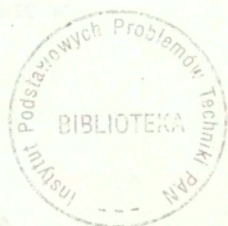


P.269



Przemysław Kołakowski

**ANALIZA WRAŻLIWOŚCI
I OPTYMALNE PROJEKTOWANIE
KONSTRUKCJI KRATOWYCH
METODĄ DYSTORSJI WIRTUALNYCH**

1/1998



W A R S Z A W A 1 9 9 8

<http://rcin.org.pl>

INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

BIBLIOTEKA

02-106 Warszawa, ul. Pawińskiego 5B

Tel. 22-826-74-10

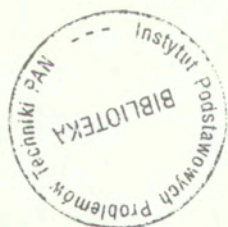
ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 30 stycznia 1998 r.

Praca doktorska

Promotor - Doc. dr hab. Jan Holnicki-Szulc

**Recenzenci Prof. dr hab. Andrzej Garstecki
Prof. dr hab. Zenon Mróz**



56547

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark. wyd. 5,20 Ark. druk. 6,50
Oddano do drukarni w lutym 1998r.

ATOS Poligrafia-Reklama, Warszawa, Stawki 14

<http://rcin.org.pl>

Spis treści

Rozdział 1: Wstęp

1.1 Wprowadzenie.....	5
1.2 Klasyczne metody dyskretnej analizy wrażliwości.....	5
1.3 Przegląd metod optymalnego przeprojektowywania konstrukcji.....	11
1.4 Metoda dystorsji wirtualnych - omówienie.....	14
1.5 Cel pracy.....	18
1.6 Zakres pracy.....	18

Rozdział 2: Analiza wrażliwości metodą dystorsji wirtualnych

2.1 Wprowadzenie.....	21
2.2 Wrażliwość pól odkształceń i naprężeń w zakresie sprężystym.....	21
2.3 Wrażliwość pól odkształceń i naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym.....	24
2.4 Inne wrażliwości	
2.4.1 Wrażliwości pola przemieszczeń.....	28
2.4.2 Granica plastyczności jako parametr wrażliwości.....	30
2.4.3 Współczynnik wzmocnienia jako parametr wrażliwości.....	31
2.5 Przykłady	
2.5.1 Dwuelementowa kratownica sprężysta.....	31
2.5.2 Dwuelementowa kratownica sprężysto-plastyczna.....	33
2.5.3 Trójelementowa kratownica sprężysta.....	34
2.5.4 Trójelementowa kratownica sprężysto-plastyczna.....	35
2.5.5 Analiza postępującego zniszczenia (nieproporcjonalne obciążenie).....	37
2.5.6 Analiza postępującego zniszczenia (nieproporcjonalne obciążenie z odciążeniem).....	39
2.5.7 Wieża wiertnicza.....	40
2.6 Podsumowanie i komentarz.....	43

Rozdział 3: Optymalne przeprojektowywanie konstrukcji

3.1 Wprowadzenie.....	45
-----------------------	----

3.2	Metoda dystorsji wirtualnych w zastosowaniu do optymalnego przeprojektowywania konstrukcji.....	45
3.3	Optymalne przeprojektowywanie w zakresie sprężysto-plastycznym.....	49
3.4	Algorytmy optymalnego przeprojektowywania.....	52
3.5	Przykłady	
3.5.1	Kratownica pięcioelementowa.....	59
3.5.2	Kratownica dziesięcioelementowa.....	60
3.5.3	Model wieży wiertniczej.....	62
3.5.4	Wspomnik kratownicowy.....	64
3.5.5	Kratownica dziesięcioelementowa w zakresie sprężysto-plastycznym.....	69
3.6	Podsumowanie i komentarz.....	71
Rozdział 4: Projektowanie konstrukcji adaptowalnych na ekstremalne obciążenie		
4.1	Wprowadzenie.....	73
4.2	Idea aktywnego dysypatora energii.....	73
4.3	Sformułowanie problemu projektowania na ekstremalne obciążenie.....	75
4.3.1	Maksimum rozpraszanej energii przy minimum deformacji.....	77
4.3.2	Maksimum rozpraszanej energii przy technologicznych ograniczeniach na dystorsje plastyczne.....	78
4.4	Rozwiązanie numeryczne.....	79
4.5	Przykład kratownicy.....	81
4.6	Rozwiązania kompromisowe.....	85
4.7	Podsumowanie i komentarz.....	87
	Wnioski końcowe.....	89
	Oryginalne koncepcje i osiągnięcia pracy.....	91
	Bibliografia.....	93
	Aneks A.....	100
	Aneks B.....	101
	Aneks C.....	102

ROZDZIAŁ 1 :

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Obserwuje się wciąż intensywny rozwój metod optymalnego projektowania konstrukcji. W latach 70-tych koncentrowały się one na optymalnym rozkładzie materiału w poszczególnych elementach ustroju lub też w całym zespole elementów. W latach 80-tych podjęte zostało znacznie trudniejsze, lecz prowadzące do większych oszczędności materiałowych zadanie optymalnego projektowania topologii konstrukcji, które nadal stanowi wyzwanie badawcze np. w przypadku zachowań niesprężystych. W latach 90-tych z kolei doceniono korzyści płynące z projektowania konstrukcji adaptowalnych, aktywnie dostosowujących się do zmiennych warunków pracy. Obecnie w wielu przypadkach adaptowalność ustroju jest warunkiem niezbędnym przy projektowaniu, nie zaś tylko opcją korzystniejszego rozwiązania.

Analiza wrażliwości konstrukcji, jako autonomicznie stawiany problem o podstawowym znaczeniu dla rozwoju skutecznych metod optymalizacji, rozwija się od połowy lat 80-tych i ciągle dostarcza nowych wyzwań, związanych z zapotrzebowaniem na efektywne algorytmy numeryczne (np. dla układów ulegających postępującemu zniszczeniu).

Wszystkie wyżej wymienione aspekty optymalnego projektowania konstrukcji, wyrażone w opisie opartym na efektywnej numerycznie tzw. metodzie dystorsji wirtualnych (MDW), ujęte zostały w jednym, spójnym sformułowaniu, zaprezentowanym w niniejszej pracy.

1.2 Klasyczne metody dyskretnej analizy wrażliwości

W sensie matematycznym analiza wrażliwości polega na znalezieniu pochodnych pewnej funkcji (np. odkształceń, naprężeń) ze względu na wybrane zmienne (np. moduł Younga, pole przekroju poprzecznego elementu). Można wyróżnić tutaj dwa sformułowania: ciągłe, w którym za pomocą rachunku wariacyjnego analizujemy konstrukcję jako *continuum* oraz dyskretne, w którym dzięki metodom numerycznym liczymy wrażliwość zdyskretyzowanego układu. Ta praca dotyczy ujęcia dyskretnego.

Analiza wrażliwości konstrukcji, czyli badanie w jaki sposób zmieniają się własności ustroju w odpowiedzi na niewielką modyfikację zmiennej projektowej, jest najbardziej kosztowną numerycznie procedurą algorytmów gradientowych w metodach optymalizacji, identyfikacji oraz analizy niezawodności konstrukcji. Wzoruując się na pracy Haftki i Adelmanna [36] wyróżniamy następujące trzy metody analizy wrażliwości:

- 1) metoda różnic skończonych (MRS)
- 2) metody dyskretno-analityczne
- 3) metody dyskretno-półanalityczne

Najprostszą z numerycznych metod obliczania wrażliwości jest metoda różnic skończonych. Cechuje ją duża łatwość implementacji, dlatego jest popularna i szeroko stosowana. Niestety ma szereg wad, które skłaniają do poszukiwania innych metod. Przyjrzyjmy się podstawowemu dylematowi MRS tj. problemowi doboru przyrostu skończonego. Załóżmy, że $u(x)$ opisuje pole przemieszczeń ustroju, zależne od pewnej zmiennej projektowej x . Wtedy pochodną tego pola $u'(x)$ w punkcie $x=x_0$ można aproksymować przy pomocy różnicy skończonej:

$$u'(x) = \frac{u(x_0 + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} u''(x_0 + \delta \Delta x) \quad \text{gdzie } 0 \leq \delta \leq 1 \quad (1.1)$$

Pierwszy wyraz prawej strony (1.1) wyraża przybliżenie pochodnej $u'(x)$, natomiast drugi jest oszacowaniem błędu obciążenia, wynikającego z faktu poprzestania na dwóch wyrazach rozwinięcia szeregu Taylora. W celu minimalizacji błędu obciążenia należałoby zmniejszyć krok Δx . Wtedy jednak może się zwiększyć błąd zaokrąglenia, spowodowany dzieleniem przez małą wartość (patrz 1.1). Można ten dylemat rozstrzygać, dobierając i analizując różne długości kroku (por. Gill i inni [33], Iott i inni [60]). Jak widać podstawowym mankamentem MRS jest zależność otrzymywanych wyników od doboru przyrostu skończonego. Zbyt duży przyrost powoduje niedokładności w stosunku do gradientów analitycznych, natomiast zbyt mały może się okazać kłopotliwy do obróbki numerycznej (gradienty rosną do nieskończoności ze względu na ograniczoną reprezentację maszynową liczb rzeczywistych). Dobór przyrostu jest więc w zasadzie zależny od rozwiązywanego problemu i wymaga pewnego doświadczenia numerycznego. W konsekwencji liczba symulacji, jakie trzeba wykonać, aby przy pomocy MRS otrzymać zadawalające przybliżenie wyniku analitycznego, może być znaczna.

W celu uniknięcia tego rodzaju niedogodności stosuje się metody analityczne (por. Haug i inni [40], Haftka, Kamat [34]), które opierają się na ścisłych formułach, wyprowadzonych dla konstrukcji dyskretnych lub zdyskretyzowanej (np. w oparciu o metodę elementów skończonych - MES). Często niektóre, kłopotliwe do uzyskania składniki tych formuł są aproksymowane dzięki MRS. Mamy wtedy do czynienia z metodami półanalitycznymi.

Podamy teraz zarys analizy wrażliwości opartej na MES według Haftki, Gurdala [38]. Równania równowagi, wyrażone w przemieszczeniach u węzłów konstrukcji, przedstawiają się następująco:

$$Ku = f, \quad (1.2)$$

gdzie K jest macierzą sztywności, a f wektorem obciążeń zewnętrznych. Typowe ograniczenie naprężeniowe lub odkształceniowe ma postać:

$$g(u, x) \geq 0, \quad (1.3)$$

przy czym poczyniono założenie, że funkcja g zależy tylko od jednej zmiennej projektowej x . Korzystając z łańcuchowej reguły różniczkowania funkcji złożonych, otrzymujemy:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + z^T \frac{du}{dx}, \quad (1.4)$$

gdzie wektor z jest postaci:

$$z_i = \frac{\partial g}{\partial u_i}. \quad (1.5)$$

Ponieważ jawną część $\partial g / \partial x$ pochodnej funkcji (1.3) można łatwo znaleźć, skupimy się na policzeniu części niejawnej dg/dx . Różniczkując równanie (1.2) względem x , dostajemy:

$$K \frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u. \quad (1.6)$$

Mnożąc równanie (1.6) stronami przez $z^T K^{-1}$, otrzymujemy:

$$z^T \frac{du}{dx} = z^T K^{-1} \left(\frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u \right). \quad (1.7)$$

Obliczenia numeryczne składnika $z^T du/dx$ można wykonywać dwojako. Pierwszy sposób, zwany metodą bezpośrednią, polega na rozwiązaniu równania (1.6) ze względu na du/dx (traktując prawą stronę jako tzw. pseudoobciążenie), a następnie podstawieniu uzyskanego wyniku do (1.7). Drugi sposób, zwany metodą sprzężoną, może okazać się efektywniejszy w niektórych przypadkach (por. Belegundu [11], Dems, Mróz [25]). Polega on na rozwiązaniu następującego układu:

$$K\lambda = z, \quad (1.8)$$

ze względu na wektor λ . Wówczas równanie (1.4) przyjmie postać:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\partial g}{\partial x} + \lambda^T \left(\frac{df}{dx} - \frac{dK}{dx} u \right), \quad (1.9)$$

przy czym wykorzystano tu fakt symetrii macierzy sztywności K . Te dwa podejścia MES są naprzemiennie powszechnie stosowane w analizie wrażliwości, w zależności od rodzaju zadań. Ogólnie rzecz biorąc, jeżeli liczba zmiennych projektowych jest mniejsza od liczby ograniczeń, to preferuje się metodę bezpośrednią. W przeciwnym wypadku korzysta się z metody sprzężonej. Zarówno metoda bezpośrednia jak i sprzężona wymagają znajomości składników pseudoobciążenia $d\mathbf{f}/dx$ lub dK/dx , które są kłopotliwe do uzyskania, zwłaszcza w przypadku zmiennych kształtu, modyfikujących geometrię elementu skończonego. Dlatego też powszechnie stosuje się metody półanalityczne (por. Nagendra, Fleury [84], Cheng, Yingwei [20]), w których pochodną dK/dx aproksymuje się dzięki MRS, według wzoru:

$$\frac{dK}{dx} \approx \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x} \quad (1.10)$$

Podejście półanalityczne ma tę zaletę, że można je stosować w przypadku braku dostępu do źródłowej wersji kodu numerycznego, gdy nie ma możliwości analitycznego policzenia składników pseudoobciążenia.

Metoda elementów skończonych jest dużo bardziej wiarygodna od metody różnic skończonych, jeżeli chodzi o dokładność. Wymaga więcej nakładu pracy przy implementacji, ale korzyści jej użytkowania rekompensują poniesiony wysiłek. W zakresie sprężystym zachowania się konstrukcji działa bez zarzutu. Zaczyna być skomplikowana i czasochłonna w przypadku analizy fizycznie nieliniowej. Wówczas należy przeprowadzać obliczenia przyrostowo, aktualizując na każdym kroku macierz sztywności. Innymi słowy jeśli mamy n przyrostów w zakresie plastycznym to musimy wykonać n analiz, odpowiadających kosztowo analizie sprężystej konstrukcji. Jest to cecha dość uciążliwa, zważywszy, że strefa plastyczna w konstrukcji obejmuje zwykle tylko znikomą jej część.

Klasyczna analiza wrażliwości obejmuje również problemy wyznaczenia pochodnych wartości własnych oraz dynamikę. Wartości własne konstrukcji są podstawą analizy stateczności i drgań. Jeśli mamy do czynienia z siłami konserwatywnymi (nie śledzącymi) i pomijamy zjawisko tłumienia, to wartości własne, reprezentujące siły wyboczeniowe lub częstotliwości drgań konstrukcji, są rzeczywiste. W przypadku ogólnym natomiast należy rozważać wielkości zespolone.

Podamy teraz schemat wyznaczenia wrażliwości wartości własnych konstrukcji dla prostszego przypadku. Analiza drgań bez tłumienia (czy też liniowa analiza stateczności) prowadzi do rozwiązania problemu wartości własnych, o następującej formie:

$$Kw - \mu Mw = 0 \quad (1.11)$$

gdzie M jest macierzą mas lub geometryczną macierzą sztywności, a w oznacza wektor postaci drgań własnych lub postaci wyboczenia. W analizie drgań μ jest kwadratem częstotliwości drgań własnych, a w analizie stateczności odpowiada wartości krytycznej mnożnika

obciążenia. Macierz M jest symetryczna. Często normalizuje się wektory własne za pomocą symetrycznej, dodatnio określonej macierzy W , w ten sposób, że:

$$w^T W w = I \quad (1.12)$$

gdzie W jest macierzą mas w przypadku analizy drgań. Różniczkując (1.11) i (1.12) względem zmiennej projektowej x , dostajemy:

$$(K - \mu M) \frac{dw}{dx} - \frac{d\mu}{dx} M w = - \left(\frac{dK}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} \right) w \quad (1.13)$$

$$w^T W \frac{dw}{dx} = - \frac{1}{2} w^T \frac{dW}{dx} w \quad (1.14)$$

przy czym skorzystano z faktu symetrii macierzy W . W większości przypadków interesują nas tylko wrażliwości wartości własnych, które otrzymujemy mnożąc obustronnie (1.13) przez w^T :

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{w^T \left(\frac{dK}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} \right) w}{w^T M w} \quad (1.15)$$

Jeśli zachodzi potrzeba wyznaczenia wrażliwości wektorów własnych, to z równań (1.13) i (1.14) tworzy się następujący układ:

$$\begin{bmatrix} K - \mu M & -Mw \\ -w^T W & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dw}{dx} \\ \frac{d\mu}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left(\frac{dK}{dx} - \mu \frac{dM}{dx} \right) w \\ \frac{1}{2} w^T \frac{dW}{dx} w \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

Układ (1.16) należy rozwiązywać w odpowiedni sposób, gdyż podmacierz $K - \mu M$ jest osobliwa (por. Murthy, Haftka [83]).

W porównaniu z ograniczeniami w analizie statycznej, ograniczenia dynamiczne są zależne od dodatkowego parametru, a mianowicie czasu. Tak więc standardowe ograniczenie dynamiczne ma postać:

$$g(u, x, t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_j \quad (1.17)$$

przy czym dla uproszczenia zakłada się, że ograniczenie (1.17) musi być spełnione w sposób ciągły w całym przedziale czasowym. W obliczeniach numerycznych należy oczywiście dokonać dyskretyzacji ograniczenia (1.17), rozważając pewną liczbę n_t kroków czasowych. Zatem przyjmie ono formę:

$$g_i = g(u, x, t_i) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n_i \quad (1.18)$$

Podział na kroki czasowe musi być dostatecznie gęsty, aby nie dopuścić do przekroczenia ograniczenia (1.18) pomiędzy siatką podziału. Z drugiej strony znacznie zwiększa to liczbę ograniczeń i przyczynia się do spowolnienia procesu optymalizacji. Dlatego proponuje się rozmaite metody, aby uczynić ograniczenie (1.18) niezależnym od czasu (por. Barthelemy, Riley [9]). Omówienie tego zagadnienia wykracza poza zakres niniejszej pracy.

Wszystkie opisane powyżej zagadnienia dotyczą sprężystego zachowania konstrukcji. Jak dotychczas znacznie rzadziej podejmowano problem analizy wrażliwości w zakresie nieliniowym. Bendsoe i Sokołowski [12], [13] sformułowali problem wyznaczania gradientów sprężysto-plastycznych przy proporcjonalnie narastającym obciążeniu jako zadanie programowania kwadratowego. Problemami wrażliwości dla nieliniowości geometrycznych zajmowali się Ryu i inni [101], Arora, Wu [4], Barthelemy i inni [8], Choi i inni [21]. Natomiast zagadnienia nieliniowej sprężystości podejmowali Mróz i inni [80], Cardoso, Arora [18], Wu, Arora [120], Tsay, Arora [113]. Problemy rozwiązywania zagadnień sprężysto-plastycznych podejmowali ostatnio Kleiber i inni [67], [68], Lee, Arora [73], Park, Choi [88], Postek [90], Vidal i inni [116], zaś aktualny stan badań w tej dziedzinie można znaleźć w pracy Kleibera [69] oraz w pracy [61].

Standardowe podejście przyrostowe do analizy wrażliwości układów sprężysto-plastycznych prowadzi się do:

- i) rozwiązania globalnego układu równań równowagi ustroju dla danego przyrostu obciążenia z wykorzystaniem aktualnie przeformowanej, stycznej macierzy sztywności K
- ii) wyznaczenia wektora prawej strony układu równań (1.6) metody dyskretno-analitycznej (w postaci przyrostowej) z wykorzystaniem stycznej macierzy sztywności K , wyznaczonej w punkcie i)
- iii) rozwiązania globalnego układu równań (1.6) metody dyskretno-analitycznej (w postaci przyrostowej), określającego $d(\Delta u)/dx$
- iv) wyznaczenia skumulowanej wrażliwości $d(u)/dx$ na podstawie jej znajomości w kroku poprzednim oraz znajomości wrażliwości przyrostowej, określonej w punkcie iii), dla kolejnych przyrostów obciążenia

Oznacza to konieczność podjęcia decyzji, co do zapotrzebowania na wyznaczenie wrażliwości w trakcie analizy sprężysto-plastycznej, już na początku procesu obliczeniowego i dokonywania operacji opisanych w punktach ii)-iv) na wszystkich etapach przyrostowych. Dodatkowych problemów dostarcza obliczanie wrażliwości dla poziomów obciążeń, powodujących przejście elementu z pracy w zakresie sprężystym w zakres plastyczny. Mamy wtedy do czynienia ze skokiem pochodnych, wpływającym na wrażliwość w dalszych etapach obciążenia i wymagającym specjalnego traktowania (por. Kleiber [69], Lee, Arora [73]).

Zapiszmy związki geometryczne, konstytutywne oraz warunki równowagi, w postaci:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= L(u) \\
 \sigma &= C(\varepsilon - \varepsilon') \\
 \sigma \bullet \delta\varepsilon &= P \bullet \delta u
 \end{aligned}
 \tag{1.19}$$

gdzie u , ε i σ opisują odpowiednio pola przemieszczeń, deformacji i naprężeń, L jest liniowym operatorem różniczkowym, C - materiałową macierzą sztywności, ε' - polem deformacji wstępnych, natomiast \bullet oznacza produkt skalarny, całkowany w całym obszarze ustroju. Różniczkując (1.19) względem jakiejś zmiennej projektowej, np. wybranego parametru sztywności, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon' &= L(u') \\
 \sigma' &= C(\varepsilon' + C^{-1}C'(\varepsilon - \varepsilon')) \\
 \sigma' \bullet \delta\varepsilon &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

Porównując związki (1.19) i (1.20) widać, że pola u' , ε' , σ' mogą być wyznaczone poprzez „obciążenie” ustroju deformacją wstępną o wartości $-C^{-1}C'(\varepsilon - \varepsilon')$. Podejście to stosowali Dems, Mróz [25], [26], Mróz [81], Sokołowski, Zolesio [107], choć bez implementacji numerycznych. Barthelemy i inni [8] oraz Lee, Arora [73] zastosowali je do zagadnień kratownic, płyt i tarcz.

