minutulum temporis considerari de- « bere antequam motus diversimode procedat, nempe ac si « velocitas, qua succedere debet priori, non ita sit in prom- « ptu, aut non ita statim mobile afficiat ad motum sibi pro- « portionatum ». Ivi, p. 31-32.

(107) « Vero è che il punto per essere indivisibile non « può conferire esser divisibile, nè quanto, nè circolare, nè « fare che la sfera sia divisibile, nè quanta, nè sfera, nè « sferica. E tutte queste faccende chi volesse dire, che na- « scono da un punto, stimo, che non avesse punto di giu- « dizio; ma chi con giudizio compone la linea di punti, non « ne piglia un solo, nè due, nè mille o milioni, ma infiniti, « sicchè il conferir divisibilità e quantità, è virtù della infi- « nità, la quale è una materia lontanissima dall'esser capace « di quegli attributi e condizioni, alle quali soggiacciono i « numeri, e grandezze comprese dal nostro intelletto; là non « entra maggioranza, minoranza, nè egualità, non vi ha luogo « nè il pari, nè il dispari, ogni parte (se parte si può chia- « mare) dell'infinito è infinita, sicchè sebbene una linea di « cento palmi è maggiore d'una d'un sol palmo, non però « i punti di quella son più dei punti di questa, ma e questi

« e quelli sono infiniti. Il resto, che aggiungete, che il punto « non può conferir l'esser circolare, e che però la sfera sa- « rebbe indivisibile, non quanta, non sfera, non sferica, « veramente son con voi, anzi tengo, che nè il punto, « nè altra cosa del mondo faccia, che la sfera sia sfera in- « sieme, e più tengo per cosa certa, che nè meno sia cosa « potente a far per l'opposito che la sfera non sia sfera, nè « sferica. Dottrina bella, e sicura; ma sappia il Sig. Rocco » (Antonio Rocco o Rocchi, filosofo peripatetico) « che i Ma- « tematici, quando vogliono costituire una sfera, non ricorrono « agl'indivisibili, ma vanno al torniajo, se la vogliono di « legno, al fonditore, se la vogliono di metallo ». Galilei, *Opere*, T. X p. 350-351.

(108) « Primo, definiemus conatum esse motum per spa- « tium et tempus minus quam quod datur, id est, determi- « natur, sive expositione vel numero assignatur, id est, per « punctum.... Similiter Conatus ita intelligendus est, ut sit « quidem motus sed ita ut neque temporis in quo fit, neque « lineae per quam fit quantitas, ullam comparationem habeat « in demonstratione cum quantitate temporis vel lineae cujus « ipsa est pars; quamquam sicut punctum cum puncto, ita « Conatus cum Conatu comparari potest, et unus altero major « vel minor reperiri ». Hobbes, *De corpore*, p. 107 (*Opera philosophica quae latine scripsit omnia,* Amsterdam 1668, T. I).

Il concetto di *causa del moto*, di *attitudine a generare il moto*, appare anche nella definizione di velocità (ivi, p. 106): « Velocitatem esse motum consideratum ut potentiam, qua « Mobile tempore certo certam potest transmittere lon- « gitudinem ». — Quale importanza capitale esso abbia per « Hobbes, risulta poi dalle parole seguenti (ivi, p. 133-134): « Propositionis jam... demonstratae veritas (quaeque est eorum « quae diximus de figuris deficientibus fundamentum) originem « habere videtur in Philosophia prima, nempe in eo, quod « omnem inter duos effectus aequalitatem et inaequalitatem « (id est omnem rationem) proficisci et determinari ab eorun- « dem effectuum causis aequalibus et inaequalibus, sive a

« ratione quam habent causae concurrentes ad unum effectum,
« ad causas quae concurrunt ad effectum alterum; ideoque
« quantitatum quoque rationes easdem esse rationibus cau-
« sarum suarum ».

Figura deficiente è l'area di una curva la cui ordinata cresce costantemente a partire da zero; *complemento* la figura che insieme alla precedente forma il rettangolo avente per lati l'ordinata estrema e la proiezione della curva sull'asse delle ascisse. Pel calcolo dell'area di una figura deficiente Hobbes ricorre all'idea della generazione del continuo mediante il moto (ivi, p. 126), idea della quale egli del resto si serve per la definizione stessa delle linee, superficie e volumi (ivi, p. 59).

(109) « Tempus absolutum, verum et mathematicum, in
« se et natura sua sine relatione ad externum quodvis, aequa-
« biliter fluit ». Newton, op. cit., Def. VIII. — « .... et earum
« incrementa vel decrementa momentanea sub nomine mo-
« mentorum intelligo... Cave tamen intellexeris particulas
« finitas. Particulae finitae non sunt momenta, sed quanti-
« tates ipsae ex momentis genitae. Intelligenda sunt principia
« jamjam nascentia finitarum magnitudinum ». Ivi, L. II
Lemma II. — « Quantitates evanescentes concipi non debent
« velut determinatae aut determinabiles quaedam portiones
« quantitatum quae certam et definitam parvitatem obtineant.
« Quascumque enim portiunculas linearum, superficierum aut
« corporum acceperimus aut designaverimus, hae semper
« reipsa finitae erunt, non evanescentes: itaque non sunt
« intra certos terminos quantumvis proximos coarctandae,
« unde hae quantitates semper ut decrescentes ac perpetuo
« diminuendae accipi debent ». Ivi, op. cit., commento allo
« Scolio del Lemma XI L. I. — « Hinc fit, ut in sequen-
« tibus considerem quantitates tanquam genitas continuo in-
« cremento, ut spatium, quod corpus aut quaelibet res mota
« describit.... Nunc in posterum *fluentes* vocabo quantitates
« has, quas considero tanquam gradatim et indefinite cre-
« scentes ». Newton, *Opuscula mathematica, philosophica et philologica*, Losanna e Ginevra 1744, T. I p. 54. — « Fluentium

« quantitatum momenta (videlicet earum partes indefinite par- « vae, quarum accessione in indefinite exiguis partibus temporis « quantitates ipsae jugiter augentur) sunt ut velocitates, qui- « bus fluunt aut crescunt ». Ivi, p. 59. — « Quantitates ma- « thematicas non ut ex partibus quam minimis constantes, « sed ut motu continuo descriptas hic considero. Lineae de- « scribuntur ac describendo generantur non per appositionem « partium sed per motum continuum punctorum; superficies « per motum linearum, solida per motum superficierum; an- « guli per rotationem laterum; tempora per fluxum continuum, « et sic in caeteris. Hae geneses in rerum natura locum vere « habent, et in motu corporum quotidie cernuntur... Conside- « rando igitur, quod quantitates aequalibus temporibus cre- « scentes et crescendo genitae, pro velocitate majori vel mi- « nori qua crescunt ac generantur, evadunt majores, vel mi- « nores, methodum quaerebam determinandi quantitates ex « velocitatibus motuum vel incrementorum, quibus generantur; « et has motuum vel incrementorum velocitates nominando « *fluxiones*, et quantitates genitas nominando *fluentes*, incidi « paulatim annis 1665 et 1666 in methodum fluxionum ». Ivi, p. 203. — « Per fluentes quantitates intelligit indeterminatas, « id est, quae in generatione curvarum per motum localem « perpetuo augentur vel diminuuntur; et per earum fluxio- « nem intelligit celeritatem incrementi vel decrementi. Nam « quamvis fluentes quantitates et earum fluxiones prima fronte « conceptu difficiles videantur (solent enim nova difficilius « concipi) earumdem tamen notionem cito faciliorem evasuram « putat, quam sit notio *momentorum* aut *partium minimarum* « vel *differentiarum infinite parvarum*; propterea quod figu- « rarum et quantitatum generatio per motum continuum ma- « gis naturalis est, et facilius concipitur, et schemata in hac « methodo solent esse simpliciora, quam in illa partium ». Ivi, p. 362 (Estratto fatto da Wallis di due lettere di Newton a lui dirette).

(110) « In methodo hac incrementorum quantitates con- « sidero ut incrementis auctas vel decrementis diminutas ». Taylor, op. cit., Prefazione. — « .... parce que les quantités

« et leurs relations mutuelles dépendent uniquement des mou-
« vements générateurs qui les font connoître ». Mac-Laurin,
« op. cit., T. II p. 8.

(111) Al quale se ne potrebbe aggiungere un altro, e cioè la questione sollevata da Democrito (sec. V av. Cr.), se due sezioni parallele vicinissime d'un cono sieno eguali o diseguali. V. Loria, *Le scienze esatte nell'antica Grecia,* L. I p. 63.

