

- 1.3. — metody różnic skończonych
- 6.2.3. — przepływ lepki
- 7.2. — transport ciepła, konwekcja,
przewodnictwo i promieniowanie

P.269

J. Słomczyńska, S. Filipkowski, E. Zawistowska
NUMERYCZNA SYMULACJA STACJONARNEJ
KONWEKCJI SWOBODNEJ
W KWADRATOWYM OBSZARZE POWIETRZNYM
MIĘDZY RÓŻNOTEMPERATUROWYMI
BOKAMI PIONOWYMI



13/1993

WARSZAWA 1993

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 31 grudnia 1993 r.



56677



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd. 2,5 Ark.druk. 3,12
Oddano do druku w kwietniu 1993 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

Jerzyna Słomczyńska, Stanisław Filipkowski, Elżbieta Zawistowska
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

NUMERYCZNA SYMULACJA STACJONARNEJ KONWEKCJI SWOBODNEJ
W KWADRATOWYM OBSZARZE POWIETRZNYM
MIĘDZY ROZNOTEMPERATUROWYMI BOKAMI PIONOWYMI

STRESZCZENIE

Przedmiotem pracy jest numeryczna analiza konwekcji swobodnej w wypełnionym powietrzem obszarze kwadratowym, zachodzącej pod wpływem ustalonej różnicy temperatur na ściankach pionowych. Pola prędkości i temperatury wyznaczone są numerycznie przez rozwiązanie równań Navier-Stokesa sprzężonych z równaniem energii. Układ tych równań jest rozwiązywany zachowawczą metodą różnicową na układzie siatek przesuniętych. Pojedyncze równanie adwekcji-dyfuzji oraz sekwencja sprzężonych równań rozwiązywane są według algorytmu SIMPLER.

Wyniki obliczeń przedstawiają pola prędkości i temperatury dla trzech liczb Rayleigha: 1000, 10000 i 100000, dla trzech różnych dyskretyzacji członu nieliniowego (schematy upwind, hybrydowy i potęgowy), dla trzech gęstości siatki (podziały 10×10 , 20×20 i 50×50). Wyniki są zgodne z danymi literaturowymi, przekonując o przydatności metody do rozwiązywania numerycznych problemów konwekcyjnych.

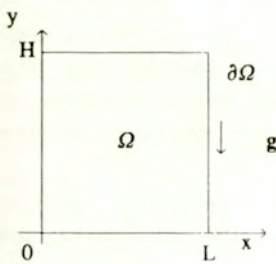
1. WPROWADZENIE

Wśród metod numerycznych stosowanych do symulacji procesów konwekcji i dyfuzji, w szczególności do numerycznego wyznaczania rozkładów temperatury i prędkości w przepływach stacjonarnych i nieustalonych, rosnącą popularnością od początku lat osiemdziesiątych cieszy się algorytm SIMPLER S.V. Patankara, przystępnie i atrakcyjnie przedstawiony w jego książce (Patankar, 1980). Większość prezentowanych w literaturze zastosowań tej metody dotyczy problemów bądź czysto hydrodynamicznych, bądź takich, w których pola prędkości i temperatury można traktować jako niesprężone (np. wyznaczać rozkład temperatury dla zadanego pola przepływu). Konwekcja swobodna jest z definicji zjawiskiem, w którym rozprężenie pól prędkości i temperatury jest niemożliwe. Zagadnienie z tego zakresu stanowi więc bardzo dobry test dla metody uważanej za uniwersalną do modelowania procesów wymiany ciepła.

Metody numeryczne stosowane do rozwiązywania rozmaitych praktycznych problemów mechaniki płynów i wymiany ciepła, wymagających opisanie ich odpowiednimi równaniami Navier-Stokesa i energii, mnożyły się wraz z rozwojem komputeryzacji. Ponieważ zastosowania dotyczyły rozmaitych problemów, trudno było ocenić przydatność poszczególnych metod na podstawie bezpośredniego porównania. Porównawczej oceny przydatności metod numerycznych stosowanych do rozwiązywania równań Navier-Stokesa zaczęto więc dokonywać na podstawie ich zastosowania do t.zw. "driven cavity problem" (przepływ stacjonarny nieściśliwy w zamkniętym kwadracie, wymuszony jednostkową prędkością styczną na jednym z boków). W 1979 roku I.P. Jones zaproponował analogiczne zadanie testowe dla metod numerycznych stosowanych do modelowania przepływów cieplnych, a więc do rozwiązywania równań Navier-Stokesa rozszerzonych o równanie energii. Zadaniem tym jest znalezienie przepływu konwekcyjnego w zamkniętym kwadracie, wymuszonego jednostkową różnicą temperatur boków pionowych. Zagadnienie to, w ogólności w prostokącie, a trójwymiarowo - w prostopadłości, jest istotne w problematyce termicznej izolacji pomieszczeń i urządzeń. Celem tego artykułu jest przedstawienie metody SIMPLER w zastosowaniu do problemu konwekcyjnego przepływu ciepła przez obszar kwadratowy.

2. KONWEKCYJA W KWADRACIE WYWOŁANA RÓŻNICĄ TEMPERATUR BOKÓW PIONOWYCH: POSTAWIENIE PROBLEMU I PODSTAWOWE USTALENIA

Badamy numerycznie stacjonarny, nieściśliwy, lepki przepływ konwekcyjny w wypełnionym powietrzem obszarze zamkniętym między dwiema pionowymi przegrodami, z których każda pozostaje w innej temperaturze, stałej na całej powierzchni. Sprowadzamy ten problem do zagadnienia dwuwymiarowego, przedstawiając różnotemperaturowe przegrody jako pionowe boki szczeliny kwadratowej Ω , między którymi zachodzi wymiana ciepła. Boki poziome traktujemy jako adiabatyczne.



$$\overline{OL} = \overline{OH} = 1,$$

$$u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$\theta|_{x=0} = \theta_1, \quad \theta|_{x=L} = \theta_0,$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\partial\theta}{\partial y}|_{y=H} = 0.$$

Rys.1 Rozważany obszar szczeliny i warunki brzegowe

Tak postawiony problem konwekcji swobodnej definiują równania Naviera-Stokesa (równania ciągłości i ruchu) oraz równanie energii w przybliżeniu Boussinesqa, które jest uzasadnione dla przepływu nieściśliwego i praktycznie występujących w tym problemie wielkości obszaru (w ogólności, prostokąta o wysokości H i szerokości L) oraz zakresu różnicy temperatur $(\theta_1 - \theta_0)$ na przegrodach

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} - \mathbf{g} \alpha (\theta - \theta_0), \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \theta = \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} \theta, \quad (2.3)$$

gdzie \mathbf{v} - wektor prędkości, \mathbf{g} - wektor przyspieszenia ziemskiego, ρ -

ciśnienie, ρ - gęstość, η - lepkość dynamiczna, $\nu = \eta/\rho$ - lepkość kinematyczna, α - współczynnik rozszerzalności objętościowej (równy $1/\theta$ dla gazu doskonałego), θ - temperatura, $\kappa = k/(c_p \rho)$ - współczynnik przewodnictwa temperaturowego, k - współczynnik przewodnictwa cieplnego, c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu.

Równania (2.1) - (2.3) są sprzężone i - w przeciwieństwie do równań opisujących konwekcję wymuszoną - nie dają się rozprzęgnąć. Muszą zatem być jednocześnie rozwiązywane, co stanowi jedną z głównych trudności realizacji obliczeń numerycznych. Ponieważ różnica temperatur wywołująca przepływ występuje pomiędzy ściankami pionowymi (a nie poziomymi - jak w przypadku konwekcji Bénarda), nie ma progowej wartości tej różnicy, przy której zaczyna się ruch płynu. Dla dowolnie małej, niezerowej różnicy temperatur siła wyporu - wynosząca $\rho g = g\alpha(\theta - \theta_0)$ przy przyjęciu przybliżenia Boussinesq'a - jest przy ściance cieplej inna niż przy ściance zimnej, a zatem nie da się zrównoważyć przez siły od pionowego gradientu ciśnienia, a przy wystąpieniu poziomego gradientu zachodzi ruch płynu. Odróżnia to ten problem konwekcyjny od konwekcji Bénarda powodując liczne konsekwencje teoretyczne i praktyczne dotyczące charakteru przepływu i jego stabilności.

W mechanice płynów zwykło się przyjmować bezwymiarowe liczby kryterialne charakteryzujące przepływy pod względem ich podobieństwa: przepływy o tej samej liczbie kryterialnej można było, a priori, uznać za podobne. Dla równań Navier-Stokesa typową liczbą kryterialną jest liczba Reynoldsa, $Re = vL/\nu$, gdzie v - skala prędkości, L - skala długości, ν - lepkość kinematyczna, charakterystyczna dla danego przepływu. Liczba Reynoldsa nie jest jednak właściwą liczbą kryterialną dla problemu konwekcji swobodnej, gdyż prędkość jest zmienną zależną i nie można w sposób naturalny wyznaczyć jej skali z danych zadania. Problem jest charakteryzowany przez różnicę temperatur na ściankach pionowych, rodzaj płynu (ściślej: jego parametry ρ , ν , κ) oraz wymiary szczeliny, w szczególności jej smukłość, czyli stosunek wysokości do szerokości. Zależność tę widać szczególnie dobrze po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych, czyli podzieleniu równań (2.1) - (2.3) przez odpowiednie skale. Wprowadzając skalę temperatury $S_T = \theta_1 - \theta_0$ [deg], skalę długości $S_x = L$ [cm], skalę prędkości $S_v = \kappa/L$ [cm/s] i skalę ciśnienia $S_p = \kappa^2 \rho / L^2$ [g/(cm·s²)] otrzymujemy

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \text{Pr} \cdot \text{div grad } \mathbf{v} - \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot \mathbf{T}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla T = \text{div grad } T, \quad (2.6)$$

gdzie wszystkie zmienne (\mathbf{v}, p, T) są bezwymiarowe, $T = \frac{\theta - \theta_0}{\theta_1 - \theta_0}$, $\text{Pr} = \nu/\kappa$ jest charakteryzującą parametry płynu liczbą Prandtla, $\text{Ra} = \frac{g\alpha L^3(\theta_1 - \theta_0)}{\nu\kappa}$ jest liczbą Rayleigha. Niektórzy autorzy zamiast Ra stosują liczbę Grashofa Gr , przy czym $\text{Ra} = \text{Gr} \cdot \text{Pr}$. Jeśli skalą długości jest szerokość szczeliny, to x zmienia się w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$, y zaś w przedziale $\langle 0, H/L \rangle$. Problem konwekcji w szczelinie prostokątnej (a więc i kwadratowej) spowodowanej różnicą temperatur na ściankach pionowych charakteryzowany jest zatem nie jedną, a trzema liczbami kryterialnymi: Ra , Pr i H/L . Stwarza to bogactwo możliwości i sprawia, że - pomimo dość bogatej literatury - zagadnienie pozostaje w centrum uwagi badaczy. Ponieważ jednak zajmujemy się przepływem w kwadratowym obszarze powietrznym, dwie z tych trzech liczb są ustalone i wynoszą $\text{Pr} = 0.71$, $H/L = 1$. Badany przez nas przepływ zależy więc tylko od liczby Rayleigha.

Batchelor (1954), będący autorem pierwszej teorii przepływu konwekcyjnego w szczelinie prostokątnej, występującego pod wpływem różnicy temperatur na ściankach pionowych, wyróżnił - dla przepływów laminarnych - dwa typy graniczne: przewodnościowy (conduction regime) i warstwy przyściennej (boundary layer regime). Przepływ typu przewodnościowego (występujący dla $\text{Ra} \ll 0$ przy dowolnej smukłości bądź też dla $H/L \ll \infty$ przy dowolnej Ra) charakteryzuje się przejmowaniem ciepła głównie przez przewodnictwo. Linie prądu i izotermy są liniami prawie równoległymi do boków pionowych na przeważającej części wysokości szczeliny (tzn. pionowy gradient temperatury jest tam praktycznie zerowy) z wyjątkiem małego otoczenia boków poziomych. Jako przeciwstawny przypadek graniczny wyróżnił Batchelor przepływ typu warstwy przyściennej, występujący dla $\text{Ra} \gg \infty$. Wzdłuż pionowych boków szczeliny rozwijają się wówczas silne warstwy przyścienne, które otaczają obszar o stałej temperaturze i prawie zerowej prędkości. Dla średnich wartości Ra przepływ ma charakter przejściowy.

Późniejsze prace (por. np. Elder, 1965; Gill, 1966; Vest i Arpaci, 1969; Bejan, 1979) wykazały, że pionowy gradient temperatury nie jest zerowy w głównej części obszaru szczeliny, aczkolwiek dla przepływu przewodnościowego jest on stały. Przez przepływ przewodnościowy rozumie się teraz każdy przepływ o wymienionych cechach, a nie tylko przypadek graniczny gdy $Ra \rightarrow 0$ lub $H/L \rightarrow \infty$. Podobnie rozszerzyło się znaczenie terminu "przepływ typu warstwy przyściennej".

3. METODYKA NUMERYCZNEGO ROZWIĄZYWANIA UKŁADU RÓWNAŃ KONWEKCYJ ZASTOSOWANA W PROGRAMIE KONOKNO PRZEZNACZONYM DO OBLICZEN MIKROKOMPUTEROWYCH.