Opisane powyżej podejście (1.19)-(1.20), oparte na koncepcji deformacji wstępnych (*initial strains*), prowadzi do następującego schematu analizy wrażliwości ustrojów sprężysto-plastycznych:

- i) rozwiązanie globalnego układu równań równowagi dla danego poziomu obciążenia (iteracyjnie), z wykorzystaniem wyjściowej, sprężystej macierzy sztywności K^e oraz deformacji wstępnych do modelowania trwałych deformacji plastycznych
- ii) iteracyjne rozwiązanie globalnego problemu (1.6) metody dyskretno-analitycznej z wykorzystaniem stałej macierzy sztywności K^e oraz koncepcji obciążania ustroju deformacją wstępną w celu wyznaczenia prawych stron układu (1.6)

Zaletą tego podejścia jest możliwość wyznaczenia skumulowanej, a nie przyrostowej wrażliwości, fakt niezależności wrażliwości od historii obciążenia (dopóki nie nastąpi odciążenie), wykorzystanie stałej, nie modyfikowanej w trakcie obliczeń macierzy sztywności K^e oraz brak dodatkowych problemów numerycznych przy liczeniu wrażliwości w punktach nieciągłości, związanych z przejściem elementu ze strefy sprężystej do plastycznej. Natomiast wadą tego podejścia jest konieczność iterowania rozwiązania na etapie analizy wrażliwości.

1.3 Przegląd metod optymalnego przeprojektowywania konstrukcji

Problem projektowania najlżejszej struktury (o minimalnej objętości materiału), przenoszącej dane obciążenie statyczne przy ograniczeniach narzuconych na wartości naprężeń, został

sformułowany i przedyskutowany w pracach Maxwell'a [78], Michell'a [79]. Opisane w nich warunki optymalności tzw. *pseudo-continuum* spełniają struktury o nieskończenie gęsto rozłożonych dwóch rodzinach wzajemnie ortogonalnych włókien, wyłożonych do maksymalnych wartości dopuszczalnych naprężeń i rozłożonych zgodnie z rozkładem naprężeń głównych dla zastępczego *continuum*. Wielu autorów podejmowało ten temat, uzyskując rozwiązania optymalne, lecz jedynie dla szczególnie sformułowanych problemów. Zagadnienia *pseudo-continuum* w płaskim stanie naprężenia dyskutowali m. in. Cox [22], Hemp [41], [42], Owen [87], Parkes [89]), Chan [19], Prager [93], [96]. Analogiczne zagadnienia dotyczące *pseudo-continuum* w postaci rusztów (obciążonych prostopadłe do swej powierzchni) analizowali Rozvany [99], Prager, Rozvany [94], [95], Rozvany, Hill [98], Olhoff, Rozvany [86]. Jednak proponowane rozwiązania nie dają się zastosować w przypadku dowolnie sformułowanych warunków brzegowych.

Odmienne do omawianego problemu, bardziej płodne w rozwiązania podejście oparte jest na koncepcji struktury wyjściowej (*ground structure*), sformułowanej w pracy Dorna i innych [29]. Zakładając pewien zbiór węzłów struktury wyjściowej oraz zbiór łączących je elementów, określa się geometrię kratownicy, dla której rozwiązuje się następujące problemy optymalnego przeprojektowywania (*structural remodelling*), zmierzające do minimalizacji objętości materiału:

- a) problem wyboru podzbioru węzłów i łączących je elementów (optymalizacja topologii)
- b) problem modyfikacji położenia węzłów (optymalizacja kształtu)
- c) problem doboru pól przekrojów poprzecznych elementów (wymiarowanie)

Alternatywnie można tu rozważać zadanie minimalizacji podatności ustroju (lub minimalizacji energii sprężystej) przy zachowaniu stałej objętości materiału. O ile rozwiązanie problemów b) i c) może być uzyskane na drodze programowania nieliniowego to opracowanie ogólnego algorytmu, rozwiązującego problem a), który jest kombinatoryczny w swej naturze, nadal stanowi wyzwanie badawcze. Wiadomo natomiast, że właśnie przez optymalny dobór topologii można drastycznie zmniejszyć wartość funkcji celu (por. Topping [111]).

Przegląd różnych metod rozwiązywania problemów a), b) i c) można znaleźć w pracy Kirscha [63]. Zazwyczaj problemy a)+c), stanowiące istotę optymalizacji topologii rozwiązywane są niezależnie od problemu b). Sprowadza się je do zadania programowania liniowego, postaci:

$$\min_A A, l_i, \quad (1.21)$$

gdzie A_i , l_i oznaczają odpowiednio pole przekroju i długość i -tego elementu kratownicy. Rozważa się następujące ograniczenia na siły wewnętrzne i przekroje poprzeczne:

$$-\sigma^u A_i \leq N_i \leq \sigma^u A_i \quad \text{oraz} \quad A_i \geq A_{\min} \quad (1.22)$$

gdzie σ^* jest granicą naprężeń dopuszczalnych zaś N_i reprezentuje siły wewnętrzne. Rozpatruje się warunki równowagi, postaci:

$$C_{ij} N_j = P_i \quad (1.23)$$

przy czym C_{ij} oznacza macierz cosinusów kierunkowych, a P_i wektor obciążeń zewnętrznych. Pomija się w tym podejściu warunki nierozdzielności odkształceń (por. Hemp [42], Dorn i inni [29]). Prowadzi to często do nieoptymalnych struktur hiperstatycznych w rozwiązaniu, co wymaga dopuszczenia zabiegu sprężania struktury wynikowej. Z drugiej strony, sprowadzając A_{min} do zera, pozwala się w powyższym sformułowaniu na eliminację elementów, przez co automatycznie modyfikuje się topologię układu. Prowadzi to jednak zwykle do nieakceptowalnych rozwiązań osobliwych o zmiennej geometrii (por. Sved, Ginos [109], Kirsch, Taye [62]). Podobna osobliwość rozwiązania pojawia się w sformułowaniu dualnym problemu, wyrażonym w przemieszczeniach (por. Rozvany, Zhou [100]). Istnieją pewne wyspecjalizowane algorytmy, dające sobie radę z osobliwościami (por. Ben-Tal, Bendsoe [17], Bendsoe i inni [15], Sankaranarayanan i inni [103]). Dokładny opis metod optymalnego przeprojektowywania, opartych na koncepcji konstrukcji wyjściowej (*ground structure*), zawiera praca przeglądowa Bendsoe i innych [16].

Innym podejściem do problemu a)+c), prowadzącym do efektywnego algorytmu numerycznego, jest projektowanie na pełne wyętieżenie (*fully stressed design* - por. Barnes i inni [7], Topping [110]), poprzez przenoszenie materiału z elementów niedociążonych do przeciążonych w gęsto skratowanej strukturze wyjściowej. Można w ten sposób szybko wyeliminować elementy nieefektywne. Jednakże algorytmy te, nie kontrolujące wartości funkcji celu, prowadzą często do rozwiązań nieoptymalnych. Podejmowano też próby łączenia obu podejść, bazujących na koncepcji konstrukcji wyjściowej, w pętli iteracyjnej (por. Topping [110], Reinschmidt, Russell [97]).

Trzecie podejście do omawianego problemu optymalnego przeprojektowywania konstrukcji oparte jest na koncepcji mikrostruktury zhomogenizowanego ośrodka pierwotnego, w którym funkcje dwóch wymiarów mikroporów oraz ich orientacji względem ośrodka są zmiennymi decyzyjnymi. Pionierskimi pracami w tej dziedzinie są publikacje: Sanchez-Palencia [102], Bendsoe, Kikuchi [14], Suzuki, Kikuchi [108]. Okazuje się, że zadanie minimalizacji podatności ośrodka z mikrostrukturą przy założeniu stałej objętości ustroju prowadzi do siatkowych rozkładów materiału, podobnych do tych, które otrzymuje się w wyniku zastosowania omówionych już, gęsto skratowanych struktur wyjściowych. Faktem jest, że trudno w tych rozwiązaniach wyeliminować tzw. szare strefy, w których materiał pozostaje rozmyty jako porowate *continuum* i nie polaryzuje się ostatecznie w postaci gęsto rozłożonych wiązek włókien. Zaletą natomiast tego podejścia jest fakt, że nie ma potrzeby definiowania struktury wyjściowej, która z natury musi zawierać jak największą liczbę skratowań, aby a priori nie wyeliminować rozwiązania optymalnego. Oczywiście liczba skratowań wpływa wybitnie na czas obliczeń numerycznych.

Ogólną cechą rozwiązań, uzyskiwanych przy pomocy opisanych powyżej metod numerycznych, jest wielość topologii o bardzo zbliżonej wartości funkcji celu (przy

skomplikowanej zazwyczaj siatce połączeń) i brak narzędzia, pozwalającego na wybranie konstrukcji bliższej optimum, lecz o możliwie prostej topologii, dającej szansę na praktyczną realizację.

1.4 Metoda dystorsji wirtualnych - omówienie

Metoda dystorsji wirtualnych wywodzi się z podejścia, wykorzystującego pole deformacji wstępnych do modelowania defektów materiałowych (por. Nowacki [85]). Pierwotnie została zastosowana do opisu możliwych stanów sprężeń w jedno- i wielofazowych ośrodkach sprężystych (por. Holnicki-Szulc [43] - [46]). Następnie ten sam aparat formalny wykorzystany został do modelowania (przy pomocy fikcyjnych pól deformacji wstępnych i odpowiadających im stanów tzw. sił kompensacyjnych) optymalnego przeprojektowywania ustrojów sprężystych, polegającego na przenoszeniu części materiału z jednego miejsca ustroju w inne (por. Holnicki-Szulc [47], [50], Holnicki-Szulc, Gierliński [49]). Zbliżone podejście do problemu przeprojektowywania prezentowali Garstecki, Glema [30] oraz Sobieszczański- Sobieski [106].

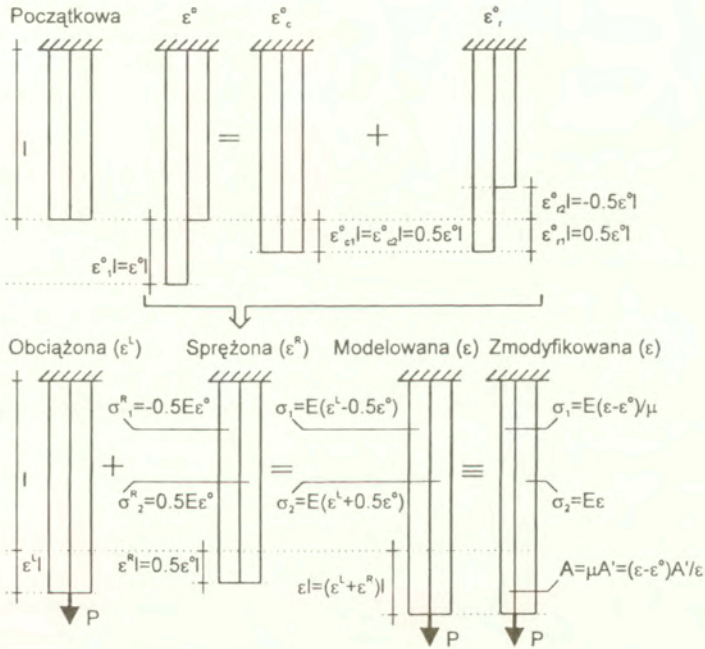
Ostatnio zaproponowane zostało podejście, rokujące nadzieję na stworzenie skutecznego narzędzia numerycznego, pozwalającego na projektowanie optymalnej topologii ustroju kratowego, wychodząc z *continuum* sprężystego (por. Holnicki-Szulc, Gierliński [56]). Zademonstrowany w pracy [56] przykład przeprowadza *continuum* sprężyste (podobnie jak w metodzie homogenizacji - Bendsoe, Kikuchi [14]), wyposażone w trzy sterowalne funkcje, opisujące dwie wartości główne i jeden kierunek główny tensora dystorsji wirtualnych, w *pseudo-continuum*, przypominające optymalne topologie, wyznaczone dla gęsto skratowanych ustrojów wyjściowych (por. Sankaranarayanan i inni [103]). Metoda dystorsji wirtualnych pozwala także na dołączenie nowych elementów do ustroju, a nie tylko ich modyfikację lub eliminację (por. Holnicki-Szulc, Gierliński [56]).

Użycie deformacji wstępnych i generowanych przez nie sił kompensacyjnych do rozprowadzania stanów rezydualnych w iteracyjnych algorytmach numerycznych analizy sprężysto-plastycznej wykorzystywane było przez Argyrisa i innych [3] (tzw. metoda odkształceń wstępnych - *initial strains*). Jednak metoda dystorsji wirtualnych, pozwalająca na wyznaczenie dystorsji wstępnych w jednym kroku, bez iteracji, dzięki wyznaczonym wcześniej tzw. wektorom wpływu, okazała się efektywniejsza numerycznie w przypadku ustrojów kratowych (por. Holnicki-Szulc, Gierliński [49]) oraz ramowych (por. Makode i inni [77]). Również w przypadku ustrojów kontynualnych podejście to może być z powodzeniem wykorzystane np. do modelowania postępującego rozwoju spękań (por. Wiącek, Holnicki-Szulc [118]).

Metoda dystorsji wirtualnych pozwala też na opisywanie innych, odcinkami liniowo modelowanych nieliniowości fizycznych typu *locking materials* lub ustrojów z luzami wewnętrznymi (por. Holnicki-Szulc [51]). Poza przeprojektowywaniem i opisem nieliniowości fizycznych oraz defektów wewnętrznych naturalnym zastosowaniem metody dystorsji wirtualnych jest modelowanie zachowania elementów aktywnych w ustrojach

sterowalnych (por. Holnicki-Szulc, Mróz [48], Holnicki-Szulc, Haftka [54], Holnicki-Szulc [53], [55]).

Omawiana metoda została zastosowana (pod nazwą *Virtual Distortion Method*) w komercyjnym programie komputerowym RASOS, brytyjskiej firmy WS Atkins, do analizy postępującego zniszczenia oraz analizy niezawodności wież wiertniczych (tzw. *offshore structures* - por. Turner i inni [114]).



Rys. 1.1 Schemat metody dystorsji wirtualnych

Wprowadźmy teraz podstawowe terminy metody dystorsji wirtualnych na przykładzie prostego ustroju. Weźmy pod uwagę konstrukcję dwuelementową w konfiguracji *początkowej*, pokazaną na Rys. 1.1. Przyjmijmy, że lewy element został poddany wstępnemu wydłużeniu, wynikającemu np. z imperfekcji geometrycznej lub ogrzania pręta. Odształcenie, odpowiadające temu wydłużeniu, będziemy nazywać *dystorsją wirtualną* ϵ^o . Ponieważ muszą być spełnione warunki ciągłości deformacji układu, wprowadzenie dystorsji w lewym elemencie spowoduje powstanie w konstrukcji rezydualnego pola odształceń ϵ^R oraz towarzyszącego mu samorównoważnego pola naprężeń σ^R (konstrukcja *sprężona* na Rys. 1.1), opisanych następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}\sigma_i^R &= E_i \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij}) \varepsilon_j^o \\ \varepsilon_i^R &= \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o\end{aligned}\tag{1.24}$$

Macierz D , pojawiająca się w formułach (1.24), jest tzw. macierzą wpływu i stanowi podstawę obliczeń numerycznych w metodzie dystorsji wirtualnych. Element D_{ij} tej macierzy mówi nam jak odkształca się i -ty pręt konstrukcji na skutek wymuszenia jednostkowej dystorsji $\varepsilon_j^o = 1$ w j -tym elemencie. Macierz wpływu D jest niesymetryczna (porównaj aneks C). Dla ustrojów kratowych ma ona wymiar $n \times n$, gdzie n oznacza liczbę elementów. Numerycznie wyznacza się ją przez znalezienie n odpowiedzi konstrukcji na lokalne obciążenie pojedynczego pręta parą sił kompensacyjnych, odpowiadających jego jednostkowemu odkształceniu.

Można dowieść (por. Holnicki-Szulc, Gierliński [56]), że pole dystorsji wirtualnych w konstrukcji składa się z dwóch ortogonalnych pól: $\varepsilon^o = \varepsilon^r + \varepsilon^c$. Składnik ε^r odpowiada za powstanie w konstrukcji samorównoważnego pola naprężeń (bez odkształceń), natomiast składnik ε^c odpowiada za powstanie ciągłego pola deformacji (bez naprężeń).

Podajmy teraz konstrukcję obciążeniu zewnętrznemu w postaci siły P , które powoduje wygenerowanie pola deformacji ε^L i odpowiadającego mu pola naprężeń σ^L . Superponując stany konstrukcji *sprężonej* i *obciążonej*, dostaniemy w wyniku konstrukcję *modelowaną dystorsjami* (patrz Rys. 1.1). Wówczas wzory na naprężenia i odkształcenia przyjmują postać:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \sigma_i^L + \sigma_i^R = E_i \varepsilon_i^L + E_i \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij}) \varepsilon_j^o \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^R = \varepsilon_i^L + \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o\end{aligned}\tag{1.25}$$

Niezależnie od konstrukcji *modelowanej dystorsjami* wprowadzimy w lewym elemencie obciążonego ustroju modyfikację, rozumianą jako zmiana wartości jakiegoś parametru konstrukcji np. modułu Younga lub przekroju poprzecznego pręta, uzyskując w efekcie ustrój *zmodyfikowany*. Stawiamy teraz postulat, aby konstrukcja *modelowana dystorsjami* oraz konstrukcja *zmodyfikowana* były tożsame w sensie równości pól odkształceń i sił wewnętrznych. Tak więc w omawianym przypadku wprowadzenie dystorsji w lewym elemencie jest równoznaczne np. z modyfikacją jego pola przekroju poprzecznego (patrz Rys. 1.1), modułu Younga, bądź też z wygenerowaniem w nim dystorsji plastycznej.

Przykładowo, biorąc pod uwagę uplastycznienie lewego elementu (przy granicy plastyczności σ^p), z powyższego postulatu wynikają następujące formuły, opisujące odpowiedź ustroju *zmodyfikowanego*:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma^u = E_1 \varepsilon_1 = E_1 (\varepsilon_1^L + \varepsilon_1^R) = E_1 (\varepsilon_1^L + (D_{11} - 1) \varepsilon_1^o) \\ \sigma_2 &= E_2 \varepsilon_2 = E_2 (\varepsilon_2^L + \varepsilon_2^R) = E_2 (\varepsilon_2^L + D_{21} \varepsilon_1^o)\end{aligned}\quad (1.26)$$

Oznacza to, że znając rozwiązanie liniowe ε_1^L , ε_2^L oraz elementy macierzy wpływu D_{11} , D_{21} , stan naprężenia w lewym elemencie ustroju sprężysto-plastycznego można wyznaczyć bez iteracji, rozwiązując równanie (1.26a) ze względu na dystorsję wirtualną (plastyczną) ε_1^o . Znając tę dystorsję stan naprężenia w prawym elemencie (1.26b) wyznaczamy przez proste podstawienie. W ogólnym przypadku analizy sprężysto-plastycznej, dysponując odpowiedzią sprężystą ustroju ε^L oraz odpowiednimi wyrazami macierzy wpływu D , postępowanie sprowadza się do rozwiązania małego, lokalnego układu równań, postaci:

$$(D_{ij} - \delta_{ij}) \varepsilon_j^o = \frac{\sigma^u}{E_i} - \varepsilon_i^L \quad (1.27)$$

Z układu (1.27) wyznacza się dystorsje plastyczne tylko w elementach uplastycznionych, a następnie określa się globalną odpowiedź ustroju z (1.25). Można w ten sposób, wprowadzając przyrosty obciążeń ustroju prętowego, określane przez kolejno generowane przeguby plastyczne, dokonać analizy sprężysto-plastycznej, posługując się znajomością jedynie sprężystej odpowiedzi układu, bez uciekania się do iteracji. To postępowanie może być wykorzystane dla dowolnych, liniowo sformułowanych, lokalnych związków fizycznych. W szczególności można w ten sposób zamodelować wzmocnienie i osłabienie materiału, kruche pęknięcie oraz osłabienie powiązane z utratą stateczności przy ściskaniu. Można również analizować odpowiedź konstrukcji na obciążenie cykliczne i związane z tym postępujące zniszczenie.

W przypadku konieczności uwzględnienia nieliniowości geometrycznych proponowane podejście musi być połączone z modyfikowaną w procesie narastających deformacji, globalną macierzą sztywności ustroju.

Wspomniana już metoda deformacji wstępnych (Argyris i inni [3], Lee, Arora [73]), odwołująca się także do dystorsji plastycznych, posługuje się wprawdzie zmodyfikowanym związkiem konstytutywnym (1.19), ale nie wprowadza pojęcia macierzy wpływu D , która ustala kluczowe dla MDW relacje lokalno-globalne (por. (1.25)). Metoda deformacji wstępnych musi zatem prowadzić do iteracyjnego rozwiązywania problemu. Zachowanie sprężysto-plastyczne w danym elemencie modeluje się przez lokalne narzucenie w nim wstępnego odkształcenia, co prowadzi do zaburzenia globalnych warunków równowagi. Aby spełnić te warunki, koryguje się wstępne odkształcenie, czego konsekwencją jest z kolei odejście od warunku plastyczności. Zatem widzimy, że w metodzie odkształceń wstępnych dochodzimy do rozwiązania w sposób iteracyjny, podczas gdy MDW nie wymaga iteracji.

Zbliżone podejście do analizy układów nieliniowych prezentowali Atrek [6], Abu Kassim, Topping [1]. Formalne podobieństwo do związków metody dystorsji wirtualnych znajdziemy też w pracy Maiera [76]. Wprowadza on mianowicie macierz $Z_{ij} = A_i I_j E_i (D_{ij} - \delta_{ij})$ i wykorzystuje

ją w analizie sprężysto-plastycznej, sprowadzonej jednak do zagadnień programowania kwadratowego, nie symulując redystrybucji sił w ustroju uplastycznionym poprzez rozwiązanie układu równań liniowych (1.27).

1.5 Cel pracy

Celem pracy jest:

- 1) stworzenie efektywnego narzędzia numerycznego w postaci algorytmów oraz oprogramowania do analizy wrażliwości i optymalnego projektowania kratownic o cechach fizycznie nieliniowych, bazując na metodzie dystorsji wirtualnych.
- 2) weryfikacja oprogramowania na przykładach optymalizacji topologii ustroju
- 3) wykorzystanie MDW oraz rozwiązań problemu optymalizacji topologii ustroju do sformułowania i rozwiązania zagadnienia optymalnego projektowania konstrukcji adaptowalnych, przystosowujących się do ekstremalnych obciążeń

Blok analizy wrażliwości zostanie w przyszłości zaimplementowany w istniejącym programie analizy konstrukcji ramowych RASOS, który aktualnie stosuje MDW do analizy postępującego zniszczenia oraz niezawodności wież wiertniczych.

Wykorzystując formalną zbieżność opisu przemodelowywania ustrojów liniowo sprężystych oraz opisu cech nieliniowości fizycznych, a także biorąc pod uwagę możliwość analizy wrażliwości konstrukcji, opartej na własnościach macierzy wpływu (której utworzenie stanowi główny koszt numeryczny MDW), opracowano spójne i efektywne numerycznie podejście do przeprojektowywania konstrukcji sprężysto-plastycznych gradientowymi metodami optymalizacji.

