

I. Malecki, J. Ranachowski

WYZNACZANIE PARAMETRÓW
MATERIAŁÓW POROWATYCH
METODAMI AKUSTYCZNYMI

40/1994

P. 269



WARSZAWA 1994

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 grudnia 1994 r.



56609



Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 1,0 Ark. druk. 1,50
Oddano do drukarni w grudniu 1994 r.

Wydawnictwo Spółdzielcze sp. z o.o.
Warszawa, ul. Jasna 1

Ignacy Malecki
Jerzy Ranachowski
Centrum Akustoelektroniki
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

**WYZNACZANIE PARAMETRÓW
MATERIAŁÓW POROWATYCH
METODAMI AKUSTYCZNYMI**

Streszczenie

Ośrodki porowate są przedmiotem badań różnych dyscyplin naukowych: fizyki, mechaniki, elektrotechniki, materiałoznawstwa i akustyki. Przedmiotem pracy jest porównanie metod stosowanych w mechanice teoretycznej z metodami typowymi dla akustyki. Punkt wyjścia stanowi rozpatrzenie metody statycznego uśrednienia właściwości mechanicznych ośrodków porowatych. Metoda ta pozwala na wyznaczenie zastępczych statycznych modułów sprężystości, co jednak dla potrzeb akustyki jest niewystarczające. Bardziej przydatne są metody dynamiczne, rozwinięte między innymi w pracach J. Lewandowskiego. Podstawą jest tu równanie ruchu, w którym tensorowi sprężystości przypisuje się wartość zespoloną uwzględniającą procesy dynamiczne i straty ośrodka. Przejście od zespolonego tensora

sprężystości do prędkości i tłumienia fali akustycznej nie nastęrcza trudności. Na tle teorii materiałów porowatych używanej w mechanice przedstawiono własną teorię właściwości akustycznych tych materiałów. Jest to teoria „poprzeczników zespolonych”, w której rozpatruje się zakłócenie rozchodzenia się fali akustycznej przez pojedynczą inkluzję w ośrodku jednorodnym. Następnie oblicza się zakłócenie wprowadzane przez zespół inkluzji posługując się pojęciem gęstości poprzeczników. Wynikają stąd ogólne wzory na prędkość i tłumienie fali akustycznej w funkcji gęstości poprzeczników. Rozpatrzono przykłady inkluzji sferycznej w ośrodku płynnym i pustej inkluzji sferoidalnej w ośrodku stałym. Praca zawiera też wyniki badań doświadczalnych weryfikujących teorię „poprzeczników zespolonych”. Pomiaru dotyczyły prędkości rozchodzenia się fali ultradźwiękowej w porcelanie elektrotechnicznej o różnym stopniu porowatości i w glicerynie z zawiesiną w postaci szklanych kulek.

Badania przedstawione w pracy finansowane były przez Komitet Badań Naukowych.

Wstęp

Porowatość jest cechą wyróżniającą wiele typów materiałów używanych w technice, obiektów inżynierskich i przyrodniczych. Stopień porowatości wpływa na wytrzymałość mechaniczną, elektryczną i chemiczną materiału oraz na czas jego życia. Badanie porowatości stanowi zatem ważny problem technologiczny. Odrębnym zagadnieniem jest ocena porowatości kości ludzkich mająca istotne znaczenie w ortopedii. Materiały porowate były przedmiotem badań prowadzonych w ramach różnych dyscyplin naukowych i technicznych, jak mechanika gruntów, geofizyka, inżynieria materiałowa. Zależnie od specyfiki badanych obiektów używano różnych metod teoretycznych i doświadczalnych.

Celem niniejszej pracy jest porównanie formalnych metod opisu właściwości mechanicznych materiałów porowatych z metodą poprzeczników, której punktem wyjścia jest wyznaczenie zakłócenia rozchodzenia się fali akustycznej przez inkluzję zawartą w jednorodnym materiale.

Porównanie takie wydają się celowe, bowiem wiele prac teoretycznych dotyczących materiałów porowatych jest nieznane akustykom, a mogłoby być dla nich przydatne.

Z drugiej strony metody akustyczne badania materiałów porowatych dają unikalne informacje o właściwościach dynamicznych całej objętości badanej próbki, czego nie osiąga się klasycznymi metodami wytrzymałościowymi i optycznymi.

W artykule podano rezultaty badań doświadczalnych porcelany elektrotechnicznej ze względu na znaczenie praktyczne tego materiału i fakt, że zachodzi w nim interesująca zależność prędkości rozchodzenia się fali akustycznej od kształtu porów.