(112) Ecco la traduzione del passo originale, tolta dal-l'opera testè citata di Loria (p. 76-77): « L'errore di Antifonte « non si può dimostrare geometricamente perchè, come faremo « vedere, egli non si è servito di principii geometrici. È suf-« ficiente infatti analizzare quei ragionamenti che, poggiando « su principii scientifici riconosciuti, guidano a nuove conclu-« sioni, mentre a nulla giova l'analizzare quelli in cui tali « principii sono posti in non cale. — Antifonte, dopo avere « tracciato un circolo, vi inscrisse uno di quei poligoni che « si sanno inscrivere; sia questo ad esempio il quadrato in-« scritto. Dopo avere poi bisecati tutti i lati del quadrato, « pei punti di divisione egli condusse delle perpendicolari a « queste rette fino ad incontrare la circonferenza; evidente-« mente queste rette bisecano i corrispondenti segmenti cir-« colari. Poscia egli congiunse i nuovi punti di divisione agli « estremi dei lati del quadrato, onde si ebbero quattro trian-« goli e la figura inscritta divenne un ottagono. Similmente « egli bisecò pure i lati dell'ottagono, condusse ad essi le « perpendicolari nei punti medi fino alla circonferenza; con-« giunse con delle rette i punti così determinati sulla circon-« ferenza alle estremità dei lati ed ottenne così il poligono « inscritto di sedici lati. Similmente bisecando ancora i lati « di questo poligono inscritto e conducendo delle altre rette, « formò un poligono di un numero doppio di lati; continuando « a ripetere la stessa operazione finchè fosse completamente « esaurita la superficie, asserì che in questo modo risulte-« rebbe inscritto nel cerchio un poligono i cui lati grazie alla « loro piccolezza si confonderebbero col contorno del circolo. « Ora per qualunque poligono noi possiamo costruire un qua-

« drato di eguale superficie, come viene insegnato negli Elementi; per ciò, essendosi al circolo già sostituito un poligono « equivalente il quale fu surrogato con un quadrato eguale, « noi possiamo costruire un quadrato eguale al circolo. — « Qui l'argomentazione è manifestamente contraria a' principii « geometrici; ma non già, come afferma Alessandro (d'Afrodisia), perchè il geometra assume come principio che una « retta non può toccare un cerchio che in un punto, mentre « Antifonte vi contraddice; infatti il geometra deve, non assumerla, ma dimostrarla. Invece è meglio dire essere una « verità che una retta non può parzialmente coincidere con « una circonferenza, giacchè una esterna incontra il cerchio « in un solo punto, una interna in due punti e non più, onde « gl'incontri hanno luogo soltanto in punti isolati. Inoltre « continuando a bisecare lo spazio compreso fra le corde e « l'arco, esso non verrà mai esaurito, e noi non raggiungeremo mai la circonferenza anche continuando la divisione « all'infinito. Perchè ove ciò accadesse andrebbe perduto il « principio geometrico che le grandezze sono divisibili all'infinito. E anche Eudemo dice che questo principio è stato « posto in non cale da Antifonte ».

A questo proposito scrive Montucla (*Histoire des recherches sur la quadrature du cercle,* nouv. éd., Parigi 1831, p. 44): « Mais cette idée » (quella di Antifonte) « fut mal accueillie des anciens; le temps n'était pas encore venu où « l'on oserait, qu'on me permette ce terme, envisager de « face l'infini. Au surplus, c'était une idée stérile dans ce « temps-là ».

(113) « Da... selbst der grösste Dialektiker des Alterthums « nicht im Stande war, alle dem Begriffe des Unendlichen « anhaftenden Dunkelheiten zu beseitigen, ja durch eine « eigenthümliche nationale Beschränktheit selbst sich in neue « Schwierigkeiten verwickelte, ist es begreiflich, das die griechischen Mathematiker, nachdem durch die Paradoxien der « Eleaten dies Feld einmal der Dialektik anheimgefallen war, « allen diesen Schwierigkeiten aus dem Wege gingen, indem « sie ein für allemal den Begriff der Veränderung und Be-

« wegung aus der Wissenschaft verbannten, ebenso den des « Unendlichen, auch des potentiell Unendlichen, also des « unendlich Wachsenden oder unendlich Abnehmenden, den « sie durch den des beliebig Grossen und Kleinen ersetzten ». Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Leipzig 1874, p. 120. — « Die griechischen Ma- « thematiker werden gewiss aus dem Verhältniss der Vie- « lecke sofort mit völliger innerer Gewissheit auf das ent- « sprechende der Kreisflächen geschlossen haben; indessen war « diese innere Gewissheit ihnen nicht genügend; sie strebten « nach einem unangreifbaren, logisch völlig strengen Beweise, « der hier, wo der Weg, auf dem sich der Satz genetisch « ergab, nicht unangreifbar war, nur ein indirecter sein « konnte ». Ivi, p. 123.

(114) V. l'importante monografia di Künssberg: *Der Astronom, Mathematiker und Geograph Eudoxos von Knidos*, Progr. der Realschule Dinkelsbühl, 1888, 1890.

(115) Euclide, *Elementi*, L. XII prop. 2. — V. anche Künssberg, l. c.

(116) V. Ofterdinger, *Über den Zusammenhang der Euclidischen Lehre von den geometrischen Verhältnissen mit den Anfängen des Exhaustions-Methode*, Jahreshefte des Vereins für Math. und Naturw. in Ulm, 1889.

(117) Valerio comincia collo stabilire che, data una figura piana qualunque, se ne possono costruire due altre, la prima circoscritta, la seconda inscritta, formate ciascuna di un insieme di rettangoli d'uguale altezza, e tali che la loro differenza può farsi piccola ad arbitrio (*De centro gravitatis solidorum libri tres*, II ed., Bologna 1661, p. 13): « Omni « figurae circa diametrum in alteram partem deficienti figura « quaedam ex parallelogrammis aequalium altitudinum inscribi « potest, et altera circumscribi, ita ut circumscripta superet « inscriptam minori spacio quantacumque magnitudine propo- « sita. Semper autem in similibus intellige, eiusdem gene- « ris ». — Analogamente pei solidi (ivi, p. 23): « Omni solido « circa axem in alteram partem deficienti, cuius basis sit cir- « culus, vel ellypsis, figura quaedam ex cylindris, vel cylindri

« portionibus aequalium altitudinum inscribi potest, et altera « circumscribi, ita ut circumscripta superet inscriptam minori « excessu quacumque magnitudine proposita ». — Seguono tre proposizioni (ivi, p. 69, 72, 74), le quali stabiliscono ciò che si esprime brevemente in linguaggio moderno dicendo che il limite d'un rapporto è eguale al rapporto dei limiti. Ecco l'enunciato della prima: « Si duae magnitudines una « maiores, vel minores prima, et tertia minori excessu, vel « defectu quantacumque magnitudine proposita eiusdem ge- « neris cum illa, ad quam refertur, eandem proportionem « habuerint, maior vel minor prima ad secundam, et una « maior vel minor tertia ad quartam; erit ut prima ad se- « cundam, ita tertia ad quartam ». Mediante queste tre pro- « posizioni, dimostrate, come è naturale, per mezzo della riduzione all'assurdo, e quelle precedentemente accennate, Valerio si trova in grado di stabilire direttamente le proprietà delle linee e superficie curve.

Tacquet parte dalla definizione seguente, da cui ha preso nome il metodo d'esaustione (*Cylindrica et annularia, Opera mathematica*, II ed., Anversa 1707, p. 448): « *Magnitudo « quaevis per inscriptas sibi magnitudines exhauriri* dicitur, cum « inscriptae magnitudines ab ipsa deficere tandem possunt, « magnitudine data minori, hoc est quantumvis parva ». Pone poi a base del suo metodo il seguente teorema poco diverso da quelli di Valerio (ivi, p. 449): « Datae sunt binae quan- « titates A et B, sive superficies, sive corpora: data sit item « ratio quaecumque E ad F. Si quantitatibus A et B aliae « atque aliae magnitudines sine termino inscribi possint, quae « et eam semper inter se rationem servent, quam E ad F, « et quantitates ipsas A, B exhauriant, hoc est ab ipsis de- « ficiant defectu quantumvis parvo. Erit quantitas A ad quan- « titatem B, ut E ad F ».

Renaldini propone un nuovo metodo, *per decrescentiam excessus atque defectus in infinitum abeuntem*, che nella forma non differisce molto da quello di Valerio. Esso è racchiuso in una serie di proposizioni, di cui riporto qui le due prime quale esempio (*De resolutione et compositione mathematica,*

p. 277, 278): « Si quotcumque fuerint quantitates, e quarum « singulis partes in eadem ratione cum illis acceptae sint. « Dico has posse, per συνεχεῖς ἐπαυξήσεις, *continuata incre-* « *menta*, semper ac semper ab illis minus deficiendo, tandem « deficere defectu minori quacumque data quantitate, rationem « eandem inter se perpetuo servantes. — Si quotcumque « fuerint quantitates, a quarum singulis partes acceptae sint, « quae per συνεχεῖς ἐπαυξήσεις, *continuata incrementa*, semper « ac semper minus deficiendo ab illis, deficiant tandem defectu « minori quacumque data quantitate, rationem eandem inter « se perpetuo servantes. Dico quantitates illas in eadem esse « ratione cum istis ». — In base a queste proposizioni ecco come si dimostra il teorema sul rapporto di due circoli (ivi, p. 282): « Circuli inter se sunt quemadmodum a diametris « quadrata. — Quoniam sunt duae quantitates, nimirum cir- « culi, a quibus partes, videlicet similia polygona, sunt ac- « ceptae, quae per continuata incrementa semper, ac semper « ab illis minus deficiendo, tandem deficere possunt defectu « minori quacumque data quantitate, perpetuo servata eadem « ratione, quae est inter diametrorum quadrata.... ; ergo ex « generali hujus Metodi Theoremate secundo, circuli erunt « inter se, ut a diametris quadrata ».