Podany w poprzedniej części układ równań konwekcji swobodnej rozwiązujemy numerycznie metodą różnicową w wersji zachowawczej. Przedstawiamy człony konwekcyjne w postaci dywergencji, łatwo dyskretyzowalnej jako strumień z kostki elementarnej wokół węzła siatki (control volume). Równania (2.4)-(2.6) przyjmują wówczas postać równań

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \text{Pr} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} - \text{Pr} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] - \text{Ra} \cdot \text{Pr} \cdot T = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right] = 0, \quad (3.4)$$

dających się łatwo scałkować po objętości kostki elementarnej tak, aby całkowite prawa zachowania były dla niej ściśle spełnione, także po dyskretyzacji. Takie podejście zapewnia w sposób naturalny ściśle spełnienie praw zachowania dla całego obszaru Ω .

Poszukujemy rozwiązania dla zmiennych pierwotnych (u, v, T) ze względu na naturalne dla prędkości warunki brzegowe (znikanie na brzegu prędkości przepływu lepkiego) oraz możliwość ewentualnego uogólnienia metody na trzy wymiary przestrzenne.

3.1. Dyskretyzacja obszaru i warunki brzegowe na siatkach przesuniętych.

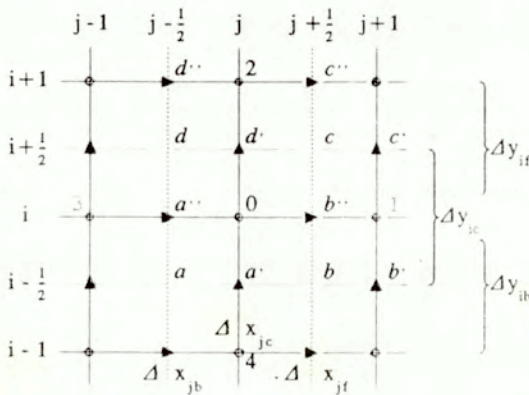
Dyskretyzacja badanego obszaru Ω , czyli pokrycie go różnicową siatką (prostokątną), zrealizowane jest w taki sposób, że różne wielkości fizyczne (w szczególności temperatura i ciśnienie z jednej strony oraz z drugiej - obie składowe prędkości) określone są na różnych zbiorach węzłów, t.zn. na siatkach względem siebie przesuniętych. Pozwala to na usunięcie pewnych fałszywych "rozwiązań", formalnie spełniających zdyskretyzowane równanie ciągłości (por. np. Harlow i Welch, 1965; 1966; Amsden

i Harlow, 1970; Roache, 1976), a także na uniknięcie wielu zbędnych interpolacji.

Posługujemy się układem siatek przesuniętych, zaproponowanym po raz pierwszy w metodzie MAC Harlowa i Welcha (1965). Zasada przesunięcia siatek jest taka, że jeśli przyjmą, że w węzłach siatki \ominus o nierównomiernym kroku określone są temperatura, ciśnienie i wszystkie inne wielkości zmienne z wyjątkiem składowych prędkości, to te ostatnie określa się w punktach przesuniętych od węzłów \ominus o pół oczka w kierunku x (składowa u określona w węzłach \oplus) oraz o pół oczka w kierunku y (składowa v określona w węzłach \oplus). Jeżeli za podstawową kostkę elementarną (control volume) przyjmą obszar prostokąta $abcd$ wokół węzła 0 , to widać, że np. równanie ciągłości dyskretyzuje się bardzo łatwo bez potrzeby interpolacji składowych prędkości

$$(u_{i,j+1/2} - u_{i,j-1/2})\Delta y_{ic} + (v_{i+1/2,j} - v_{i-1/2,j})\Delta x_{ic} = 0,$$

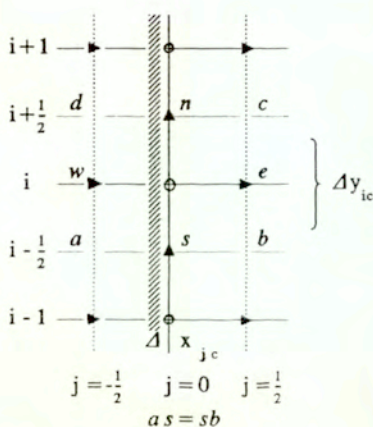
gdyż składowe prędkości są określone właśnie na ściankach kostki elementarnej. Dotyczy to także równania energii, w szczególności jego członu



Rys.2 Blok węzłów siatki

konwekcyjnego. W równaniach ruchu trzeba oczywiście rozważyć inne kostki elementarne, odpowiednio przesunięte o pół oczka w poziomie czy w pionie - np. prostokąt $a'b'c'd'$ wokół węzła $(i,j+\frac{1}{2})$ składowej u , czy prostokąt $a''b''c''d''$ wokół węzła $(i+\frac{1}{2},j)$ składowej v . W równaniach tych łatwo, tj. bez interpolacji, wyznacza się gradient ciśnienia, np. jako $(p_1-p_0)/\Delta x_{if}$ dla kostki $a'b'c'd'$ czy $(p_2-p_0)/\Delta y_{if}$ dla kostki $a''b''c''d''$.

Przy stosowaniu zmiennych pierwotnych, a więc prędkości i ciśnienia, a nie funkcji prądu i wirowości, warunki brzegowe dla równań Navier-Stokesa są bardzo łatwe i naturalne: prędkość na brzegu znika, a ciśnienie na brzegu daje się wyeliminować (Patankar, 1980). Sprawę zadania warunków brzegowych na siatkach rozmieszczonych jak na rys. 2 komplikuje fakt, że brzeg obszaru nie może pokrywać się z liniami brzegowymi wszystkich siatek jednocześnie z powodu ich wzajemnego przesunięcia o pół oczka. Ponieważ warunek brzegowy musi być zadany w sposób ścisły dokładnie na brzegu obszaru, musi być co najmniej jedna siatka, dla której warunek brzegowy trzeba zadać w połowie oczka. Przyjmujemy, że temperatura (a więc i pionowa składowa prędkości) zadana jest na pionowych brzegach obszaru, czyli $T|_{j=0} = 1$, $T|_{j=njm} = 0$, $v|_{j=0} = 0$, $v|_{j=njm} = 0$. Składowa pozioma prędkości nie jest jednak określona na linii $j = 0$ lecz na linii "połówkowej" $j = \frac{1}{2}$ (por. rys. 3).

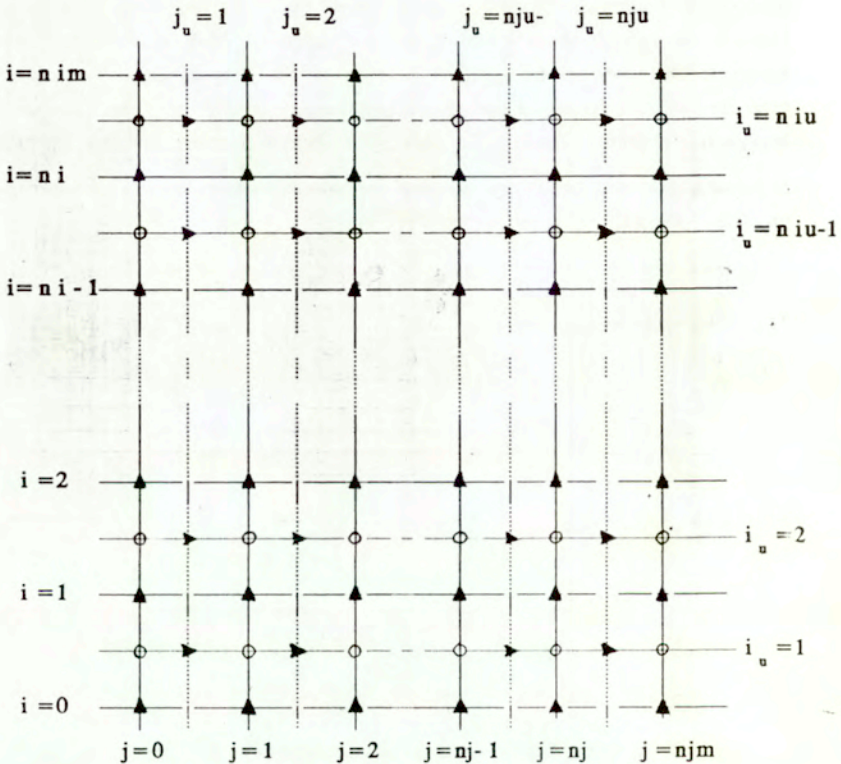


Rys. 3 "Sztuczna" linia siatki na zewnątrz lewego brzegu obszaru Ω .

Aby zapewnić realizację warunku $u|_{\partial\Omega} = 0$ trzeba wprowadzić "sztuczna" linię $j = -\frac{1}{2}$ po drugiej stronie brzegu, symetrycznie do linii $j = \frac{1}{2}$ i położyć $u_{i,-1/2} = -u_{i,1/2}$. Przy założeniu liniowej zmienności u na odcinku między węzłem w i węzłem e otrzymamy spełnienie warunku brzegowego. Z drugiej jednak strony, jak wskazaliśmy wcześniej, równanie ciągłości ma być spełnione we wszystkich kostkach elementarnych wokół węzłów ϕ . Równanie ciągłości dla kostki wokół węzła $(i,0)$ jest

$$(u_c - u_w)\Delta y_{ic} + (v_n - v_s)\Delta x_{jc} = 0.$$

Kładąc warunek brzegowy $v_n = v_s = 0$, $u_w = -u_c$ otrzymujemy $u_c = u_w = 0$, czyli $u_{i,1/2} = 0$ dla wszystkich i . Podobnie, na sąsiadującej z prawym brzegiem linii $j = njm - \frac{1}{2}$ składowa u znika.



Rys. 4 Układ siatek pokrywających obszar Ω .

Ostatecznie przyjmujemy układ siatek jak na rys. 4. Składowa pionowa prędkości, v , określona jest w węzłach \blacktriangle na przecięciach linii ciągłych. Układ tych linii nazywamy w programie siatką główną, gdyż linie te pokrywają wszystkie cztery odcinki brzegu obszaru (linie siatkowe poziome $i = 0$, $i = nim$ oraz pionowe $j = 0$ i $j = njm$). Składowa pozioma

prędkości, u , określona jest na przecięciach linii przerywanych i_u , j_u (węzły \blacktriangleleft) przy czym warunek brzegowy wymaga, aby na liniach $j_u = 0$ i $j_u = 1$ oraz $j_u = nju$ i $j_u = nju+1$ składowa u zniknęła. Linii $j_u = 0$ i $j_u = nju+1$ de facto nie wprowadza się do programu. Warunek brzegowy na liniach poziomych $u_{0,j} = -u_{1,j}$ oraz $u_{niu+1,j} = -u_{niu,j}$ zadaje się implícite w równaniu algorytmicznym dla u na liniach $i_u = 1$ oraz $i_u = niu$, a więc linia siatkowa po drugiej stronie brzegu także nie jest faktycznie potrzebna. Temperatura i ciśnienie określone są na przecięciu pionowych linii siatki u (linie i_u) oraz pionowych linii siatki v (linie j). Warunek brzegowy dla T na pionowych odcinkach brzegu zadany jest w sposób naturalny na liniach $j = 0$ i $j = njm$. Na poziomych odcinkach brzegu obowiązuje warunek adiabatyczny $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ czyli $T_{0,j} = T_{1,j}$ oraz $T_{niu+1,j} = T_{niu,j}$. Podobnie jak dla prędkości u realizuje się go implícite w równaniach na $T_{1,j}$ oraz $T_{niu,j}$. Odległości między węzłami przyjęto niejednakowe, aby zapewnić oszczędność obliczeniową (rozrzedzić siatkę w obszarze o relatywnie mniejszej spodziewanej zmienności funkcji niewiadomych).

3.2. Dyskretyzacja równań adwekcji-dyfuzji: algorytm dla funkcji niewiadomej w węzle.

Numeryczne rozwiązanie układu równań konwekcji swobodnej metodą różnicową wymaga pokonania dwóch istotnych trudności. Pierwsza występuje przy rozwiązywaniu pojedynczego równania typu adwekcji-dyfuzji, a więc równania energii i każdego z równań ruchu. Reprezentacja członu konwekcyjnego klasycznymi różnicami centralnymi prowadzi do schematu numerycznego niestabilnego dla oczkowych liczb Pecleta (lub Reynoldsa w przypadku równań ruchu) lokalnie większych od 2. Tymczasem $Pe_c \geq 2$, lub $Re_c \geq 2$ zdarza się lokalnie w niemal każdym praktycznie spotykanym problemie konwekcyjnym, o ile siatka pokrywająca obszar nie jest bardzo drobna.

Trudność druga wynika z silnego sprzężenia równań konwekcji swobodnej, a więc silnej wzajemnej zależności głównych zmiennych: prędkości i temperatury. Najpewniej tę trudność możnaby pokonać rozwiązując w każdej iteracji wszystkie równania układu jednocześnie. To wszakże wymagałoby użycia komputera o odpowiednio dużej pojemności pamięci. Dysponując tylko mikrokomputerem trzeba przyjąć specjalną sekwencyjną strategię obliczeniową, którą przedstawimy w dalszej części.