1. Metody statyczne uśredniania ośrodków porowatych

Zależnie od przyjętej metody i założeń dotyczących modelu ośrodka porowatego i parametrów działających nań zaburzeń otrzymuje się nieco inne rezultaty rozważań teoretycznych. Najprostszy model ośrodka porowatego przyjmuje się w teorii mieszaniny. W modelu tym nie rozpatruje się struktury ani lokalizacji porów. Przyjmuje się, że składowe, które w rzeczywistości zajmują ograniczone miejsca w ośrodku, są formalnie rozciągnięte na cały rozpatrywany obszar. Wszystkie wielkości geometryczne i fizyczne jak ruch, odkształcenie i naprężenie są określane dla całego obserwowanego obszaru i mogą być interpretowane jako średnie statystyczne rzeczywistych parametrów.

Teoria mieszanin została rozwinięta przede wszystkim przez Truesdell [1]. Punktem wyjścia jest określenie równowagi masy

$$\sum_{i=1}^k (\dot{\rho}^i + \rho^i \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}_i) = 0, \quad (1)$$

gdzie ρ^i – gęstość składowej φ^i i równowagi momentów,

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \sum_{i=1}^k \rho^i \mathbf{F}_i - \sum_{i=1}^k \rho^i \ddot{\mathbf{x}}_i = 0, \quad (2)$$

gdzie \mathbf{T} – tensor naprężeń, \mathbf{F} – gęstość zewnętrznych sił masowych.

Rozważania na temat bilansu energii i nierówności entropii mieszanin znaleźć można w pracy de Boer – Ehlers [2].

Nieco inne podejście prezentuje teoria uśredniania. W klasycznym ujęciu (np. Trapp [3]) uśredniony zostaje jeden z parametrów np. gęstość, co prowadzi do innych rezultatów niż uśrednienie tensora naprężeń. Postępem była praca Hassanizadeh – Gray [4], gdzie rozważa się termodynamiczne warunki brzegowe na granicy faz w mikroskali.

Stosuje się wówczas trzy operatory:

- uśrednienia objętości

$$\bar{\Gamma}_V^i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{dV^i} \int \Gamma(\mathbf{r}, t) \gamma^i(\mathbf{r}, t) dV_m, \quad (3)$$

- uśrednienia masy ρ

$$\bar{\Gamma}^i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\rho^i(\mathbf{x}, t) dV} \int \rho(\mathbf{r}, t) \Gamma(\mathbf{r}, t) \gamma^i(\mathbf{r}, t) dV, \quad (4)$$

- uśrednienia powierzchni a

$$\bar{\Gamma}_a(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{da} \int \Gamma(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_m \gamma^i(\mathbf{r}, t) da_m, \quad (5)$$

gdzie γ^i jest funkcją rozkładu

$$\gamma^i(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mathbf{r} \in dV^i \\ 0 & \text{dla } \mathbf{r} \in dV^j \quad j \neq i, \end{cases}$$

\mathbf{n} – wektor jednostkowy normalny do powierzchni da .

Rozpatruje się poziom mikroskopowy tj. pojedynczego elementu, dla którego obowiązuje równanie

$$\frac{\partial(\rho\alpha)}{\partial t} + \text{div}(\rho\alpha \dot{\mathbf{r}}) - \text{div} \mathbf{i} - \rho f = \rho G \quad (6)$$

i poziom makroskopowy całego obszaru o równaniu

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^i \bar{\alpha}^i) + \text{div}(\rho^i \bar{\alpha}^i \mathbf{x}_i) - \text{div} \mathbf{i}^i - \rho^i f^i = \rho^i \bar{G}^i, \quad (7)$$

gdzie α – przyjęta za podstawę właściwość termodynamiczna składowej i , \mathbf{i} – wektor strumienia powierzchniowego, G – zmienna odpowiadająca czystemu wydatkowi, f – właściwy strumień zewnętrzny.

Zachowanie się materiału porowatego pod wpływem zmiennego obciążenia było przedmiotem wielu prac zapoczątkowanych teoriami sformułowanymi przez Terzaghi [5] i Biot [6]. Teorie te dotyczą wprawdzie teorii konsolidacji porowatego ciała stałego zawierającego lepki płyn, mogą być jednak zastosowane i do innych typów ośrodków porowatych. Punktem wyjścia rozważań są dwa sprzężone z sobą równania

$$\mu \text{div grad } u + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \frac{K}{H} \text{grad } \rho = 0, \quad (8)$$

$$\kappa \text{div grad } \rho = \frac{K}{H} \frac{\partial(T_L J)}{\partial t} + \left(\frac{1}{R} - \frac{K}{H^2} \right) \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (9)$$

gdzie

\mathbf{u} – wektor przemieszczenia,

p – ciśnienie płynu,

T_L – tensor odkształceń Lagrange’a,

μ – współczynnik przepuszczalności materiału,

K – moduł ściskania,

$\frac{1}{H}$ – ściśliwość materiału na zmiany ciśnienia płynu,

$\frac{1}{R}$ – zmiana zawartości płynu dla danej zmiany ciśnienia,

I – tensor typu materiału.

Rozszerzenie teorii Biot podane zostało m.in. przez Derskiego [7], Kowalskiego [8], Kubika [9].