L'analogia evidentissima del metodo di Renaldini con quelli moderni, e specialmente col metodo dei limiti, darebbe diritto all'inventore di esso d'essere annoverato tra i fondatori della nuova analisi. Senonchè a tale diritto egli stesso rinuncia; anzi lo respinge sdegnosamente, dichiarando in modo esplicito, ad evitare ogni equivoco, che il suo modo di vedere è in tutto conforme a quello degli antichi. E poichè le sue parole mettono assai bene in luce il confronto tra i due punti di vista antico e moderno, sul quale mi sono alquanto arrestato nel testo, non sarà inutile riportarle qui per esteso (ivi, p. 276-277): « Quoniam nostra methodus prae- « sertim locum obtinet in figuris circulo inscriptis et circum- « scriptis, cuidam propterea videri posset hanc niti resolutioni « figurae tam inscriptae quam circumscriptae circulo in ip- « sum circulum. Hoc autem incaute si nos explicemus, pu-

« gnantia videremur admittere; propterea quod polygona cir-
« culo inscribi possunt, et circumscribi, ordinata quidem in
« infinitum, ita ut non tot sint quin plura. Cum hoc autem
« progressu in infinitum nequit cohaerere desinentia, qua di-
« ceret quispiam, polygona ipsa tandem in circulum desinere.
« Nec illud est plausibile, quod tamen nonnullis arrisit, ni-
« mirum desinentiam esse in polygonum infinitorum laterum,
« cuiusmodi circulus esse videri posset: hoc enim haud minus
« repugnat, propterea quod circulus id sibi vendicat, ut rectae
« ductae a centro ad singula peripheriae puncta sint inter se
« aequales: polygonum autem sive constet angulis, et late-
« ribus numero infinitis, sive finitis; hoc profecto habet, ut
« angulis, lateribusque constet; hoc enim sonat nomen illud
« polygonum. Si namque constat angulis, anguli continentur
« lateribus; ergo, et angulis, et lateribus constare debet; quae
« quidem figura praecipuum illud habet, quod rectae omnes
« a centro ductae ad vertices singulorum angulorum, sint
« inter se aequales, et quae perpendiculares ab eodem centro
« ad singula latera ducuntur, sint itidem inter se aequales
« (loquimur enim de polygonis ordinatis); at vero unaquaeque
« ducta a centro ad verticem anguli maior est ea, quae
« ducitur ab eodem centro perpendicularis ad latus; non
« itaque omnes illae ductae a centro ad polygoni ambitum,
« sunt inter se aequales, polygoni igitur ambitus esse non
« poterit circuli circumferentia. Non est itaque circulus po-
« lygonum infinitorum laterum. — Illud etiam accedit, quod
« infinitum huiusmodi, multitudo scilicet angulorum, quibus
« polygonum constaret, foret in actu, hoc autem infiniti genus
« nunquam agnovit Natura. — Nostra igitur methodus, ut
« robore constet, haud indiget huiusmodi desinentia, quasi
« circulus intrinsecus illius progressionis in infinitum sit ter-
« minus, sed potius terminus quidam extrinsecus, ut polygona
« per sui incrementa, si fuerint inscripta, et per decrementa,
« si fuerint circumscripta, multiplicatis angulis atque lateribus,
« differre possint semper a circulo minori quacunque data
« quantitate ».

(118) « Archimedes utitur demonstratione indirecta, quae

« ad impossibile ducit: de qua multi multa. Mihi sensus hic « esse videtur. Circuli BG circumferentia partes habet to- « tidem quot puncta, puta infinitas; quarum quaelibet consi- « deratur ut basis alicujus trianguli aequicruris, cruribus AB: « uti ita trianguli in area circuli insint infinita, omnia verti- « cibus in centro A coeuntia.... » Keplero, *Nova stereometria doliorum*, Linz 1615, P. I. Teor. II.

(119) « Interea.... statui divinum Archimedem, quem fere « unum inter antiquos geometras suspicio, attentius consi- « derare; ex qua consideratione sublimem illam et nunquam « satis laudatam infiniti doctrinam mihi comparavi ». Roberval, l. c., p. 285.

(120) V. Fermat, *Varia opera mathematica,* Tolosa 1679, p. 45.

(121) « Methodus exhaustionum... est aliquanto deformata « in ea quae dici jam solet geometria indivisibilium seu me- « thodus indivisibilium ». Wallis, *Opera*, T. II p. 311. — « J'ai voulu faire cet avertissement, pour montrer que tout « ce qui est démontré par les véritables regles des Indivisi- « bles, se démontrera aussi à la rigueur et à la maniere des « Anciens; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne differe de « l'autre qu'en la maniere de parler ». Pascal, *Oeuvres*, La Haye 1779, T. V, p. 246.

(122) « Et plus on faisait la proportion ou l'intervalle « grands entre ces degrés, plus on aprochoit de l'exactitude, « et plus on pouvoit rendre l'erreur petite et même la re- « trancher tout d'un coup par la fiction d'un intervalle infini, « qui pouvoit toujours être réalisée à la façon de démontrer « d'Archimède ». Leibniz ed. Dutens, T. III p. 501. — « Ve- « teris enim methodi nostra non nisi contractio est, inven- « tioni apta ». Leibniz ed. Gerhardt, T. III p. 81. — « .... de sorte qu'on ne diffère du stile d'Archimède que « dans les expressions, qui sont plus directes dans notre « méthode et plus conformes à l'art d'inventer ». Ivi, T. V p. 350.

(123) « Praemisi vero haec lemmata, ut effugerem tae- « dium deducendi longas demonstrationes, more veterum geo-

« metrarum, ad absurdum ». Newton, *Phil. nat. pr. math.*, L. I Lemma XI, Scolio.

(124) « Obiter autem animadvertere placet, hujus me- « thodi fundamentum, etsi novum videatur, nec absque scru- « pulo a plerisque admitti consueverit, nimirum: *magnitudines*, « *quarum differentia minor evadit qualibet assignabili diffe-* « *rentia, seu quae differre possunt quantitate iisdem infinities* « *minori, pro aequalibus recte usurpari*: vetustissimum reipsa « esse, ac veterum metodo, quae per inscriptiones et circum- « scriptiones longiori circuitu figurarum aequalitatem vel « aliam proportionem venabatur, necessario fuisse praesup- « positum ». Grandi, op. cit., p. 39.

(125) « Interim egregio tuo ratiocinandi specimine confi- « ciam, omnia quae pro quadratura et rectificatione curvarum « a geometris recentioribus detecta sunt, deberi Archimedi, « aliisque veteribus mathematicis; ex quorum nempe scriptis « haud obscure elucet, habuisse eos aliquem calculum infini- « tesimalem; tum et considerasse curvas, ceu polygona infi- « nitorum laterum, eorumque areas per ordinatas parallelas « resolvisse in trapeziola ». Joh. Bernoulli, *Opera*, Ginevra « 1742, T. II p. 506. — « Archimède n'a trouvé le rapport « approché du diamètre du cercle à la circonférence, qu'en « prenant l'idée du cercle confondu avec un polygone d'une « infinité de côtés ». Fontenelle, op. cit., Pref.

(126) Karsten, op. cit., p. 48; Lhuilier, op. cit., p. 136. Più estesamente ne tratta Hauff nelle sue note alla traduzione tedesca delle *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* di Carnot (*Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung, aus dem Französischen übersetzt und mit Anmerkungen und Zusäzen begleitet von* J. K. Hauff, Frankfurt a. M. 1800. Vedi p. 58 e segg.)

(127) Lasswitz, op. cit, T. I p. 179.

(128) Veggasi il § 1 del primo dei miei articoli già citati. — Non è compito nostro ricercare se ad una imperfezione del genio greco o non piuttosto alla sua spiccata tendenza al ragionamento filosofico sia dovuto se esso non seppe o non volle colmare l'abisso esistente fra retta e curva, come

non volle mai considerare il razionale e l'irrazionale altrimenti che come cose di genere diverso, anzi opposto. Non può però dubitarsi che questo fatto abbia avuto una dannosa influenza sullo sviluppo dell'analisi, quando si pensi che ancora nel sec. XVI la serie dei numeri veniva riguardata come discreta, sicchè Stifel affermava esservi grandezze tali che esistono due numeri, l'uno più grande, l'altro più piccolo d'una di esse, ma non esiste un numero eguale a questa, e che nel secolo successivo Fermat non ebbe ancora il coraggio di chiamare semplicemente eguali i limiti di due quantità variabili la cui differenza tende a zero.

(129) « Dans le vol. F (f. 51) » (dei mss. di Leonardo da Vinci) « il détermine le centre de gravité de la pyra- « mide....: la figure qui accompagne sa note prouve que Léo- « nard décomposait les pyramides en plans parallèles à la « base ». Libri, *Hist. des sc. math. en Italie,* Parigi 1838-1841, T. III p. 41.

(130) « Cylindri vero ad parallelepipedum columnare rec- « tangulum aeque altum, quod cylindri corpus stringit qua- « dratis suis basibus et parallelis lateribus, ratio est eadem, « quae circuli ad quadratum circumscriptum, hoc est eadem « quae 11 ad 14. — Ut enim CD cylindrica basis circularis « ad AB quadratum circumscriptum, ita CF corpus cylindri, « ad AE corpus parallelepipedi rectanguli, seu columnae. « Arch. de sphaera et cylindro. — Cylinder enim et columna « aeque alta sunt veluti quaedam plana corporata: accidunt igi- « tur illis eadem quae planis ». Keplero, op. cit., P. I Teor. III.