W celu pokonania pierwszej trudności, związanej z pojedynczym równaniem adwekcji-dyfuzji stosujemy do niego schemat dyskretyzacyjny zaproponowany przez Patankara (1980) na podstawie wcześniejszych prac (np. Courant, Isaacson i Rees, 1952), uwzględniający zależność członu konwekcyjnego od kierunku przepływu (pomijaną w klasycznej dyskretyzacji różnicami centralnymi), co likwiduje wspomnianą wyżej niestabilność numeryczną. Do sprawy, jak schemat ten wpływa na charakter rozwiązań, wrócimy przy omawianiu wyników. Zdyskretyzowane równanie energii dla kostki elementarnej $abcd$ wokół węzła 0 o współrzędnych (i,j) , przedstawionej na rys. 2 przy braku źródeł w tym obszarze przybiera postać

$$a_0 T_{i,j} = a_1 T_{i,j+1} + a_2 T_{i+1,j} + a_3 T_{i,j-1} + a_4 T_{i-1,j}, \quad (3.5)$$

gdzie

$$a_1 = \frac{\Delta y_{ic}}{\Delta x_{jf}} A(|Pe_{c1}|) + \max(-u_{i,j+1/2} \cdot \Delta y_{ic}; 0), \quad (3.5.1)$$

$$a_2 = \frac{\Delta x_{jc}}{\Delta y_{if}} A(|Pe_{c2}|) + \max(-v_{i+1/2,j} \cdot \Delta x_{jc}; 0), \quad (3.5.2)$$

$$a_3 = \frac{\Delta y_{ic}}{\Delta x_{jb}} A(|Pe_{c3}|) + \max(u_{i,j-1/2} \cdot \Delta y_{ic}; 0), \quad (3.5.3)$$

$$a_4 = \frac{\Delta x_{jc}}{\Delta y_{ib}} A(|Pe_{c4}|) + \max(v_{i-1/2,j} \cdot \Delta y_{jc}; 0), \quad (3.5.4)$$

$$a_0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4. \quad (3.5.5)$$

$$Pe_{c1} = \Delta x_{jf} \cdot u_{i,j+1/2}, \quad (3.4.6)$$

$$Pe_{c2} = \Delta y_{if} \cdot v_{i+1/2,j}, \quad (3.5.7)$$

$$Pe_{c3} = \Delta x_{jb} \cdot u_{i,j-1/2}, \quad (3.5.8)$$

$$Pe_{c4} = \Delta y_{ib} \cdot v_{i-1/2,j}. \quad (3.5.9)$$

W zależności od wartości lokalnej liczby Pecleta Pe_{ck} , $k = 1, \dots, 4$ - funkcja A może przyjmować taką wartość, że człon konwekcyjny w równaniu (3.5) modelowany jest identycznie jak w metodzie różnic centralnych (zalecane dla $|Pe_c| \ll 2$) lub też, przy $A = 1$, identycznie jak w metodzie

"upwind" Couranta, Isaacsona i Reesa (zalecanej dla $|Pe_c| \gg 2$). Możliwe są też inne warianty, n.p. schemat potęgowy (power law) Patankara, oparty na założeniu, że funkcja potęgowa, $A = \max \{0; (1-0.1 |Pe_c|)^5\}$, optymalnie aproksymuje faktyczny i nieznanzy przebieg, gdyż jest to dobra aproksymacja dla przypadku jednowymiarowego o stałych współczynnikach. Stabilność numeryczna równań (3.5), której - w generalnym przypadku - nie ma równanie adwekcji-dyfuzji zdyskretyzowane klasycznymi różnicami centralnymi, zapewniona jest przez to, że niezależnie od kierunku prędkości w czterech punktach wokół węzła 0 (o współrzędnych $i, j \pm \frac{1}{2}$ oraz $i \pm \frac{1}{2}, j$), współczynniki a_k , $k=1, \dots, 4$, są zawsze dodatnie, a więc temperatura $T_{i,j}$ jest zawsze pewną średnią ważoną z temperatur w węzłach otaczających.

Wzory (3.5) zostały podane przykładowo. Składowe prędkości w węzłach swoich siatek, a także ciśnienie, dyskretyzowane są w sposób podobny jak temperatura. W załączniku podajemy zdyskretyzowane równania dla zmiennych u , v , p i T , każde dla swej kostki elementarnej wokół wewnętrznego węzła odpowiedniej siatki.

3.3. Sekwencja operacji numerycznych w obszarze w toku procesu obliczeniowego wg algorytmu SIMPLER.

Równania konwekcji naturalnej są sprzężone i rozprzęgnąć się nie dają, co stanowi drugą podstawową trudność ich rozwiązywania. Każde ze zdyskretyzowanych równań typu (3.5) określa daną wielkość niewiadomą (T, u, v, p) w zależności od jej wartości w węzłach otaczających, a także od wartości w tych węzłach pozostałych wartości szukanych. Te sprzężenia i inne nieliniowości sprawiają, że - wobec niemożności faktycznego rozwiązania wszystkich równań układu jednocześnie, co wymagałoby komputera o wielkiej pojemności pamięci - stosujemy iteracyjne, sekwencyjne rozwiązywanie równań naprzemiennie blokową metodą sukcesywnej nadrelaksacji (znanej też pod nazwą "line SOR" czy "progonka"). Polega ona na każdorazowym wyznaczeniu danej wielkości w grupie węzłów na jednej linii siatkowej, na podstawie wartości tej i innych wielkości w węzłach linii otaczających. W każdej iteracji, w jej odpowiedniej części służącej rozwiązywaniu równania definiującego daną wielkość niewiadomą, przebiega się przez wszystkie linie siatkowe (a więc cały obszar Ω) najpierw w kierunku rosnącego, następnie w kierunku malejącego indeksu linii. W zależności od spodziewanego rozkładu danej wielkości przebiegamy obszar

po liniach i (góra-dół) bądź po liniach j (lewo-prawo), bądź też po liniach i oraz j naprzemiennie. Np. obliczając temperaturę przebiegamy obszar po liniach poziomych (i), gdyż wzdłuż tych linii występuje największy gradient tej zmiennej. Z tych samych powodów, obliczając ciśnienie przebiegamy obszar po liniach pionowych (j). W przypadku prędkości obszar jest przebiegany w obu kierunkach.

Każda "główna" iteracja składa się z sekwencji rozwiązań równań dla ciśnienia, prędkości i temperatury, z których każde - z kolei - może być iterowane w wewnętrznych iteracjach aż do uzyskania optymalnego stopnia zbieżności przy chwilowo niezmiennających się w tej części iteracji głównej wartościach pozostałych funkcji niewiadomych. Warto zauważyć, że właściwy wybór liczby tych wewnętrznych iteracji na każdym etapie globalnego procesu iteracyjnego dla każdego równania, a w szczególności dla równań ruchu przy większych liczbach Rayleigha, może przesądzać o zbieżności lub niezbieżności całego procesu obliczeniowego. Główny proces iteracyjny jest kontynuowany aż do uzyskania dostatecznej zbieżności i dostatecznego wzajemnego dopasowania wszystkich wielkości niewiadomych. Poza kryteriami zbieżności dla poszczególnych równań łączną miarą dopasowania pól ciśnienia i prędkości jest dokładność spełnienia równania ciągłości we wszystkich kostkach elementarnych wokół węzłów ϕ .

Przyjmujemy sekwencję rozwiązywania sprzężonych równań ciągłości, ruchu i energii, której zasady zaproponował Patankar pod nazwą algorytmu SIMPLER (Patankar, 1980; 1981). Postępowanie obliczeniowe w opracowanym przez nas programie KONOKNO przebiega - w grubszym zarysie - następująco:

1. Przed rozpoczęciem obliczeń iteracyjnych przyjmujemy wartości początkowe pól temperatury, prędkości i ciśnienia. Kładziemy $u = v = 0$ oraz $p = 0$ w całym obszarze (łącznie z brzegiem). Temperaturę przyjmujemy za stałą wzdłuż linii pionowych (j), a wzdłuż linii poziomych modelujemy jej profil parabolą $T(x) = 2x^2 - 2x + 1$ dla $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ i $T(x) = -2x^2 + 2x$ dla $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, zgodnie z oczekiwaniem największych gradientów tej zmiennej w otoczeniu pionowych odcinków brzegu.

2. Proces iteracyjny rozpoczynamy od procedury PRES, mającej na celu wyznaczenie rozkładu ciśnienia na podstawie rozkładów tzw. pseudoprędkości. Pseudoprędkością w pewnym węźle wewnętrznym nazywamy część wyrażenia na prędkość w tym węźle zależną tylko od wartości prędkości w węzłach sąsiednich i - ewentualnie - wyrazu wolnego (równego $Ra \cdot Pr \cdot T$ w równaniu na v , zerowego zaś w równaniu na u). Pseudoprędkość nie zawiera składnika z różnicą ciśnień. Np. równanie ruchu dla kierunku x w węźle

$(i, j + \frac{1}{2})$ można przedstawić w postaci

$$u_{i,j+1/2} = \hat{u}_{i,j+1/2} + \frac{\Delta y_{ic}}{a_0^u} (p_{i,j} - p_{i,j+1}), \quad (3.10)$$

gdzie pseudoprędkość

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i,j+1/2} = \frac{1}{a_0^u} (a_1^u u_{i,j+3/2} + a_2^u u_{i+1,j+1/2} + \\ + a_3^u u_{i,j-1/2} + a_4^u u_{i-1,j+1/2}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Licząc odpowiednie pseudoprędkości (na podstawie ostatnio wyznaczonego rozkładu prędkości) i podstawiając równania typu (3.10) do równania ciągłości dla kostki elementarnej wokół węzła ϕ , otrzymuje się równanie na ciśnienie w tym węźle.

Przed obliczeniem ciśnienia na jakiejś linii (j) liczymy w jej otoczeniu wszystkie potrzebne pseudoprędkości. Przebiegamy więc obszar po pionowych liniach j (dla j rosnących, a następnie malejących). Na każdej linii $j_v = j$ ($j = 1, \dots, n_j$) obliczamy wartości pseudoprędkości pionowej. Następnie na linii j_u (wyprzedzającej j_v o pół oczka) liczymy wartości pseudoprędkości poziomej. Wreszcie na linii j liczymy ciśnienie na podstawie obliczonych wartości \hat{u} i \hat{v} . Obliczenie powtarzamy obliczając \hat{v} na $j+1$, \hat{u} na $j+\frac{3}{2}$ i p na $j+1$ i tak dalej do $j = n_j$. Następna część tej iteracji polega na rozpoczęciu obliczania \hat{v} od linii przybrzeżnej $j_v = n_j$, \hat{u} na $j_u = n_j - \frac{1}{2}$, p na $j_p = n_j$ i przejściu w lewo aż do $j_u = \frac{3}{2}$ i $j_v = 1$. Wynikiem obliczeń procedury PRES jest rozkład ciśnień w obszarze. PRES nie wymaga warunków brzegowych dla ciśnienia, gdyż na brzegu wystarcza w przyjętym układzie węzłów warunek dla prędkości.

3. Następnie oblicza się pola obu składowych prędkości dla obliczonego rozkładu ciśnienia. Realizuje to procedura VELO obliczając składowe prędkości na ich liniach poziomych w kierunku w górę (i -), a następnie w dół (i -). Odpowiednie równania ruchu podajemy w Załączniku. Podobnie jak dla ciśnienia, posługujemy się metodą line SOR.

4. Trzecim krokiem sekwencji jest sprawdzenie jak dokładnie spełnione jest równanie ciągłości i ewentualne poprawienie obliczonych rozkładów prędkości w zależności od wyniku. Realizuje to procedura CORR, w której główną niewiadomą jest poprawka ciśnienia p' . Równanie definicyjne wyprowadza się dla niej z równań ciągłości i ruchu w sposób podobny jak to miało miejsce dla równania na ciśnienie. Wyraz wolny w równaniu na poprawkę ciśnienia znika, jeśli jest spełnione równanie ciągłości. Jest

to sygnał, aby zakończyć obliczenia. Rozkład poprawek p' w obszarze pozwala na poprawienie rozkładu prędkości na podstawie uproszczonych, lecz poprawiających zbieżność wzorów. Np. dla składowej u w węźle $(i, j + \frac{1}{2})$

$$u_{i, j + 1/2}^n = u_{i, j + 1/2}^s + \frac{\Delta y_{ic}}{a_0^u} (p'_{i, j} - p'_{i, j + 1}).$$

Indeks n oznacza nową, a s - starą wartość.

5. Czwartą i ostatnią zasadniczą procedurą obliczeniową, do której realizacji przechodzi się po uzyskaniu zbieżności CORR jest TEMP wyznaczająca rozkład temperatury dla obliczonego w PRES rozkładu ciśnienia i obliczonych w VELO i CORR rozkładów obu składowych prędkości. Procedura polega na rozwiązaniu (metodą line SOR) równań (3.5) na liniach poziomych i , dla i rosnących od 1 do niu, a następnie w kierunku przeciwnym.

6. Po uzyskaniu zbieżności wewnątrzproceduralnej dla TEMP sprawdza się czy spełnione są kryteria dla głównego procesu iteracyjnego, łącznie ze spełnieniem równania ciągłości w zadawalającym stopniu. Jeśli tak, obliczenia zostaną zakończone, a wyniki wydrukowane. Jeśli nie, pętlę obliczeń powtarza się od punktu 2 (procedura PRES).

3.4. Faktyczna strategia rozwiązywania sprzężonych równań

Realizacja procesu obliczeniowego wg algorytmu SIMPLER nie jest tak prosta, jakby można sądzić na podstawie 6-punktowego opisu podanego w poprzedniej sekcji. Główna trudność polega na silnym sprzężeniu równań konwekcji swobodnej, w szczególności - na silnej wzajemnej zależności pomiędzy prędkością a temperaturą obok zazwyczaj występującej w równaniach Naviera-Stokesa istotnej wzajemnej zależności między prędkością a ciśnieniem. Normalnym w metodzie iteracyjnej sposobem pokonania tej trudności jest sekwencyjne rozwiązywanie poszczególnych równań w każdej iteracji, a więc rozwiązywanie każdego równania określającego którąś zmienną niewiadomą (u , v , p lub T) przy "zamrożonych" na "czas" tego rozwiązywania wartościach wszystkich pozostałych zmiennych - wartościach uzyskanych z najświeższych rozwiązań pozostałych równań.