2. Przejście na parametry dynamiczne ośrodka porowatego

Powyżej omówione rozważania teoretyczne dotyczą zachowania się materiałów porowatych w warunkach statycznego lub quasistatycznego obciążenia. Do wyznaczenia zależności między strukturą materiału porowatego a jego właściwościami akustycznymi potrzebne jest przejście na parametry dynamiczne. Jedną z metod polega na uśrednieniu stałych sprężystości materiału porowatego przy zastosowaniu postępowania formalnego, podobnego jak przy zagadnieniu quasistatycznym. Zagadnienie sprowadza się do znalezienia związku między prędkością i tłumieniem fali akustycznej a tensorem zastępczego modułu równoważnego ciała lepko-sprężystego. Energia odkształcenia lub naprężenia może być określona przy pomocy odpowiedniej zasady wariacyjnej. Metoda ta rozwinięta została w pracach Hashin - Shtrikman [10] i Hill [11]. Duże znaczenie dla teorii zastępczego modułu dynamicznego materiału porowatego mają prace Mc Coy [12]. Tutaj posłużymy się przedstawieniem teoretycznym rozwiniętym w pracy Lewandowskiego [13].

Zakładamy, że wymiary badanego ciała są duże w porównaniu do długości rozchodzącej się w nim płaskiej fali akustycznej o częstotliwości ω . Niech przemieszczenie związane z tą falą wynosi średnio $\langle u(\mathbf{r}) \rangle$ i podlega wahaniom w funkcji miejsca w ośrodku $\delta u(\mathbf{r})$ na skutek niejednorodności tego ośrodka. Również tensor zespolonego modułu waha się o $\delta T(\mathbf{r}, \omega)$ od wartości średniej $T_0(\mathbf{r}, \omega)$. Dotyczy to również wahań $\delta \rho(\mathbf{r})$ wokół wartości średniej gęstości ośrodka ρ_0 .

Równanie ruchu ośrodka niejednorodnego ma przy tych założeniach postać

$$T_0(\omega)_{ijkl} \langle u(\mathbf{r})_{k,jl} \rangle + \omega^2 \rho_0 \langle u(\mathbf{r})_i \rangle + \left\langle [\delta T(\mathbf{r}, \omega)_{ijkl} \delta u(\mathbf{r})_{k,l}]_{,j} \right\rangle + \omega^2 \langle \delta \rho(\mathbf{r}) \delta u(\mathbf{r})_i \rangle = 0, \quad (10)$$

dla $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

Dla jednorodnego ośrodka zastępczego równanie ruchu upraszcza się do postaci

$$\bar{T}(\omega)_{ijkl} \langle u(\mathbf{r})_{k,jl} \rangle + \omega^2 \rho_0 \langle u(\mathbf{r})_i \rangle = 0, \quad (11)$$

można bowiem przyjąć, że gęstość zastępcza $\bar{\rho} = \rho_0$.

Tensor modułu zespolonego ośrodka zastępczego spełnia w granicy odkształceń quasistatycznych 0 zależność między naprężeniami σ i odkształceniami ε w formie

$$\langle \sigma(\mathbf{r}, t)_{ij} \rangle = \bar{T}(\omega)_{ijkl} \langle \varepsilon(\mathbf{r}, t)_{kl} \rangle. \quad (12)$$

Zakładamy, że średnie pole przemieszczeń ma postać tłumionej fali płaskiej rozchodzącej się wzdłuż osi x_q ($q = 1, 2, 3$) i polaryzowanej w kierunku osi x_p ($p = 1, 2, 3$) o wartości

$$\langle u(\mathbf{r}) \rangle = A_m \mathbf{e}_p \exp(jk_m \mathbf{e}_q \cdot \mathbf{r})$$

gdzie A_m – zespolona amplituda fali,

$$A_m = A_m^{(a)} + jA_m^{(b)}; \quad (A_m^{(a)})^2 + (A_m^{(b)})^2 = 1,$$

$$k_m = \frac{\omega}{c} - j\eta_m,$$

\mathbf{e} – wektor jednostkowy,

m jest odnośnikiem do fali dylatacyjnej D lub ścinającej S . Dla fali D — $p = q$, dla fali S — $p \neq q$.