Rozwiązaniami uzyskanymi w procesie sprężysto-plastycznego przemodelowywania konstrukcji posłużono się przy opracowaniu koncepcji projektowania ustrojów adaptowalnych na ekstremalne obciążenie.

1.6 Zakres pracy

Praca została podzielona na trzy części:

- 1) W części pierwszej (rozdział 2) opracowano algorytmy analizy wrażliwości dla kratowych ustrojów liniowo sprężystych oraz dla ustrojów sprężysto-plastycznych z ewentualnym wzmocnieniem lub osłabieniem i dowolnie narastającą historią obciążenia. Występuje tu podobieństwo do podejścia zaproponowanego w pracach Demsa, Mroza [25], [26] oraz Lee, Arory [73]. Uzyskane formuły analityczne pozwalają na liczenie gradientów niemalże bez dodatkowych kosztów numerycznych w trakcie procesu optymalnego przeprojektowywania ustroju. Wykorzystują one jedynie podstawową macierz wpływu MDW oraz aktualne stany deformacji i dystorsji wirtualnych. W konsekwencji analiza wrażliwości jest efektywniejsza numerycznie niż podejście

dyskretno-analityczne (zarówno klasyczne jak i oparte na koncepcji wstępnych odkształceń). Jej atrakcyjność polega na braku konieczności aktualizowania macierzy sztywności po każdym przyroście plastycznym, iterowania oraz akumulowania wrażliwości w trakcie obciążania. Powstały kod numeryczny nazwano VDM/S.

- 2) W części drugiej (rozdział 3) przetestowano kilka metod optymalnego przeprojektowywania konstrukcji kratowych (optymalizacja topologii oraz wymiarowanie bez modyfikacji położenia węzłów) o cechach liniowo sprężystych i sprężysto-plastycznych, poddanych jednemu lub wielu stanom obciążeń. Stosując podejście ustroju wyjściowego (*ground structure*), zaproponowano kilka algorytmów gradientowych programowania nieliniowego (wykorzystując VDM/S) z pewnymi procedurami heurystycznymi, pozwalającymi na przyspieszenie zbieżności procesu przemodelowywania oraz na kontrolowanie jego jakości. Niektóre algorytmy ułatwiają eliminację nieefektywnych elementów, zaś inne doprowadzają do pełnego wyłączenia ustroju (*fully stressed design*). Zaproponowano również iteracyjną metodę programowania liniowego, pozwalającą na kontrolowanie geometrycznej zgodności oraz osobliwości rozwiązań przejściowych (por. Kirsch, Taye [62]). Pokazano, że uzyskiwane rozwiązania pokrywają się z wynikami opublikowanymi przez innych autorów (por. Sankaranarayanan i inni [103], Bendsoe i inni [15]). Zademonstrowano też, że kontrolowanie procesu przemodelowywania konstrukcji (dzięki odpowiedniemu dobraniu parametrów algorytmu) umożliwi w pewnym zakresie wpływ na jakość rozwiązania, a przez to na wybór rozwiązania bliskiego optimum, lecz o znacznie prostszej topologii, co stanowi istotny aspekt projektowania. Zaletą opracowanego oprogramowania jest fakt, że można je łączyć z innymi kodami analizy konstrukcji, nie mając dostępu do ich wersji źródłowej. Zastosowanie opracowanego w pierwszej części pracy aparatu analizy wrażliwości do rozwiązania problemu optymalnego przeprojektowywania jest w zasadzie tylko przykładem, mającym na celu weryfikację efektywności MDW w stosunku do innych metod analizy wrażliwości. Jakkolwiek rozwiązanie problemu optymalnego przeprojektowywania w zakresie sprężysto-plastycznym stanowi podstawę do rozważań podjętych w trzeciej części pracy, dotyczących projektowania konstrukcji adaptowalnych.
- 3) W części trzeciej (rozdział 4) podjęto problem optymalnego projektowania konstrukcji adaptowalnych na maksymalną nośność, przy uwzględnieniu ograniczeń narzuconych na lokalne wyłączenia. Zagadnienie to odpowiada rzeczywistej sytuacji (np. w przypadku wież wiertniczych), gdy konstrukcja może być narażona na obciążenie ekstremalne, przekraczające dopuszczalny zakres obciążeń użytkowych. W celu uniknięcia nadmiernego i kosztownego przesztynienia konstrukcji można ją wyposażyć w specjalne bezpieczniki (*structural fuses*), poddające się w wypadku lokalnego przeciążenia. Pracę tych bezpieczników można modelować numerycznie poprzez wygenerowanie dystorsji, analogicznych do dystorsji plastycznych. Konstrukcja adaptowalna (z prawidłowo rozmieszczonymi bezpiecznikami) zachowuje się podobnie do ustroju sprężysto-plastycznego, przystosowując się do zmiennych obciążeń (*shake-down*). W przypadku wież wiertniczych oznaczałoby to np. projektowanie na tzw. falę dziesięcioletnią z uwzględnieniem bezpieczników, zamiast projektowania na falę stuletnią, prowadzącego do zwiększenia objętości o 20%. Sformułowany w ten sposób

problem optymalnego projektowania konstrukcji adaptowalnych prowadzi do zadania optymalnego przeprojektowywania ustrojów sprężysto-plastycznych, poddanych wielu stanom obciążeń (o czym traktuje druga część pracy), pod warunkiem, że przyzwolimy na instalowanie bezpieczników we wszystkich elementach strefy plastycznej. Pokazano na przykładzie, że objętość optymalnej konstrukcji adaptowalnej w stosunku do objętości optymalnej konstrukcji sprężystej (bez bezpieczników) maleje nieznacznie (do 5%). Istotny jest jednak fakt zwiększenia strefy dysypacji energii z 50% do 70% objętości konstrukcji (por. Holnicki-Szulc, Lopez-Almansa [57]). To stanowi zaś o możliwości bezpiecznego przejęcia przez ustrój obciążenia ekstremalnego. W trzeciej części pracy problem optymalnego projektowania ustrojów adaptowalnych sprowadzono do znalezienia optymalnego rozmieszczenia dysypatorów w konstrukcji o danej geometrii, poddanej różnym stanom obciążeń oraz do określenia optymalnych progów naprężeń w dysypatorach. Rozważania te mogą być punktem wyjścia do projektowania (na drodze analizy dynamicznej) ustrojów o podwyższonej zdolności absorpcji energii zderzeń.

W pracy ograniczono rozważania do modelu kratownicy dla zagadnień geometrycznie liniowych, choć proponowane podejście może być uogólnione na inne typy konstrukcji, z uwzględnieniem skończonych przemieszczeń. Pominięto również problem utraty stateczności przy ściskaniu. Większość przykładów zamieszczonych w pracy przedstawia jedynie wartość akademicką, jako że przyjęto do obliczeń dane hipotetycznych materiałów.

ROZDZIAŁ 2 :

Analiza wrażliwości metodą dystorsji wirtualnych

2.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale sformułowany będzie problem obliczania wrażliwości konstrukcji metodą dystorsji wirtualnych, w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym. Na podstawie porównania konstrukcji modelowanej dystorsjami i konstrukcji zmodyfikowanej, zostaną wyprowadzone wzory na wrażliwość pola odkształceń, naprężeń i przemieszczeń względem wybranego parametru projektowego, którym będzie przykładowo pole przekroju poprzecznego pręta. W zakresie plastycznym analogiczna analiza będzie poszerzona o wzory na wrażliwość względem granicy plastyczności oraz parametru wzmocnienia. Omówiony zostanie problem nieliniowo narastających obciążeń wraz z przypadkiem odciążenia. Zamieszczone przykłady numeryczne ilustrują zgodność uzyskanych wyników z metodą różnic skończonych.

2.2 Wrażliwość pól odkształceń i naprężeń w zakresie sprężystym

W konstrukcji kratowej, poddanej działaniu obciążenia zewnętrznego i narzuconego pola dystorsji ε^p , stan odkształceń i naprężeń, w odniesieniu do początkowego przekroju A'_i , wyraża się następująco:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= E_i(\varepsilon_i - \varepsilon_i^p) = \sigma_i^L + \sigma_i^R = E_i\left(\varepsilon_i^L + \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij})\varepsilon_j^p\right) \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_i^L + \varepsilon_i^R = \varepsilon_i^L + \sum_j D_{ij}\varepsilon_j^p\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie D_{ij} jest tzw. macierzą wpływu, mówiącą jak odkształca się i -ty element konstrukcji, poddanej działaniu jednostkowej dystorsji $\varepsilon_j^p=1$ w elemencie j . Gradienty pola odkształceń i naprężeń względem dystorsji wirtualnych ε_j^p , przedstawiają wzory:

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_j^o} = E_i (D_y - \delta_y)$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{d\varepsilon_j^o} = D_y$$
(2.2)

Dystorsje wirtualne służą do modelowania modyfikacji rozmaitych zmiennych projektowych np. pola przekroju poprzecznego A_i , modułu Younga E_i , długości elementu kratownicy l_i itp. Mając na uwadze wspomniany już fakt, że zarówno siły jak i deformacje konstrukcji modelowanej dystorsjami i konstrukcji zmodyfikowanej są jednakowe, otrzymujemy następujące związki:

$$P_i = \bar{E}_i A_i (\varepsilon_i - \varepsilon_i^o)$$

$$P_i = E_i A_i \varepsilon_i$$
(2.3)

gdzie wielkości oznaczone przez $\bar{()}$ odnoszą się do początkowych, niezmodyfikowanych wartości zmiennych projektowych. Podstawiając deformacje ze wzoru (2.1b) do wzoru (2.3), dostajemy formułę na zmianę przekroju poprzecznego, wyrażoną przez dystorsje wirtualne:

$$A_i \left(\varepsilon_i^l + \sum_j D_y \varepsilon_j^o \right) = A_i \left(\varepsilon_i^l + \sum_j (D_y - \delta_y) \varepsilon_j^o \right)$$
(2.4)

Różniczkując obustronnie względem A_i , otrzymujemy:

$$\varepsilon_i^l + \sum_j D_y \varepsilon_j^o + A_i \sum_j D_y \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i} = A_i \sum_j (D_y - \delta_y) \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i}$$
(2.5)

Biorąc pod uwagę fakt, iż:

$$\frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i} \equiv \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i} \delta_y$$
(2.6)

co oznacza, że zmiana przekroju elementu i jest modelowana przez dystorsję wygenerowaną tylko w tym elemencie, możemy uprościć wzór (2.5) do postaci:

$$A_i D_n \frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial A_i} - A_i (D_n - 1) \frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial A_i} = - \left(\varepsilon_i^l + \sum_j D_y \varepsilon_j^o \right)$$
(2.7)

Z (2.7) wyznaczmy pochodne ε^o , względem A_i :

$$\frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial A_i} = - \frac{\varepsilon_i^l + \sum_j D_y \varepsilon_j^o}{(A_i - A_i^l) D_u + A_i^l} = - \frac{\varepsilon_i}{(A_i - A_i^l) D_u + A_i^l} \quad (2.8)$$

Ograniczając się do przypadku, gdy przekroje poprzeczne konstrukcji nie ulegają zmianie tj. $A_i = A_i^l$, oraz $\varepsilon_j^o = 0$, wzór (2.8) prowadzi do następującego, prostego wyrażenia na pochodne:

$$\frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial A_i} = - \frac{\varepsilon_i}{A_i} \quad (2.9)$$

Mając (2.9) i wykorzystując (2.2) oraz (2.6), możemy bez problemu wyznaczyć wrażliwości pól odkształceń i naprężeń względem pola przekroju poprzecznego:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i^l}{dA_j} &= \sum_k \frac{\partial \sigma_i^l}{\partial \varepsilon_k^o} \frac{\partial \varepsilon_k^o}{\partial A_j} \delta_{kj} = \frac{\partial \sigma_i^l}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = - \frac{E_i (D_y - \delta_y) \varepsilon_j}{A_j^l} \\ \frac{d\varepsilon_i}{dA_j} &= \sum_k \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_k^o} \frac{\partial \varepsilon_k^o}{\partial A_j} \delta_{kj} = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = - \frac{D_y \varepsilon_j}{A_j^l} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Analogicznie można policzyć wrażliwość względem innych zmiennych projektowych np. E_i . Zauważmy, że naprężenia (2.1a) i odpowiadające im pochodne (2.10a) odnoszą się do początkowych przekrojów A_j^l . Porównując siły we wzorze (2.3) można wyprowadzić następującą zależność na modyfikację przekroju poprzecznego, wyrażoną przez dystorsje wirtualne:

$$\mu_i = \frac{A_i}{A_i^l} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^o}{\varepsilon_i} \quad (2.11)$$

Współczynnik ten zostanie użyty do przeskalowania naprężeń we wzorze (2.1a) tak, aby odpowiadały one zmodyfikowanym przekrojom poprzecznym A_i . Aby to uzyskać, dzielimy (2.1a) przez μ_i , otrzymując:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_i^l}{\mu_i} = E_i (\varepsilon_i - \varepsilon_i^o) \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_i^o} = E_i \varepsilon_i = E_i \left(\varepsilon_i^l + \sum_j D_y \varepsilon_j^o \right) \quad (2.12)$$

co prowadzi do następującej zmiany we wzorze (2.2a):

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i^o} = E_i D_y \quad (2.13)$$

Ostatecznie odpowiednia wrażliwość przyjmuje postać:

$$\frac{d\sigma_i}{dA_j} = - \frac{E_i D_{ij} \varepsilon_j}{A_j} \quad (2.14)$$

Naprężenia σ_i w powyższych formułach (2.12)-(2.14) odnoszą się do zmodyfikowanych przekrojów poprzecznych A_i , podczas gdy naprężenia σ'_i we wzorze (2.10a) odnoszą się do początkowych przekrojów A'_i .

Jak widać ze wzorów (2.10), pochodne pól naprężeń i odkształceń względem przekrojów poprzecznych można obliczyć na podstawie znajomości zmagazynowanej uprzednio macierzy D oraz aktualnego stanu deformacji ε . Z numerycznego punktu widzenia koszt obliczeń jest porównywalny z bezpośrednią metodą liczenia wrażliwości (tzw. *behaviour space approach*). Dla każdej zmiennej projektowej należy wyznaczyć tzw. wektor wpływu (kolumna macierzy wpływu), znajdując odpowiedź konstrukcji na obciążenie wybranego pręta dwiema samorównoważnymi siłami, wywołującymi jego jednostkową deformację. Ponieważ macierz wpływu jest w metodzie dystorsji wirtualnych wyznaczana na początku obliczeń numerycznych (do celów analizy zniszczenia, przeprojektowywania lub niezawodności), zatem koszt analizy wrażliwości można określić jako znikomy. Dlatego też, mając zachowaną w pamięci macierz wpływu D , wrażliwość pól odkształceń i naprężeń względem przekrojów poprzecznych można policzyć bez trudu. Pokażemy w następnym rozdziale, że analogicznie otrzymuje się wrażliwości dla konstrukcji w zakresie plastycznym, gdzie uplastycznienie modeluje się również za pomocą dystorsji. Koszty uzyskania wrażliwości w zakresie sprężystym i plastycznym są porównywalne. Zauważmy, że analiza wrażliwości w oparciu o MDW umożliwia policzenie gradientów (por. (2.8), gdzie A'_i oznacza początkowe pole przekroju poprzecznego) nawet jeśli zmienna projektowa A_i osiągnie wartość zero w procesie przeprojektowywania konstrukcji. MRS stwarza w takich wypadkach problemy obliczeniowe, gdyż gradient rośnie wtedy do nieskończoności.

2.3 Wrażliwość pól odkształceń i naprężeń w zakresie sprężysto-plastycznym

Zajmiemy się teraz analizą wrażliwości konstrukcji przy jej postępującym zniszczeniu pod wpływem obciążenia zewnętrznego. Okazuje się, że w tym przypadku korzystnie jest superponować dwa stany dystorsji: β^p_i modelujące nieliniowości fizyczne oraz ε^p_i modelujące modyfikacje zmiennych projektowych (np. A_i). Stan odkształceń i naprężeń, w odniesieniu do początkowych przekrojów A'_i , można opisać wzorami analogicznymi do (2.1):

$$\begin{aligned} \sigma'_i &= E_i (\varepsilon_i - \varepsilon_i^o - \beta_i^o) = E_i \left(\varepsilon_i^L + \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij}) \varepsilon_j^o + \sum_k (D_{ik} - \delta_{ik}) \beta_k^o \right) \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_i^L + \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o + \sum_k D_{ik} \beta_k^o \end{aligned} \quad (2.15)$$

Odpowiadające im gradienty przybierają postać:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_j'}{d\varepsilon_j'} &= E_j(D_y - \delta_y) & \frac{d\sigma_k'}{d\beta_k'} &= E_k(D_k - \delta_k) \\ \frac{d\varepsilon_j}{d\varepsilon_j^o} &= D_y & \frac{d\varepsilon_k}{d\beta_k^o} &= D_k \end{aligned} \quad (2.16)$$

Indeksy j oraz k przebiegają w powyższych wzorach odpowiednio elementy zmodyfikowane i uplastycznione. Skorzystamy następnie ze wzorów wyrażających siły w konstrukcji modelowanej dystorsjami i konstrukcji zmodyfikowanej (gdzie przekroje poprzeczne zmieniono z A' , na A_i), pamiętając, że poruszamy się w obszarze plastycznym (por. (2.3)):

$$\begin{aligned} P_i &= E_i A_i' (\varepsilon_i - \varepsilon_i^o - \beta_i^o) \\ P_i &= E_i A_i (\varepsilon_i - \beta_i^o) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Zwróćmy uwagę, że elementy wektorów ε_i^o oraz β_i^o mają niezerowe wartości tylko dla elementów zmodyfikowanych i uplastycznionych, odpowiednio. Przyrównując obie siły, wyprowadzimy formułę analogiczną do (2.4):

$$A_i \left(\varepsilon_i^L + \sum_j D_y \varepsilon_j^o + \sum_k (D_k - \delta_k) \beta_k^o \right) = A_i' \left(\varepsilon_i^L + \sum_j (D_y - \delta_y) \varepsilon_j^o + \sum_k (D_k - \delta_k) \beta_k^o \right) \quad (2.18)$$

Różniczkując obustronnie względem A_i , otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^L + \sum_j D_y \varepsilon_j^o + \sum_k (D_k - \delta_k) \beta_k^o + A_i \left(\sum_j D_y \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i} + \sum_k (D_k - \delta_k) \frac{\partial \beta_k^o}{\partial A_i} \right) = \\ = A_i' \left(\sum_j (D_y - \delta_y) \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i} + \sum_k (D_k - \delta_k) \frac{\partial \beta_k^o}{\partial A_i} \right) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Wziąwszy pod uwagę fakt (por. (2.6)), że:

$$\frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i} \equiv \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_i} \delta_y \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \beta_k^o}{\partial A_i} \equiv \frac{\partial \beta_k^o}{\partial A_i} \delta_k \quad (2.20)$$

uproszczymy (2.19) do:

$$\left((A_i - A_i') D_y + A_i' \right) \frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial A_i} + (A_i - A_i') (D_y - 1) \frac{\partial \beta_i^o}{\partial A_i} = - \left(\varepsilon_i^L + \sum_j D_y \varepsilon_j^o + \sum_k (D_k - \delta_k) \beta_k^o \right) \quad (2.21)$$

Ograniczając rozważania do przypadku, gdy przekroje poprzeczne konstrukcji nie ulegają zmianie tj. $A_i \equiv A'_i$ oraz $\varepsilon_j^o = 0$, wzór (2.21) prowadzi do następującego, prostego wyrażenia na pochodne:

$$\frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial A_i} = - \frac{\varepsilon_i^L + \sum_k (D_{ik} - \delta_{ik}) \beta_k^o}{A_i} = - \frac{\varepsilon_i - \beta_i^o}{A_i} \quad (2.22)$$

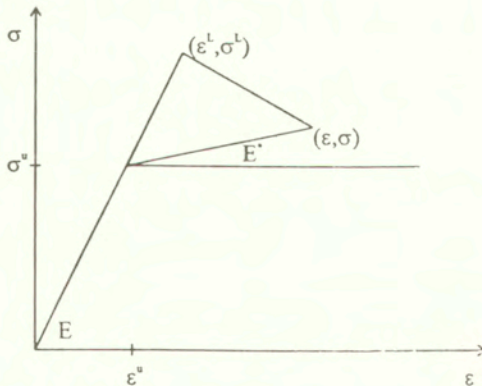
Przypomnijmy, że wektor β^o ma niezerowe wartości tylko dla elementów uplastycznionych.

Pochodne $\partial \beta^o / \partial A_i$ można wyznaczyć z warunku plastyczności (patrz Rys. 2.1), napisanego dla konstrukcji zmodyfikowanej (o przekrojach poprzecznych A_i):

$$\sigma_i - \sigma^u = E_i^* (\varepsilon_i - \varepsilon^u) \quad (2.23)$$

Pamiętajmy, że w konstrukcji zmodyfikowanej musimy odnieść naprężenia do aktualnych przekrojów poprzecznych A_i , czego konsekwencją są wzory (por. (2.15)):

$$\begin{aligned} \sigma_i &= E_i (\varepsilon_i - \beta_i^o) = E_i \left(\varepsilon_i^L + \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o + \sum_k (D_{ik} - \delta_{ik}) \beta_k^o \right) \\ \varepsilon_i &= \varepsilon_i^L + \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o + \sum_k D_{ik} \beta_k^o \end{aligned} \quad (2.24)$$



Rys. 2.1 Warunek plastyczności dla konstrukcji zmodyfikowanej

Podstawiając (2.24) do (2.23) i wprowadzając bezwymiarowy współczynnik $\gamma_i = E_i^* / E_i$, mamy:

$$\sum_k B_{ik} \beta_k^o + \sum_j (1 - \gamma_j) D_{ij} \varepsilon_j^o = -(1 - \gamma_i) (\varepsilon_i^l - \varepsilon^u) \quad (2.25)$$

gdzie $B_{ik} = (1 - \gamma_i) D_{ik} - \delta_{ik}$

Indeksy l oraz k przebiegają elementy uplastycznione, natomiast indeks j przebiega elementy zmodyfikowane. Macierz B nosi nazwę macierzy symulacji w analizie zniszczenia. Interpretacja mechaniczna metody dystorsji wirtualnych narzuca warunek, aby wszystkie diagonalne elementy macierzy B były niedodatnie (porównaj aneks C). Osobliwość macierzy B traktuje się w MDW jako całkowite zniszczenie konstrukcji. Należy w konsekwencji rozpatrzyć następujące ograniczenia, nałożone na parametr osłabienia:

$$\gamma_k \geq -\frac{1 - D_{kk}}{D_{kk}} \quad (2.26)$$

Warunek ten musi być spełniony dla wszystkich elementów uplastycznionych. Jeśli któryś z elementów nie spełnia powyższego ograniczenia, należy policzyć dla niego wartość krytyczną $\gamma_k = -(1 - D_{kk})/D_{kk}$ i uwzględnić ją w algorytmie. Różniczkując obustronnie (2.25) względem ε_j^o , otrzymamy układ l_p równań:

$$\sum_k B_{ik} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} = -(1 - \gamma_i) D_{ij} \quad (2.27)$$

gdzie l_p oznacza liczbę elementów uplastycznionych ($l, k=1, \dots, l_p$), z którego wyznaczymy pochodne $\partial \beta_k^o / \partial \varepsilon_j^o$. Mając (2.22) oraz układ (2.27) rozwiązany dla ustalonego j , możemy policzyć wrażliwość konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym, według wzoru:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i}{dA_j} &= \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} + \sum_k \frac{\partial \sigma_i}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -E_i (D_{ij} - \delta_{ij}) \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} - \sum_k E_i (D_{ik} - \delta_{ik}) \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \\ \frac{d\varepsilon_i}{dA_j} &= \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} + \sum_k \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -D_{ij} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} - \sum_k D_{ik} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \end{aligned} \quad (2.28)$$

gdzie (*) oznacza, że bierzemy pod uwagę tylko składniki odnoszące się do elementów uplastycznionych. Aby policzyć wrażliwości (2.28), należy rozwiązać układ l_p równań (2.27) dla każdej wybranej zmiennej projektowej A_j .