Z opisu zamieszczonego w poprzedniej sekcji widać, że nie tylko główny proces obliczeniowy prowadzony jest w iteracjach, z których każda składa się z sekwencji podprogramów PRES (obliczenie p), VELO (obliczenie u , v), CORR (obliczenie p' i korekta u , v) i TEMP (obliczenie T), ale też każde z tych obliczeń może być prowadzone iteracyjnie, we

własnych wewnętrznych iteracjach. Liczba tych wewnętrznych iteracji może silnie wpływać na zbieżność głównego procesu iteracyjnego, bowiem obszar jego możliwych trajektorii - od zbioru wartości początkowych wszystkich zmiennych niewiadomych do rozwiązania - jest bardzo wąski. Może się okazać, że zbyt dokładne rozwiązanie równania dla którejś zmiennej niewiadomej przy wartościach pozostałych zmiennych "zamrożonych" na poziomie jeszcze bardzo odległym od poszukiwanego rozwiązania wyprowadza trajektorię głównego procesu iteracyjnego z obszaru możliwych trajektorii powodując rozbieżność procesu iteracyjnego. Bierze się to stąd, że na "czas" obliczenia aktualnie poszukiwanej zmiennej (chodzi o iteracyjny analog czasu, którego miarą jest liczba wewnętrznych iteracji) jej faktyczne sprzężenia z pozostałymi zmiennymi zostają niejako zawieszane. Aby skrócić ten iteracyjny "czas" zawieszania faktycznie występujących sprzężeń należy więc ową zmienną obliczyć nie tak dokładnie (czyli nie doiterowując jej w wewnętrznych iteracjach aż do rozwiązania), aby potem - także nie tak dokładnie - przeprowadzić sekwencyjne obliczenia korygujące wartości wszystkich pozostałych zmiennych. Dla niektórych danych tylko tak prowadzony proces może doprowadzić do rozwiązania.

Najbardziej uwzględnić się sprzężenia rozwiązywanych równań, gdy liczba wewnętrznych iteracji jest dla każdego minimalna, a więc równa 1. Strategii takiej - czyli pojedynczych wewnętrznych iteracji - nie należy jednak stosować podczas całego procesu iteracji głównych, gdyż wówczas nie byłoby wiadomo, czy równania określające poszczególne zmienne niewiadome zostały w końcu dostatecznie dokładnie rozwiązane. Wydaje się więc, że w szczególnie wrażliwych przypadkach najlepszą strategią jest prowadzenie głównego procesu iteracyjnego tak, by w jego pierwszej części liczba wewnętrznych iteracji każdego podprogramu sekwencji była równa 1 ("pojedyncze iteracje"), w drugiej zaś - by poszczególne równania sekwencji były "doiterowywane" do odpowiednio dokładnych rozwiązań. Część pierwsza głównego procesu iteracyjnego zapewnia wówczas dostateczne sprzężenie między przybliżonymi wartościami wszystkich zmiennych niewiadomych, a więc zapewnia to, że proces iteracyjny pozostaje w obszarze możliwych trajektorii. Część druga tego procesu wymusza dostatecznie dokładne rozwiązanie każdego z równań sekwencji, a zatem - wymaganą dokładność całego rozwiązania. Alternatywnie, można stosować wyłącznie "pojedyncze iteracje" o ile główny proces iteracyjny będzie prowadzony dostatecznie

tecznie długo, aby uzyskać spełnienie każdego z równań z wymaganą dokładnością.

Dokładność rozwiązania określają kryteria zbieżności procesu iteracyjnego. W programie KONOKNO jako wskaźnik dokładności rozwiązania układu równań konwekcji, a więc rozwiązania osiąganego w głównym procesie obliczeniowym, przyjęliśmy maximum różnicy względnej (a więc odniesionej do aktualnej wartości pola w tym punkcie) między polem danej zmiennej niewiadomej z poprzedniej i aktualnej iteracji głównej. Dodatkową miarą dokładności rozwiązania, a ściślej - dopasowania pól prędkości i ciśnienia, jest dokładność spełnienia równania ciągłości we wszystkich kostkach elementarnych. W iteracjach wewnętrznych dla poszczególnych równań - prowadzących do rozwiązania układu równań liniowych dla danej zmiennej przy "zamrożonych" wartościach wszystkich pozostałych zmiennych - miarą dokładności jest maximum różnicy względnej między polem danej zmiennej niewiadomej z poprzedniej i aktualnej iteracji wewnętrznej.

Stopień trudności uzyskiwania rozwiązania silnie zależy od danych, czyli od liczby Rayleigha Ra . Ogólnie biorąc, im jest ona niższa tym łatwiej uzyskać rozwiązanie. Przy jej wzroście otrzymanie rozwiązania bez podrelaksacji równań ruchu okazało się niemożliwe. Np. przy $Ra = 10^5$ równania na składowe prędkości trzeba było podrelaksowywać ze współczynnikiem 0.25, w przeciwnym razie proces iteracyjny bardzo szybko się rozbiegał.

Warto tu zwrócić uwagę na fakt, że podrelaksacja - a więc modyfikacja z iteracji na iterację wartości pola wielkości obliczanej w stopniu mniejszym niżby to wynikało z aktualnego obliczenia - miała odmienne znaczenie w przypadku strategii "doiterowywania" niż w przypadku stosowania "pojedynczych iteracji". Przy "doiterowywaniu" - a więc wielokrotnym rozwiązywaniu odpowiedniego układu równań liniowych w pętli aż zostanie spełnione określone kryterium zbieżności - można było utrzymywać współczynnik podrelaksacji mniejszy od jedności aż do końca wewnętrznego procesu iteracyjnego. Wielokrotne wewnętrzne iterowanie zapewniało bowiem, że pole zmiennej obliczanej osiągnie wreszcie wartości spełniające układ równań pomimo spowolnienia wywołanego podrelaksacją, a więc zanim przejdzie się do obliczania pozostałych zmiennych, a następnie - do kolejnej iteracji głównej. Przy "pojedynczych iteracjach" pole wielkości obliczanej z podrelaksacją było w każdej iteracji głównej modyfikowane w

stopniu mniejszym niż to wynikało z rozwiązania. Aby więc zapewnić osiągnięcie rozwiązania zanim zakończy się główny proces iteracyjny, współczynnik podrelaksacji był stopniowo podnoszony aż do jedności. Ponieważ zbyt gwałtowne zwiększanie współczynnika podrelaksacji często powodowało natychmiastowe rozbieganie się procesu iteracyjnego, zmodyfikowaliśmy program obliczeń tak, aby automatycznie zwiększał współczynnik podrelaksacji o zadaną wielkość, gdy oceni stopień zbieżności jako zadowalający, a zmniejszał go przy narastaniu błędu.

Zbieżność i szybkość zbieżności głównego procesu iteracyjnego (mierzona liczbą iteracji lub czasem trwania obliczeń) zależy wreszcie od zbioru wartości początkowych u , v , p , T , a także od podziału obszaru na mniejszą (gruba siatka) lub większą (drobna siatka) liczbę oczek. Najszybciej uzyskuje się rozwiązanie na grubej siatce, dla której wartości początkowe procesu iteracyjnego zostały podane w sekcji 3.3. Ze względu na gruby podział obszaru rozwiązanie to jest jednak mało dokładne. Do uzyskania rozwiązań dokładniejszych, na drobnej siatce, jako wartości początkowe stosujemy wyniki obliczeń na grubej siatce, interpolowane za pomocą spline'ów kubicznych w węzłach nowej, drobniejszej siatki. Przyspiesza to znakomicie uzyskanie rozwiązania. Dla trudniejszych danych (duża liczba Rayleigha) tylko taka procedura pozwala uzyskać rozwiązanie, gdyż start z wartości początkowych podanych w sekcji 3.3 na drobnej siatce nie zapewnia zbieżnego procesu obliczeniowego.

4. ROZWIĄZANIA NUMERYCZNE RÓWNAŃ KONWEKCJI DLA RÓŻNYCH SMUKŁOŚCI SZCZELINY I LICZB RAYLEIGHA, UZYSKANE ZA POMOCĄ PROGRAMU KONOKNO

Przypadek szczeliny kwadratowej ($H/L = 1$), który został bardzo dokładnie przebadany przez de Vahl Davisa (1983) i porównany z wynikami innych autorów w jego pracy z Jonesem (1983) traktujemy jako wzorcowy do badania dokładności naszych obliczeń. Używając programu KONOKNO przeprowadziliśmy obliczenia dla $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$. Dla każdej wartości Ra wykonaliśmy obliczenia dla różnych gęstości siatek. Używaliśmy siatek $10 \times 10, 20 \times 20$ i 50×50 o nierównomiernym kroku (rozkład cosinusowy). Każdy przypadek liczony był trzema metodami dyskretyzacji członu konwekcyjnego, schematem upwind, potęgowym i hybrydowym.

Pola prędkości i temperatur przedstawione są na rysunkach 5 i 6. Obliczenia ich zostały wykonane przy użyciu schematu hybrydowego, na siatce 50×50 , dla trzech liczb Rayleigha, $Ra = 1000, 10000$ i 100000 . Na obu rysunkach widać, że przy $Ra = 1000$ przepływ ma charakter przewodnościowy, podczas gdy przy $Ra = 100000$ występują silne warstwy przyścienne. Obliczenia przy użyciu schematów upwind i potęgowego nie wykazują różnic jakościowych. Tylko na najgrubszej siatce, 10×10 , schemat upwind - w przeciwieństwie do hybrydowego i potęgowego - nie ujawnił dwóch zawirowań występujących w polu przepływu przy $Ra = 100000$.

Na kolejnych rysunkach przedstawione są: średnia liczba Nusselta dana wzorem

$$\bar{Nu}(x) = \frac{1}{H/L} \int_0^{H/L} \left[uT - \frac{\partial T}{\partial x} \right] dy,$$

profil prędkości poziomej w środkowym przekroju pionowym i profil prędkości pionowej w środkowym przekroju poziomym. Na rysunku 7 przedstawiono zależność liczby średniej Nusselta w funkcji współrzędnej poziomej od gęstości siatki dla $Ra = 10^4$ i schematów potęgowego i upwind. Widać wyraźne zmniejszanie się zmienności profilu wraz z zagęszczaniem siatki. Rysunek 8 obrazuje tę samą zależność dla $Ra = 10^5$. Zwłaszcza dla siatek rzadszych obserwuje się istotną przewagę schematu potęgowego. Wyniki obliczeń liczby Nusselta na pionowych brzegach obszaru w porównaniu z rozwiązaniem wzorcowym de Vahl Davisa uzyskanym przez interpolację rozwiązań na siatkach o różnej gęstości przedstawiliśmy w tabeli 1. Porównanie z

wartościami rozwiązania wzorcowego potwierdza, że najdokładniejsze wyniki uzyskuje się przy zastosowaniu schematu potęgowego: dla trzech liczb Rayleigha odchylenia od wartości wzorcowych wynoszą odpowiednio 0.10%, 0.35% i 0.25%. Odchylenia dla schematu hybrydowego są nieco większe (dla $Ra = 10^4$ i 10^5), ale nie przekraczają 0.4%. Najmniejszą dokładność uzyskuje się przy schemacie upwind.

Na rysunku 9 przedstawiliśmy profil składowej poziomej prędkości w środkowym przekroju pionowym przy $Ra = 10^4$ dla schematów potęgowego i hybrydowego, rysunek 10 natomiast obrazuje zmiany tej prędkości obliczonej schematami hybrydowym i upwind, w otoczeniu prędkości maksymalnej. Przebiegi dla schematów potęgowego i hybrydowego są bardzo zbliżone. Przy schemacie upwind wartości prędkości są wyraźnie mniejsze, zwłaszcza dla rzadkich siatek. Wielu autorów przypisuje zafałszowania uzyskiwane przy schemacie upwind szczególnie dużej dyfuzji numerycznej (Roache, 1976; de Vahl Davis, Mallinson, 1976; Patel, Markatos, Cross, 1985). Numeryczne wartości maksymalnej prędkości oraz jej położenia w porównaniu z rozwiązaniem wzorcowym przedstawiono w Tabeli 2. Dla dwóch dokładniejszych schematów odchylenia od wartości wzorcowych wahają się od 0% dla $Ra = 10^4$ i schematu hybrydowego do 2.5% dla $Ra = 10^5$ i schematu potęgowego. Rysunki 11 i 12 przedstawiają profil pionowej składowej prędkości w środkowym przekroju poziomym. Rysunek 11 obrazuje tę składową prędkości liczoną dla różnych gęstości siatek schematami potęgowym i hybrydowym, rysunek 12 pokazuje otoczenie prędkości maksymalnej obliczonej schematami potęgowym i upwind. Wartości maksymalne pionowej składowej prędkości oraz ich położenia w porównaniu z rozwiązaniem wzorcowym przedstawiono w tabeli 3. Różnice między schematami są tu takie same jak te, które stwierdziliśmy dla poziomej składowej prędkości. Wreszcie rysunek 13 obrazuje zmianę profilu prędkości pionowej obliczonej schematem potęgowym wraz ze zmianą liczby Rayleigha ($Ra = 10^3, 10^4, 10^5$). W miarę wzrostu liczby Rayleigha widać nie tylko zwiększanie się wartości ekstremalnych tej składowej prędkości, ale i przesuwanie się ekstremów w kierunku pionowych boków obszaru, co jest charakterystyczne dla silnie rozwiniętych warstw przyściennych.

Wyniki obliczeń potwierdzają, że największą dokładność ma schemat potęgowy, którego wyższość widać szczególnie dla rzadkich siatek. Schemat hybrydowy niewiele mu jednak ustępuje. Zdecydowanie najgorsze wyniki daje schemat upwind, który jednak jest obliczeniowo najszybszy, co wynika z wartości funkcji A w równaniach (3.5).