Istotna jest zależność zespolonej liczby falowej k od parametrów ośrodka zastępczego:

$$k_m^2 = \frac{\omega^2 \rho_0}{\bar{T}(\omega)_{pqpq}}. \quad (13)$$

Ze względu na przyjęte założenia równoważności między ośrodkiem zastępczym i ośrodkiem niejednorodnym (13), z ostatniego wzoru wynika związek

$$\begin{aligned} \bar{T}(\omega)_{pqpq} = T_0(\omega)_{pqpq} - \left[\frac{1}{A_m k_m^2} \right] \langle \delta T(\mathbf{r}, \omega)_{pjklj} \delta u(\mathbf{r})_{k,l} \rangle + \\ + \langle \delta T(\mathbf{r}, \omega)_{pjkl} \delta u(\mathbf{r})_{k,lj} \rangle + \omega^2 \langle \delta \rho(\mathbf{r}) \delta u(\mathbf{r})_p \rangle \exp(-jk_m \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (14)$$

Wzór ten daje przejście od opisu mikrostruktury ośrodka niejednorodnego do ujęcia statystycznego zastępczego ośrodka jednorodnego. Dla praktycznego zastosowania tego wzoru potrzebne jest określenie parametrów akustycznych związanych z lokalną mikrostrukturą ośrodka. Zależnie od rodzaju ośrodka wymaga to zastosowania różnych metod obliczeniowych. Można więc uważać, że przedstawiona wyżej metoda stanowi przejście od ujęcia typowego dla quasistatycznych problemów mechaniki ośrodków ciągłych do rozpatrzenia układów będących przedmiotem zainteresowania akustyków.

3. Metoda zespolonych poprzeczników

Poniżej przedstawimy dalszy krok w kierunku zastosowania typowych dla akustyki metod dla określenia właściwości mechanicznych i akustycznych ośrodków porowatych. Metoda tego typu opracowana przez Maleckiego [14], [15] została zastosowana doświadczalnie w pracach Ranachowskiego [16], [17], Wehra [18] i następnie dalej rozwinięta [19]. Poniżej przedstawimy zmienione ujęcie i zastosowanie tej metody. Polega ona na traktowaniu inkluzji w ośrodku porowatym jako źródeł wtórnych fal rozproszonych. Energia tych fal odejmuje się od energii fali bieżącej. Poprzeczniki inkluzji przedstawione są jako elementy zespolone od których uzależnione jest tłumienie i zmiana prędkości fali bieżącej. Wpływem rozproszenia fali bieżącej na inkluzjach zajmowali się także m.in. Evans [20], Mackenzie [21], Berryman [22].

W wyżej omówionych metodach zasadnicze działanie polegało na uśrednieniu tensora sprężystości T_{ijkl} i gęstości ρ_{ij} przez ustalenie zależności między uśrednionym polem naprężeń i uśrednionym polem odkształceń. Przedmiotem badań są więc przede wszystkim zjawiska w skali makroskopowej. Obecnie przedstawiony punkt widzenia polega na rozpatrzeniu w mikro skali zachowania się pojedynczej inkluzji, a następnie określeniu sumarycznego działania grupy inkluzji zawartych w jednostce objętości ośrodka nośnego.

W realnych warunkach można założyć, że mierzymy w ośrodku porowatym rozchodzenie się płaskiej fali podłużnej generowanej przez przetworniki ultradźwiękowe o dostatecznej powierzchni, by warunek ten był spełniony. Przez odpowiedni układ elektroniczny eliminujemy fale odbite od granic badanej próbki materiału. Następne istotne założenie polega na przyjęciu, że poszczególne inkluzje na siebie nie oddziałują, a jednocześnie że działanie grupy inkluzji jest addytywne w stosunku do padającej fali akustycznej. Addytywność wynika z bilansu energii mechanicznej i cieplnej dla obszaru V zawierającego inkluzję

$$\int_V \rho p dV = - \int_S \rho q v_n dS + \int_S \frac{\alpha}{T} \text{grad}_n T dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_V q_d dV, \quad (15)$$

gdzie:

- q – zmiana entropii elementu obszaru,
- α – współczynnik przewodności cieplnej,
- T – temperatura bezwzględna,
- q_d – entropia energii ulegającej degradacji,
- v_n – składowa prędkości ruchu ośrodka normalna do powierzchni S obszaru.

Wzajemne oddziaływanie inkluzji polega na występowaniu sił mechanicznych dobrze znanych z hydromechaniki jako siły Bjerknes'a i oddziaływań termicznych. Dla prostego przypadku ośrodka doskonale płynnego gradient temperatury zaburzenia spowodowanego inkluzją wynosi

$$-\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{p_a}{r} [K_e e^{-jk_e r} + K_T e^{-jk_T r}], \quad (16)$$

gdzie K_e i K_T – stałe zależne od parametrów ośrodka i inkluzji

$$k_e = \frac{\omega}{c_0} \left[1 + j \frac{1}{2} \frac{(\kappa - 1)m\omega}{c_0} \right], \quad k_T = (1 + j) \sqrt{\frac{\omega}{2m}}, \quad (17)$$
$$\kappa = \frac{C_p}{C_V}, \quad m = \frac{\alpha}{\rho_0 C_p}$$

ze względu na małe zmiany temperatury towarzyszące fali sprężystej i silne tłumienie fali temperaturowej oddziaływania termiczne między inkluzjami mogą być pominięte. Przy tych założeniach można przyjąć, że w elemencie ΔV napełnionym ośrodkiem jednorodnym znajduje się pojedyncza inkluzja zakłócająca przebieg tej fali. Posługujemy się równaniem ruchu fali harmoniczej