Jeśli chcemy odnieść naprężenia do aktualnych przekrojów A_j , a nie do początkowych A_j' jak w (2.28), musimy zastosować następujący wzór (por. (2.14)):

$$\frac{d\sigma_i}{dA_j} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} + \sum_k \frac{\partial \sigma_i}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -E_i D_{ij} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} - \sum_k E_i (D_{ik} - \delta_{ik}) \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \quad (2.29)$$

2.4 Inne wrażliwości

W tym rozdziale będzie mowa o innych wrażliwościach konstrukcji, bardzo przydatnych przy projektowaniu.

2.4.1 Wrażliwości pola przemieszczeń

Najpierw zajmiemy się wrażliwościami pola przemieszczeń na jakiś parametr projektowy. Niech będzie nim pole przekroju poprzecznego pręta A_i , tak jak w poprzednich rozdziałach. Najprostszą metodą uzyskania tych wrażliwości jest wyrażenie przemieszczeń poprzez dystorsje wirtualne, podobnie do (2.1b). Wtedy, w zakresie sprężystym, mamy:

$$\begin{aligned} u_{xi} &= u_{xi}^L + u_{xi}^R = u_{xi}^L + \sum_j D_{ij}^{xx} \varepsilon_j^o \\ u_{yi} &= u_{yi}^L + u_{yi}^R = u_{yi}^L + \sum_j D_{ij}^{yy} \varepsilon_j^o \\ u_{zi} &= u_{zi}^L + u_{zi}^R = u_{zi}^L + \sum_j D_{ij}^{zz} \varepsilon_j^o \end{aligned} \quad (2.30)$$

gdzie macierze D_{ij}^{xx} , D_{ij}^{yy} , D_{ij}^{zz} zawierają przemieszczenia (odpowiednio wzdłuż osi x , y , z) w węźle i wywołane przez jednostkowe dystorsje wirtualne w pręcie j . Zauważmy, że w tym przypadku indeks i przebiega liczbę węzłów konstrukcji, natomiast indeks j przebiega liczbę elementów konstrukcji. Wykorzystując łańcuchową regułę różniczkowania, otrzymamy wrażliwości pola przemieszczeń na zmiany przekrojów poprzecznych, analogicznie do (2.10b):

$$\begin{aligned} \frac{du_{xi}}{dA_j} &= \frac{\partial u_{xi}}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = - \frac{D_{ij}^{xx} \varepsilon_j}{A_j} \\ \frac{du_{yi}}{dA_j} &= \frac{\partial u_{yi}}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = - \frac{D_{ij}^{yy} \varepsilon_j}{A_j} \\ \frac{du_{zi}}{dA_j} &= \frac{\partial u_{zi}}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = - \frac{D_{ij}^{zz} \varepsilon_j}{A_j} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Jeśli chcemy znać przemieszczenie wypadkowe, stosujemy wzór:

$$u_i = \sqrt{(u_{xi})^2 + (u_{yi})^2 + (u_{zi})^2} \quad (2.32)$$

Wrażliwość przemieszczenia wypadkowego na zmiany przekrojów ma postać:

$$\frac{du_i}{dA_j} = \frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -\frac{u_{xi} D_y^{xz} + u_{yi} D_y^{yy} + u_{zi} D_y^{yz}}{\sqrt{(u_{xi})^2 + (u_{yi})^2 + (u_{zi})^2}} \frac{\varepsilon_j}{A_j} \quad (2.33)$$

W zakresie sprężysto-plastycznym można wyprowadzić zależności analogiczne do (2.15b):

$$\begin{aligned} u_{xi} &= u_{xi}^L + u_{xi}^R = u_{xi}^L + \sum_j D_y^{xz} \varepsilon_j^o + \sum_k D_k^{xz} \beta_k^o \\ u_{yi} &= u_{yi}^L + u_{yi}^R = u_{yi}^L + \sum_j D_y^{yy} \varepsilon_j^o + \sum_k D_k^{yy} \beta_k^o \\ u_{zi} &= u_{zi}^L + u_{zi}^R = u_{zi}^L + \sum_j D_y^{yz} \varepsilon_j^o + \sum_k D_k^{yz} \beta_k^o \end{aligned} \quad (2.34)$$

gdzie indeksy j oraz k przebiegają elementy zmodyfikowane i uplastycznione, odpowiednio. Powtarzając podobne rozumowanie, jak przy wyprowadzeniu (2.28b), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{du_{xi}}{dA_j} &= \frac{\partial u_{xi}}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} + \sum_k \frac{\partial u_{xi}}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -D_y^{xz} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} - \sum_k D_k^{xz} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \\ \frac{du_{yi}}{dA_j} &= \frac{\partial u_{yi}}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} + \sum_k \frac{\partial u_{yi}}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -D_y^{yy} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} - \sum_k D_k^{yy} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \\ \frac{du_{zi}}{dA_j} &= \frac{\partial u_{zi}}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} + \sum_k \frac{\partial u_{zi}}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -D_y^{yz} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} - \sum_k D_k^{yz} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \end{aligned} \quad (2.35)$$

gdzie \circ^* oznacza, że brane są pod uwagę tylko składniki wektora, odpowiadające elementom uplastycznionym. Wrażliwość wypadkowego przemieszczenia w węzle i na zmianę przekroju poprzecznego elementu j wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dA_j} &= \frac{\partial u_i}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} + \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \frac{\partial \varepsilon_j^o}{\partial A_j} = -D_y^{ij} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} - \sum_k D_k^{ij} \frac{\varepsilon_j - \beta_j^{o*}}{A_j} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \varepsilon_j^o} \\ \text{gdzie } D_y^{ij} &= \frac{u_{xi} D_y^{xz} + u_{yi} D_y^{yy} + u_{zi} D_y^{yz}}{\sqrt{(u_{xi})^2 + (u_{yi})^2 + (u_{zi})^2}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Jak widać wyznaczenie wrażliwości pola przemieszczeń na modyfikację przekrojów poprzecznych przebiega analogicznie jak w przypadku pola odkształceń. Jediną niedogodnością takiego podejścia jest fakt, iż musimy policzyć i zapamiętać trzy (lub dwie dla przypadku płaskiego) przemieszczeniowo-odkształceniowe macierze wpływu $D^{xz}_y, D^{yy}_y, D^{yz}_y$, o wymiarach $i \times j$ każda, gdzie i oznacza liczbę węzłów, a j liczbę elementów konstrukcji. Ponieważ zazwyczaj i jest mniejsze od j , więc każde z macierzy przemieszczeniowo-odkształceniowych zajmuje mniej miejsca w pamięci od macierzy odkształceniowo-odkształceniowej D .

2.4.2 Granica plastyczności jako parametr wrażliwości

Rozpatrzmy teraz granicę plastyczności jako zmienną projektową, względem której chcemy liczyć wrażliwość konstrukcji. Taka analiza jest wykonalna tylko w przypadku powstania w konstrukcji strefy plastycznej. Aby policzyć wrażliwość na zmianę granicy plastyczności w jakimś uplastycznionym elemencie, musimy najpierw określić wpływ tego elementu na inne elementy strefy plastycznej. Musimy zatem znać pochodne dystorsji plastycznych β_k^p względem wybranej granicy plastyczności σ_p^u , gdzie indeksy k oraz p przebiegają elementy strefy plastycznej. Aby je uzyskać, różniczkujemy (2.25) względem σ_p^u , pamiętając, że granica plastyczności nie zależy od dystorsji wirtualnych ϵ_j^p . Otrzymujemy więc:

$$\sum_k B_{ik} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma_p^u} = \frac{1 - \gamma_l}{E_l} \delta_{lp} \quad (2.37)$$

Wyznaczenie powyższych pochodnych wymaga rozwiązania p układów równań, każdy o wymiarach $k \times l$, gdzie wszystkie indeksy przebiegają elementy strefy uplastycznionej. Znając te rozwiązania, możemy łatwo wyznaczyć wrażliwości pól odkształceń i naprężeń na modyfikację przekrojów poprzecznych. Są one postaci:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i}{d\sigma_p^u} &= \frac{d\sigma_i}{d\sigma_p^u} = \sum_k \frac{\partial \sigma_i}{\partial \beta_k^p} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma_p^u} = \sum_k E_l (D_{ik} - \delta_{ik}) \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma_p^u} \\ \frac{d\epsilon_i}{d\sigma_p^u} &= \sum_k \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \beta_k^p} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma_p^u} = \sum_k D_{ik} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma_p^u} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Można tutaj wyróżnić specjalny przypadek, kiedy wszystkie elementy konstrukcji mają tę samą granicę plastyczności σ^u . Wtedy interesuje nas, jak wrażliwa jest konstrukcja na zmianę granicy plastyczności w całej strefie płynięcia, w tym samym czasie. Prowadzi to do następującej modyfikacji wzoru (2.37):

$$\sum_k B_{ik} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma^u} = \frac{1 - \gamma_l}{E_l} \quad (2.39)$$

Po znalezieniu rozwiązania układu l równań (2.39), przystępujemy do wyprowadzenia formuły na wrażliwość, analogicznej do (2.38):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i}{d\sigma^u} &= \frac{d\sigma_i}{d\sigma^u} = \sum_k \frac{\partial \sigma_i}{\partial \beta_k^p} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma^u} = \sum_k E_l (D_{ik} - \delta_{ik}) \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma^u} \\ \frac{d\epsilon_i}{d\sigma^u} &= \sum_k \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \beta_k^p} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma^u} = \sum_k D_{ik} \frac{\partial \beta_k^p}{\partial \sigma^u} \end{aligned} \quad (2.40)$$

2.4.3 Współczynnik wzmocnienia jako parametr wrażliwości

Rozwijając myśl z rozdziału 2.4.2 przyjrzyjmy się liczeniu wrażliwości na współczynnik wzmocnienia, oznaczony uprzednio przez γ_i . Tym razem różniczkujemy zależność (2.25) względem γ_p , pamiętając, że macierz symulacji B_{ik} , która pojawia się w tym wzorze, również zależy od współczynnika wzmocnienia. Po kilku przekształceniach otrzymujemy:

$$\sum_k B_{ik} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \gamma_p} = \left(\varepsilon_i^L - \varepsilon_i^v + \sum_k D_{ik} \beta_k^o \right) \delta_{ip} \quad (2.41)$$

Wyznaczywszy pochodne dystorsji plastycznych względem współczynnika wzmocnienia, możemy określić żądaną wrażliwość pól odkształceń i naprężeń na γ_p :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_i}{d\gamma_p} &= \frac{d\sigma_i}{d\gamma_p} = \sum_k \frac{\partial \sigma_i}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \gamma_p} = \sum_k E_i (D_{ik} - \delta_{ik}) \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \gamma_p} \\ \frac{d\varepsilon_i}{d\gamma_p} &= \sum_k \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \beta_k^o} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \gamma_p} = \sum_k D_{ik} \frac{\partial \beta_k^o}{\partial \gamma_p} \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.5 Przykłady

2.5.1 Dwuelementowa kratownica sprężysta

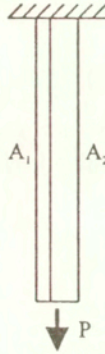
Aby zademonstrować jak liczy się wrażliwość w oparciu o MDW, rozważmy najpierw prosty przykład dwuelementowej kratownicy sprężystej, pokazanej na Rys. 2.2. Zakładając przekroje poprzeczne elementów jako A_1 i A_2 , można z łatwością wyznaczyć stan deformacji i sił wewnętrznych w konstrukcji:

$$P_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} P, \quad P_2 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} P \quad (2.43)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{P}{E(A_1 + A_2)} \quad (2.44)$$

Załóżmy, że w elemencie nr 1 dokonujemy modyfikacji pola przekroju poprzecznego o ΔA_1 . Odpowiadająca temu deformacja wyraża się wzorem:

$$\varepsilon_1 + \Delta \varepsilon_1 = \frac{P}{E(A_1 + A_2 + \Delta A_1)} \quad (2.45)$$



Rys. 2.2 Kratownica dwuelementowa

Względny przyrost deformacji wynosi:

$$\frac{\Delta \varepsilon_1}{\varepsilon_1} = - \frac{\Delta A_1}{A_1 + A_2 + \Delta A_1} \quad (2.46)$$

Z (2.46) bezpośrednio wynika:

$$\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta A_1} = - \frac{\varepsilon_1}{A_1 + A_2 + \Delta A_1} \quad (2.47)$$

lub po przekształceniu:

$$\frac{\Delta \varepsilon_1}{\Delta A_1} = - \frac{A_1}{A_1 + A_2 + \Delta A_1} \frac{\varepsilon_1}{A_1} \quad (2.48)$$

Wyznaczenie macierzy wpływu D dla tej konstrukcji prowadzi do:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{A_1 + A_2} & \frac{A_2}{A_1 + A_2} \\ \frac{A_1}{A_1 + A_2} & \frac{A_2}{A_1 + A_2} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Jeśli zastosujemy teraz wzór (2.10b) dla przypadku $i=j=1$, otrzymamy:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dA_1} = - \frac{A_1}{A_1 + A_2} \frac{\varepsilon_1}{A_1} \quad (2.50)$$

Zbliżając się z przyrostem ΔA_1 do zera i porównując wzory (2.48) oraz (2.50), widzimy, że formuła oparta na MRS prowadzi do zależności wyprowadzonej dzięki MDW.

2.5.2 Dwieelementowa kratownica sprężysto-plastyczna

Analizując dalej konstrukcję opisaną w rozdziale 2.5.1 przyjmijmy, że granica plastyczności w elemencie nr 1 wynosi $\sigma^u = 0.9P/(A_1 + A_2)$. Odpowiadająca jej dystrybucja sił wewnętrznych i stan deformacji wyrażają się wzorami:

$$P_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2} P - \frac{A_1}{A_1 + A_2} (P - \sigma^u (A_1 + A_2)), \quad P_2 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} P + \frac{A_1}{A_1 + A_2} (P - \sigma^u (A_1 + A_2))$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{P_2}{EA_2} = \frac{P - \sigma^u A_1}{EA_2} \quad (2.51)$$

Wprowadźmy modyfikację przekroju elementu nr 1, która powoduje następujące zmiany w deformacji konstrukcji:

$$\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_2 = \frac{P - \sigma^u (A_1 + \Delta A_1)}{EA_2} \quad (2.52)$$

Z powyższego można obliczyć przyrost deformacji w elemencie nr 1:

$$\Delta\varepsilon_1 = -\varepsilon^u \frac{\Delta A_1}{A_2} \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon^u = \frac{\sigma^u}{E} \quad (2.53)$$

Z (2.53) bezpośrednio mamy:

$$\frac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta A_1} = -\frac{A_1}{A_2} \frac{\varepsilon^u}{A_1} \quad (2.54)$$

Z drugiej strony można zastosować formułę wyprowadzoną dzięki MDW przy $i=j=1$. Wyznaczwszy z (2.27) niezbędną pochodną (przypadek bez wzmocnienia tj. $\gamma=0$)

$$\frac{\partial \beta_1''}{\partial \varepsilon_1^0} = -\frac{D_{11}}{D_{11} - I} \quad (2.55)$$

wykorzystamy ją w (2.28b), otrzymując:

$$\frac{d\varepsilon_1}{dA_1} = \frac{D_{11}}{D_{11} - I} \frac{\varepsilon_1 - \beta_1''}{A_1} \quad \text{przyczym} \quad \varepsilon^u = \varepsilon_1 - \beta_1'' \quad (2.56)$$

Podstawiając D_{11} ze wzoru (2.49), formuła (2.56) przybiera postać:

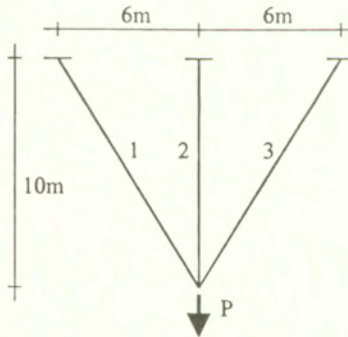
$$\frac{d\varepsilon_1}{dA_1} = -\frac{A_1}{A_2} \frac{\varepsilon^v}{A_1} \quad (2.57)$$

Zbliżając się z przyrostem ΔA_1 do zera i porównując wzory (2.54) oraz (2.57), widzimy, że formuła oparta na MRS prowadzi do zależności wyprowadzonej dzięki MDW.

2.5.3 Trójelementowa kratownica sprężysta

Rozważmy trójelementową kratownicę sprężystą, pokazaną na Rys 2.3. Przyjmując $A_1=A_2=A_3=1.759 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, taki sam moduł Younga $E=100 \text{ GPa}$ oraz $P=30 \text{ kN}$, przeprowadzono analizę wrażliwości w oparciu o MDW. Otrzymano następujące pole deformacji: $\varepsilon_1=\varepsilon_3=5.545 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_2=7.542 \times 10^{-4}$, oraz macierz wpływu o wyrazach:

$$D = \begin{bmatrix} 0.779 & 0.379 & -0.221 \\ 0.325 & 0.442 & 0.325 \\ -0.221 & 0.379 & 0.779 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$



Rys. 2.3 Kratownica trójelementowa

Uzyskano wrażliwość pola odkształceń na zmiany przekrojów poprzecznych na podstawie wzoru (2.10b):

$$\frac{d\varepsilon_1}{dA_j} = \begin{bmatrix} -2.455 & -1.394 & 0.697 \\ -1.195 & -1.896 & -1.195 \\ 0.697 & -1.394 & -2.455 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Wyrazy powyższej macierzy reprezentują gradienty deformacji w elementach i względem modyfikacji przekrojów poprzecznych w elementach j . Aby otrzymać wrażliwość pola naprężeń na zmiany przekrojów, należy pomnożyć wyrazy macierzy (2.59) przez wartość modułu Younga E . Policzono również wrażliwość przemieszczenia węzła, w którym przyłożona jest siła, na modyfikacje przekrojów, uzyskując:

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dA_j} &= [-0.357 \quad 0.000 \quad 0.357] \times 10^2 \\ \frac{du_y}{dA_j} &= [0.120 \quad 0.190 \quad 0.120] \times 10^2\end{aligned}\quad (2.60)$$

Takie same wyniki z dokładnością do czterech miejsc znaczących otrzymano stosując MRS.