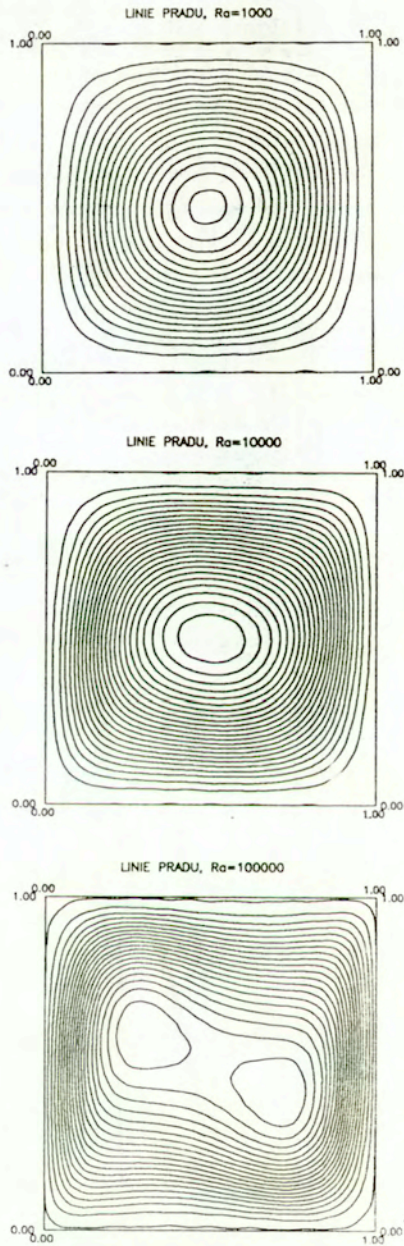
5. DYSKUSJA WYNIKÓW I OGÓLNA OCENA PRZYDATNOŚCI PROGRAMU KONOKNO

Podstawową zaletą użytej metody numerycznej (algorytm SIMPLER na siatkach przesuniętych jak w metodzie MAC) i opracowanego na tej podstawie programu KONOKNO jest to, że problem konwekcji swobodnej w obszarze dwuwymiarowym - wymagający rozwiązania układu ściśle sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych (sprężenia $v - T$ oraz $v - p$), z których trzy są numerycznie kłopotliwymi równaniami adwekcji-dyfuzji - daje się za jego pomocą rozwiązać na mikrokomputerze, przynajmniej w pewnym zakresie danych. Jeszcze kilka lat temu obliczenia takie wymagałyby użycia komputera o dużej pojemności pamięci, do którego dostęp wciąż jest poważnie ograniczony dla wielu potencjalnych użytkowników. Coraz powszechniejsza dostępność mikrokomputerów sprawia, że atrakcyjność programów na te maszyny wzrasta w środowiskach inżynierskich.

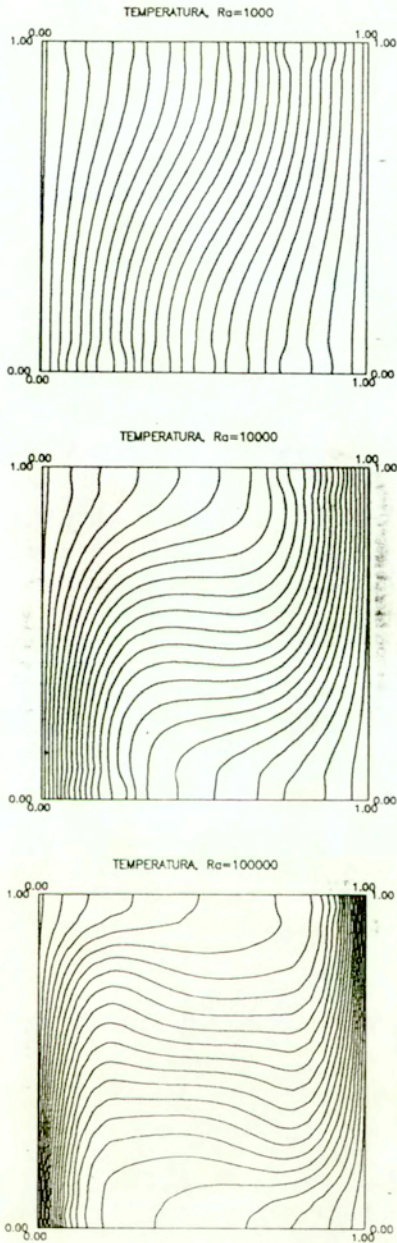
Obliczenia wykonaliśmy na IBM386 PC, na siatkach porównywalnej gęstości i w porównywalnym lub krótszym czasie do wielu obliczeń zrealizowanych w 1980 roku na komputerach znacznie większych, jak np. IBM 3033, IBM 370/165, CDC 7600, czy UNIVAC 1108 (de Vahl Davis i Jones, 1983). Także dokładność naszych obliczeń - ustalona przez porównanie takich wskaźników, jak średnia liczba Nusselta na izotermicznym boku szczeliny, czy maksymalna prędkość pionowa lub pozioma na odpowiedniej (poziomej lub pionowej) osi symetrii szczeliny z analogicznymi, wyznaczonymi przez G. de Vahl Davisa na podstawie uzyskanego przezeń rozwiązania wzorcowego - jest lepsza niż w przypadku wielu konkursowych rozwiązań. Warto podkreślić, że średnia liczba Nusselta na lewym brzegu szczeliny ($T = T_{\max}$) przy zastosowaniu najdokładniejszego schematu - potęgowego - wynosi przy $Ra = 10^3$ $\overline{Nu}_3 = 1.118$, czyli odbiega o 0.1% od rozwiązania wzorcowego, przy $Ra = 10^4$ wynosi $\overline{Nu}_4 = 2.245$, czyli odbiega o 0.35% od rozwiązania wzorcowego, przy $Ra = 10^5$ zaś wynosi $\overline{Nu}_5 = 4.519$, co różni się od rozwiązania wzorcowego o 0.25%. Podobnie jak niektórym autorom konkursowych rozwiązań, nie udało się nam uzyskać zbieżnych rozwiązań w rozsądnym czasie obliczeniowym dla $Ra = 10^6$. Dla "trudnych" danych, jakie stanowią wysokie liczby Rayleigha, nasza procedura obliczeniowa jest jeszcze mało przydatna. Podobne były doświadczenia Schinkela, Linthorsta i Hoogendoorna (1980). Używając algorytmu SIMPLE (wcześniejsza wersja SIMPLERA opublikowana w pracy Patankara i Spaldinga

z 1972 roku) wykonali oni obliczenia dla smukłości szczeliny nieprzekraczających 8 i liczb Rayleigha do rzędu 10^5 włącznie.

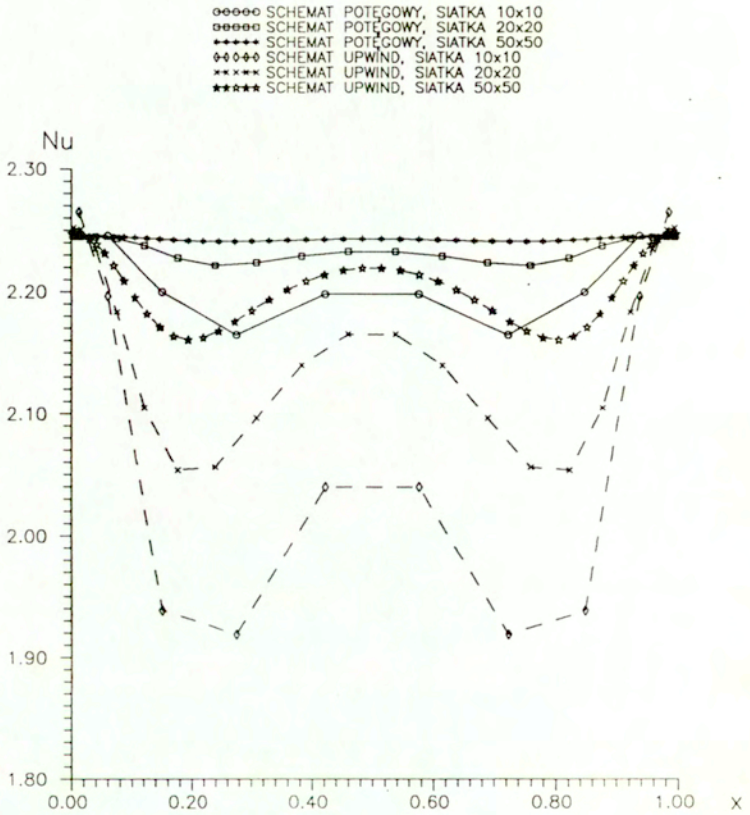
Podsumowując, należy stwierdzić, że zastosowana metoda jest skutecznym narzędziem do rozwiązywania równań konwekcji swobodnej, aczkolwiek nie dla bardzo wysokich liczb Rayleigha. Trzeba też dodać, że uzyskanie zadowalającej zbieżności wymaga dużej liczby iteracji. Stosunkowo powolna zbieżność tej metody jest związana głównie z sekwencyjnym (czterostopniowym), a nie jednoczesnym rozwiązywaniem równań, z których każde - z kolei - jest rozwiązywane w kolejnych grupach węzłów (na liniach siatkowych) zamiast w całym obszarze. Dalszy wzrost pojemności pamięci komputerów pozwoli w nieodległej przyszłości stosować metody bardziej bezpośrednie.



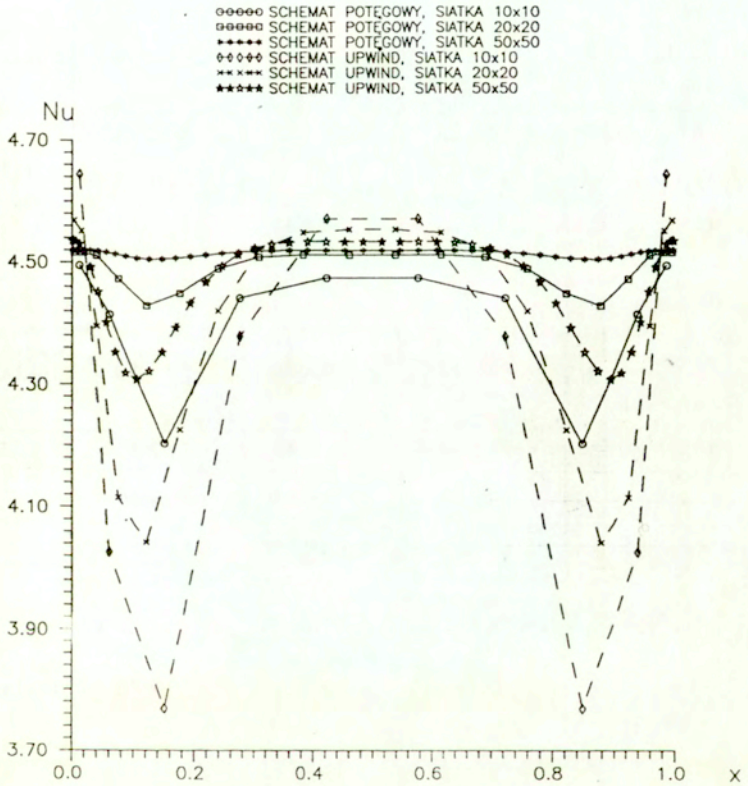
Rys. 5 Linie prądu dla trzech wartości Ra : 1000, 10000, 100000. Schemat hybrydowy, siatka 50×50 , $H/L = 1$



Rys. 6 Izotermy dla trzech wartości Ra : 1000, 10000, 100000.
Schemat hybrydowy, siatka 50×50 , $H/L = 1$



Rys. 7 Średnia liczba Nusselta, $\overline{Nu}(x)$, $0 \leq x \leq 1$, dla $Ra = 10000$, $H/L=1$, dla schematów potęgowego i upwind przy różnych gęstościach siatki



Rys. 8 Średnia liczba Nusselta, $\overline{Nu}(x)$, $0 \leq x \leq 1$, dla $Ra = 100000$, $H/L=1$, dla schematów potęgowego i upwind przy różnych gęstościach siatki

Tabela 1. Zależność średniej liczby Nusselta na lewym brzegu, \overline{Nu}_0 , od gęstości siatki i schematu obliczeniowego.

$$Ra = 10^3$$

siatka schemat	10×10	20×20	50×50	wartość dokładna*
potęgowy	1.123	1.119	1.118	1.117
hybrydowy	1.120	1.119	1.118	
upwind	1.173	1.145	1.128	