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_1^2 u = \frac{F}{\rho c_0^2}, \quad (18)$$

gdzie k_1 – zespolona liczba falowa przy uwzględnieniu wpływu tłumienia ośrodka,

$$k_1 = h_1 + jg_1 = \frac{\omega}{c_1} + j \frac{\delta_1}{c_1}; \quad \delta_1 - \text{stała tłumienia.}$$

Oddzielając część rzeczywistą i urojoną mamy

$$h_1^2 + g_1^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2},$$
$$jh_1g_1 = j \frac{\omega\delta_1}{c_1^2},$$
$$c_1 = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta_1}{\omega}\right)^2}.$$

Natężenie fali padającej wynosi

$$I = \frac{\tilde{p}^2}{z} = \tilde{u}^2 Z,$$

gdzie Z oporność falowa, $\tilde{}$ oznacza wartość skuteczną.

Istnienie w polu akustycznym inkluzji jest równoznaczne z wprowadzeniem poprzecznika. Poprzecznik definiujemy jako tarczę prostopadłą do kierunku rozchodzenia się fali, mającą powierzchnię s doskonale pochłaniającą.

Zgodnie z tą definicją część rzeczywista poprzecznika wynosi

$$s_r = \frac{W}{I}, \quad (19)$$

gdzie W jest mocą rozpraszaną przez inkluzję.

Obecność inkluzji zmienia wypadkowe stałe sprężystości ośrodka w obszarze rozpatrywanym, a co za tym idzie, prędkość rozchodzenia się fali. Zmianę tę można zobrazować przy pomocy części urojonej poprzecznika, której modelem jest tarcza doskonale odbijająca się, o powierzchni s_i . Ponieważ inkluzje zakłócają jednorodność ośrodka wystąpią złożone stany naprężeń i odkształceń opisane równaniem

$$[T_{ijkl}(\mathbf{r})u(\mathbf{r})_{,l}]_j + \omega^2 \rho(\mathbf{r})u(\mathbf{r})_i = F. \quad (20)$$

Równanie to jest trudne do analitycznego przedstawienia, dlatego dla celów akustyki fizycznej łatwiejsza do zastosowania wydaje się metoda poprzeczników zespolonych.

Od pojedynczej inkluzji przejdziemy do rozpatrzenia ich grupy zawartej w jednostce objętości. Zakładamy dla uproszczenia, że inkluzje mają kształt sferyczny o promieniu a . Moc W_0 rozpraszana przez pojedynczą inkluzję jest funkcją jej promienia. W obszarze dV znajduje się n inkluzji o promieniu a , a zatem sumaryczna moc rozproszona wynosi na jednostkę objętości

$$W_0 = \frac{dW}{dV} = \int_0^\infty W_0(a)n(a) da. \quad (21)$$

W częstym w praktyce przypadku, gdy rozkład prawdopodobieństwa podporządkowany jest funkcji Gaussa mamy

$$W_0 = \frac{N}{\beta^2 \sqrt{2\pi}} \int_0^\infty W_0(a_0 + \delta a) \exp \left[-\frac{(\delta a)^2}{2\kappa^2} \right] d(\delta a), \quad (22)$$

gdzie δa – odchylenie od średniej średnicy inkluzji a_0 , β – współczynnik rozkładu.

Zgodnie z założeniem część rzeczywista poprzecznika jest odpowiednikiem strat mocy. Zastępując pojedynczą siłę punktową równomiernym rozkładem sił przestrzennych F , wprowadzamy pojęcie gęstości poprzeczników

$$F = \frac{df}{dW} = \frac{W_0}{v} = \frac{s_{0r}I}{v}, \quad (23)$$

gdzie s_{0r} jest gęstością części rzeczywistych poprzeczników. Jak wspomniano wyżej wpływ inkluzji na stałe sprężyste ośrodka można przedstawić w postaci urojonej części poprzecznika. W tym znaczeniu można wprowadzić zespoloną gęstość poprzeczników

$$s_0 = s_{0r} + j s_{0i}, \quad (24)$$

jako współdziałanie rozsianych w ośrodku jednorodnym elementów doskonale pochłaniających s_r i doskonale odbijających s_i . Gęstość poprzeczników ma wymiar $1/\text{cm}$. Doskonałe odbicie przypisujemy elementowi o wyjściowej oporności falowej $Z_0 = \infty$ lub $Z_0 = 0$, zależnie od tego czy przeważa wpływ masy czy sztywności inkluzji.