2.5.4 Trójelementowa kratownica sprężysto-plastyczna

Rozszerzając analizę przykładu opisanego w 2.5.3 na zakres plastyczny, zwiększono obciążenie zewnętrzne do wartości $P=42 \text{ kN}$ oraz przyjęto jednakową dla wszystkich prętów granicę plastyczności $\sigma^u=100 \text{ MPa}$. Otrzymano następujące pole deformacji: $\varepsilon_1=\varepsilon_3=8.089 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_2=11.002 \times 10^{-4}$, z jednoczesnym wygenerowaniem się dystorsji plastycznej w elemencie nr 2, o wartości $\beta^p_2=1.002 \times 10^{-4}$. Wrażliwości pól odkształceń i naprężeń na modyfikacje przekrojów poprzecznych, obliczone według (2.28b) i (2.29), przyjmując następujące wartości:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_i}{dA_j} &= \begin{bmatrix} -4.598 & -3.314 & 0.000 \\ -3.127 & -4.508 & -3.127 \\ 0.000 & -3.314 & -4.598 \end{bmatrix} \\ \frac{d\sigma_i}{dA_j} &= \begin{bmatrix} -4.598 & -3.314 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -3.314 & -4.598 \end{bmatrix} \times 10^{11}\end{aligned}\quad (2.61)$$

Podobnie jak w rozwiązaniu (2.59), macierz $d\varepsilon_i/dA_j$ wyraża gradienty deformacji w elementach i względem modyfikacji przekrojów poprzecznych w elementach j , przy czym pręt nr 2 jest uplastyczniony. Wrażliwość przemieszczeń obciążonego węzła na modyfikacje przekrojów wynosi:

$$\begin{aligned}\frac{du_x}{dA_j} &= [-0.521 \quad 0.000 \quad 0.521] \times 10^2 \\ \frac{du_y}{dA_j} &= [0.313 \quad 0.451 \quad 0.313] \times 10^2\end{aligned}\quad (2.62)$$

MRS potwierdza otrzymane rezultaty z dokładnością do czterech miejsc znaczących. Rozpatrzone również inne warianty zachowań pokrywanych konstrukcji. Przy założeniu współczynnika wzmocnienia w elemencie nr 2, o wartości $\gamma=0.1$, zaobserwowano następujące zmiany w macierzach wrażliwości:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -4.400 & -3.099 & 0.168 \\ -2.878 & -4.215 & -2.878 \\ 0.168 & -3.099 & -4.400 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\frac{d\sigma_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -4.400 & -3.099 & 0.168 \\ -0.288 & -0.422 & -0.288 \\ 0.168 & -3.099 & -4.400 \end{bmatrix} \times 10^{11}$$

$$\frac{du_x}{dA_j} = [-0.518 \quad 0.000 \quad 0.518] \times 10^2$$

$$\frac{du_y}{dA_j} = [0.288 \quad 0.422 \quad 0.288] \times 10^2$$

Przyjęcie współczynnika osłabienia w elemencie nr 2, o wartości $\gamma=-0.1$, spowodowało zmiany:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -4.834 & -3.561 & -0.200 \\ -3.423 & -4.843 & -3.423 \\ -0.200 & -3.561 & -4.834 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$\frac{d\sigma_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -4.834 & -3.561 & -0.200 \\ -0.342 & -0.484 & -0.342 \\ -0.200 & -3.561 & -4.834 \end{bmatrix} \times 10^{11}$$

$$\frac{du_x}{dA_j} = [-0.525 \quad 0.000 \quad 0.525] \times 10^2$$

$$\frac{du_y}{dA_j} = [0.342 \quad 0.484 \quad 0.342] \times 10^2$$

Zarówno w przypadku wzmocnienia jak i osłabienia wyniki MRS potwierdzają wartości MDW z dokładnością do czterech miejsc znaczących. Wygenerowanie się w konstrukcji strefy plastycznej umożliwia znalezienie dodatkowych wrażliwości. Policzono na przykład wrażliwość pól odkształceń i naprężeń na modyfikację granicy plastyczności w elemencie nr 2, korzystając z (2.38):

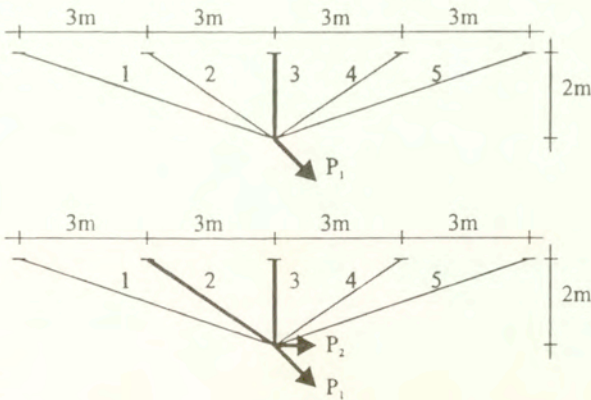
$$\frac{d\varepsilon_i}{d\sigma_2^*} = \begin{bmatrix} -0.583 \\ -0.793 \\ -0.583 \end{bmatrix} \times 10^{-11} \quad \frac{d\sigma_i}{d\sigma_2^*} = \begin{bmatrix} -0.583 \\ 1.000 \\ -0.583 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Podobnie można uzyskać wrażliwości pól odkształceń i naprężeń na modyfikację wartości $\gamma=0.1$ współczynnika wzmocnienia w elemencie nr 2, zgodnie z (2.42):

$$\frac{d\varepsilon_i}{d\gamma_2} = \begin{bmatrix} -0.501 \\ -0.682 \\ -0.501 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad \frac{d\sigma_i}{d\gamma_2} = \begin{bmatrix} -0.501 \\ 0.860 \\ -0.501 \end{bmatrix} \times 10^7 \quad (2.66)$$

2.5.5 Analiza postępującego zniszczenia (nieproporcjonalne obciążenie)

Przyjrzyjmy się przypadkowi nieproporcjonalnego obciążenia konstrukcji tj. takiego, które zmienia kierunek w czasie procesu płynięcia. Aby dokładnie zbadać to zjawisko, wybrano pięcioelementową kratownicę, pokazaną na Rys. 2.4. W analizie numerycznej przyjęto następujące dane wejściowe: $A=0.176 \times 10^{-3} \text{ m}^2$, $E=100 \text{ GPa}$, $\sigma^p=100 \text{ MPa}$.



Rys. 2.4 Kratownica pięcioelementowa (dwa etapy nieproporcjonalnego obciążenia)

W pierwszym etapie (I) przyłożono obciążenie o wartości $P_1=36.77 \text{ kN}$, jednakowo nachylone do kierunku pionowego i poziomego (Rys. 2.4a), które powoduje uplastycznienie elementu nr 3, reprezentowane przez dystorsję plastyczną $\beta_{3(I)}^p=0.181 \times 10^{-3}$. W drugim etapie (II) dodano obciążenie $P_2=39.00 \text{ kN}$ (Rys. 2.4b). Wywołało to dalszy rozwój strefy plastycznej w elemencie nr 3, jak również zapoczątkowało płynięcie w elemencie nr 2 ($\beta_{2(II)}^p=0.442 \times 10^{-3}$). Mamy zatem do czynienia z postępującym zniszczeniem konstrukcji.

Policzono wrażliwość pól odkształceń i naprężeń na modyfikacje przekrojów według (2.28b) i (2.29). Po pierwszym etapie obciążenia otrzymano:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -0.743 & -1.607 & -1.405 & -0.041 & -0.163 \\ -1.451 & -3.520 & -4.323 & 0.112 & -0.105 \\ -1.998 & -6.807 & -14.049 & 1.143 & 0.948 \\ 0.222 & -0.669 & -4.323 & 0.591 & 0.689 \\ 0.344 & 0.246 & -1.405 & 0.270 & 0.353 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

$$\frac{d\sigma_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -0.743 & -1.607 & -1.405 & -0.041 & -0.163 \\ -1.451 & -3.520 & -4.323 & 0.112 & -0.105 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.222 & -0.669 & -4.323 & 0.591 & 0.689 \\ 0.344 & 0.246 & -1.405 & 0.270 & 0.353 \end{bmatrix} \times 10^{11}$$

Licząc wrażliwość po drugim etapie obciążenia należy pamiętać, aby do odpowiednich wzorów podstawić sumaryczne wartości deformacji i dystorsji np. końcowa wartość dystorsji plastycznej w elemencie nr 3 wynosi $\beta^p_3 = \beta^p_{3(1)} + \beta^p_{3(2)} = 0.786 \times 10^{-3}$. Wtedy uzyskujemy:

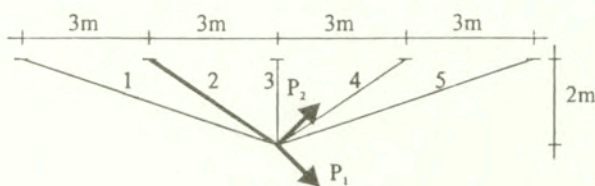
$$\frac{d\varepsilon_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -3.978 & -6.324 & -6.214 & 0.195 & -0.528 \\ -8.414 & -13.850 & -14.855 & 0.900 & -0.681 \\ -14.904 & -26.781 & -34.415 & 3.901 & 0.848 \\ -0.758 & -2.631 & -6.323 & 1.500 & 1.203 \\ 0.998 & 0.968 & -0.669 & 0.585 & 0.697 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

$$\frac{d\sigma_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -3.978 & -6.324 & -6.214 & 0.195 & -0.528 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.758 & -2.631 & -6.323 & 1.500 & 1.203 \\ 0.998 & 0.968 & -0.669 & 0.585 & 0.697 \end{bmatrix} \times 10^{11}$$

Rezultaty uzyskane dzięki MRS są identyczne w zakresie czterech miejsc znaczących. Istotnym jest fakt, że dzięki formułom MDW możemy z łatwością liczyć wrażliwość konstrukcji przy postępującym zniszczeniu tylko na podstawie końcowego stanu deformacji i dystorsji. Nie musimy wykonywać obliczeń na każdym kroku, tam gdzie obciążenie zmienia kierunek podczas płynięcia. Innymi słowy nie ma znaczenia czy obciążenie jest proporcjonalne czy też nie, chyba że mamy do czynienia z odciążeniem. Tym problemem zajmiemy się w kolejnym rozdziale.

2.5.6 Analiza postępującego zniszczenia (nieproporcjonalne obciążenie z odciążeniem)

Do analizy zjawiska postępującego zniszczenia, przy nieproporcjonalnym obciążeniu z uwzględnieniem odciążenia, wybrano przykład pięcioelementowej kratownicy, opisanej uprzednio w 2.5.5. W pierwszym etapie przyłożono takie obciążenie jak na Rys. 2.4a, o wartości $P_1 = 36.77 \text{ kN}$ ($\beta_{3(l)}^o = 0.181 \times 10^{-3}$). W drugim etapie natomiast przyłożono obciążenie o identycznej wartości $P_2 = 36.77 \text{ N}$, prostopadłe do P_1 , tak jak na Rys. 2.5. Dodanie siły P_2 powoduje odciążenie w elemencie nr 3, tak że w konsekwencji pracuje on na powrót w zakresie sprężystym (nie powstaje w nim dystorsja plastyczna). Jednocześnie uplastycznia się element nr 2 ($\beta_{2(m)}^o = 0.101 \times 10^{-3}$).



Rys. 2.5 Kratownica pięcioelementowa (drugi etap nieproporcjonalnego odciążenia)

Podzielmy analizę na dwa etapy, odpowiadające przykładowym kolejno obciążeniom. Tak więc wrażliwość na pierwszym etapie policzymy według (2.28), tak jak w rozdziale 2.5.5 (patrz (2.67)). Znajdziemy również wrażliwość dystorsji $\beta_{3(l)}^o$ na modyfikację pola przekroju A_j , która będzie nam później potrzebna. Ma ona postać:

$$\frac{\partial \beta_{3(l)}^o}{\partial A_j} = \frac{\partial \beta_{3(l)}^o}{\partial \varepsilon_{j(l)}^o} \frac{\partial \varepsilon_{j(l)}^o}{\partial A_j} \quad (2.69)$$

W obliczeniach na drugim etapie obciążenia jest ważne, aby zauważyć, że pomimo odciążenia elementu nr 3 (został wyeliminowany z grupy elementów uplastycznionych) jego dystorsja plastyczna, wygenerowana w pierwszym etapie, ma wpływ na aktualny stan dystorsji wirtualnych. Aby wyznaczyć ten wpływ, policzymy wrażliwość analogiczną do (2.69) po drugim etapie, pamiętając, że tym razem dystorsja plastyczna w elemencie nr 3 jest zerowa. Uwzględniając (2.22), mamy więc:

$$\frac{\partial \beta_{3(l)}^o}{\partial A_j} = \frac{\partial \beta_{3(l)}^o}{\partial \varepsilon_{j(l)}^o} \frac{\partial \varepsilon_{j(l)}^o}{\partial A_j} = - \frac{\partial \beta_{3(l)}^o}{\partial \varepsilon_{j(l)}^o} \frac{\varepsilon_{j(l)}^o - \beta_{j(l)}^o}{A_j} \quad (2.70)$$

Jak widać końcowa wrażliwość pozostała niezmienna, ale uległy zmianie składniki w łańcuchu pochodnych. Interesuje nas oszacowanie wpływu dystorsji plastycznej $\beta_{3(l)}^o$ na dystorsję wirtualną $\varepsilon_{j(l)}^o$. Wobec (2.70), dostajemy:

$$\frac{\partial \beta_{j(I)}^0}{\partial \varepsilon_{j(II)}^0} = - \frac{\partial \beta_{j(I)}^0}{\partial A_j} \frac{A_j'}{\varepsilon_{j(II)}^0 - \beta_{j(II)}^0} \quad (2.71)$$

Mając (2.71), możemy uwzględnić historię obciążenia w układzie równań (2.27). Ponieważ występuje tylko jedno uplastycznienie w elemencie nr 2, układ sprowadza się do jednego równania, postaci:

$$(D_{22} - 1) \frac{\partial \beta_{2(II)}^0}{\partial \varepsilon_{j(II)}^0} + D_{23} \frac{\partial \beta_{j(I)}^0}{\partial \varepsilon_{j(II)}^0} = -D_{2j} \quad (2.72)$$

Bez drugiego składnika po lewej stronie równania (2.72), dostalibyśmy nieprawdziwe wyniki. Zatem wrażliwość po dwóch etapach przyjmuje ostatecznie wartości:

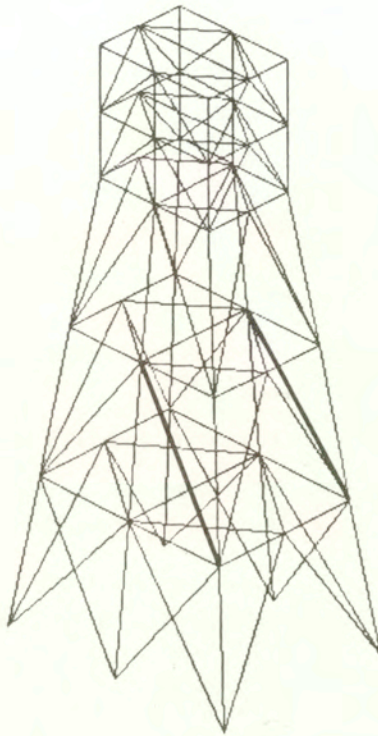
$$\frac{d\varepsilon_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -1.847 & -3.229 & -2.166 & -1.016 & -0.946 \\ -3.405 & -6.450 & -5.179 & -1.165 & -1.299 \\ -3.661 & -9.638 & -11.998 & 2.592 & 1.013 \\ 1.152 & 0.519 & -2.204 & 2.760 & 1.923 \\ 1.115 & 1.301 & -0.233 & 1.535 & 1.148 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$\frac{d\sigma_i}{dA_j} = \begin{bmatrix} -1.847 & -3.229 & -2.166 & -1.016 & -0.946 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -1.664 & -2.831 & 2.051 & 1.449 & 0.065 \\ 1.152 & 0.519 & -2.204 & 2.760 & 1.923 \\ 1.115 & 1.301 & -0.233 & 1.535 & 1.148 \end{bmatrix} \times 10^{11}$$

Zaleca się, aby w przypadku odciążenia wykonywać obliczenia wrażliwości krok po kroku, zwłaszcza jeśli mamy do czynienia z cyklicznym procesem obciążenia jak np. w analizie przystosowania konstrukcji (*shake-down*). Jeśli podejrzewamy wystąpienie odciążenia na jakimś etapie analizy to musimy wówczas zapamiętać wrażliwość dystorsji plastycznych na modyfikacje przekrojów (2.69). Wtedy w następnym kroku, przy znajomości bieżącego stanu deformacji, obliczamy wpływ odciążonych, uprzednio uplastycznionych elementów na aktualne dystorsje wirtualne (2.71). Następnie uwzględniamy ten fakt przy rozwiązywaniu układu (2.72).

2.5.7 Wieża wiertnicza

Dokonajmy teraz analizy wrażliwości wieży wiertniczej, pokazanej na Rys. 2.6, jako przykład rzeczywistej konstrukcji inżynierskiej. Jest ona utwierdzona w 6 węzłach u podstawy. Składa się ze 139 elementów podzielonych na 6 grup. Grupa I obejmuje zewnętrzne ściągi pierwszej, drugiej i trzeciej platformy. Grupa II zawiera nienaróżne słupy do wysokości trzeciej platformy.



Rys. 2.6 Wieża wiertnicza

W skład grupy III wchodzi krzyżulce do wysokości trzeciej platformy, wewnętrzne ściągi pierwszych trzech platform oraz nienarożne słupy od trzeciej platformy wwyż. Grupa IV obejmuje krzyżulce od trzeciej platformy wwyż oraz wszystkie elementy czwartej i piątej platformy. Grupa V zawiera narożne słupy do wysokości trzeciej platformy, a ostatnia grupa VI - narożne słupy od trzeciej platformy wwyż. Przekroje poprzeczne elementów i moduły Younga są dla poszczególnych grup następujące: $A_I=0.290283 \text{ m}^2$, $A_{II}=0.170903 \text{ m}^2$, $A_{III}=0.072571 \text{ m}^2$, $A_{IV}=0.045160 \text{ m}^2$, $A_V=0.290937 \text{ m}^2$, $A_{VI}=0.171443 \text{ m}^2$, $E_I=E_{II}=E_{III}=E_{IV}=E_V=2.10 \times 10^2 \text{ GPa}$, $E_{VI}=7.58 \times 10^5 \text{ GPa}$ (nieskończenie sztywne). Wymiary w planie u podstawy wynoszą 22 m x 16 m, a u szczytu 11 m x 8 m. Pionowe moduły wieży do wysokości trzeciej platformy mają po 25 m wysokości. Od trzeciej platformy wwyż każdy pionowy moduł ma 11 m. Całkowita wysokość wieży wynosi 97 m. Granice plastyczności przyjmują następujące wartości: $\sigma_{II}^y=\sigma_{III}^y=\sigma_{IV}^y=\sigma_V^y=3.0 \times 10^2 \text{ MPa}$, $\sigma_{VI}^y=3.0 \times 10^5 \text{ MPa}$.

Najpierw dokonano analizy wrażliwości w zakresie sprężystym. Obciążenie zewnętrzne, powodujące sprężystą odpowiedź konstrukcji, zostało przyłożone pionowo w każdym węźle górnej platformy. Wartość każdej z sił, modelujących ciężar górnej platformy wynosiła $P=5563$ kN. Dla obciążonej w ten sposób konstrukcji policzono wrażliwość na podstawie formuł MDW. Jako porównanie posłużyły wrażliwości znalezione dzięki MRS. Wybrano dwa elementy, aby przedstawić kilka rezultatów: element z przodu konstrukcji, pogrubiony na Rys. 2.6 (oznaczony dalej w tekście jako element nr 1) oraz dolny, narożny słup, połączony z elementem nr 1 (oznaczony dalej jako element nr 2). Wybrane wrażliwości, policzone w oparciu o MDW, mają wartości: $d\epsilon_1/dA_1=0.202216 \times 10^{-3}$, $d\epsilon_1/dA_2=-0.970989 \times 10^{-4}$, $d\epsilon_2/dA_1=-0.219861 \times 10^{-4}$, $d\epsilon_2/dA_2=0.366093 \times 10^{-3}$. Odpowiadające im rezultaty MRS są identyczne na czterech pierwszych miejscach znaczących.

Następnie dokonano analizy wrażliwości w zakresie sprężysto-plastycznym. Zachowując uprzednio przyłożone obciążenie pionowe, dodano obciążenie poziome w każdym węźle lewej krawędzi wszystkich pięciu platform, w kierunku do wewnątrz konstrukcji, prostopadle do każdej krawędzi. Wartości sił przyłożonych do poszczególnych platform wynoszą odpowiednio: $P_1=9000$ kN, $P_3=5000$ kN, $P_2=P_4=P_5=6000$ kN. Takie obciążenie, mające modelować działanie fal morskich, powoduje uplastycznienie dwóch krzyżulców, pogrubionych na Rys. 2.6. Otrzymane wrażliwości to $d\epsilon_1/dA_1=0.297607 \times 10^{-1}$, $d\epsilon_1/dA_2=-0.173180 \times 10^{-2}$, $d\epsilon_2/dA_1=-0.282489 \times 10^{-2}$, $d\epsilon_2/dA_2=0.300188 \times 10^{-2}$. Rozpatrzono też inne zachowania pokrywające konstrukcję. Dla przypadku ze wzmocnieniem ($\gamma=0.1$) otrzymano wrażliwości: $d\epsilon_1/dA_1=0.254971 \times 10^{-1}$, $d\epsilon_1/dA_2=-0.152626 \times 10^{-2}$, $d\epsilon_2/dA_1=-0.249219 \times 10^{-2}$, $d\epsilon_2/dA_2=0.297883 \times 10^{-2}$. Analogiczny przypadek osłabienia ($\gamma=-0.1$) dał w wyniku następujące wrażliwości: $d\epsilon_1/dA_1=0.359598 \times 10^{-1}$, $d\epsilon_1/dA_2=-0.201461 \times 10^{-2}$, $d\epsilon_2/dA_1=-0.328103 \times 10^{-2}$, $d\epsilon_2/dA_2=0.303143 \times 10^{-2}$. Tak jak w przypadku sprężystym, wrażliwości liczone metodami MRS i MDW są zgodne na czterech miejscach znaczących.

Przedyskutujmy teraz wady MRS przy obliczaniu wrażliwości w porównaniu z MDW. Po pierwsze, jeśli element konstrukcji ma bardzo małe pole przekroju poprzecznego, to gradienty wybranej wielkości statycznej, np. naprężenia względem tego pola przekroju, będą gwałtownie rosły do nieskończoności. W podejściu MDW problem ten nie występuje (por. (2.10)). Po drugie, jeśli jakaś wrażliwość okaże się być bardzo mała w porównaniu z innymi (np. cztery rzędy wielkości mniejsza), to MRS może dać nieprawdziwy lub przynajmniej niedokładny wynik. Przyczyna jest taka, że wprowadzając mały przyrost uzyskujemy bardzo podobną do początkowej odpowiedź konstrukcji. W konsekwencji tracimy kilka miejsc znaczących przy liczeniu wrażliwości w trakcie odejmowania. Jeśli więc dana wrażliwość ma bardzo małą wartość, możemy nie być w stanie jej policzyć, ze względu na ograniczoną reprezentację maszynową liczb rzeczywistych. Z drugiej strony, jeśli przyjmijemy przyrost skończony o dużej wartości (np. 20% wyjściowego przekroju), to oddalamy się od wyniku analitycznego. Zatem umiejętność doboru przyrostu jest niezwykle istotna w MRS, podczas gdy MDW daje szybkie i dokładne rozwiązanie. Po trzecie, jeśli zdarzy się nam liczyć wrażliwość elementu uplastycznionego (pogrubiony na Rys. 2.6), to MRS może zaburzyć symetrię rozwiązania w przypadku przyjęcia zbyt dużego przyrostu skończoności. Wówczas jeden z dwu uplastycznionych elementów zaczyna płynąć najpierw, gdyż przekroje obu

zbytnio się od siebie różnią. Powoduje to błędy w obliczanej wrażliwości konstrukcji. Używając MDW można tego problemu uniknąć.

2.6 Podsumowanie i komentarz

Podsumujmy bieżący rozdział, podkreślając przedstawione w nim nowe idee, dotyczące liczenia wrażliwości konstrukcji metodą dystorsji wirtualnych. W porównaniu z innymi metodami analizy wrażliwości, MDW wydaje się mieć więcej zalet, zwłaszcza w zakresie fizycznie nieliniowym oraz w przypadku algorytmów sekwencyjnych.

W zakresie sprężystym MDW bez wątpienia góruje nad MRS. Implementacja MRS jest kosztowna numerycznie i nie zawsze dobrze sobie radzi z żadaną dokładnością obliczeń. Metody półanalityczne są z pewnością dokładniejsze, chociaż również wymagają wspomagania MRS. Korzystanie z analitycznych metod analizy wrażliwości (por. Haftka, Gurdal [38]) jest w tym przypadku porównywalne co do ilości operacji numerycznych. Jeśli jednak analiza wrażliwości stanowi tylko pewną część sekwencyjnego algorytmu optymalizacji (np. algorytmu optymalnego przeprojektowywania ze względu na minimum objętości - patrz rozdział 3), gdzie zachodzi potrzeba liczenia gradientów w każdej iteracji, to podejście MDW jest bardziej efektywne. Wynika to mianowicie z faktu, że analiza wrażliwości przy pomocy MDW bazuje na macierzy wpływu D , która pozostaje niezmienna podczas całego procesu optymalizacji. Zatem wykorzystanie analizy wrażliwości na bazie MDW w algorytmach optymalizacyjnych daje wymierne korzyści w porównaniu z innymi metodami.