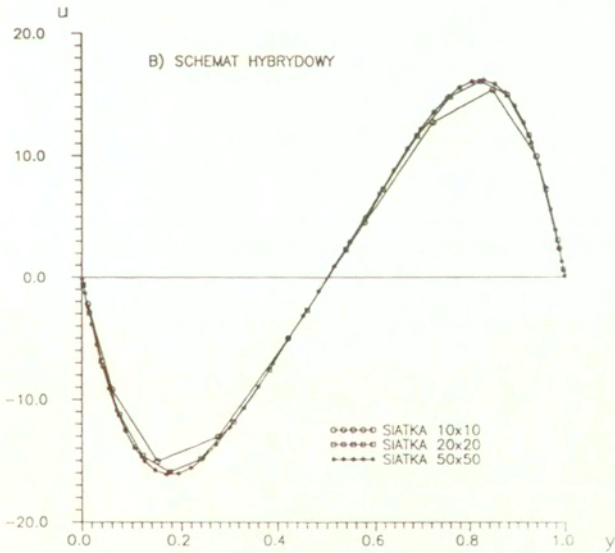
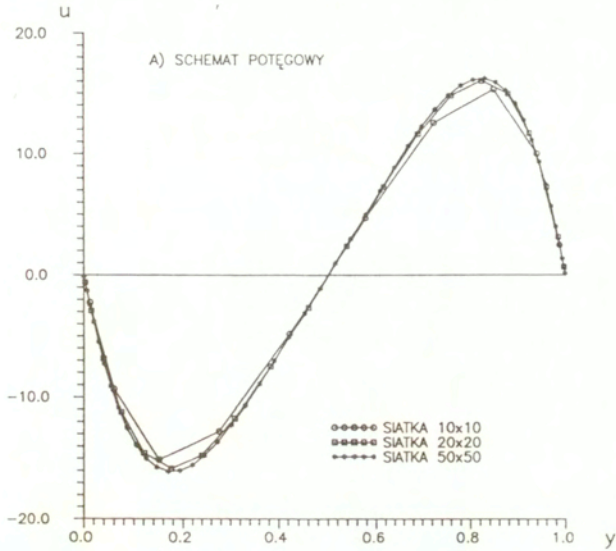
$$Ra = 10^4$$

siatka schemat	10×10	20×20	50×50	wartość dokładna*
potęgowy	2.247	2.245	2.245	2.238
hybrydowy	2.259	2.251	2.246	
upwind	2.264	2.252	2.247	

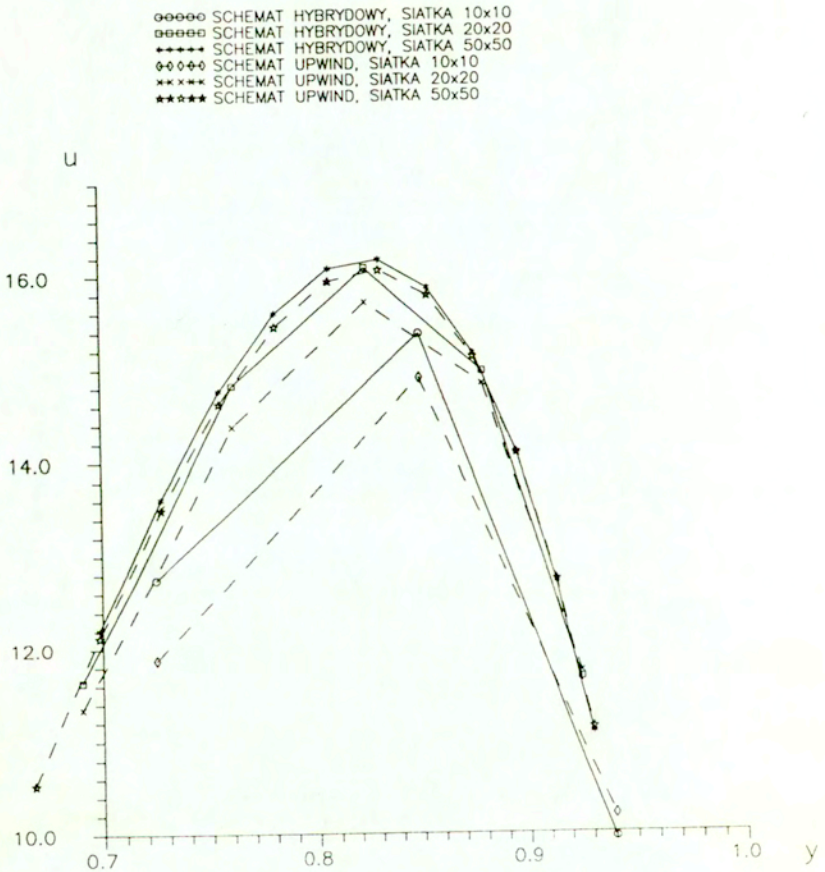
$$Ra = 10^5$$

siatka schemat	10×10	20×20	50×50	wartość dokładna*
potęgowy	4.494	4.515	4.519	4.509
hybrydowy	4.492	4.522	4.526	
upwind	4.644	4.568	4.535	

*Wartość z rozwiązania wzorcowego, wyznaczonego przez de Vahl Davisa (drogą ekstrapolacji rozwiązań na siatkach różnej gęstości) i ocenionego jako obarczone błędem nie przekraczającym 0.1% dla rozważanego tu zakresu Ra (de Vahl Davis, 1983).



Rys.9 Profil poziomej składowej prędkości w środkowym przekroju pionowym, $u(y)$, $0 \leq y \leq 1$. Schematy potęgowe i hybrydowe, $Ra = 10000$, $H/L=1$



Rys. 10 Profil poziomej składowej prędkości w środkowym przekroju pionowym, $u(y)$, w otoczeniu prędkości maksymalnej. Schematy hybrydowy i upwind, $Ra=10000$, $H/L=1$

Tabela 2. Zależność maksymalnej wartości składowej poziomej prędkości w środkowym przekroju pionowym, $u_{\max}(y)$, od gęstości siatki i schematu obliczeniowego

$$u_{\max}/y(u_{\max})$$

$$Ra = 10^3$$

siatka schemat	10 × 10	20 × 20	50 × 50	wartość dokładna*
potęgowy	3.412 / 0.849	3.589 / 0.824	3.632 / 0.806	3.649/0.813
hybrydowy	3.437 / 0.849	3.596 / 0.824	3.634 / 0.806	
upwind	3.183 / 0.849	3.435 / 0.824	3.561 / 0.806	

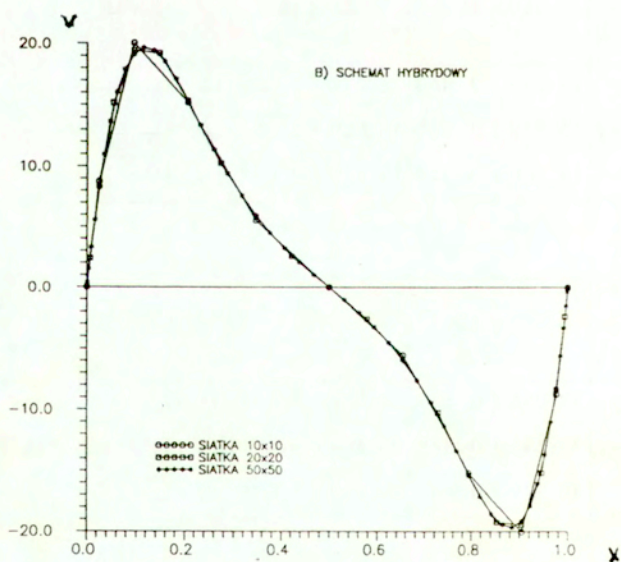
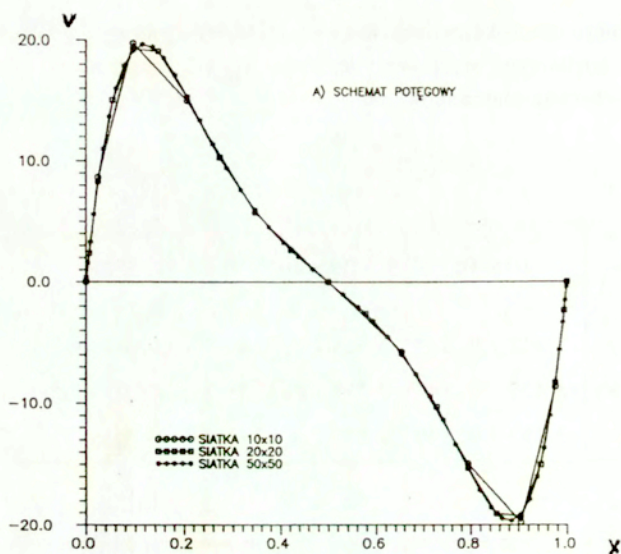
$$Ra = 10^4$$

siatka schemat	10 × 10	20 × 20	50 × 50	wartość dokładna*
potęgowy	15.259 / 0.849	15.975 / 0.824	16.158 / 0.830	16.178/0.823
hybrydowy	15.378 / 0.849	16.089 / 0.824	16.178 / 0.830	
upwind	14.900 / 0.849	15.719 / 0.824	16.066 / 0.830	

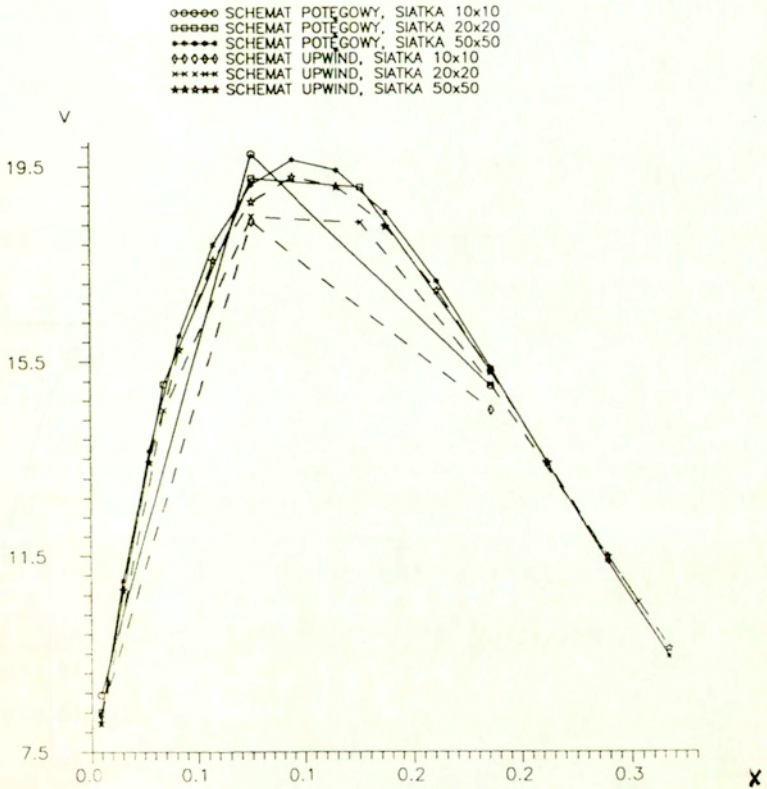
$$Ra = 10^5$$

siatka schemat	10 × 10	20 × 20	50 × 50	wartość dokładna*
potęgowy	38.056 / 0.849	36.894 / 0.879	35.597 / 0.853	34.730/0.855
hybrydowy	37.285 / 0.849	36.464 / 0.879	35.464 / 0.853	
upwind	40.979 / 0.849	39.430 / 0.879	36.771 / 0.853	

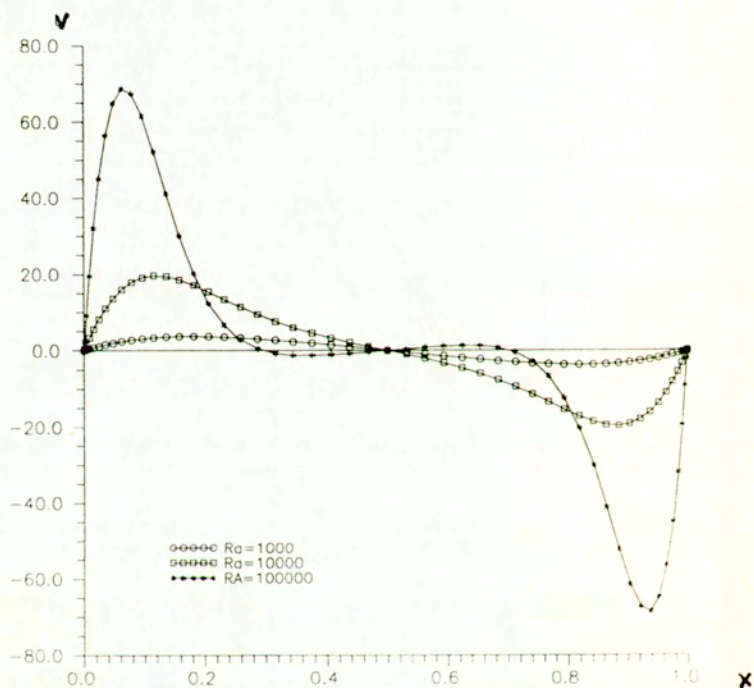
*Wartość z rozwiązania wzorcowego, wyznaczonego przez de Vahl Davisa (drogą ekstrapolacji rozwiązań na siatkach różnej gęstości) i ocenione jako obciążone błędem nie przekraczającym 0.1% dla rozważanego tu zakresu Ra (de Vahl Davis, 1983).



Rys. 11 Profil pionowej składowej prędkości w środkowym przekroju poziomym, $v(x)$, $0 \leq x \leq 1$. Schematy potęgowe i hybrydowe, $Ra = 10000$, $H/L = 1$



Rys. 12 Profil pionowej składowej prędkości w środkowym przekroju poziomym, $v(x)$, w otoczeniu prędkości maksymalnej. Schematy potęgowej i upwind, $Ra = 10000$, $H/L = 1$



Rys. 13 Profil pionowej składowej prędkości w środkowym przekroju poziomym, $v(x)$, $0 \leq x \leq 1$, dla różnych liczb Rayleigha. Schemat potęgowy, $H/L = 1$

Tabela 3. Zależność maksymalnej wartości składowej pionowej prędkości w środkowym przekroju poziomym, $v_{\max}(x)$, od gęstości siatki i schematu obliczeniowego

$$v_{\max} / x(v_{\max})$$

$$Ra = 10^3$$

siatka schemat	10 × 10	20 × 20	50 × 50	wartość dokładna *
potęgowy	3.747 / 0.206	3.671 / 0.206	3.702 / 0.181	3.697/0.178
hybrydowy	3.782 / 0.206	3.680 / 0.206	3.703 / 0.181	
upwind	3.428 / 0.206	3.502 / 0.146	3.629 / 0.181	

$$Ra = 10^4$$

siatka schemat	10 × 10	20 × 20	50 × 50	wartość dokładna *
potęgowy	19.743 / 0.095	19.242 / 0.095	19.627 / 0.115	19.617/0.119
hybrydowy	20.037 / 0.095	19.443 / 0.095	19.664 / 0.115	
upwind	18.365 / 0.095	18.461 / 0.095	19.272 / 0.115	

$$Ra = 10^5$$

siatka schemat	10 × 10	20 × 20	50 × 50	wartość dokładna *
potęgowy	61.413 / 0.095	68.487 / 0.054	68.651 / 0.062	68.590/0.066
hybrydowy	61.575 / 0.095	68.671 / 0.054	68.635 / 0.062	
upwind	62.042 / 0.095	67.574 / 0.054	68.375 / 0.062	

*Wartość z rozwiązania wzorcowego, wyznaczonego przez de Vahl Davisa (drogą ekstrapolacji rozwiązań na siatkach różnej gęstości) i ocenionego jako obarczone błędem nie przekraczającym 0.1% dla rozważanego tu zakresu Ra (de Vahl Davis, 1983).