Zważywszy na elementarny związek $I = Z\tilde{v}^2$, gdzie $Z = \rho c$ – oporność falowa ośrodka, mamy

$$F = s_0 Z v. \quad (25)$$

Równanie (18) przybiera teraz postać

$$c_1^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(\frac{\delta_1}{\rho_1} + \frac{s_0 Z_1}{\rho_1} \right) \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Przy wprowadzeniu zespolonej liczby falowej k_2 dla ośrodka z inkluzjami i zastąpieniu stałej tłumienia współczynnikiem tłumienia $\eta = \frac{\delta}{c}$ mamy zależność

$$k_2^2 = (h_2 + jg_2)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega s_{0i} Z_1}{\rho c^2} + j\omega \left(\frac{\eta_1}{c_0} + \frac{s_r Z_1}{\rho_1 c^2} \right), \quad (26)$$

w przybliżeniu $Z_1 = \rho_1 c$, zatem

$$c_2 = c_0 \left[\frac{1 - \left(\frac{c_0 \eta_2}{\omega} \right)^2}{1 - \frac{c_0 s_i}{\omega}} \right]^{1/2}, \quad (27)$$

$$\eta_2 = (\eta_1 + s_{0r}) \frac{c_0^2}{c_0}. \quad (28)$$

Ponieważ $\frac{c_0 \eta_2}{\omega} \ll 1$

$$c_2 = c_0 \left(1 + \frac{c_0 s_{0i}}{\omega} \right)^{-1/2}, \quad (29)$$

$$\eta_2 = \frac{\eta_1 + s_{0r}}{1 + \frac{c_0 s_{0i}}{\omega}}. \quad (30)$$

Znak plus wynika z założenia przesunięcia fazowego o π .

Pole akustyczne rozproszone wokół inkluzji generowane przez padającą harmoniczną falę płaską było od dawna przedmiotem rozważań teoretycznych. Znaczący wkład miały tu prace Ying-Truell [23] i Siwukhin [24], uzupełnione między innymi przez Lewandowskiego [25]. Dla zastosowania powyżej przeprowadzonych ogólnych rozważań przydatny jest wzór określający potencjał pola rozproszonego Φ wokół inkluzji w formie sferycznej pustki o promieniu a , zawartej w ciele stałym

$$\Phi_s = \sum_{m=0}^{\infty} C_m h_m^{(2)}(kr) P_m(\cos \theta), \quad (31)$$

gdzie

$h^{(2)}$ – funkcje Hankel drugiego rzędu,

P_m – wielomiany Legendre'a,

C_m – stałe zależne od liczb falowych dla fali podłużnej k_l ,
fali poprzecznej k_t i promienia inkluzji [19].

Dla $ka \ll 1$ główne znaczenie ma poprzecznik spowodowany podłużną falą rozproszoną zerowego rzędu, który wynosi:

$$s_r = \frac{4\pi(\sin ka)^2}{k^2} \frac{\left\{ 1 + 2\gamma^2 \left[1 + \frac{ka \operatorname{ctg} ka - 1}{(ka)^2} \right]^2 \right\}}{\left[1 + 2\gamma^2 \left(1 - \frac{2}{(ka)^2} \right) \right]^2 + \frac{16\gamma^4}{(ka)^2}}. \quad (32)$$

Prędkość rozchodzenia się fali podłużnej przy założeniu inkluzji w formie pustek sferycznych w materiale stałym może być wyrażona wzorem [16]

$$c_l^2 = \frac{2E}{3(1+\nu)\gamma_0} \left[\frac{1+\nu}{2(1-2\nu) + p(1+\nu)(1+\kappa\tau^2)} + \frac{(1-\kappa p)^{1/2}}{1-p} \right], \quad (33)$$

gdzie

ν – współczynnik Poissona,

$$\kappa = \frac{3(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)},$$

$$\tau = p^2 \left[\frac{\int_0^\infty f(a) da}{\left[\int_0^\infty a^3 f(a) da \right]^2} - 1 \right],$$

f – standardowa dystrybucja średnic inkluzji,

p – współczynnik porowatości.

4. Badania właściwości materiałów porowatych

Głównym przedmiotem prowadzonych badań była porcelana elektrotechniczna. Na prędkość fali akustycznej w materiałach tego typu mają wpływ nie tylko właściwości materiału i jego porowatość, ale także kształt porów. Obecność porów kulistych w mniejszym stopniu zmienia prędkość fali jak porów w kształcie wydłużonych elipsoid (przy tym samym stopniu porowatości).