W zakresie sprężysto-plastycznym zalety stosowania MDW są lepiej widoczne. Analiza wrażliwości ustrojów sprężysto-plastycznych metodą dystorsji wirtualnych sprowadza się, w przypadku obciążenia, do:

- i) znalezienia odpowiedzi ustroju (za pomocą MDW) dla danego stanu obciążenia (wyznaczenie stanu deformacji ϵ , oraz dystorsji plastycznych β^p_i)
- ii) rozwiązania lokalnego układu równań (2.27) dla elementów uplastycznionych
- iii) wyznaczenia wrażliwości w oparciu o związki analityczne (2.28), (2.29)

Zalety tego podejścia to:

- a) możliwość wyznaczenia skumulowanej wrażliwości dla danego poziomu obciążenia, bez jej znajomości dla poprzedzających stanów obciążeń
- b) uniknięcie iteracji zarówno w analizie odpowiedzi konstrukcji jak i w analizie wrażliwości
- c) sprowadzenie zadania wrażliwości do rozwiązania małego, lokalnego układu równań (2.27), a nie globalnego układu (1.6) metody dyskretno-analitycznej
- d) brak dodatkowych problemów numerycznych przy liczeniu wrażliwości w punktach nieciągłości, związanych z przejściem elementu ze strefy sprężystej do plastycznej

Korzystając z metod analitycznych (półanalitycznych), zazwyczaj kumuluje się wrażliwość i aktualizuje macierz sztywności w każdym kroku przyrostowym lub też znajduje się wrażliwość w drodze iteracji tak jak np. w podejściu wstępnych odkształceń (*initial strains*). Zwiększa to w sposób istotny koszt numeryczny, podczas gdy MDW stosuje analityczne formuły wrażliwości i nie wymaga aktualizacji macierzy, ani iteracji. Podejście MDW daje nam możliwość policzenia wrażliwości sprężysto-plastycznych tanim kosztem, bazując na uprzednio wygenerowanej macierzy D . MDW radzi sobie bardzo dobrze z różnymi odcinkowo liniowymi charakterystykami pokrywczego zachowania materiału (idealna plastyczność, wzmocnienie, osłabienie, zerwanie). Można łatwo uzyskać szeroki wachlarz wrażliwości (np. na wybraną granicę plastyczności lub parametr wzmocnienia). W przypadku zmiany kierunku sił zewnętrznych w trakcie obciążania ustroju (nieproporcjonalne obciążenie), nie trzeba wykonywać analizy wrażliwości krok za krokiem, chyba że mamy do czynienia z odciążeniem. Wówczas po każdym kroku przyrostu obciążenia zapamiętujemy wrażliwość dystorsji plastycznych na modyfikację zmiennej projektowej, co jest jednoznaczne z zapisem historii obciążenia i odciążenia. Tak więc MDW zapewnia efektywną i niekosztowną numerycznie analizę wrażliwości konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym.

Dziedziną, w której MDW mogłaby z powodzeniem znaleźć zastosowanie, jest również analiza niezawodności konstrukcji. Wymaga ona sekwencyjnego znajdowania odpowiedzi ustroju na zadane obciążenie przy różnych jego topologiach, niewiele się od siebie różniących (np. przy eliminacji kilku elementów z ustroju pierwotnego). Takie lokalne zmiany dają się łatwo modelować przez dystorsje wirtualne. Koniecznym jest utworzenie macierzy wpływu D na początku symulacji. Na jej bazie rozwijamy analizę wrażliwości, bez potrzeby użycia metod analitycznych (półanalitycznych), numerycznie kosztownych w tym wypadku z uwagi na konieczność aktualizacji macierzy sztywności. Płynie stąd wniosek, że zastosowanie MDW w analizie niezawodności jest w przyszłości warte rozważenia.

Skomentujmy na koniec jedną z aplikacji analizy wrażliwości, która nasuwa się bezpośrednio z rozważań niniejszego rozdziału. Można mianowicie, wykonując analizę postępującego zniszczenia konstrukcji, określić wrażliwość naprężenia w stanie krytycznym. Wiemy, który element (elementy) konstrukcji uplastycznił się jako ostatni, powodując całkowite zniszczenie. Korzystając z formuł (2.28), możemy wówczas z łatwością policzyć wrażliwość naprężenia w wyznaczonym, krytycznym elemencie (elementach) na zmianę pól przekrojów poprzecznych wszystkich elementów konstrukcji. Zakładamy przy tym, że element krytyczny pracuje w zakresie sprężystym, tzn. myślowo zwiększamy dla niego granicę plastyczności (zerujemy w nim dystorsję plastyczną), aby nie dopuścić do utraty nośności. Wyznaczamy w ten sposób wrażliwość naprężenia w stanie krytycznym na lokalne modyfikacje pól przekrojów poprzecznych elementów. Może się okazać, że wrażliwości naprężenia w elemencie krytycznym na modyfikacje pól przekrojów niektórych elementów mają wartości dodatnie, co oznacza, że zmniejszenie przekrojów w tych elementach spowoduje wzrost globalnej nośności. Poddając takie elementy procesowi optymalizacji przekrojów poprzecznych (zbytne ich zmniejszenie sprawi, że zmieni się ścieżka zniszczenia), można opracować algorytm minimalizacji objętości konstrukcji przy zachowaniu jej nośności.

ROZDZIAŁ 3 :

Optymalne przeprojektowywanie konstrukcji

3.1 Wprowadzenie

Niniejszy rozdział będzie poświęcony problemowi optymalnego przeprojektowywania konstrukcji. Rozważania będą ograniczone do poszukiwania optymalnej topologii konstrukcji z początkowej konfiguracji, tak aby poprzez eliminację i zmiany przekrojów poprzecznych elementów osiągnąć minimum objętości (tzw. *topology and sizing optimization problem*). Zostanie podana relacja pomiędzy zmianą przekrojów poprzecznych a dystorsjami wirtualnymi, umożliwiającą symulację numeryczną. Analityczne formuły na gradient funkcji celu wraz z wykorzystaniem metod heurystycznych posłużą do implementacji w efektywnych algorytmach optymalizacyjnych. Będą rozważone przypadki pojedynczego oraz wielu stanów obciążeń w zakresie sprężystym, jak również sprężysto-plastycznym.

3.2 Metoda dystorsji wirtualnych w zastosowaniu do optymalnego przeprojektowywania konstrukcji

Porównując siły wewnętrzne konstrukcji modelowanej dystorsjami oraz konstrukcji zmodyfikowanej (wzór (2.3)), można wyprowadzić następujący współczynnik zmiany przekrojów poprzecznych w procesie przeprojektowywania, zależny od dystorsji wirtualnych:

$$\mu_i \equiv \frac{A_i}{A_i^0} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^0}{\varepsilon_i} \quad (3.1)$$

Dokonując modyfikacji modułu Younga E_i , zamiast przekroju A_i we wzorze (2.3), otrzymamy analogiczny współczynnik:

$$\eta_i \equiv \frac{E_i}{E_i^0} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^0}{\varepsilon_i} \quad (3.2)$$

Natomiast podstawiając $\varepsilon_i = \Delta l/l = \Delta l'/l'$, uzyskamy współczynnik zmiany długości elementu przy przeprojektowywaniu konstrukcji, postaci:

$$\lambda_i \equiv \frac{l'_i}{l_i} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^0}{\varepsilon_i} \quad (3.3)$$

Oczywiście wszystkie te współczynniki muszą, odpowiednio, spełniać ograniczenia:

$$\mu_i \geq 0, \quad \eta_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (3.4)$$

które prowadzą do warunku: $\varepsilon^p=0$ jeśli $\varepsilon_i=0$, równoważnemu nieujemności produktu skalarnego $\sigma_i \varepsilon^p_i \geq 0$, co oznacza dysypatywny charakter pracy konstrukcji (dla przypadku braku sprężenia). Wobec powyższego widzimy, że modyfikację rozkładu materiału w konstrukcji da się wyrazić przez odpowiedni stan dystorsji wirtualnych, dla wyzaczenia którego należy rozwiązać układ (3.1) względem ε^p , podstawiając odkształcenia z (2.1b).

Problem optymalnego przeprojektowywania konstrukcji można sformułować następująco:

$$\min V = \min \sum_i A_i l_i \quad (3.5)$$

przy ograniczeniach:

$$A_i \geq 0 \quad \text{oraz} \quad |\varepsilon_i| \leq \varepsilon^* \quad (3.6)$$

gdzie ε^* oznacza pewną granicę nałożoną na odkształcenia. Występujące w powyższych ograniczeniach odkształcenia ε_i są powiązane z przemieszczeniami węzłów konstrukcji u_j poprzez związki geometryczne:

$$\varepsilon_i = G_{ij} u_j \quad (3.7)$$

Spełnione są warunki równowagi globalnej:

$$K_{ij} u_j = p_i \quad (3.8)$$

przy czym p_i oznacza wektor obciążeń zewnętrznych a G_{ij} , K_{ij} odpowiednio macierz geometryczną i macierz sztywności konstrukcji. Wykorzystując metodę dystorsji wirtualnych, można problem przeprojektowywania (3.5)-(3.8) przekształcić następująco:

$$\min V = \min \sum_i \mu_i A_i l_i = \min \sum_i \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^0}{\varepsilon_i} A_i l_i \quad (3.9)$$

przy ograniczeniach:

$$\mu_i = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^o}{\varepsilon_i} \geq 0 \quad (3.10)$$

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon^w \quad (3.11)$$

przy czym (3.11) można też wyrazić w formie:

$$h_i = 1 - \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon^w}\right)^2 \geq 0 \quad (3.12)$$

Końcowe stany naprężeń i odkształceń w konstrukcji modelowanej dystorsjami wyrażają zależności (2.1). Globalne warunki nierozdzielności (3.7) oraz równowagi (3.8) są w tym wypadku spełnione, jako superpozycja odpowiedzi konstrukcji na obciążenie zewnętrzne $(\varepsilon^L, \sigma^d)$ i odpowiedzi na wprowadzone dystorsje wirtualne, w postaci ciągłego pola deformacji i samorównowaznego pola naprężeń $(\varepsilon^R, \sigma^R)$. Podstawiając (2.1b) do (3.9), (3.10) oraz do (3.12), otrzymujemy sformułowanie problemu optymalizacji nieliniowej (zarówno funkcja celu jak i ograniczenia), z dystorsjami wirtualnymi jako zmiennymi. Z tego podejścia będziemy korzystać przy implementacji algorytmu przeprojektowywania konstrukcji.

Alternatywnym rozwiązaniem jest podstawienie (2.1b) do wzoru (3.1), definiującego współczynnik rozkładu materiału μ_i . Otrzymujemy wówczas następujący układ równań, wiążący dystrybucję materiału z dystorsjami wirtualnymi:

$$\sum_j [(1 - \mu_j) D_{ij} - \delta_{ij}] \varepsilon_j^o = -(1 - \mu_i) \varepsilon_i^L \quad (3.13)$$

Można teraz przekształcić problem przeprojektowywania w sformułowanie z dwiema zmiennymi projektowymi tj. μ_i oraz ε^o . Funkcja celu (3.9), wyrażona przez μ_i , jak również ograniczenia nierównościowe (3.10) i (3.11), wyrażone odpowiednio przez μ_i oraz ε^o , są liniowe. Cała nieliniowość problemu tkwi w dodatkowym ograniczeniu (3.13). Rozwiązanie jest spodziewane na brzegu obszaru dopuszczalnego przy n (liczba elementów konstrukcji) aktywnych ograniczeniach (3.10), (3.11). Jest to osiągalne dla nieskończenie wielu kratownic, pod warunkiem, że ograniczenia (3.10) są aktywne dla m -elementowego zbioru B_1 , natomiast ograniczenia (3.11) są aktywne dla dopełniającego, $n-m$ -elementowego zbioru B_2 . Mając to na uwadze, wzór (3.13) można wyrazić:

$$\begin{matrix} m \\ n-m \end{matrix} \left\{ \begin{array}{|c|c|c|} \hline D-I & (1-\mu)D & \varepsilon^{o1} \\ \hline D & (1-\mu)D-I & \varepsilon^{o2} \\ \hline \end{array} \right\} = \begin{array}{|c|} \hline -\varepsilon^L \\ \hline -(1-\mu)\varepsilon^L \\ \hline \end{array} \quad (3.14)$$

Pierwsze m równań tego układu wyznacza ε^o , zgodnie z warunkiem $\sigma_i=0$, dla elementów ze zbioru B_1 , gdzie zachodzi $\mu_i=0$, podczas gdy $n-m$ końcowych równań pozwala wyznaczyć ε^o i μ_i , zgodnie z warunkiem:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^L + \sum_j D_y \varepsilon_j^{o1} + \sum_j D_y \varepsilon_j^{o2} = \varepsilon^u \quad (3.15)$$

dla elementów ze zbioru B_2 . Wobec (3.1), końcowe $n-m$ równań można przedstawić następująco:

$$(1 - \mu_i) \varepsilon_i^{(2)} = \varepsilon_i^{o2} \quad i = m+1, m+2, \dots, n \quad (3.16)$$

Jeśli znamy rozwiązanie μ_i problemu optymalnego przeprojektowywania z aktywnymi ograniczeniami (3.10) i (3.11), to odpowiadający stan dystorsji wirtualnych ε^p jest związany z μ_i przez $n-m$ równań (3.16) oraz przez m pierwszych równań (3.14), gdzie ε^{o2} jest już wyznaczone. Problem optymalnego przeprojektowywania polega na wyznaczeniu takiego $n-m$ -elementowego, izostaticznego podzbioru konstrukcji wyjściowej (a co za tym idzie zbiorów B_1 i B_2), aby funkcja celu (3.9) osiągnęła minimum.

W przypadku K stanów obciążeń, działających na konstrukcję, gdzie ε^{Lk} opisuje K ($k=1, 2, \dots, K$) stanów deformacji, można określić jednoznacznie dominujący stan odkształceń ε^{Lk} (w którym wartość bezwzględna odkształcenia jest maksymalna) dla każdego elementu. Trzeba wtedy analizować K stanów odkształceń ε^k i odpowiadających im dystorsji wirtualnych ε^{ok} , modelujących ten sam rozkład materiału μ_i . Wyznaczywszy dystorsje wirtualne ε^{ok} (a jednocześnie μ_i , zgodnie z (3.1)) w oparciu o znajomość stanów dominujących ε^{Lk} , można określić brakujące wyrazy ε^{ok} dla stanów niedominujących, z poniższych równań:

$$\mu_i = \frac{\varepsilon_i^k - \varepsilon_i^{ok}}{\varepsilon_i^k} \quad (3.17)$$

Przyjrzyjmy się teraz bliżej problemowi przeprojektowywania konstrukcji w sformułowaniu nieliniowym (3.9), (3.10), (3.12). Jedną z możliwości rozwiązania go jest optymalizacja metodami gradientowymi z analitycznymi formułami wrażliwości. Biorąc pod uwagę relacje (2.1), gradienty naprężeń i odkształceń, ze względu na dystorsje wirtualne ε^p , są następujące:

$$\frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_j^o} = E_i (D_y - \delta_{ij}) \quad (3.18)$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{d\varepsilon_j^o} = D_y$$

Pochodną współczynnika rozkładu materiału μ_i , względem dystorsji wirtualnych, policzymy ze wzoru (3.1):

$$\frac{d\mu_i}{d\varepsilon_j^0} = - \frac{\delta_y \varepsilon_i - \varepsilon_i^0 \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \varepsilon_j^0}}{\varepsilon_i^2} \quad (3.19)$$

lub podstawiając (3.18b):

$$\frac{d\mu_i}{d\varepsilon_j^0} = \frac{\varepsilon_i^0 D_y - \varepsilon_i \delta_y}{\varepsilon_i^2} \quad (3.20)$$

Gradyenty funkcji celu (3.9) i ograniczeń (3.12), ze względu na dystorsje wirtualne, przyjmują postać:

$$\frac{dV}{d\varepsilon_j^0} = \sum_i \frac{\partial V}{\partial \mu_i} \frac{\partial \mu_i}{\partial \varepsilon_j^0} = \sum_i A_i l_i \frac{\varepsilon_i^0 D_y - \varepsilon_i \delta_y}{\varepsilon_i^2} \quad (3.21)$$

$$\frac{dh_i}{d\varepsilon_j^0} = - \frac{2}{(\varepsilon^v)^2} \varepsilon_i D_y \quad (3.22)$$

Zauważmy, że wszystkie powyższe gradienty zależą od macierzy wpływu D , stanu deformacji i (lub) dystorsji wirtualnych. Ponieważ macierz D określa się na początku symulacji numerycznej, więc policzenie potrzebnych wrażliwości w trakcie procesu optymalizacji odbywa się minimalnym kosztem.

3.3 Optymalne przeprojektowywanie w zakresie sprężysto-plastycznym

W zakresie sprężysto-plastycznym, pamiętając o podziale dystorsji na część wirtualną ε^v i plastyczną β^p (patrz rozdział 2.3), można wyprowadzić wzór na współczynnik zmiany przekrojów poprzecznych, przyrównując siły w konstrukcji modelowanej dystorsjami i zmodyfikowanej (patrz (2.17)), analogicznie do (3.1):

$$\mu_i \equiv \frac{A_i}{A_i^*} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^0 - \beta_i^0}{\varepsilon_i - \beta_i^0} \quad (3.23)$$

Podobne formuły dostaniemy w przypadku modyfikacji innych zmiennych np. $\eta_i = E_i/E_i^*$ lub $\lambda_i = l_i/l_i^*$:

$$\eta_i \equiv \frac{E_i}{E_i^*} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^0 - \beta_i^0}{\varepsilon_i - \beta_i^0} \quad (3.24)$$

$$\lambda_i \equiv \frac{l_i'}{l_i} = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^o - \beta_i^o}{\varepsilon_i - \beta_i^o}$$

Związki (3.23) oraz (3.24) należy uzupełnić ograniczeniami:

$$\mu_i \geq 0, \quad \eta_i \geq 0, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (3.25)$$

prowadzącymi do warunku $\varepsilon_i^o = 0$ jeśli $\varepsilon_i - \beta_i^o = 0$.

Pochodną μ_i względem ε_j^o można policzyć z (3.23):

$$\frac{d\mu_i}{d\varepsilon_j^o} = - \frac{\delta_y(\varepsilon_i - \beta_i^o) - \varepsilon_i^o \frac{\partial(\varepsilon_i - \beta_i^o)}{\partial \varepsilon_j^o}}{(\varepsilon_i - \beta_i^o)^2} \quad (3.26)$$

Wykorzystując równanie (3.18b), mamy:

$$\frac{d\mu_i}{d\varepsilon_j^o} = \frac{\varepsilon_i^o \left(D_y - \frac{\partial \beta_i^o}{\partial \varepsilon_j^o} \right) - (\varepsilon_i - \beta_i^o) \delta_y}{(\varepsilon_i - \beta_i^o)^2} \quad (3.27)$$

Sformułujmy teraz problem optymalnego przeprojektowywania konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym. Taka analiza ma sens jedynie dla przypadku wielu stanów obciążeń, działających na konstrukcję. W jednym stanie obciążeń optymalnym rozwiązaniem jest konstrukcja izostaticzna (statycznie wyznaczalna, równomiernie wytężona), dla której funkcja celu osiąga globalne minimum. W przypadku wielu stanów obciążeń poszukujemy takiej konstrukcji, która składa się z elementów wytężonych do pewnej zadanej granicy w co najmniej jednym ze stanów (tzw. *fully stressed design*). Jeśli przyjmiemy, że jest to granica plastyczności, to mamy do czynienia z płynięciem optymalnej konstrukcji. Jednak w każdym ze stanów pozostają wciąż elementy sprężyste. Koncepcja przeprojektowywania w zakresie sprężysto-plastycznym polega więc na doprowadzeniu do płynięcia jak największej liczby elementów optymalnej konstrukcji sprężystej.

Tak więc problem optymalnego przeprojektowywania konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym, dla wielu stanów obciążeń, można wyrazić w formie:

$$\min V = \min \sum_i \frac{\varepsilon_i^{k^*} - \beta_i^o - \varepsilon_i^{o k^*}}{\varepsilon_i^{k^*} - \beta_i^o} A_i l_i \quad (3.28)$$

przy następujących, nieliniowych ograniczeniach:

$$\mu_i = \frac{\varepsilon_i^{k^*} - \beta_i^o - \varepsilon_i^{ok^*}}{\varepsilon_i^{k^*} - \beta_i^o} \geq 0 \quad (3.29)$$

$$h_i = 1 - \left(\frac{\sigma_i^k}{\sigma_i^v} \right)^2 \geq 0 \quad (3.30)$$

$$b_i = \beta_i^o \sigma_i^{k^*} \geq 0 \quad (3.31)$$

gdzie $\sigma^v = E\varepsilon^v$, a ε_i^k i σ_i^k są zdefiniowane przez (2.1) dla każdego ze stanów obciążeń $k=1,2,\dots,K$. Symbol k^* oznacza dominujący (o maksymalnej intensywności naprężenia), jednoznacznie wybrany stan obciążeń dla każdego elementu. Zauważmy, że ograniczenia (3.30) są nałożone na naprężenia, a nie na odkształcenia jak w (3.12). Ograniczenia (3.31) zapewniają, że dystorsje β_i^o są generowane jako wynik lokalnego rozpraszania energii. Zakłada się, że dystorsje plastyczne β_i^o powstają tylko dla dominującego stanu obciążeń i są niezmiennie dla pozostałych stanów, natomiast dystorsje $\varepsilon_i^{ok^*}$ muszą być dobrane dla każdego ze stanów obciążeń z osobna, tak aby modelowały ten sam współczynnik zmiany przekroju μ_i w każdym elemencie. Mając określone $\varepsilon_i^{ok^*}$ dla dominującego stanu obciążeń, a zatem wiedząc jakie jest μ_i , można policzyć brakujące składniki $\varepsilon_i^{ok^*}$ z układu równań:

$$\mu_i = \frac{\varepsilon_i^k - \beta_i^o - \varepsilon_i^{ok^*}}{\varepsilon_i^k - \beta_i^o} \quad (3.32)$$

Gradyenty funkcji celu (3.28) i ograniczeń (3.29)-(3.31), ze względu na ε_j^o oraz β_j^o (dla wybranego stanu obciążeń k), mają odpowiednio następujące postaci:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\varepsilon_j^o} &= \sum_i \frac{\varepsilon_i^o \left(D_y - \frac{\partial \beta_i^o}{\partial \varepsilon_j^o} \right) - (\varepsilon_i - \beta_i^o) \delta_y}{(\varepsilon_i - \beta_i^o)^2} A_i l_i \\ \frac{dV}{d\beta_j^o} &= \sum_i \frac{\varepsilon_i^o (D_y - \delta_y) - \frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial \beta_j^o} (\varepsilon_i - \beta_i^o)}{(\varepsilon_i - \beta_i^o)^2} A_i l_i \\ \frac{d\mu_i}{d\varepsilon_j^o} &= \frac{\varepsilon_i^o \left(D_y - \frac{\partial \beta_i^o}{\partial \varepsilon_j^o} \right) - (\varepsilon_i - \beta_i^o) \delta_y}{(\varepsilon_i - \beta_i^o)^2} & \frac{d\mu_i}{d\beta_j^o} &= \frac{\varepsilon_i^o (D_y - \delta_y) - \frac{\partial \varepsilon_i^o}{\partial \beta_j^o} (\varepsilon_i - \beta_i^o)}{(\varepsilon_i - \beta_i^o)^2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\frac{dh_i}{d\varepsilon_j^o} = -\frac{2}{\sigma^u} \sigma_i^{*k} E_i (D_y - \delta_y) \quad \frac{dh_i}{d\beta_j^o} = -\frac{2}{\sigma^v} \sigma_i^{*k} E_i (D_y - \delta_y)$$

$$\frac{db_i}{d\varepsilon_j^o} = \frac{\partial \beta_i^o}{\partial \varepsilon_j^o} \sigma_i^{*k} + \beta_i^o E_i (D_y - \delta_y) \quad \frac{db_i}{d\beta_j^o} = \delta_y \sigma_i^{*k} + \beta_i^o E_i (D_y - \delta_y)$$

Można się spodziewać, że konstrukcja optymalna dla elementów $i \in B_2^{k^*}$, przy aktywnych ograniczeniach (3.30), będzie spełniać następujące warunki (dla każdego ze stanów obciążeń):

$$\left| \sigma_i^{*k} \right| = \left| \sigma_i^{*lk} + \sum_j E_i (D_y - \delta_y) (\varepsilon_j^{ok} + \beta_j^o) \right| = \sigma^v \quad (3.34)$$

Dla elementów wyeliminowanych z konstrukcji w każdym ze stanów obciążeń, przy aktywnych ograniczeniach (3.29), będą natomiast spełnione warunki:

$$\varepsilon_i^{ok} = \varepsilon_i^k \quad \text{oraz} \quad \beta_i^o = 0 \quad (3.35)$$

Zbiory $B_2^{k^*}$ określają elementy maksymalnie obciążone (dominujące) w każdym ze stanów.