(131) Libri, op. cit., T. IV p. 288; Campori, *Carteggio galileano inedito*, Modena 1881, p. 243; Cantor, op. cit., T. II p. 759. — Risulta pure dal carteggio di Cavalieri con Galileo come il primo sino dal 1622 possedesse i principi del suo metodo. Egli scriveva infatti a Galileo il 22 marzo di quell'anno (Campori, op. cit., p. 191): « Alcune cose come « chiare per brevità le ho tralasciate, e in particolare sul « bel principio, che tutte le linee di due figure piane e tutte « le superficie di due figure solide abbino proporzione, il che « parmi facile da dimostrare ».

(132) « Figurae planae habent inter se eandem rationem, « quam eorum omnes lineae juxta quamvis regulam assum- « ptae, et figurae solidae, quam eorum omnia plana juxta « quamvis regulam assumpta ». Cavalieri, *Geom. indiv.*, L. II p. 20.

(133) « Si sumatur series quantitatum arithmetice pro- « portionalium (sive juxta naturalem numerorum consecu- « tionem) continue crescentium, a puncto vel 0 inchoatarum, « et numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla « enim discriminis causa erit), erit illa ad seriem totidem « maximae aequalium, ut 1 ad 2 ». Wallis, *Opera*, T. I p. 365. — In simboli algebrici: $\frac{0+1+\ldots+n}{n+n+\ldots+n}=\frac{1}{2}$.

(134) « Ergo triangulum ad parallelogrammum (super « aequali base aeque altum) est ut 1 ad 2. — Triangulum « enim constat quasi ex infinitis rectis parallelis arithmetice « proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima est « basis...; parallelogrammum autem ex totidem basi aequali- « bus...: ergo illud ad hoc est ut 1 ad 2 ». Ivi, p. 366.

(135) Scrive Frisi (*Elogio di B. Cavalieri*, Raccolta di prose e lettere, T. I p. 115-116): « Il primo » (Tacquet, nella sua opera: *Cylindrica et annularia*, Anversa 1651) « ne at- « taccò brevemente la parte metafisica, dicendo che l'idea « degli indivisibili era ageometrica, e ch'era cavata dalle « opere di Keplero. Il secondo » (Bettini [1582-1657] nella sua opera: *Apiaria universae philosophiae mathematicae*, Bologna 1642) « con grandissima asprezza e con uno stile stra- « vagantissimo attaccò tutto il metodo, senza mai nominare « l'autore e senza rendergli giustizia alcuna, neppure nella « parte geometrica ».

(136) Della teoria degl'indivisibili di Roberval si farà cenno più innanzi, essendo essa fondata sopra un concetto diverso da quello di Cavalieri.

(137) V. una sua lettera a G. A. Rocca del 9 gennaio 1638 nel Giornale dei Letterati, T. 31 p. 259-270.

(138) Nella sua *Quadratura circuli et hyperbolae,* Pisa 1710.

(139) Frisi, l. c., p. 115.

(140) A questi può aggiungersi Varignon, che si servì degl'indivisibili in alcune ricerche di meccanica. V. Histoire de l'Académie des Sciences, T. II, 1686-1699, Parigi 1733, p. 155.

(141) Cantor, op. cit., T. II p. 816; Marie, op. cit., T. III p. 189; Mansion, op. cit., p. 5.

(142) « Ne idem discursus in singulis propositionibus la- « bore inutili et cum molestia lectoris repetendus esset, pla- « cuit totum exhaustionum negotium hoc loco terminis uni- « versalibus proponere ac demonstrare ». Grégoire de S. Vincent, *Opus geometricum*, p. 740.

(143) Cantor (op. cit., T. II p. 177) riporta le seguenti parole di Nicolo Cusano: « Quanto autem polygonia aequa- « lium laterum plurium fuerit angulorum, tanto similior cir- « culo; circulus enim si ad polygonias attendas est infinito- « rum angulorum ».

(144) « Omnium polygoniarum ultima est circulus. — « Recte igitur describitur circulus mathematicus esse poly- « gonia infinitorum laterum ». Stifel, *Arithm. integra*, f. 224 a.

(145) V. nota 57.

(146) V. nota 60.

(147) $$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots}$$

(148) V. nota 118.

(149) « Jam vero haec non ita intelligenda sunt (quam- « vis verba sic sonare videantur) quasi lineae illae (quarum « nulla est latitudo) complere possent superficiem; aut super- « ficies planae aliaeve (quarum nulla est crassities) complere « solidum: sed per lineas intelligendae erunt minutae super- « ficies (eiusdem cum lineis illis longitudinis, sed latitudinis « exiguae), quarum omnium (quotcunque fuerint) latitudines « simul sumptae altitudinem aequent illius figurae quam « supponuntur complere ». Wallis, *Opera*, T. II p. 312. — « Sed quoniam durior est indivisibilium hypothesis, et prop-

« terea methodus illa minus geometrica censetur... » Newton, *Phil. nat. pr. math.*, L. I Lemma XI, Scolio. — « En effet « c' est quelque chose de choquant que de dire *qu'un solide,* « *un parallelépipède, p. es., peut être divisé et subdivisé dans* « *la hauteur, tellement qu'on viendra enfin à une surface,* « *dont la hauteur sera infiniment petite.* Car par la division « des corps, quelqu' infinie qu' elle soit, on ne parviendra « jamais à des surfaces ». Joh. Bernoulli, *Opera,* T. IV p. 161.

(150) « Nostra autem metodus, si non omnia, certe hoc « cavet, ne heterogenea comparare videatur: nos enim infi- « nita nostra seu indivisibilia sic consideramus. Lineam qui- « dem tanquam si ex infinitis seu indefinitis numero lineis « constet, superficiem ex infinitis seu indefinitis numero su- « perficiebus, solidum ex solidis, angulum ex angulis... Dum « autem speciem aliquam in sua infinita resolvimus, aequali- « tatem quandam, vel certe notam aliquam progressionem « inter partium altitudines aut latitudines fere semper obser- « vamus ». Roberval, l. c., p. 286.

(151) « .... je ne ferai aucune difficulté d' user de cette « expression, *la somme des ordonnées,* qui semble ne pas être « géométrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des « Indivisibles, et qui s' imaginent que c' est pécher contre la « Géométrie, que d' exprimer un plan par un nombre indéfini « de lignes; ce qui ne vient que de leur manque d' intelli- « gence, puisqu' on n' entend autre chose par là sinon la « somme d' un nombre indéfini de rectangles faits de chaque « ordonnée avec chacune des petites portions égales du dia- « metre, dont la somme est certainement un plan, qui ne « differe de l' espace du demi-cercle que d' une quantité mo- « indre qu' aucune donnée ». Pascal, *Oeuvres*, T. V p. 247. — « De la sorte que quand on parle de *la somme d'une* « *multitude indéfinie de lignes,* on a toujours égard à une cer- « taine droite, par les portions égales et indéfinies de la- « quelle elles soient multipliées ». Ivi, p. 247-248. — V. anche *Pensées*, P. I Art. II (*Oeuvres*, T. II p. 12-38).

(152) D'Alembert, Lagrange, Laplace (1749-1827), Fourier (1768-1830). V. anche *Biographie universelle*, T. 14, 1815,

art. *Fermat.* — Marie (op. cit., T. IV p. 95) trova esagerato questo giudizio, e Bossut (op. cit., T. II p. 104-105) lo combatte apertamente.

(153) Fermat, *Varia opera mathematica*, p. 63. Altri scritti di Fermat sui massimi e minimi furono pubblicati da Henry nelle sue *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat,* Bullettino di Bibliogr. e Storia delle Sc. matem. e fis., T. 12 p. 477-568, 619-740, T. 13 p. 437-470. Vedi T. 12 p. 704-713, 723-724.

(154) « Adaequentur, ut loquitur Diophantus ». Fermat, *Varia op. math.,* p. 63. V. anche Cantor, op. cit., T. II p. 783.

(155) « .... adaequetur, ut loquitur Diophantus, aut fere « aequetur ». Fermat, *Varia op. math.*, p. 45.

(156) « .... ut commode per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per « circumscriptiones et inscriptiones Archimedaea demonstrandi « ratio institui possit, quod semel monuisse sufficiat, ne arti- « ficium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sae- « pius et iterare cogamur ». Ivi.

(157) Così vi è ripetuto più volte che una curva può considerarsi come un poligono infinitilatero; p. es.: « .... nam « curvas tanquam ex infinitis rectis compositae essent hic « considerare licet ». Huygens, *Opera varia,*, Leida 1724, p. 65. — « .... considerando curvas lineas tanquam ex innumeris « rectis compositas ». Ivi, p. 77.

(158) « Ad investiganda maxima et minima in geome- « tricis quaestionibus, regulam certam primus, quod sciam, « Fermatius adhibuit: cujus originem ab ipso non traditam « cum exquirerem, inveni simul quo pacto ea ipsa regula ad « mirabilem brevitatem perduci posset ». Ivi, p. 490.

(159) « Deinde omnes termini per *e* dividuntur, quibus- « que post eam divisionem adhuc unum *e* aut plura inesse « inveniuntur, ii delentur, quippe cum quantitates infinite « parvas contineant respectu caeterorum terminorum quibus « nullus amplius inest *e* ». Ivi, p. 491.