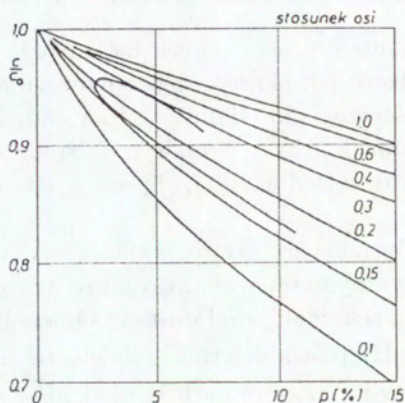
Dlatego przy porównaniu wyników doświadczalnych z wyżej podanymi rozważaniami teoretycznymi uwzględniono także wzory podane przez Es-selby [26] dla inkluzji sferoidalnych. Podstawą obliczenia jest w tym przypadku zależność między polem deformacji daleko od inkluzji $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ i polem jednorodnym w inkluzji $\varepsilon_{ij}^{(1)}$, które to dwie wielkości łączy związek

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = T_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{(0)}. \quad (34)$$

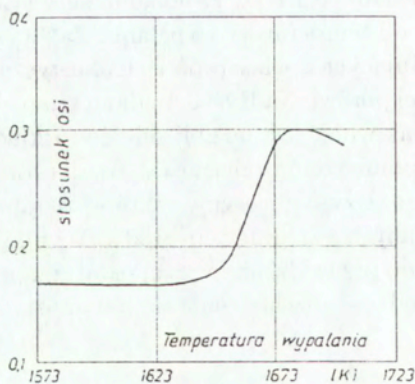
Obliczenia numeryczne składowych tensora pozwalają wyznaczyć krzywe [21], zależności prędkości rozchodzenia się fali od kształtu porów, czyli stosunku a/c osi elipsoidu obrotowego oraz stopnia porowatości. Krzywe te podano na Rys. 1. Jak widać dla tego samego stopnia porowatości występują dwie wartości c , wynika to właśnie z wpływu kształtu porów.

Kształt porów i stopień porowatości zmieniają się zależnie od temperatury wypalania porcelany. Na Rys. 2. podano zależność stosunku osi a/c sferoidalnych porów od temperatury wypalania. Jak wyżej podano jednym z parametrów decydujących o właściwościach akustycznych materiału jest dystrybucja wielkości porów. Na Rys. 3. podano ten rozkład dla porcelany elektrotechnicznej, jak widać jest on zbliżony do rozkładu Gaussowskiego.

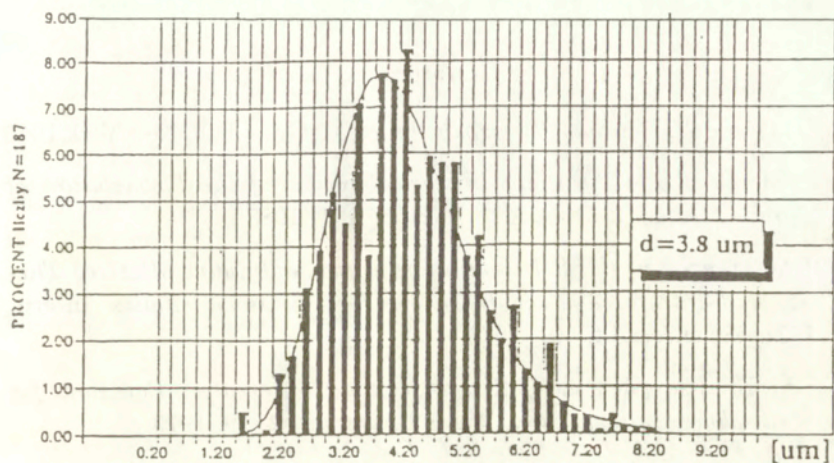
Dla porównania pomierzono zależność c_2/c_0 dla ośrodka ciekłego z inkluzjami ciała stałego. Użyto gliceryny, w której znajdowały się zawiesziny w postaci kulek szklanych o średnicy 60–100 μ . Wyniki pomiarów podano na Rys. 4. Jak było do przewidzenia, w tym ostatnim przypadku obecność inkluzji zwiększa prędkość rozchodzenia się fali akustycznej.



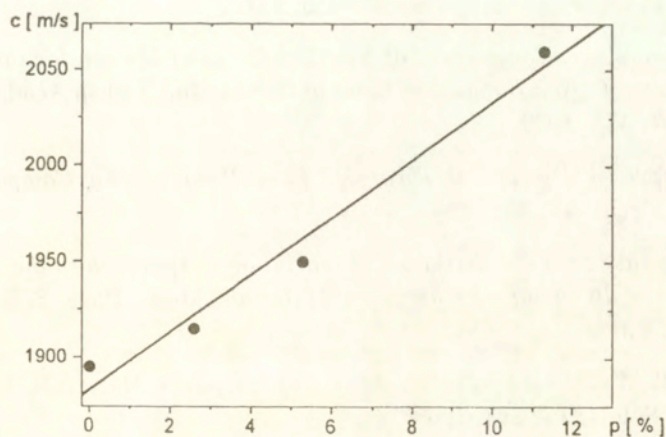
Rys. 1. Prędkość fali w porcelanie porowatej c odniesiona do prędkości fali w materiale bez porów c_0 w funkcji stopnia porowatości p . Parametrem jest uśredniony stosunek osi a/c sferoidalnej inkluzji w granicach 0,1 do 1,0. Grubą linią zaznaczono wyniki doświadczalne dla porcelany o różnych temperaturach wypalania i związanych z tym różnymi stopniami porowatości i kształtu porów.