Zauważmy, że niektóre wzory (3.33) na pochodne zawierają składniki $\partial \beta^o / \partial \varepsilon^o$, lub $\partial \varepsilon^o / \partial \beta^o$. Pola dystorsji plastycznych β^o , i wirtualnych ε^o , są sprzężone poprzez warunek (2.25). Pochodne dystorsji plastycznych względem wirtualnych wyznaczamy z zależności (2.27), co opisano w rozdziale 2.

3.4 Algorytmy optymalnego przeprojektowywania

W celu rozwiązania problemu optymalnego przeprojektowywania konstrukcji, ze względu na minimum objętości, zaproponowano pięć następujących algorytmów:

- 1) Analityczne gradienty + sekwencyjne programowanie kwadratowe (PK)
- 2) Analityczne gradienty + metody heurystyczne (GH)
- 3) Śledzenie ograniczeń aktywnych + metody heurystyczne (AH)
- 4) Przypadek sprężysto-plastyczny dla wielu stanów obciążeń (SW)
- 5) Iteracyjne programowanie liniowe (PL)

Podejście PK bazuje na założeniu, że gradienty funkcji celu (3.9) i ograniczeń (3.10), (3.12) są liczone według formuł analitycznych (patrz rozdział 3.2), a następnie wykorzystuje się je w algorytmie programowania kwadratowego Schittkowskiego (por. [105]). Ta technika nie daje sobie jednak rady jeśli w trakcie optymalizacji wystąpią nietypowe zjawiska mechaniczne, jak np. zmiana znaku naprężenia w elemencie (ze ściskania na rozciąganie lub odwrotnie). Zdarza się to rzadko, aczkolwiek przy pewnych kierunkach obciążenia należy takie zjawisko brać pod

uwagę. Podejście PK daje dobre wyniki dla pojedynczego stanu obciążenia, gdy rozkład naprężeń w konstrukcji jest równomierny i nie występuje zjawisko zmiany znaku naprężenia. Analiza kratownic wieloelementowych może być jednak czasochłonna. W przypadku k stanów obciążeń, działających na konstrukcję, liczba zmiennych dla n -elementowej kratownicy rośnie k razy, a liczba ograniczeń zwiększa się o $3n(k-1)$, co przyczynia się do poważnego wydłużenia czasu obliczeń. Również jakość wyników otrzymywanych dla wielu stanów obciążeń pozostawia wiele do życzenia. Mianowicie często jest tak, że nie wszystkie elementy konstrukcji są maksymalnie wyężone w przynajmniej jednym ze stanów obciążeń.

Zasadniczą cechą algorytmu GH (patrz Tabela 3.1) jest fakt, że wykorzystuje się mechaniczną wiedzę o problemie przeprojektowywania konstrukcji. Analitycznie policzone gradienty stanowią bazę dla oryginalnego algorytmu przyrostowego, wykorzystującego heurystyczną strategię eliminacji elementów. Jeśli mianowicie współczynnik modyfikacji przekroju poprzecznego μ_i spadnie poniżej pewnej wyznaczonej granicy, to element jest z konstrukcji eliminowany. Dla zbioru elementów wyeliminowanych stosuje się warunek zerowania sił wewnętrznych, co umożliwi algorytmowi szybką zbieżność. Ta technika nie napotyka na problemy w przypadku zmiany znaku naprężenia w elemencie, dzięki strategii „zamrażania” dystorsji na czas, gdy zjawisko to może wystąpić. Algorytm GH jest używany dla przypadku pojedynczego stanu obciążenia, gdyż nie zawiera wiedzy heurystycznej o ograniczeniach, potrzebnej przy analizie wielu stanów obciążeń. Skoro charakter rozwiązania dla pojedynczego stanu obciążeń jest znany (konstrukcja izostatyczna), więc algorytm GH znajduje to właśnie rozwiązanie jako jednoznacznie określone. Jednakże przy analizie kratownic wieloelementowych mogą pojawić się problemy, związane z podobnym charakterem pracy niektórych elementów i koniecznością eliminacji prętów (zgodnie z progiem nałożonym na μ_i), które potem mogłyby być przydatne w optymalnym rozwiązaniu. Wówczas algorytm znajduje jakieś minimum lokalne, mniej lub bardziej odległe od globalnego, w zależności od wielkości proggu narzuconego na μ_i .

Algorytm AH (patrz Tabela 3.2) został opracowany dla przypadku wielu stanów obciążeń w oparciu o metody heurystyczne. W przeciwieństwie do przypadku pojedynczego stanu obciążeń, dla wielu stanów istnieje konieczność śledzenia ograniczeń aktywnych (3.12), ponieważ tylko zastosowanie takiej techniki zapewnia zbieżność. Najpierw dla każdego pręta określa się dominujący (tj. o maksymalnym wyężeniu elementu) stan obciążeń, spośród wszystkich k stanów, jakim poddana jest konstrukcja. Następnie stosuje się strategię eliminacji elementów, taką jak w algorytmie GH. Po określeniu zbioru elementów wyeliminowanych, algorytm AH bada ile każdemu z pozostałych w konstrukcji elementów brakuje do maksymalnego wyężenia. Wiedząc to, wprowadza się w pozostałych prętach odpowiednie przyrosty dystorsji. W ten sposób „śledzi się” aktywne ograniczenia (3.12). Brakujące $n(k-1)$ przyrosty dystorsji, dla niedominujących stanów obciążeń, określa się ze wzoru (3.16) $\varepsilon_i = (1 - \mu_i)\varepsilon_i$, jako że współczynnik zmiany przekroju poprzecznego elementu musi być taki sam dla wszystkich stanów obciążeń. Ten algorytm znajduje rozwiązanie, w którym każdy element jest maksymalnie wyężony w przynajmniej jednym ze stanów obciążeń (*fully stressed design*). Należy, tak jak w algorytmie GH, uważnie ustawiać próg na eliminowanie elementów. Jeśli zrobi się to nieodpowiednio, to w końcowym rozwiązaniu może się okazać, że niektóre ograniczenia nie są spełnione. Dodatkową zaletą tego algorytmu

jest fakt, że można dzięki niemu uzyskać rozwiązanie dla pojedynczego stanu obciążeń, zadając dwukrotnie to samo obciążenie. Niestety algorytm AH nie prowadzi do żadnego rozwiązania, jeśli pola naprężeń wywołane przez poszczególne stany obciążeń zbyt szybko się od siebie różnią. Również dla kratownic wieloelementowych problem zbieżności może się okazać niebagatelny.

Algorytm SW jest właściwie rozszerzeniem algorytmu AH na zakres sprężysto-plastyczny. Konstrukcją wyjściową w algorytmie SW (patrz Tabela 3.3) jest optimum sprężyste dla wielu stanów obciążeń, uzyskane dzięki podejściu AH. Znając optymalne rozwiązanie sprężyste, przyjmuje się, że granica σ^p narzucona na naprężenia, pokrywa się z granicą plastyczności konstrukcji. W konsekwencji, elementy maksymalnie wyężone w każdym ze stanów obciążeń uplastyczniają się. Celem algorytmu SW jest powiększenie strefy plastycznej w każdym stanie obciążenia do maksimum. Osiąga się to przez stopniowe zmniejszanie granicy plastyczności i powtarzanie symulacji AH po każdej takiej redukcji. Ostatecznie dostajemy konstrukcję, w której strefa plastyczna obejmuje tyle elementów ile to możliwe, aby kratownica nie stała się mechanizmem. To jest właśnie sprężysto-plastyczne optimum dla wielu stanów obciążeń. Zysk materiałowy w porównaniu z optimum sprężystym dla wielu stanów obciążeń nie jest duży (kilka procent), ale fakt poszerzenia strefy plastycznej ma znaczenie dla właściwości dysypatywnych konstrukcji. Należy też pamiętać o przeskalowaniu wynikowych naprężeń i dystorsji, co wynika z obniżenia pierwotnej granicy plastyczności.

W algorytmie PL (patrz Tabela 3.4) wykorzystano iteracyjnie standardową metodę simplex do rozwiązania problemu (3.9)-(3.11), (3.13), wyrażonego przez zmienne projektowe ε_i^p oraz μ_i . Nieliniowe ograniczenia (3.10) można zapisać w formie:

$$\varepsilon_i^o = (1 - \mu_i) \varepsilon_i \quad (3.36)$$

gdzie ε_i jest określone przez (2.1b). Ograniczenia te linearyzuje się, przyjmując odkształcenia na każdej iteracji jako stałe. Zmiennymi wejściowymi dla metody simplex są współczynniki zmiany przekroju poprzecznego μ_i oraz aktualne odkształcenia. Rozwiązanie otrzymane po każdej iteracji służy do aktualizacji stanu odkształceń i dystorsji. Algorytm zatrzymuje się, gdy przyrosty zmiennych projektowych mieszczą się w przedziale żądanej dokładności. Główną zaletą tego podejścia jest jego automatyczność. Z drugiej jednak strony tracimy mechaniczną interpretację problemu. W konsekwencji algorytm PL jest pozbawiony bloku analizy jakościowej. Dlatego też bywa, że używając PL dostajemy rozwiązania niemożliwe do zaakceptowania z mechanicznego punktu widzenia, np. konstrukcja staje się mechanizmem.

Tabela 3.1 Algorytm optymalnego przeprojektowywania GH
(pojedynczy stan obciążenia, zakres sprężysty)

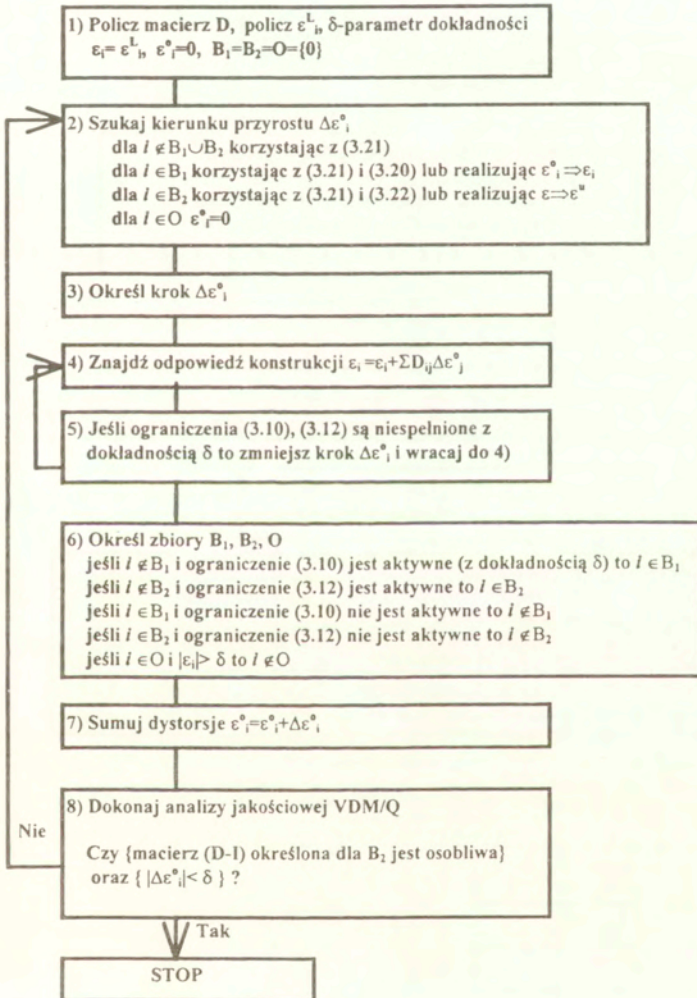


Tabela 3.2 *Algorytm optymalnego przeprojektowywania AH (wiele stanów obciążeń, zakres sprężysty)*

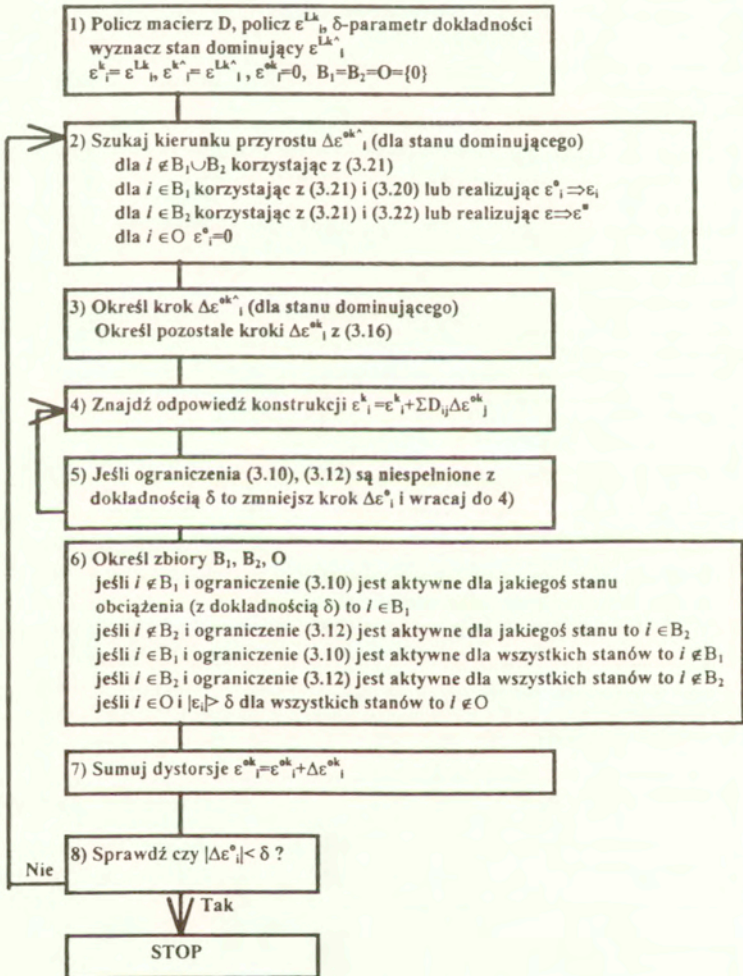


Tabela 3.3 *Algorytm optymalnego przeprojektowywania SW
(wiele stanów obciążeń, zakres sprężysto-plastyczny)*

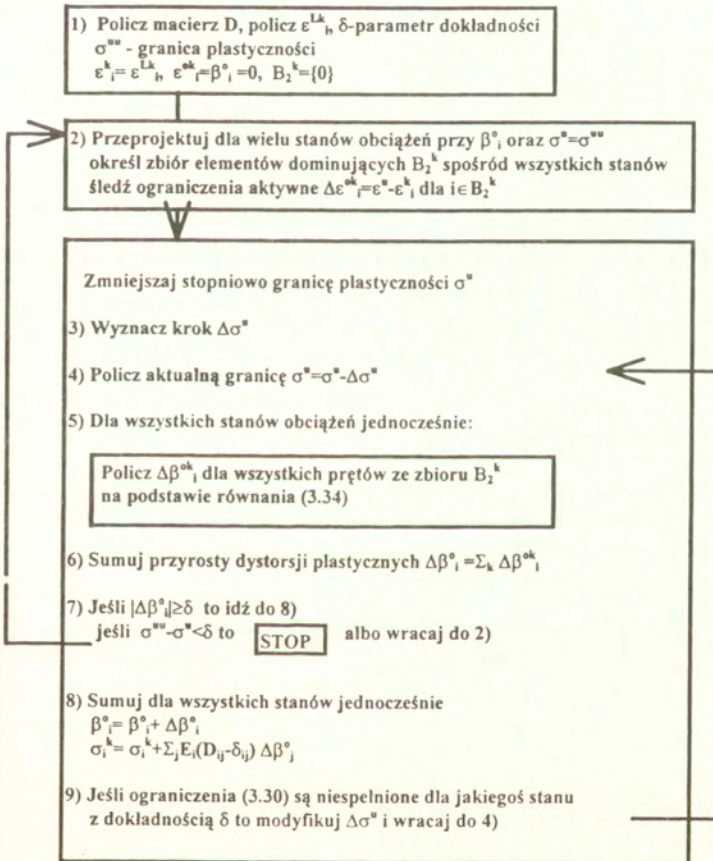
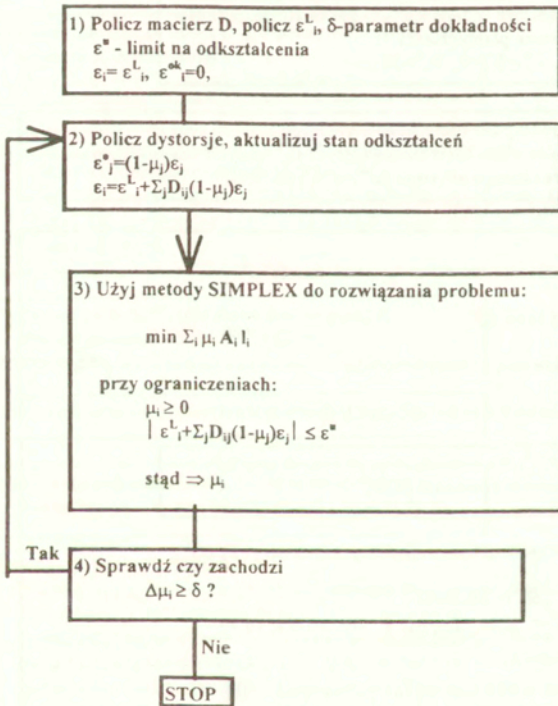
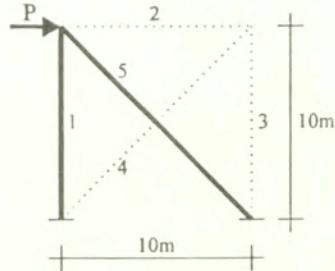


Tabela 3.4 *Algorytm optymalnego przeprojektowywania PL (pojedynczy stan obciążenia, zakres sprężysty)*



3.5 Przykłady

3.5.1 Kratownica pięcioelementowa



Rys. 3.1 Kratownica pięcioelementowa w pojedynczym stanie obciążenia

Przeanalizujemy przykład prostej kratownicy pięcioelementowej, pokazanej na Rys. 3.1., poddanej pojedynczemu stanowi obciążenia. Przyjmując początkowe przekroje poprzeczne prętów $A_1 = \dots = A_3 = 0.02011 \text{ m}^2$ oraz $A_4 = A_5 = 0.02890 \text{ m}^2$, jednakowy dla wszystkich prętów moduł Younga $E = 100 \text{ GPa}$, granicę plastyczności $\sigma^p = 34.385 \text{ MPa}$, oraz wartość siły $P = 1 \text{ MN}$, otrzymano następujący rozkład naprężeń i odkształceń w zakresie sprężystym:

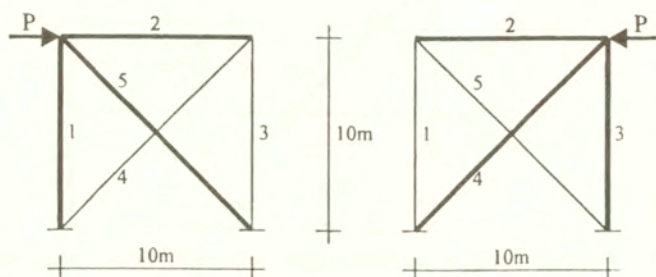
Pręt	Konstrukcja wyjściowa		Dystorsje ϵ^0	Konstrukcja przeprojektowana		Zmiana przekroju μ
	ϵ	σ [MPa]		ϵ	σ [MPa]	
1	0.285×10^{-3}	28.454	-0.154×10^{-3}	0.344×10^{-3}	49.736	1.45
2	-0.213×10^{-3}	-21.282	-0.232×10^{-3}	-0.232×10^{-3}	0.000	0.00
3	-0.213×10^{-3}	-21.282	-0.232×10^{-3}	-0.232×10^{-3}	0.000	0.00
4	0.209×10^{-3}	20.937	0.284×10^{-3}	0.284×10^{-3}	0.000	0.00
5	-0.280×10^{-3}	-27.993	0.145×10^{-3}	-0.344×10^{-3}	-48.930	1.42

Proces przeprojektowywania doprowadził do uzyskania konstrukcji izostatycznej, pogrubionej na Rys. 3.1. Całkowita objętość zmniejsza się z $V_{\text{początkowa}} = 1.42 \text{ m}^3$ do $V_{\text{optymalna}} = 0.87 \text{ m}^3$. Żadne z odkształceń w prętach konstrukcji optymalnej nie przekracza narzuconej granicy $\epsilon^p = 0.34385 \times 10^{-3}$, zgodnie z teorią przeprojektowywania. Gdyby zmienić przekroje poprzeczne konstrukcji, tak jak informuje powyższa tabela, to oba pozostające elementy (nr 1 i 5) osiągnęłyby wyznaczoną granicę naprężeń σ^p . Ten rezultat można uzyskać dowolnym z opisanych w rozdziale 3.4 algorytmów dla pojedynczego stanu obciążenia, ponieważ konstrukcja jest bardzo prosta.