(160) Ivi, p. 498 e seg.

(161) Fontenelle, op. cit., Pref.

(162) « Sint AP, PM » (Fig. 9) « positione datae rectae « lineae (quarum PM propositam curvam secet in M) et MT « curvam tangere ponatur ad M, rectam AB secare ad T; « ut ipsius jam rectae PT quantitatem exquiram, curvae ar- « cum MN indefinite parvum statuo; tum duco rectas NQ « ad MP et NR ad AP parallelas, nomino MP $= m$; PT « $= t$; MR $= a$; NR $= e$; reliquasque rectas, ex speciali « curvae natura determinatas, utiles proposito, nominibus de- « signo; ipsas autem MR, NR (et mediantibus illis ipsas MP, « PT) per *aequationem* e calculo deprehensam inter se com- « paro; regulas interim has observans. — 1. Inter compu- « tandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a vel e « potentia habetur, vel in quibus ipsae ducuntur in se (ete- « nim isti termini nihil valebunt). — 2. Post *aequationem « constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quan- « titates notas, seu determinatas designantibus; aut in qui- « bus non habentur a vel e (etenim illi termini semper, ad « unam aequationis partem abducti, nihilum adaequabunt). — « 3. Pro a ipsam m (vel MP), pro e ipsam t (vel PT) substituo. « Hinc demum ipsius PT quantitas dignoscetur ». Barrow, op. cit., p. 80.

(163) Anderson, Guldino, Rolle, Nieuwentyt, etc.

(164) Leibniz ha raccontato la storia dell'origine della sua invenzione in un frammento di lettera (Leibniz ed. Gerhardt, T. II p. 258-260). Vedasi anche lo scritto pubblicato da Gerhardt, intitolato *Historia et origo calculi differentialis* (ivi, T. V p. 392-410).

(165) Leibniz ed. Gerhardt, T. IV p. 105. — È notevole il paragone che fa Leibniz tra le classi di esseri esistenti e le ordinate d'una curva. — Intorno alla legge di continuità vedi p. es.: Nourrisson, *La philosophie de Leibniz*, Parigi 1860, L. III C. II; Cohen, op. cit., p. 55-60; Müller, *Das Problem der Continuität in Mathematik und Mechanik*. Marburg 1886, P. I C. I.

Sopra un precursore di Leibniz scrive Tiraboschi (*Storia della letteratura italiana*, Venezia 1823-1825, T. VI p. 582): « Il ch. ab. Draghetti.... ha osservato.... che nelle cose fisiche

« ancor prima di ogni altro tra' moderni egli » (Pontano, « 1426-1503) « ha fatto qualche cenno della or sì celebre « legge della continuità parlandone anzi come di cosa comu- « nemente adottata ». Cita poi (ivi) un passo dell'opera del Pontano *De Fortitudine* L. I, in cui si leggono le seguenti parole : « Quid quod physicis quoque placet ab uno ad alterum extremum nisi per medium aditum esse nullum? ».

(166) Non entro qui nella incresciosa questione di priorità insorta fra Leibniz e Newton, perchè estranea allo scopo di questo scritto.

(167) Scrive egregiamente Hankel (*Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*, II ed., Tübingen 1885, p. 10): « Insbesondere schuf Leibniz mit genialem phi- « losophischem Blicke einen Formalismus, oder, wie wir Ma- « thematiker sagen, einen Algorithmus, einen eigentlichen « Kalkul, durch welchen die schwierigsten Probleme, an « denen sich die bisherigen Forscher ohne oder mit wenig « Erfolg abgemüht hatten, mit *Einem* Schlage, mit wunder- « barer Leichtigkeit gelöst wurden. Selbst abgesehen von der « urkundlichen Wahrheit ist es eine Thorheit, Leibniz als « Plagiator Newton' s hinzustellen. Hätte er auch alle Me- « thoden seines Rivalen gekannt, so würde sein Algorithmus « allein ihn unsterblich gemacht haben; mit sicherem Gefühle « hat dies bereits die Sprache anerkannt, indem sie New- « ton' s Erfindung « *methodus* fluxionum et fluentium », Leib- « nizens aber den « *calculus* differentialis et integralis » ge- « nannt hat ».

(168) Voler trovare un metodo *diretto* per l'integrazione, sarebbe come voler dare per la divisione aritmetica un metodo che non si riducesse in sostanza ad una serie di tentativi più o meno abilmente dissimulati. Recentemente il sig. Bergbohm (vedansi i suoi opuscoli: *Neue Integrationsmethoden,* Stuttgart 1892, e: *Entwurf einer neuen Integralrechnung,* Leipzig 1892-93) ha creduto di aver trovato un processo diretto d'integrazione; ma nel suo metodo, a parte altre critiche a cui esso può dar luogo, compare ad un certo punto (v. il primo degli opuscoli citati, p. 22) una specie di divi-

nazione, per modo che esso si riduce in realtà ai metodi ordinari.

(169) « Ce qu'il y a de meilleur et de plus commode « dans mon nouveau calcul, c'est qu'il offre des verités par « une espece d'analyse, et sans aucun effort d'imagination, « qui souvent ne reussit que par hazard, et il nous donne « sur Archimede tous les avantages que Viète et Descartes « nous avaient donnés sur Apollonius ». Leibniz ed. Gerhardt, T. II p. 104. — « Nam antequam talia ad constantes quos- « dam characteres calculi analytici reducuntur, tantumque « omnia vi mentis et imaginationis sunt peragenda, non licet « in magis composita abditaque penetrare, quae tamen, cal- « culo semel constituto, lusus quidem jocusque videntur. Unde « jam mirum non est, problemata quaedam post receptum « calculum meum soluta haberi, quae antea vix sperabantur ». Ivi, T. IV p. 26. — « Puto tamen plures » (metodi) « recte « revocari posse ad unum idemque caput.... Methodi autem « inassignabilium a calculo differentiali absorbentur; ut quic- « quid his per figurarum contemplationem consequi licet, id « ipso calculo facile possit obtineri. Quare momentorum et « regulae Guldinianae usus (cuius quidam in Pappo vestigia « observant), *convolutiones* quas vocas, et *complicationes*, et « *luxationes*, aliaque id genus, ut specimina tantum universa- « lioris infinitesimalium methodi accipis, quae calculo diffe- « rentiali tractata velut sponte nascuntur ». Ivi, p. 40. — « Ope hujus calculi differentialis omnia ista reperio, sine fi- « gurarum inspectione et linearum ductu, et per consequens « ea, ad quae imaginatio per linearum ductus attingere ne- « quit ». Ivi, p. 479. — « .... habe ich zuerst den analyti- « schen Weg geöffnet, und kan auch curvas, quas Cartesius « male mechanichas vocabat, quia calculo suo submittere non « poterat, ad nudas calculi leges revociren, und das gemüth « auch hierinnen a tentamentorum anxietate et incertitudine « befreyen ». Ivi, T. VII p. 360. — « Dn. Tschirnhusius de « mea metodo dicere solebat, esse compendium compendii, « sed ni fallor plus quam compendium praebet, etiam Hugenio « judice, maxime utique idoneo ». *Briefwechsel zwischen Leibniz*

und Chr. Wolf, herausgegeben von Gerhardt, Halle 1860, p. 187.

(170) P. es. Jacopo Bernoulli (*Opera*, p. 455) scrive: « Quanquam enim, ut nuper innui, ansam huic dedisse credam « calculum Barrovii, qualem appello, qui ab huius viri tem- « pore passim fere apud geometras praestantiores invaluit, « quemque etiamnum nobil. Tschirnhausio solemnem esse vi- « deo: hoc tamen non eo intelligendum est, quasi utilissimi « inventi dignitatem ullatenus elevare, aut celeberrimi viri « laudi meritae quicquam detrahere et aliis ascribere cupiam; « et si quae conferenti mihi utrinque intercedere inter illos « visa est affinitas, ea maior non est, quam quae faciat, ut, « uno intellecto, ratio alterius facilius comprehendatur: dum « unus superfluas et mox delendas quantitates adhibet, quas « alter compendio omittit. De caetero namque, compendium « isthoc tale est, quod naturam rei prorsus mutat, facitque « ut infinita per hunc praestari possint, quae per alterum ne- « queunt, praeterquam enim quod ipsum hoc compendium re- « perisse utique non erat cuiusvis, sed sublimis ingenii et « quod autorem quam maxime commendat ».

(171) « D'ailleurs les deux demandes ou suppositions « que j'ai faites au commencement de ce Traité, et sur les- « quelles seules il est appuyé, me paraissent si évidentes, « que je ne crois pas qu'elle puissent laisser aucun doute dans « l'esprit des lecteurs attentifs. Je les aurois même pu dé- « montrer facilement à la manière des anciens, si je ne me « fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà « connues, et de m'attacher principalement à celles qui sont « nouvelles ». L'Hospital, *An. des inf. petits,* II ed., Parigi 1716, p. XV.

Non è forse qui fuor di luogo mostrare in qual modo Tomaso Ceva stabilisse un principio che in sostanza è identico al primo lemma di L'Hospital: « Licet *ni* infinita exce- « dat *ne* infinitam magnitudine *ei*, id nihil obstat quo minus « illae duae quantitates intelligantur aequales. Nam quantitas « finita addita infinitae est veluti punctum additum lineae ». T. Ceva, *Opuscula mathematica,* Milano 1699, p. 44).