Literatura

- Amsden, A.A., Harlow, F.H. (1970) The SMAC method: A numerical technique for calculating incompressible fluid flows. LA-4370, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM.
- Batchelor, G.K. (1954) Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quart. Appl. Math.*, vol.12, 209-233.
- Bejan, A. (1979) Note on Gill's solution for free convection in a vertical enclosure. *J. Fluid Mech.*, vol.90, cz.4, 561-568.
- Courant, R., Isaacson, E., Rees, M. (1952) On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Comm. Pure Appl. Math.*, vol.5, 243-255.
- Elder, J.W. (1965) Laminar free convection in a vertical slot. *J. Fluid Mech.*, vol.23, 77-98.
- Gill, A.E. (1966) The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity. *J. Fluid Mech.*, vol.26, cz.3, 515-536.
- Harlow, F.H., Welch, J.E. (1965) Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Phys. Fluids*, vol.8, 2182-2189.
- Harlow, F.H., Welch, J.E. (1966) Numerical study of large amplitude free surface motions. *Phys. Fluids*, vol.9, 842-851.
- Jones, I.P. (1979) A comparison problem for numerical methods in fluid dynamics: the "double glazing" problem. R.W. Lewis, K. Morgan (red.) *Numerical Methods in Thermal Problems*. Proc. First International Conference, Pineridge Press, Swansea, U.K., 338-348.
- Journal of Fluid Mechanics* (1979), vol. 95, No.4. Ogłoszenie konkursu na wewnątrz tylnej okładki.
- Patankar, S.V., Spalding, D.B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat & Mass Transfer*, vol. 15, 1787-1806.
- Patankar, S.V. (1980) *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington D.C., Hemisphere.
- Patankar, S.V. (1981) A calculation procedure for two-dimensional elliptic situation. *Num. Heat Transfer*, vol.4, 409-425.
- Patel, M.K., Markatos, N.C., Cross, M. (1985) Method of reducing false-diffusion errors in convection-diffusion problems. *Applied Mathematics Modelling*, vol.9, 302-306.

- Roache,P.J. (1976) Computational fluid dynamics. Albuquerque, N.M. Hermosa.
- Schinkel,W.M.M., Linthorst,S.J.M., Hoogendoorn,C.J. (1980) The stratification in natural convection in vertical enclosures. K.E. Torrance, I.Catton (ed.) Natural Convection in Enclosures. Proc. 19-th National Heat Transfer Conference, Orlando, Florida, ASME, New York, 31-38.
- de Vahl Davis,G., (1983) Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. Int. J. for Numerical Methods in Fluids. Vol.3, 249-264.
- de Vahl Davis, G., Jones, I.P. (1983) Natural convection in a square cavity. A comparison exercise. Int. J. Num. Meth. Fluids, vol. 3, 227-248.
- de Vahl Davis,G., Mallinson,G.D. (1976) An evaluation of upwind and central difference approximations by a study of recirculating flows. Computers & Fluids, vol.4, 24-43.
- Vest,Ch.M., Arpaci,V.S. (1969) Stability of natural convection in a vertical slot. J.Fluid.Mech., vol.36, cz.1, 1-15.

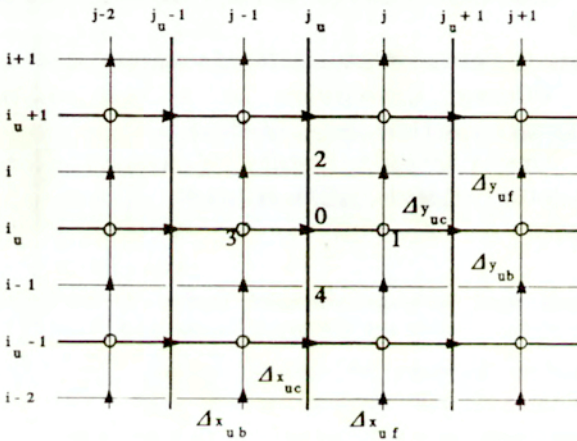
ZAŁĄCZNIKI

Z-1. Dyskretyzacja równania ruchu dla składowej poziomej u
(w węzle wewnętrznym $O \equiv (i_u, j_u)$).

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - \text{Pr} \Delta u = 0$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial x} (uu - \text{Pr} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (uv - \text{Pr} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$



$i \begin{array}{c} j \\ \updownarrow \end{array}$ siatka główna (identyczna z siatką dla v),

$i_u \begin{array}{c} j_u \\ \updownarrow \end{array}$ siatka dla u (linia i_u - w połowie odległości między liniami $i-1$ oraz i ; analogicznie j_u między $j-1$ oraz j),

$i_u \begin{array}{c} j \\ \circ \end{array}$ siatka dla T, p .

Stosujemy algorytm

$$\Delta y_{uc} = y_i - y_{i-1},$$

$$\Delta y_{uf} = y_{i_u+1} - y_{i_u} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2},$$

$$\Delta y_{ub} = y_{i_u} - y_{i_u-1} = \frac{y_i - y_{i-2}}{2},$$

$$\Delta x_{uc} = x_j - x_{j-1},$$

$$\Delta x_{uf} = x_{j_u+1} - x_{j_u} = \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2},$$

$$\Delta x_{ub} = x_{j_u} - x_{j_u-1} = \frac{x_j - x_{j-2}}{2},$$

$$c_{1u} = \frac{x_j - x_{j_u}}{x_{j_u+1} - x_{j_u}} = \frac{x_j - x_{j-1}}{x_{j+1} - x_{j-1}},$$

$$c_{3u} = \frac{x_{j-1} - x_{j_u-1}}{x_{j_u} - x_{j_u-1}} = \frac{x_{j-1} - x_{j-2}}{x_j - x_{j-2}},$$

$$u_1 = u_{iu,j} = u_{iu,j_u} + c_{1u}(u_{iu,j_u+1} - u_{iu,j_u}),$$

$$u_3 = u_{iu,j-1} = u_{iu,j_u-1} + c_{3u}(u_{iu,j_u} - u_{iu,j_u-1}),$$

$$v_2 = v_{iv,j_u} = \frac{1}{2}(v_{iv,j_v-1} + v_{iv,j_v}),$$

$$v_4 = v_{iv-1,j_u} = \frac{1}{2}(v_{iv-1,j_v-1} + v_{iv-1,j_v}),$$

$$d_1 = \frac{Pr \Delta y_{uc}}{\Delta x_{uf}}, \quad f_1 = u_1 \Delta y_{uc}, \quad P_{cu1} = \frac{f_1}{d_1} = \frac{u_1 \Delta x_{uf}}{Pr},$$

$$a_1 = d_1 A(|P_{cu1}|) + \max(-f_1; 0),$$

$$d_2 = \frac{Pr \Delta x_{uc}}{\Delta y_{uf}}, \quad f_2 = v_2 \Delta x_{uc}, \quad P_{cu2} = \frac{f_2}{d_2} = \frac{v_2 \Delta y_{uf}}{Pr},$$

$$a_2 = d_2 A(|P_{cu2}|) + \max(-f_2; 0),$$

$$d_3 = \frac{Pr \Delta y_{uc}}{\Delta x_{ub}}, \quad f_3 = u_3 \Delta y_{uc}, \quad P_{cu3} = \frac{f_3}{d_3} = \frac{u_3 \Delta x_{ub}}{Pr},$$

$$a_3 = d_3 A(|P_{cu3}|) + \max(f_3; 0),$$

$$d_4 = \frac{Pr \Delta x_{uc}}{\Delta y_{ub}}, \quad f_4 = v_4 \Delta x_{uc}, \quad P_{cu4} = \frac{f_4}{d_4} = \frac{v_4 \Delta y_{ub}}{Pr},$$

$$a_4 = d_4 A(|P_{cu4}|) + \max(f_4; 0),$$

gdzie $A(|P_{cuk}|)$, $k = 1, \dots, 4$ oznacza funkcję Patankara A od wartości bezwzględnej oczkowej liczby Reynoldsa będącej stosunkiem strumienia konwekcji do dyfuzji. Funkcja A określa sposób dyskretyzacji członu konwekcyjnego (schemat upwind lub schemat potęgowy), podany w ostatniej części Załącznika (Z-5).

$$\hat{u}_{iu,ju} = \frac{1}{\sum_{k=1}^4 a_k} (a_1 u_{iu,ju+1} + a_2 u_{iu+1,ju} + a_3 u_{iu,ju-1} + a_4 u_{iu-1,ju}),$$

$$d_{iu,ju}^{pu} = \frac{\Delta y_{uc}}{\sum_{k=1}^4 a_k},$$

$$u_{iu,ju} = \hat{u}_{iu,ju} + d_{iu,ju}^{pu} (p_{iu,j-1} - p_{iu,j}).$$

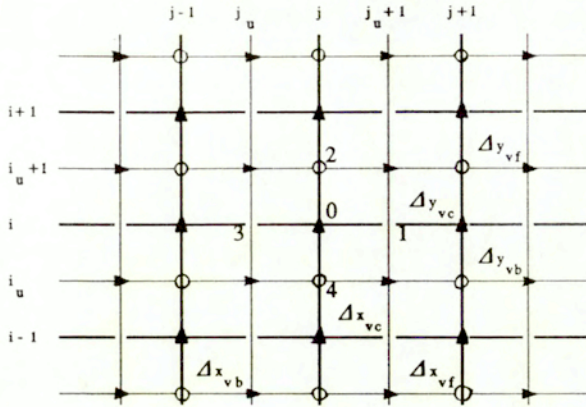
Równanie na $u_{iu,ju}$ rozwiązujemy na każdej linii $i_u = 1, \dots, niu$ na przemian z równaniem na v , a potem na liniach $j_u = 2, \dots, nju-1$. Warunek brzegowy $u_{0,\cdot} = -u_{1,\cdot}$ powoduje, że dla każdego $j_u = 2, \dots, nju-1$ mamy dla $i_u = 1$: $a_0 = a_1 + a_2 + a_3 + 2a_4$. Warunek brzegowy $u_{niu+1,\cdot} = -u_{niu,\cdot}$ powoduje dla każdego $j_u = 2, \dots, nju-1$, że dla $i_u = niu$ mamy $a_0 = a_1 + 2a_2 + a_3 + a_4$. Warunek brzegowy na bokach dla każdego $i_u = 1, \dots, niu$ $u_{iu,1} = 0$ oraz $u_{iu,nju} = 0$.

Z-2. Dyskretyzacja równania ruchu dla składowej pionowej, v
(w węzle wewnętrznym $O = (i_v, j_v)$).

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} - Pr \Delta v - Ra \cdot Pr \cdot T = 0$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial x} (uv - Pr \frac{\partial v}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (vv - Pr \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial p}{\partial y} - Ra \cdot Pr \cdot T = 0,$$



$i \begin{array}{c} j \\ \vdots \\ \oplus \end{array}$ siatka dla v (identyczna z siatką główną),

$i_u \begin{array}{c} j_u \\ \vdots \\ \oplus \end{array}$ siatka dla u ,

$i_u \begin{array}{c} j \\ \vdots \\ \oplus \end{array}$ siatka dla T, p .