Rys. 2. Stosunek osi a/c inkluzji sferoidalnych w porcelanie elektrotechnicznej w funkcji temperatury wypalania stosowanej w czasie procesu technologicznego.



Rys. 3. Rozkład występowania porów o różnych średnicach uśredniony dla kilku próbek porcelany elektrotechnicznej. Krzywa dotyczy rozkładu Gaussa.



Rys. 4. Zależność prędkości fali akustycznej od stopnia koncentracji zawiesin (kulek szklanych o średnicy 60 – 100 μ) w glicerynie.

Literatura

1. C. Truesdell, *Rational Thermodynamics*, McGraw-Hill, New York 1969.
2. R. de Boer and W. Ehler, *Historical review of the Formulation of Porous Media Theories*, Acta Mech., **74**, 1, 1988.
3. J.A. Trapp, *On the Relationship between Continuum Mixture. Theory and Integral Average Equations for Immiscible Fluids*, Intern. J. Eng. Sciences, **14**, 991, 1976.
4. S.M. Hassanizadeh and G. Gray, *General Conservation Equations for Multi-phase Systems*, Adv. Water Resources, **2**, 19, 1979.
5. K. Terzaghi and O.K. Fröhlich, *Theorie der Setzung von Tonchichten*, F. Denticke, Leipzig 1936.
6. M.A. Biot, *Theory of Deformation of a Porous Media Viscoelastic Anisotropic Solid*, J. Appl. Phys., **27**, 459, 1956.
7. W. Derski, *Equation of Motion for a Fluid-saturated Porous Solid*, Bull. Polish Acad. Sciences., **27**, 455, 1979.
8. S.J. Kowalski, *Comparison of Biot Equations of Motion for the Fluid Saturated Porous Solids with those of Derski*, Bull. Polish Acad. Sciences, **27**, 455, 1979.
9. J. Kubik, *A Dynamical Theory of Fluid-Porous Solid Composition*, Acta Mech., **37**, 231, 1985.
10. Z. Hashin and S.A. Shtrikman, *A Variational Approach to the Theory of elastic Behavior of multiphase Materials*, Mech. Phys. Solids, **11**, 127, 1963.
11. R. Hill, *A self-consistent Mechanics of composite Materials*, J. Mech. Phys. Solids, **13**, 213, 1965.
12. J.J. Mc Coy, *A Parabolic Theory of Stress Wave Propagation through Inhomogeneous Solids*, J. Appl. Mech., **44**, 462, 1977.

13. J. Lewandowski, *Acoustic and Effective Material Parameters of Heterogeneous Viscoelastic Bodies*, Acta Mech., **57**, 143, 1985.
14. I. Malecki, *Methods of "Space Sources" for Investigation of the Propagation of Ultrasonic Waves in Granular Media* [in Polish], Arch. Elektrotech., **5**, 645, 1955.
15. I. Malecki, *La propagation des ébranlements dans les milieux hétérogènes*, Coll. Intern. CNRS No. 111, Marseille 1961.
16. J. Ranachowski, *Propagation of Waves in Porous Ceramic*, Ultrasonics, **15**, 203, 1975.
17. W. Kreher, J. Ranachowski and F. Rejmund, *Waves in Porous Ceramics with Non-Spherical Holes*, Ultrasonics, **77**, 70, 1977.
18. J. Wehr, *The Ultrasonic Methods of Investigation of Ceramic Materials* [in Polish], Elektroceramika, **7**, 1971.
19. I. Malecki, *Physical Foundations of Technical Acoustics*, Pergamon Press, Oxford 1969.
20. A.G. Evans, B.R. Tittman and L. Ahlberg, *Ultrasonic Attenuation in Ceramics*, J. Appl. Phys., **49**, 2669, 1978.
21. L.J. MacKenzie, *The Elastic Constants of a Solid Containing Spherical Holes*, Proc. Phys. Soc., **B63**, 2, 1950.
22. G. Berryman, *Theory of Elastic Properties of Composite Materials*, Appl. Phys. Let., **35**, 856, 1979.
23. C.F. Ying and R. Truell, *Scattering of a Plane Longitudinal Wave in an Isotropically Elastic Solid*. J. Appl. Phys., **27**, 4086, 1956.
24. D.W. Sivukhin, *Diffraction of Plane Acoustic Wave upon a Spherical Hole*, Acoust. Zh. (Moscow), **1**. 78, 1955.
25. J. Lewandowski, *Correlation Function Determination for Inhomogeneities Scattering an Acoustic Wave*, Arch. Acoust., **3**, 283, 1978.
26. J.D. Eshelby, *The Deformation of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion*, Proc. Royal Soc. London, **A241**. 376, 1957.
27. K. Yosioka and Y. Kawasima. *Acoustic Radiation Pressure on the Compressible sphere*, Acustica. **5**. 167, 1955.