(172) « I demande ou supposition. On demande qu' on « puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quan- « tités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infi- « niment petite, ou (ce qui est la même chose) qu'une quan- « tité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre « quantité infiniment moindre qu'elle puisse être considérée « comme demeurant la même.... — II demande ou suppo- « sition. On demande qu'une ligne courbe puisse être con- « sidérée comme l'assemblage d' une infinité de lignes droites, « chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) « comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun « infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils « font entr' eux la courbure de la ligne ». Ivi, p. 2.

(173) Varignon, *Élaircissements sur l'analyse des infini- ment petits,* Parigi 1725.

(174) Crouzas, *Commentaire sur l' analyse des infiniment petits,* Parigi 1721.

(175) Del commento di Paulian non conosco il titolo esatto ; ne desumo l'esistenza dal Montucla, *Hist. des math.*, T. II p. 398.

(176) « Supposition I. Toute quantité qui n'est ni aug- « mentée ni diminuée que d'une partie infiniment petite par « rapport à son tout, peut être prise pour la même qu'elle « étoit avant ce changement : Mutatio infinite parva, mutatio « nulla. — Supposition II. Tout produit qui résulte d'une « quantité indéfiniment petite par une autre quantité indéfi- « niment petite est nul ». Varignon, op. cit., p. 2.

(177) « Déf. II. La *différence* ou *différentielle* d'une quan- « tité est l'accroissement ou la diminution instantanée de sa « valeur. Ainsi la différence d'une quantité variable sera une « portion indéfiniment petite dont sa valeur augmente ou di- « minue continuellement ». Ivi, p. 1.

(178) « Pour trouver les touchantes d'une courbe, sans « la considérer comme un polygone, on les suppose d'abord « comme des sécantes qui à la fin deviennent tangentes.... « Par là on satisfait à un scrupule que voici sur le calcul « des différences.... On dit qu'on peut mettre $x + dx$ pour x,

« et $y + dy$ pour y ; ce qui fait une difficulté : car dx, dy sont « quelque chose ou zéro. Si on les prend pour quelque chose, « il ne sera pas vrai de dire (comme l'on fait) que $x + dx$ « $= x$, et $y + dy = y$. Si on les prend pour zéro, c'est un « badinage que de changer x en $x + dx$, ou y en $y + dy$; et « l'on ne doit tirer de $x + dx$, ou de $y + dy$ que ce que « l'on tireroit de x et y. — Pour répondre à cette difficulté, « l'on ne doit pas dire que $x + dx$ soit $= x$, ni $y + dy = y$; « mais que $x + dx$ est une abscisse qui a, dans ce lieu, la « même propriété que x, et $y + dy$ la même que y : de sorte « que l'on pourra faire de $x + dx$ ou de $y + dy$ la même « chose que de x ou de y. Et parce qu'en ce cas dx et dy « sont quelque chose (autrement la seconde égalité ne seroit « que la premiere sans aucun changement, ce qui seroit « badin) toutes ces puissances s'en doivent conserver, tant « qu'on demeure dans cette supposition ; c. à. d., tant que « les ordonnées MP, mp sont distantes l'une de l'autre, quel- « que peu que ce soit ; et dans tout cela MT n'est encore « qu'une sécante, mais en considérant ces ordonnées s'ap- « procher jusqu'à se confondre ensemble, dx et dy cessent « d'être quelque chose et deviennent chacune $= 0$; c'est « pour cela que les puissances s'en rejettent, et c'est là le « cas où la sécante devient tangente ». Ivi, p. 12-13.

(179) Joh. Bernoulli, *Opera*, T. III p. 385-558.

(180) Fu pubblicata per la prima volta a Padova nel 1667. L'edizione che cito qui è quella comprendente le p. 407-462 delle *Opera varia* di Huygens (Leida 1724).

(181) « .... analysios officium esse sicut algebrae com- « munis, non solum problemata resolvere, sed etiam eorum « impossibilitatem (si opus sit) demonstrare ». Gregory, l. c., p. 408.

(182) « Quando quantitas componitur ex quantitatum « additione, subductione, multiplicatione, divisione, radicum « extractione, dicimus illam componi analytice ». Ivi, p. 413.

(183) « Dico sectorem circuli, ellipseos vel hyperbolae « ABIP non esse compositum analytice a triangulo ABP et « trapezio ABFP ». Ivi, p. 429.

(184) « Primum itaque sciendum est nos semper nobis « proponere quantitates commensurabiles, seu quae inter se « sunt ut numerus ad numerum; proportionem enim incom- « mensurabilem nisi relative ad commensurabilem nullo modo « percipimus, habet enim in se nescio quid infiniti, mentem « nostram obtundens et simplicem perceptionem impediens ». Ivi, p. 409. — « Advertendum est verissimum philosophorum « axioma, nempe omnem nostram cognitionem a sensu ortum « habere: inter proportiones enim, sola commensurabilis sensu « attingitur et perfecte ab humana mente intelligitur; incom- « mensurabilis enim a mathematicis solummodo adhuc con- « templatur, quatenus commensurabilis cujusdam rationis est « subduplicata, subtriplicata, etc. vel ex talium additione, « subductione etc. genita: hoc est, quantitas quae quantitati « propositae est incommensurabilis ex eo solummodo ab hu- « mana mente contemplatur, quod ex aliquot quantitatum « cognitarum et propositae quantitati commensurabilium ad- « ditione, subductione, multiplicatione, divisione et radicum « extractione componi possit ». Ivi, p. 432.

(185) « .... et nostra sexta operatio, quae in genere ni- « hil aliud est quam inventio proportionis commensurabilis, « quam proxime accedentis ad nostram proportionem non « analyticam, componitur ex prioribus quinque ». Ivi, p. 409.

(186) « Sint duae quantitates A, B, a quibus componantur « duae aliae quantitates C, D, quarum differentia sit minor diffe- « rentia quantitatum A, B, et eodem modo quo C componitur a « quantitatibus A, B, componatur E a quantitatibus C, D; et « eodem modo quo D componitur a quantitatibus A, B, com- « ponatur F a quantitatibus C, D; et eodem modo quo E « componitur a quantitatibus C, D, vel C a quantitatibus « A, B, componatur G a quantitatibus E, F; et eodem modo « quo F componitur a quantitatibus C, D, vel D a quanti- « tatibus A, B, componatur H a quantitatibus E, F; atque « ita continuetur series: appello hanc seriem, seriem conver- « gentem ». Ivi, p. 413-414.

(187) « .... manifestum est omnis seriei convergentis ter- « minationem eodem modo esse compositam ex terminis con-

« vergentibus primis quo ex terminis convergentibus secundis, « tertiis, vel quartis, etc. ». Ivi, p. 428–429.

(188) Basti dire che nel già citato trattato di Alberto di Sassonia sulla quadratura del circolo si enumerano cinque modi diversi d'intendere il problema. V. Zeitschr. für Math. und Phys., T. XXIX, Hla., p. 88.

(189) « Quantitates, ut et quantitatum rationes, quae ad « aequalitatem tempore quovis finito constanter tendunt, et « ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt « quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales ». Newton, *Phil. nat. pr. math.*, L. I Lemma I.

(190) « It is inconceivable, that inanimate brute matter « should, without the mediation of something else, which « is not material, operate upon, and effect other matter with- « out mutual contact; as it must do, if gravitation, in the « sense of Epicurus, be essential and inherent in it. And « this is one reason, why I desired you would not ascribe « innate gravity to me. That gravity should be innate, in- « herent, and essential to matter, so that one body may act « upon another at a distance through a vacuum, without the « mediation of any thing else, by and through which their « action and force may be conveyed from one to another, is « to me so great an absurdity, that I believe no man who « has in philosophical matters a competent faculty of thin- « king, can ever fall into it. Gravity must be caused by an « agent acting constantly according to certain laws; but « whether this agent be material or immaterial, I have left « to the consideration of my readers ». Newton, *Opera omnia*, ed. Horsley, Londra 1779, T. IV p. 438.

(191) « .... malui demonstrationes rerum sequentium ad « ultimas quantitatum evanescentium summas et rationes « primasque nascentium, id est, ad limites numerorum et ra- « tionum deducere; et propterea limitum illorum demonstra- « tiones qua potui brevitate praemittere.... Objectio est, quod « quantitatum evanescentium nulla sit ultima proportio; quippe « quae, antequam evanuerunt, non est ultima; ubi evanuerunt, « nulla est. Sed et eodem argumento aeque contendi posset

« nullam esse corporis ad certum locum, ubi motus finiatur, « pervenientis velocitatem ultimam: hanc enim, antequam « corpus attingit locum, non esse ultimam; ubi attingit, nul- « lam esse. Et responsio facilis est: Per velocitatem ultimam « intelligi eam, qua corpus movetur, neque antequam attingit « locum ultimum et motus cessat, neque postea, sed tunc « cum attingit; idest illam ipsam velocitatem, quacum corpus « attingit locum ultimum et quacum motus cessat. Et similiter « per ultimam rationem quantitatum evanescentium intelli- « gendam esse rationem quantitatum, non antequam evane- « scunt, non postea, sed quacum evanescunt. Et summa « prima et ultima est quacum esse (vel augeri vel minui) in- « cipiunt ac cessant. Extat limes quem velocitas in fine mo- « tus attingere potest, non autem transgredi: Haec est velo- « citas ultima. Et par est ratio limitis quantitatum et pro- « portionum omnium incipientium et cessantium... — Contendi « etiam potest, quod si dentur ultimae quantitatum evane- « scentium rationes, dabuntur et ultimae magnitudines... Verum « haec objectio falsae innititur hypothesi. Ultimae rationes « illae quibuscum quantitates evanescunt, revera non sunt « rationes quantitatum ultimarum, sed limites ad quos quan- « titatum sine limite decrescentium rationes semper appro- « pinquant, et quos propius assequi possunt quam pro data « quavis differentia, nunquam vero transgredi, neque prius « attingere quam quantitates diminuuntur in infinitum.... In « sequentibus igitur, si quando facili rerum conceptui con- « sulens, dixero quantitates quam minimas, vel evanescentes, « vel ultimas, cave intelligas quantitates magnitudine deter- « minatas, sed cogita semper diminuendas sine limite ». Newton, *Phil. nat. pr. math.*, L. I Lemma XI Scolio.