Stosujemy algorytm

$$\Delta y_{vc} = \frac{1}{2} (y_{i+1} - y_{i-1}), \quad \Delta y_{vf} = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta y_{vb} = y_i - y_{i-1},$$

$$\Delta x_{vc} = \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_{j-1}), \quad \Delta x_{vf} = x_{j+1} - x_j, \quad \Delta x_{vb} = x_j - x_{j-1},$$

$$c_v = \frac{y_i - y_{i_u}}{y_{i_u+1} - y_{i_u}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{y_{i+1} - y_{i-1}},$$

$$u_1 = u_{i_u, j_u+1} + c_v (u_{i_u+1, j_u+1} - u_{i_u, j_u+1}),$$

$$u_3 = u_{i_u, j_u} + c_v (u_{i_u+1, j_u} - u_{i_u, j_u}),$$

$$v_2 = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{i+1,j}),$$

$$v_4 = \frac{1}{2} (v_{i-1,j} + v_{i,j}),$$

$$d_1 = \frac{Pr \Delta y_{vc}}{\Delta x_{vf}}, \quad f_1 = u_1 \Delta y_{vc}, \quad P_{cv1} = \frac{f_1}{d_1} = \frac{u_1 \Delta x_{vf}}{Pr},$$

$$a_1 = d_1 A(|P_{cv1}|) + \max(-f_1; 0),$$

$$d_2 = \frac{Pr \Delta x_{vc}}{\Delta y_{vf}}, \quad f_2 = v_2 \Delta x_{vc}, \quad P_{cv2} = \frac{f_2}{d_2} = \frac{v_2 \Delta y_{vf}}{Pr},$$

$$a_2 = d_2 A(|P_{cv2}|) + \max(-f_2; 0)$$

$$d_3 = \frac{Pr \Delta y_{vc}}{\Delta x_{vb}}, \quad f_3 = u_3 \Delta y_{vc}, \quad P_{cv3} = \frac{f_3}{d_3} = \frac{u_3 \Delta x_{vb}}{Pr},$$

$$a_3 = d_3 A(|P_{cv3}|) + \max(f_3; 0),$$

$$d_4 = \frac{Pr \Delta x_{vc}}{\Delta y_{vb}}, \quad f_4 = v_4 \Delta x_{vc}, \quad P_{cv4} = \frac{f_4}{d_4} = \frac{v_4 \Delta y_{vb}}{Pr},$$

$$a_4 = d_4 A(|P_{cv4}|) + \max(f_4; 0),$$

gdzie $A(|P_{cvk}|)$, $k = 1, \dots, 4$ oznacza funkcję Patankara A od wartości bezwzględnej oczkowej liczby Reynoldsa będącej stosunkiem strumienia konwekcji do dyfuzji. Funkcja A określa sposób dyskretyzacji członu konwekcyjnego (schemat upwind lub schemat potęgowy), podany w ostatniej części Załącznika (Z-5).

$$S_{Tv} = \frac{1}{4} Ra \cdot Pr [T_{iu,j} + c_v (T_{iu+1,j} - T_{iu,j})] \times (y_{i+1} - y_{i-1})(x_{i+1} - x_{j-1}),$$

$$\hat{v}_{i,j} = \frac{1}{\sum_{k=1}^4 a_k} (a_1 v_{i,j+1} + a_2 v_{i+1,j} + a_3 v_{i,j-1} + a_4 v_{i-1,j} + S_{Tv}),$$

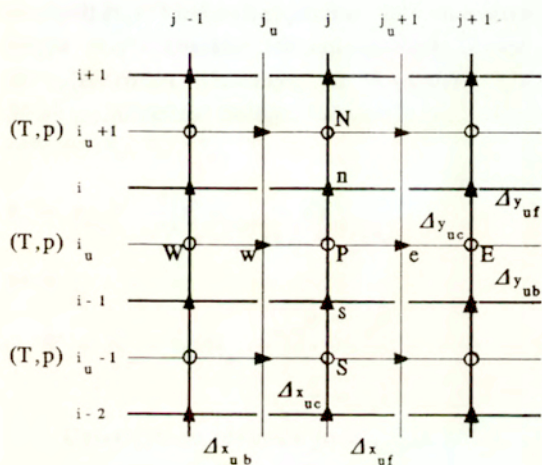
$$d_{i,j}^{pv} = \frac{\Delta x_{vc}}{\sum_{k=1}^4 a_k},$$

$$\hat{v}_{ij} = v_{ij} + d_{i,j}^{pv} (p_{iu,j} - p_{iu+1,j}).$$

Równanie na $v_{i,j}$ ($j = 1, \dots, n_j$) rozwiązujemy równaniem na u na liniach $i = 1, \dots, n_i$, a potem na liniach $j = 1, \dots, n_j$ na prze-

mian z równaniem na u rozwiązywanym na własnych liniach siatkowych ($i_u = 1, \dots, niu, j = 2, \dots, nju-1$).

Z-3. Dyskretyzacja i poprawa spełnienia równania ciągłości przez znalezienie pola ciśnienia uzgadniającego spełnienie równań ciągłości i ruchu w granicy iteracji.



i_u^j siatka główna (identyczna z siatką dla v),

i_u^j siatka dla u ,

i_u^j siatka dla T, p .

Równanie ciągłości

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

po scałkowaniu po kostce elementarnej wokół węzła $P(i_u, j)$ przyjmuje postać

$$(u_e - u_w)\Delta y_{pe} + (v_n - v_s)\Delta x_{pe} = 0.$$

Aby to ostatnie równanie przekształcić w równanie na ciśnienie w węzle P zauważamy, że

$$u_e = \hat{u}_e + d_e^p (p_p - p_E).$$

$$u_w = \hat{u}_w + d_w^p (p_w - p_p),$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n^p (p_p - p_N),$$

$$v_s = \hat{v}_s + d_s^p (p_s - p_p),$$

gdzie wielkości daszkowane są pseudoprędkościami (prędkościami pomniejszonymi o wpływ nierównomierności ciśnienia - por. wyprowadzenie wzorów algorytmicznych dla prędkości). Podstawiając ostatnie cztery zależności do równania ciągłości otrzymujemy wzór na $p_{iu,j}$:

Zależności algorytmu:

$$\Delta y_{pc} = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta x_{pc} = \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_{j-1}).$$

$$\hat{u}_e := \hat{u}_{iu,ju+1},$$

$$\hat{u}_w := \hat{u}_{iu,ju}$$

$$\hat{v}_n := \hat{v}_{i,j},$$

$$\hat{v}_s := \hat{v}_{i-1,j},$$

$$d_e^p := d_{iu,ju+1}^{pu},$$

$$d_w^p := d_{iu,ju}^{pu},$$

$$d_n^p := d_{i,j}^{pv},$$

$$d_s^p := d_{i-1,j}^{pv},$$

$$a_1^p = d_e^p \Delta y_{pc},$$

$$a_2^p = d_n^p \Delta x_{pc},$$

$$a_3^p = d_w^p \Delta y_{pc},$$

$$a_4^p = d_s^p \Delta x_{pc},$$

$$a_0^p = \sum_{k=1}^4 a_k^p,$$

$$\hat{S}^p = (\hat{u}_w - \hat{u}_e) \Delta y_{pc} + (\hat{v}_s - \hat{v}_n) \Delta x_{pc},$$

$$p_p \equiv p_{iu,j} = \frac{1}{a_0^p} \left[a_1^p p_{iu,j+1} + a_2^p p_{iu+1,j} + a_3^p p_{iu,j-1} + a_4^p p_{iu-1,j} + \hat{S}^p \right].$$

Założmy teraz, że przyjęty jest pewien rozkład prędkości u^* , v^* , któremu ściśle (przez dopasowanie w równaniu ciągłości) odpowiada rozkład ciśnienia p^* . Prawdziwe pola prędkości i ciś-

nienia wynoszą wówczas $u = \dot{u} + u'$ (poprawka), $v = \dot{v} + v'$, $p = \dot{p} + p'$. Przyjmujemy dalej, że prędkość (np. w punkcie e) wyraża się wzorem $u_e = \dot{u}_e + d_e^p(p'_p - p'_E)$ (analogicznym do ścisłego wzoru wyżej). Ten ostatni wzór nie jest ścisły, gdyż zakłada zerowanie się kilku członów. Przyjmujemy go jako formę przybliżoną (d_e^p ma - wg założenia - tę samą wartość co w górnym, ścisłym wzorze). Ze względu na identyczność formalną dwóch wzorów na $u_e = u_e(\hat{u}_e, p)$ oraz $u_e = u_e(\dot{u}_e, p')$ wzór na poprawkę p'_0 jest identyczny ze wzorem na p_0 przy czym przy współczynnikach a_k^p występują poprawki ciśnień (p'_{nb}) a nie ciśnienia (\hat{p}_{nb}), a we wzorze na S^{pp} zamiast pseudoprędkości $\hat{u}_e, \hat{u}_w, \hat{v}_n, \hat{v}_s$ mamy prędkości założone $\dot{u}_e, \dot{u}_w, \dot{v}_n, \dot{v}_s$.

$$p'_p = p'_{iu,j} = \frac{1}{a_0^p} \left[a_1^p p'_{iu,j+1} + a_2^p p'_{iu+1,j} + a_3^p p'_{iu,j-1} + a_4^p p'_{iu-1,j} + S^p \right],$$

gdzie

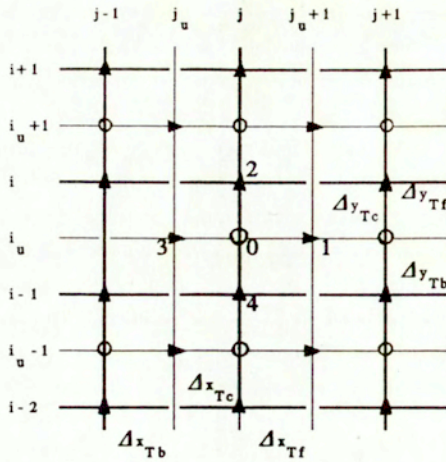
$$S^p = (\dot{u}_w - \dot{u}_e) \Delta y_{pc} + (\dot{v}_s - \dot{v}_n) \Delta x_{pc}.$$

Z-4. Dyskretyzacja równania energii dla temperatury, T (w węzle wewnętrznym $O \equiv (i, j)$).

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} - \Delta T = 0$$

czyli

$$\frac{\partial}{\partial x} (uT - \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (vT - \frac{\partial T}{\partial y}) = 0,$$



$\begin{matrix} j \\ \text{---} \\ j \end{matrix}$ siatka główna (identyczna z siatką dla v),

$\begin{matrix} j_u \\ \text{---} \\ i_u \end{matrix}$ siatka dla u ,

$\begin{matrix} j \\ \text{---} \\ i_u \end{matrix}$ siatka dla T, p .

$$\Delta y_{Tc} = y_i - y_{i-1},$$

$$\Delta y_{Tf} = \frac{1}{2} (y_{i+1} - y_{i-1}),$$

$$\Delta y_{Tb} = \frac{1}{2} (y_i - y_{i-2}),$$

$$\Delta x_{Tc} = \frac{1}{2} (x_{j+1} - x_{j-1}),$$

$$\Delta x_{Tf} = x_{j+1} - x_j,$$

$$\Delta x_{Tb} = x_j - x_{j-1},$$

$$u_1 = u_{i_u, j_u+1},$$

$$u_3 = u_{i_u, j_u},$$

$$v_2 = v_{i, j},$$

$$v_4 = v_{i-1, j},$$

$$d_1 = \frac{\Delta y_{Tc}}{\Delta x_{Tf}}, \quad f_1 = u_1 \Delta y_{Tc}, \quad P_{cT1} = \frac{f_1}{d_1} = u_1 \Delta x_{Tf},$$

$$a_1 = d_1 A(|P_{cT1}|) + \max(-f_1; 0),$$

$$d_2 = \frac{\Delta x_{Tc}}{\Delta y_{Tf}}, \quad f_2 = v_2 \Delta x_{Tc}, \quad P_{cT2} = \frac{f_2}{d_2} = v_2 \Delta y_{Tf},$$

$$a_2 = d_2 A(|P_{cT2}|) + \max(-f_2; 0),$$

$$d_3 = \frac{\Delta y_{Tc}}{\Delta x_{Tb}}, \quad f_3 = u_3 \Delta y_{Tc}, \quad P_{cT3} = \frac{f_3}{d_3} = u_3 \Delta x_{Tb},$$

$$a_3 = d_3 A(|P_{cT3}|) + \max(f_3; 0),$$

$$d_4 = \frac{\Delta x_{Tc}}{\Delta y_{Tb}}, \quad f_4 = v_4 \Delta x_{Tc}, \quad P_{cT4} = \frac{f_4}{d_4} = v_4 \Delta y_{Tb},$$

$$a_4 = d_4 A(|P_{cT4}|) + \max(f_4; 0),$$

gdzie $A(|P_{cTk}|)$, $k = 1, \dots, 4$ oznacza funkcję Patankara A od wartości bezwzględnej oczkowej liczby Pécleta będącej stosunkiem strumienia konwekcji do dyfuzji. Funkcja A określa sposób dyskretyzacji członu konwekcyjnego (schemat upwind lub schemat potęgowy), podany w ostatniej części Załącznika (Z-5).

$$T_{iu,j} = \frac{1}{\sum_{k=1}^4 a_k} (a_1 T_{iu,j+1} + a_2 T_{iu+1,j} + a_3 T_{iu,j-1} + a_4 T_{iu-1,j}).$$

Równanie na $T_{iu,j}$ rozwiązujemy na każdej linii i_u poczynając od $i_u = 1$ (tu warunek brzegowy na $i_u = 0$) aż do niu (tu warunek brzegowy na $i_u = niu+1$)

$$T_{0,j} = T_{1,j} \quad \text{dla } j = 0, \dots, njm,$$

$$T_{niu+1,j} = T_{niu,j} \quad \text{dla każdego } j = 0, \dots, njm,$$

$$T_{iu,0} := T_1 \quad \text{dla każdego } i_u (i_u = 1, \dots, niu),$$

$$T_{iu,njm} := T_0 \quad \text{dla każdego } i_u (i_u = 1, \dots, niu), \quad \text{przy czym } T_1 > T_0.$$

Z-5. Funkcja Patankara A, której argumentem jest wartość bezwzględna oczkowej liczby Pecleta (równanie energii) lub Reynoldsa (równanie ruchu) $|P_{cDk}|$, $v = u, v, T$, $k = 1, \dots, 4$, w zależności od przyjętego schematu dyskretyzacji członu konwekcyjnego (Patankar, 1980).

Schemat dyskretyzacji	Wyrażenie na A ($ P_c $) dla zmiennej v w punkcie k
Różnic centralnych	$1 - 0.5 P_c $
Upwind*	1
Hybrydowy*	$\max(0; 1 - 0.5 P_c)$
Potęgowy*	$\max[0; (1 - 0.1 P_c)^5]$
Eksponencjalny	$ P_c [\exp(P_c) - 1]^{-1}$

* - Schematy zastosowane w programie KONOKNO.