(192) V. Leseur e Jacquier, Commento ai *Principia*, L. I, N. 143-169; Newton, *Methodus fluxionum* e *Tractatus de quadratura curvarum* (*Opuscula*, T. I).

(193) « Similibus argumentis, per methodum rationum « primarum et ultimarum, colligi possunt fluxiones linearum, « seu rectarum, seu curvarum, in casibus quibuscunque, ut et « fluxiones superficierum, angulorum et aliarum quantitatum.

« In finitis autem quantitatibus analysin sic instituere, et « finitarum nascentium vel evanescentium rationes primas vel « ultimas investigare, consonum est geometriae veterum; et « volui ostendere quod in mea methodo fluxionum non opus « sit figuras infinite parvas in geometriam introducere ». Newton, *Opuscula*, T. I p. 207.

(194) Mac-Laurin, *Traité des fluxions*, T. I p. 8.

(195) Ivi, T. II p. 160.

(196) « .... la vitesse à la fin d'un tems est exactement « mesurée par l'espace qui auroit été décrit dans un tems « donné, sì le mouvement avoit été continué uniformément « depuis ce tems ». Ivi, T. I p. 3.

(197) Taylor, *Methodus incrementorum directa et inversa*, Londra 1717.

(198) Ciò risulta chiaramente dall'esame dell'opera stessa, nonchè dalle parole seguenti dell'autore (Eulero, op. cit., Pref., p. LXI): « .... deinde vero haec incrementa cogita- « tione continuo minora fieri concipiantur, sicque eorum ratio « continuo magis ad certum quendam limitem appropinquare « reperietur, quem tum demum attingant, cum plane in nihi- « lum abierint ».

F. Speroni, autore delle note che corredano l'edizione citata del trattato d'Eulero, scrive: « Paradoxum videtur, « quod hic asseritur esse $\frac{y}{x} = \frac{0}{0} = A$, quia cyphrae non « sunt quantitates, neque una altera maior vel minor esse dicive « potest. Verum ratio $\frac{y}{x} = A$ revera non est ratio cyphra- « rum, sed *limes*, ad quem ratio $\frac{y}{x}$ perpetuo appropinquàt, « variabili x et cum ea simul variabili y continuo decre- « scente ».

(199) Le idee di Lagrange furono in parte accettate da Laplace, il quale però osservava come per le applicazioni geometriche sia necessaria l'introduzione del concetto di limite: « Le passage du fini à l'infiniment petit repand un « grand jour sur la métaphysique du calcul différentiel. On

« voit clairement par ce passage que ce calcul n'est que la « comparaison des coefficients des mêmes puissances des dif- « férentielles, dans le développement en série de fonctions « identiquement égales des indices augmentés respectivement « de différentielles indéterminées. Les quantités que l'on né- « glige comme infiniment petites d'un ordre supérieur à celui « que l'on conserve, et qui semblent par cette omission ôter « à ce calcul la rigueur de l'algèbre, ne sont que des puis- « sances de ces différentielles, supérieures aux puissances « dont on compare les coefficients, et qui par là doivent être « rejetées de cette comparaison, en sorte que le calcul dif- « férentiel a toute l'exactitude des autres opérations algébri- « ques. Mais dans ses applications à la Géométrie et à la « Mécanique, il est indispensable d'introduire le principe des « limites ». Laplace, *Théorie analytique des probabilités,* III ed., Parigi 1820, Introd. (*Essai philosophique*) p. XXXVII.

(200) Nouveaux Mémoires de l'Acad. des Sc. et Belles-Lettres (1784), Berlin 1786, p. 12-13.

(201) Ripubblicata in latino con qualche modificazione sotto il titolo: *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris* (Tübingen 1795).

(202) « Que la méthode des anciens, connue sous le nom « de Méthode d'Exhaustion, convenablement étendue, suffit « pour établir d'une manière certaine les principes des nou- « veaux calculs ». *Expos. élém.*, p. 6.

(203) « Si deux rapports variables, susceptibles de limites, « sont toujours égaux entr'eux, leurs rapports limites sont aussi « égaux entr'eux ». Ivi p. 17. — « Le rapport limite de « deux quantités variables susceptibles de limites est égal « au rapport de leurs limites ». Ivi, p. 24. — Questi due teoremi vengono riassunti più innanzi (ivi, p. 167) nel seguente principio: « Si une quantité variable, susceptible de « limite, jouit constamment d'une certaine propriété, sa limite « jouit de la même propriété. Et si une quantité variable, « susceptible de limite, approche d'autant plus de jouir d'une « certaine propriété, qu'elle approche d'avantage de sa li- « mite, de manière qu'il n'y ait aucune limite à la capacité

« qu'elle a de jouir de cette propriété, sa limite jouit de « cette propriété ».

(204) Ecco come l'autore dimostra in questo capitolo (p. 49) la formola di Taylor. Sia:

$$P = P(x),\ P^{(N)} = P(x+b),\ b = n\Delta x;$$

può stabilirsi la relazione:

$$P^{(N)} = P + \frac{b}{1}(A' + B'\Delta x + C'\Delta x^2 + ...) + \frac{b}{1}\,\frac{b-\Delta x}{2}$$

$$(A'' + B''\Delta x + C''\Delta x^2 + ...) + \frac{b}{1}\,\frac{b-\Delta x}{2}\,\frac{b-2\Delta x}{3}(A''' +$$

$$B'''\Delta x + C'''\Delta x^2 + ...) + ...,$$

dove $A' = \frac{dP}{dx}$, $A'' = \frac{d^2P}{dx^2}$, $A''' = \frac{d^3P}{dx^3}$ etc... L'espressione di $P^{(N)}$ consta di 3 parti, cioè: 1) P; 2) $\frac{b}{1}\,\frac{dP}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\,\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\,\frac{d^3P}{dx^3} + ...$; 3) Una funzione di Δx della forma $a'\Delta x + b'\Delta x^2 + c'\Delta x^3 + ...$ Ora $P^{(N)}$ non dipende dal numero arbitrario n di parti in cui fu diviso l'intervallo b, ossia non dipende da Δx, quindi la terza parte della espressione di $P^{(N)}$ deve, come le due prime, essere indipendente da Δx. Ma Δx può prendere valori tanto vicini a zero quanto si vuole, e conseguentemente $a'\Delta x + b'\Delta x^2 + c'\Delta x^3 + ...$ non ha alcun limite di piccolezza; anzi questa somma è nulla per $\Delta x = 0$. Ne segue che essa è identicamente nulla, onde si ha:

$$P^{(N)} = P + \frac{b}{1}\,\frac{dP}{dx} + \frac{b^2}{1.2}\,\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{b^3}{1.2.3}\,\frac{d^3P}{dx^3} + ...$$

Questa dimostrazione è notevole, perchè l'ultima parte di essa contiene in germe l'idea dell'arbitrarietà dell'infinitesimo, la quale, come vedremo parlando di Carnot, basta da sola a stabilire l'esattezza del calcolo infinitesimale (a questo proposito vedasi: Freycinet, *De l'analyse infinitésimale, étude sur la métaphysique du haut calcul,* Parigi 1860, p. 154; Stolz, *B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der*

Infinitesimalrechnung, Math. Annalen, T. XVIII p. 255-279). Però Lhuilier non solo non trae da quel concetto il vantaggio che avrebbe potuto ricavarne, ma anzi in una *Addition et correction au Ch. III* (p. 207) scrive che potrebbero elevarsi dei dubbi sulla legittimità della sua deduzione, e che quindi egli si ritiene in obbligo di rettificarla come segue:

Siccome l'espressione considerata è costante, ponendo in essa $\frac{1}{2}\Delta x$ in luogo di Δx si avrà:

$$\Delta x\,(a' + b'\Delta x + c'\Delta x^2 + \ldots.) =$$
$$\frac{1}{2}\Delta x\,(a' + \frac{1}{2}b'\Delta x + \frac{1}{4}c'\Delta x^2 + \ldots.),$$

da cui:

$$\frac{1}{2}a' + \frac{3}{4}b'\Delta x + \frac{7}{8}c'\Delta x^2 + \ldots = 0;$$

ma, se i coefficienti di quest'equazione non fossero tutti nulli, essa non potrebbe esser soddisfatta per qualunque valore di Δx, quindi dev'essere $a' = b' = c' = \ldots. = 0$.

(205) Mi sono esteso alquanto sulla Memoria di Lhuilier perchè poco nota e difficile a consultarsi: p. es. Du Bois Reymond (op. cit., p. 133) dice di non aver potuto procurarsela.

(206) « Wird man auf die unermesslichen Vortheile, « welche diese Rechnung » (l'analisi infinitesimale) « verschafft, Verzicht thun wollen, aus Furcht, sich auf einen « Augenblick von dem genauen Verfahren der Elementargeometrie zu entfernen, oder wird man dem ebenen und bequemen Wege, auf welchem uns die Analysis zu Entdeckungen führt, einen dornichten Pfad vorziehen wollen, auf « welchem es so schwer ist, sich nicht zu verirren? So ist « in der That derjenige beschaffen, welchen die Methode der « Gränzen darbietet, wenn man vom ihm ausschliessend Gebrauch machen will ». Carnot, *Betrachtungen* etc., p. 56. — « Hrn. Lhuilier's Preisschrift beschäftigt sich hauptsächlich « mit dem zweyten Theile der vorerwähnten Preisfrage.... « Carnot hingegen — von dem ich übrigens nicht weiss, ob

« ihm jene Preisfrage bekannt worden sey — widmet dem « ersten Theile seine ganze Abhandlung, ohne sich auf den « zweyten besonders einzulassen, weil er, nach dem Resul- « tate, wozu ihn seine Beantwortung des ersten Theiles « führte, den zweyten als überflüssig ansehen musste. Er « zeigt daher, dass wir eines Surrogats für die richtig ver- « standenen Gründe der Infinitesimalrechnung gar nicht « bedürfen, und dass es für die Wissenschaft gar nicht zu- « träglich seyn würde, wenn man die von mehreren neueren « Analysten, und am nachdrücklichsten von Hrn. L'Huilier, « zu diesem Behufe empfohlene Gränzenmethode dazu machen, « und das Unendliche aus der Mathematik schlechterdings « verbannen wollte ». Ivi, p. 102 (Note).

(207) Le *Réflexions* furono scritte parecchi anni prima di essere pubblicate. V. la Prefazione di Carnot.

(208) « Der Erfinder konnte daher durch eine sehr ein- « fache Schlussreihe auf seine Entdeckung geleitet werden. « Wenn ich, konnte er sagen, in der Rechnung an Statt « einer vorgegebenen Gröse eine andere seze, die ihr nicht « gleich ist, so wird daraus ein Irrthum entstehen; wenn aber « der Unterschied der Grösen, deren eine für die andere « gesezt worden, willkührlich ist, und ich Vollmacht habe, « ihn so klein zu machen, als ich will, so kann dieser Irrthum « nicht gefährlich werden; ich kann sogar mehrere ähnliche « Irrthümer zugleich begehen, ohne dass ein Nachtheil daraus « entstünde, weil ich über den Grad der Genauigkeit, den « ich meinen Resultaten geben will, immer Herr bleibe. Ja « noch mehr, es könnte geschehen, dass diese Irrthümer « einander aufhöben, und dass auf solche Art meine Resultate « vollkommen genau würden. Aber wie ist diese Aufhebung « zu bewerkstelligen, und zwar in allen Fällen? Dies zu « entdecken war ein geringes Nachdenken zureichend. Wir « wollen, konnte der Erfinder sagen, auf einen Augenblick « annehmen, dass die gesuchte Aufhebung wirklich Statt « habe, und zusehen, durch was für ein Zeichen sie in dem « Resultate der Rechnung sich zu erkennen geben müsse. « Nun ist kein Erfolg natürlicher als der, dass wenn die

« Grösen, welche diese Irrthümer veranlasseten, verschwun- « den sind, die Irrthümer selbst gleichfalls verschwunden « seyn müssen. Denn da diese Grösen (wie MZ, RZ), nach « der Voraussezung, willkührliche Werthe sind, so müssen « sie nicht mehr in den Formeln oder Resultaten kommen, « welche das nicht sind, sondern da sie, nach der Voraus- « sezung, genau geworden sind, einzig von der Natur der « Dinge, deren Verhältniss, wie solches durch diese Resultate « ausgedrückt wird, zu finden, man sich vorgesezt hatte, und « nicht von der Willkühr des Rechners, abhangen. Demnach « ist das Zeichen, welches zu erkennen giebt, dass die ver- « langte Aufhebung Statt habe, die Abwesenheit der willkühr- « lichen Grösen, welche diese Irrthümer verursachten; und « folglich braucht man, um diese Aufhebung zu bewerk- « stelligen, nichts weiter zu thun, als diese willkührlichen « Grösen wegzuschaffen ». Ivi, p. 11-12. — « In der That « haben wir.... gesehen dass.... der Charakter der Grösen « dieser Art » (grandezze infinitesime) « nicht in ihrer wirk- « lichen Kleinheit, sondern vielmehr in ihrer völligen Un- « bestimmtheit, d. h. in der Eigenschaft liegt, durch die « ganze Rechnung hindurch willkührlich und von den gege- « benen Grösen so unabhängig zu bleiben, dass man immer « Vollmacht behält, sie so klein, als man will, zu nehmen, ohne « an den Bedingungen der Aufgabe etwas zu ändern ». Ivi, p. 31.

(209) Freycinet (op. cit., p. 242-243), parlando della dimostrazione data da Carnot della compensazione degli errori, dice: « Une telle démonstration, bien que vraie au fond, « n'est pas satisfaisante pour l'esprit, car elle semble con- « fondre le *signe* de l'effet avec la *cause* elle-même. On voit « bien que si les quantités infiniment petites ont disparu, le « résultat ne peut être erroné, mais on ne voit pas *pourquoi* « ces infiniment petits disparaissent inévitablement, et pour- « quoi en les supprimant on rétablit l'exactitude. — C'est « le point qu'éclaire supérieurement la considération des li- « mites ».

(210) Carnot, op. cit., p. 42.

(211) Mansion, op. cit., p. 21. Si confrontino le seguenti parole di Leibniz (ed. Gerhardt, T. IV p. 218): « Interea « infinite parva concipimus non ut nihila simpliciter et ab- « solute, sed ut *nihila respectiva*, id est ut evanescentia qui- « dem in nihilum, retinentia tamen characterem ejus quod « evanescit ».

(212) Carnot, op. cit., pref. di Hauff, p. V-VI.

(213) *Sur les divers ordres de quantités infiniment petites* (Cauchy, *Oeuvres*, S. II T. VI, Parigi 1887, p. 184-190).

(214) Leibniz, D'Alembert, Lacroix (1765-1843), etc.

(215) Con ciò non intendo punto di riprendere una vecchia polemica sull' esistenza dell' infinitesimo, ma solo di dire che il Calcolo può svolgersi affatto indipendentemente dalla considerazione di grandezze non finite. Ciò però non esclude punto che in altri campi delle matematiche possano presentarsi classi di enti, alcuni dei quali possano dirsi infinitesimi rispetto ad altri, avendo la parola *infinitesimo* un significato diverso da quello ad esso attribuito da Cauchy. Vedasi il § 12 del primo de' miei articoli già citati.

INDICE ALFABETICO DEI NOMI PROPRI

Fig. 1

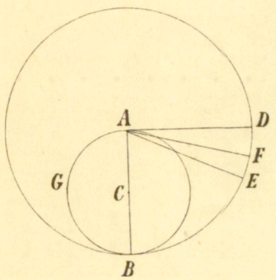

Fig. 2

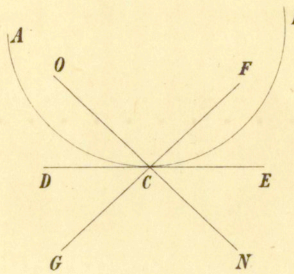

Fig. 3

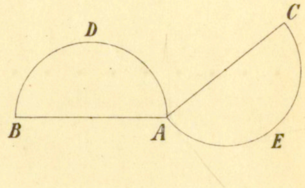

Fig. 4

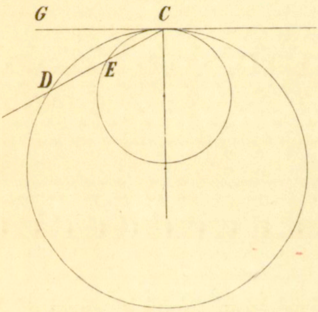

Fig. 5

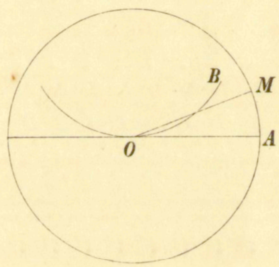

Fig. 6

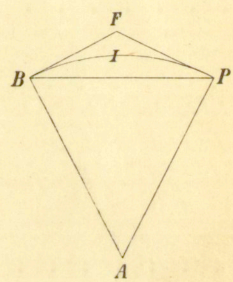

Fig. 7

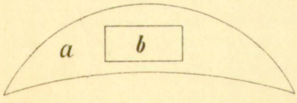

Fig. 8

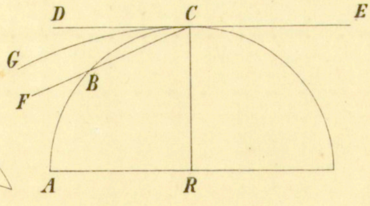

Fig. 9