Zobaczymy teraz co stanie się po przyłożeniu symetrycznego stanu obciążenia do kratownicy, tak jak pokazano na Rys. 3.2

Stan początkowy dla lewej siły pozostaje, oczywiście, taki sam, a dla prawej siły jest analogiczny, co wynika z symetrii obciążenia. Rezultaty przedstawia następująca tabela, dla każdego ze stanów obciążeń oddzielnie:

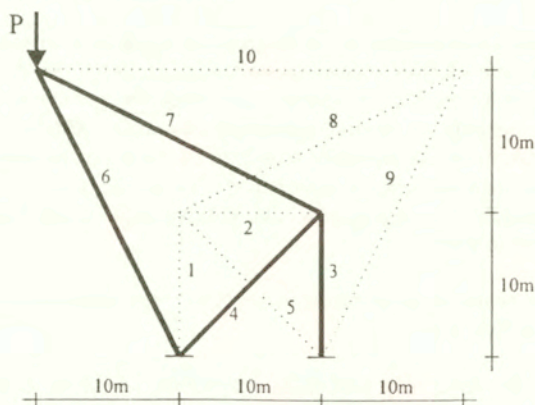
Pręt	ϵ	Lewa siła			Prawa siła			Zmiana przekroju
		ϵ^0	σ [MPa]	ϵ	ϵ^0	σ [MPa]	μ	
1	0.344×10^{-3}	0.129×10^{-5}	34.256	-0.255×10^{-3}	-0.096×10^{-5}	-25.427	1.00	
2	-0.344×10^{-3}	-0.132×10^{-5}	-21.189	-0.344×10^{-3}	-0.132×10^{-5}	-21.189	0.62	
3	-0.255×10^{-3}	-0.096×10^{-5}	-25.427	0.344×10^{-3}	0.129×10^{-5}	34.256	1.00	
4	0.255×10^{-3}	0.025×10^{-5}	23.025	-0.344×10^{-3}	-0.034×10^{-5}	-31.020	0.90	
5	-0.344×10^{-3}	-0.034×10^{-5}	-31.020	0.255×10^{-3}	0.025×10^{-5}	23.025	0.90	



Rys. 3.2 Kratownica pięcioelementowa w podwójnym stanie obciążenia

W tym wypadku każdy element osiąga granicę odkształcenia w przynajmniej jednym ze stanów obciążenia (pręt nr 2 w obu). Żaden element nie został wyeliminowany, dlatego objętość optymalna jest mniejsza od początkowej tylko o 1%. Proces przeprojektowywania zaowocował najlepszym możliwym rozkładem materiału, wyrównując wyężenie wszystkich elementów. Nawet przy tak prostym przykładzie algorytm PK ma kłopoty z uzyskaniem dokładnego rozwiązania. Powyższe rezultaty otrzymano dzięki algorytmowi AH.

3.5.2 Kratownica dziesięcioelementowa

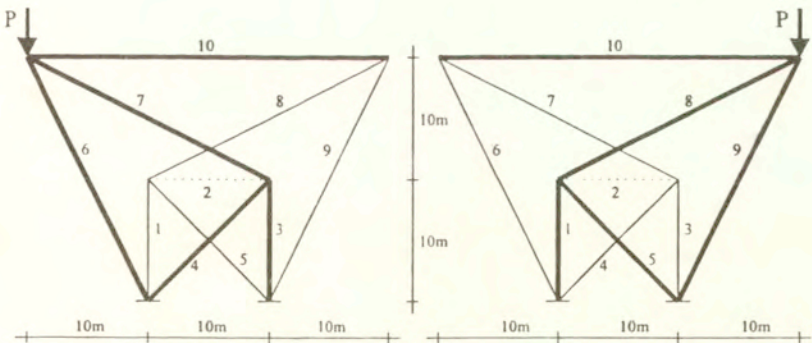


Rys. 3.3 Kratownica dziesięcioelementowa w pojedynczym stanie obciążenia

Przyjrzyjmy się z kolei kratownicy, pokazanej na Rys. 3.3, obciążonej jedną pionową siłą P . Zakładając początkowe przekroje poprzeczne prętów $A_1=\dots=A_3=0.02011\text{ m}^2$ oraz $A_4=\dots=A_{10}=0.02890\text{ m}^2$, jednakowy moduł Younga $E=100\text{ GPa}$ i granicę naprężeń $\sigma^p=34.385\text{ MPa}$, oraz przyjmując wartość siły $P=1\text{ MN}$, uzyskano następujący rozkład naprężeń i odkształceń w konstrukcji:

Pręt	Konstrukcja wyjściowa		Dystorsje ϵ^0	Konstrukcja przeprojektowana		Zmiana przekroju μ
	ϵ	σ [MPa]		ϵ	σ [MPa]	
1	-0.268×10^{-3}	-26.785	-0.283×10^{-3}	-0.283×10^{-3}	0.000	0.00
2	0.038×10^{-3}	3.834	-0.147×10^{-3}	-0.147×10^{-3}	0.000	0.00
3	0.230×10^{-3}	22.951	-0.154×10^{-3}	0.344×10^{-3}	49.736	1.45
4	-0.163×10^{-3}	-16.310	-0.018×10^{-3}	-0.344×10^{-3}	-32.620	0.95
5	0.163×10^{-3}	16.310	0.301×10^{-3}	0.301×10^{-3}	0.000	0.00
6	-0.436×10^{-3}	-43.639	0.172×10^{-3}	-0.344×10^{-3}	-51.577	1.50
7	0.099×10^{-3}	9.912	0.086×10^{-3}	0.344×10^{-3}	25.788	0.75
8	-0.159×10^{-3}	-15.876	-0.279×10^{-3}	-0.279×10^{-3}	0.000	0.00
9	0.079×10^{-3}	7.938	0.194×10^{-3}	0.194×10^{-3}	0.000	0.00
10	0.107×10^{-3}	10.650	-0.235×10^{-3}	-0.235×10^{-3}	0.000	0.00

W trakcie przeprojektowywania wyeliminowano sześć elementów, oznaczonych linią przerywaną na Rys. 3.3. Pozostałe elementy tworzą konstrukcję izostaticzną, pogrubioną na Rys. 3.3, w której każdy pręt jest maksymalnie wytyżony. Algorytm zaczyna od objętości $V_{\text{początkowa}}=4.87\text{ m}^3$, którą redukuje do $V_{\text{optymalna}}=2.13\text{ m}^3$, co stanowi znaczną oszczędność materiału. Rezultat ten osiągnięto dzięki algorytmowi GH. Algorytmy PK i IS dają takie samo rozwiązanie, gdyż konstrukcja jest jeszcze nieskomplikowana. Zobaczmy jak zmieni się zachowanie konstrukcji pod wpływem przyłożenia symetrycznej siły, tak jak pokazano na Rys. 3.4.



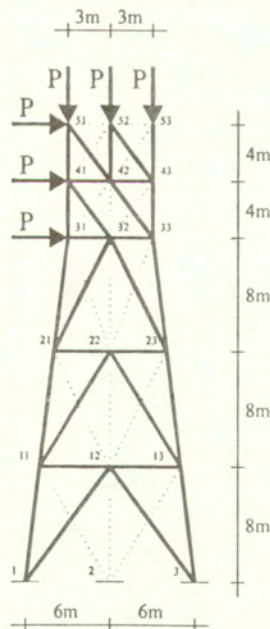
Rys. 3.4 Kratownica dziesięcioelementowa w podwójnym stanie obciążeń

Wyniki przeprojektowywania, dla każdego stanu obciążenia, zawiera tabela:

Pręt	Lewa siła			Prawa siła			Zmiana znaku μ
	ϵ	ϵ^0	σ [MPa]	ϵ	ϵ^0	σ [MPa]	
1	-0.278×10^{-3}	-0.055×10^{-3}	-22.214	0.344×10^{-3}	0.069×10^{-3}	27.522	0.80
2	-0.199×10^{-3}	-0.199×10^{-3}	0.000	-0.199×10^{-3}	-0.199×10^{-3}	0.000	0.00
3	0.344×10^{-3}	0.069×10^{-3}	27.522	-0.278×10^{-3}	-0.055×10^{-3}	-22.214	0.80
4	-0.344×10^{-3}	-0.163×10^{-3}	-18.051	0.278×10^{-3}	0.132×10^{-3}	14.570	0.52
5	0.278×10^{-3}	0.132×10^{-3}	14.570	-0.344×10^{-3}	-0.163×10^{-3}	-18.051	0.52
6	-0.344×10^{-3}	0.114×10^{-3}	-45.818	0.043×10^{-3}	-0.014×10^{-3}	5.759	1.33
7	0.344×10^{-3}	0.201×10^{-3}	14.270	-0.278×10^{-3}	-0.162×10^{-3}	-11.518	0.42
8	-0.278×10^{-3}	-0.162×10^{-3}	-11.518	0.344×10^{-3}	0.201×10^{-3}	14.270	0.42
9	0.043×10^{-3}	-0.014×10^{-3}	5.759	-0.344×10^{-3}	0.114×10^{-3}	-45.818	1.33
10	0.344×10^{-3}	0.267×10^{-3}	7.727	0.344×10^{-3}	0.267×10^{-3}	7.727	0.22

Tym razem pręt nr 2 okazał się niepotrzebny i został wyeliminowany. Wszystkie pozostałe elementy osiągają narzuconą granicę odkształceń w przynajmniej jednym ze stanów obciążenia (pręt nr 10 w obu). Wyjściowa objętość wynosi $V_{początkowa} = 4.87 \text{ m}^3$, a końcowa $V_{optymalna} = 3.20 \text{ m}^3$. Oznacza to, że pozbywając się tylko jednego pręta, zaoszczędzono 34% materiału. Wynik ten osiągnięto dzięki algorytmowi AH.

3.5.3 Model wieży wiertniczej

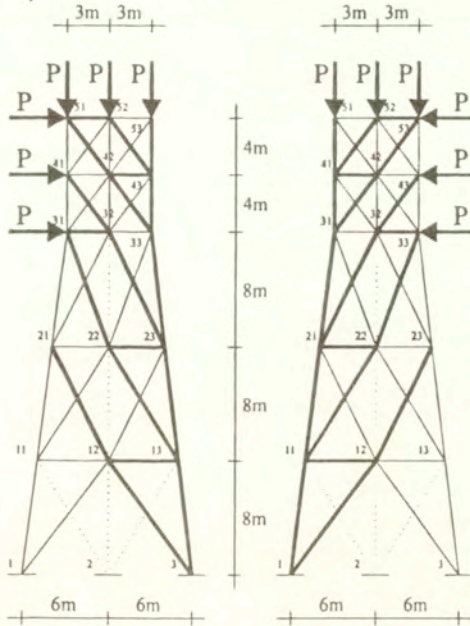


Rys. 3.5 Wieża wiertnicza w pojedynczym stanie obciążenia

Kolejny przykład (Rys. 3.5) jest płaskim modelem realnej konstrukcji inżynierskiej - wieży wiertniczej. Przyjęto do analizy następujące dane: jednakowy moduł Younga $E=100 \text{ GPa}$, taki sam przekrój poprzeczny wszystkich prętów $A=232 \text{ cm}^2$, granicę naprężeń $\sigma^p=35 \text{ MPa}$ oraz wartość siły $P=400 \text{ kN}$. Każdemu elementowi przypisany jest numer, będący złożeniem numerów początkowego i końcowego węzła. Rezultaty dla przypadku pojedynczego stanu obciążenia zawiera aneks A.

Symulacja rozpoczęła się dla konstrukcji, złożonej z 45 elementów, o objętości całkowitej $V_{\text{początkowa}}=6.56 \text{ m}^3$, i doprowadziła do 29-cio elementowej konstrukcji izostaticznej, pogrubionej na Rys. 3.5, o objętości $V_{\text{optymalna}}=4.29 \text{ m}^3$. Zaoszczędzono więc 35% materiału. Można ten wynik uzyskać dzięki algorytmowi PK, co zabiera ok. 3 minuty na komputerze PC Pentium 90. Dzięki algorytmowi GH uzyskujemy rozwiązanie w ciągu jednej minuty. Widać tu przewagę metod heurystycznych nad standardowym pakietem optymalizacyjnym.

Zbadajmy jak zmienia się odpowiedź konstrukcji po przyłożeniu drugiego, symetrycznego stanu obciążeń (Rys. 3.6).



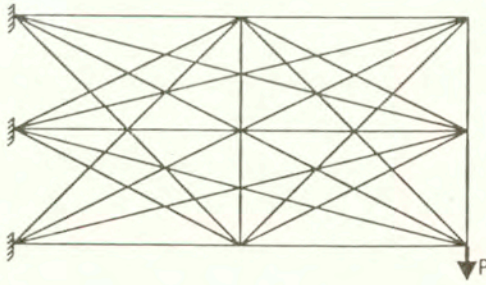
Rys. 3.6 Wieża wiertnicza w dwóch stanach obciążeń

W przypadku dwóch stanów obciążeń algorytm eliminuje tylko 5 prętów, oznaczonych linią przerywaną na Rys. 3.6. Elementy konstrukcji optymalnej, pracujące w pełnym wyężeniu, zostały pogrubione. Jednakże rozwiązanie to nie jest globalnym minimum, gdyż elementy nr 3242 oraz 4252, oznaczone gwiazdkami na wydruku wyników (aneks B), nie są maksymalnie

wyłączone w żadnym ze stanów obciążeń. Zatem, według teorii przeprojektowywania konstrukcji, oba powinny zostać wyeliminowane (wskazują na to zresztą ich końcowe przekroje poprzeczne). Rezultat ten otrzymano dzięki algorytmowi PK. Zatrzymanie się na lokalnym minimum wynika stąd, że pakiet optymalizacyjny Schittkowskiego nie bierze pod uwagę mechanicznych aspektów problemu. W każdym razie rozwiązanie to jest satysfakcjonujące, dlatego że łatwo można przewidzieć charakter globalnego minimum (należy usunąć pręty nr 3242, 4252). Całkowita objętość maleje z $V_{początkowa}=6.56 \text{ m}^3$ do $V_{końcowa}=5.57 \text{ m}^3$, to znaczy, że zaoszczędzono 15% materiału. Obliczenia tego zadania dla dwóch stanów obciążeń trwały 15 minut na komputerze PC Pentium 90, czyli znacznie dłużej niż dla przypadku pojedynczego stanu obciążenia. Pełną listę wyników zawiera aneks B.

3.5.4 Wspornik kratownicowy

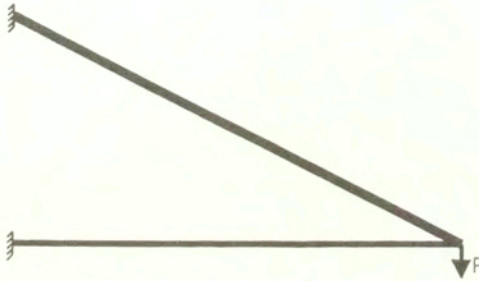
Przykład ten ma na celu odwołanie się do literatury z zakresu przeprojektowywania konstrukcji (por. Sankaranarayanan i inni [103]). Zostanie rozpatrzony wspornik kratownicowy w jednym stanie obciążenia, przy użyciu różnych siatek podziału. Konstrukcja bazowa (*ground structure*), o stosunku długości do wysokości 8:5, przy zastosowaniu siatki podziału 3x3, jest pokazana na Rys. 3.7. Przyjęto następujące dane obliczeniowe: długość $l=24 \text{ m}$, wysokość $h=15 \text{ m}$, jednakowy moduł Younga $E=100 \text{ GPa}$, jednakowe początkowe przekroje poprzeczne $A=2.545 \text{ cm}^2$, granica naprężeń $\sigma^u=10 \text{ MPa}$, wartość przyłożonej siły $P=10 \text{ kN}$.



Rys. 3.7 Konstrukcja wyjściowa wspornika kratowego przy siatce podziału 3x3

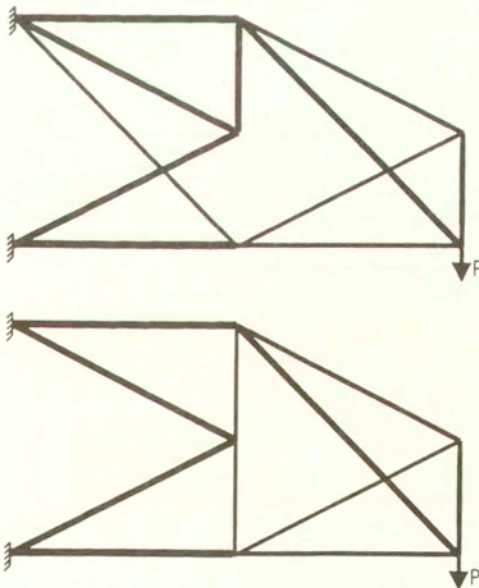
Warto poświęcić kilka słów komentarza pojęciu konstrukcji wyjściowej. Zastosowane ono zostało przez Dorna i innych (por. [29]), i było przez niego rozumiane jako sieć połączeń węzłów konstrukcji na zasadzie każdy z każdym. Obecnie również korzysta się z tak rozumianego pojęcia konstrukcji wyjściowej, ale często wprowadza się też uproszczenie, polegające na tym, że nie rozpatruje się prętów pokrywających się (*overlapping members*). Rezygnuje się również z uwzględnienia prętów międzypodporowych, ponieważ wiadomo a priori, że będą one miały zerowe przekroje poprzeczne. W przykładzie wykorzystano uproszczony model konstrukcji wyjściowej.

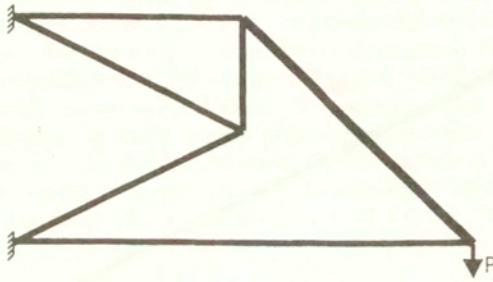
Przy zastosowaniu siatki 2x2, z pięcioma elementami wyjściowymi, otrzymano kratownicę optymalną, pokazaną na Rys. 3.8.



Rys. 3.8 Optymalny wspornik kratowy przy siatce podziału 2x2 (GH)

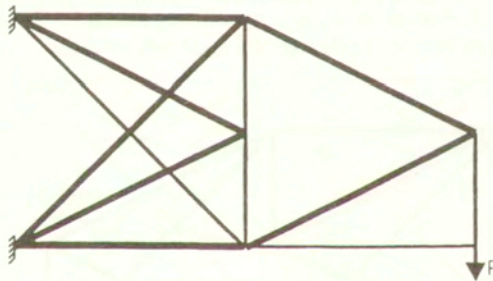
Objętość konstrukcji optymalnej dla siatki 2x2 wynosi $V_2=91.80 \times 10^3 \text{ cm}^3$. Następnie rozpatrywano siatkę 3x3 z 26-cio ma elementami konstrukcji wyjściowej (patrz Rys. 3.7). Uzyskano trzy równoważne pod względem objętości topologie ($V_3=87.60 \times 10^3 \text{ cm}^3$), pokazane na Rys. 3.9. Dwie pierwsze liczą po 11 elementów i są jednokrotnie przeszywnione, trzecia natomiast składa się z 6 elementów i jest statycznie wyznaczalna. Świadczy to o tym, że funkcja celu posiada wiele bliskich co do wartości lokalnych minimów.



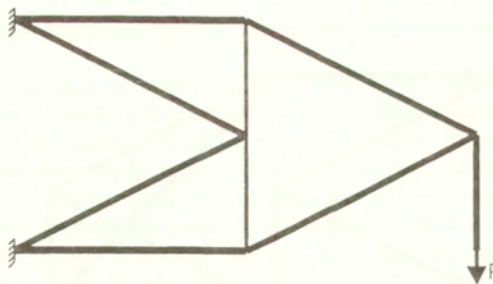


Rys. 3.9 Optymalne topologie wspornika kratowego przy siatce podziału 3x3 (GH)

Dla porównania wzięto rozwiązanie literaturowe (por. [103]), pokazane na Rys. 3.10. Ponieważ jest to konstrukcja dwukrotnie przesztywniona, więc można ją poddać optymalnemu przeprojektowaniu, stosując algorytm GH. Uzyskaną w ten sposób kratownicę przedstawia Rys. 3.11.



Rys. 3.10 Optymalna topologia przy siatce 3x3 na podstawie literatury

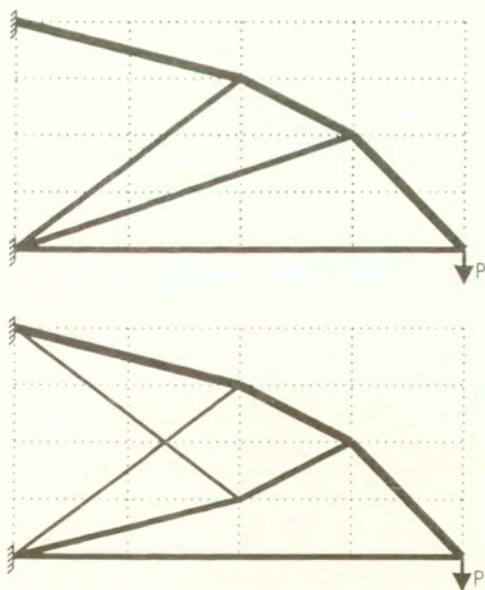


Rys. 3.11 Topologia literaturowa 3x3 po przeprojektowaniu algorytmem GH

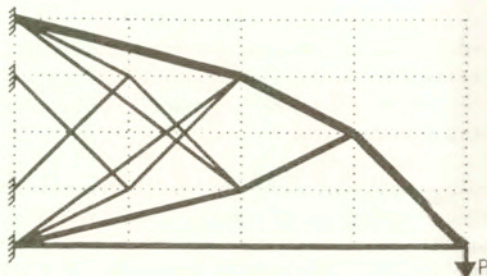
Ustrój z Rys. 3.11 jest formalnie rzecz biorąc geometrycznie zmienny, ale w tym wypadku można ten fakt zaakceptować, biorąc pod uwagę kierunek obciążenia. Objętość tej kratownicy wynosi $V_{3m}=87.60 \times 10^3 \text{ cm}^3$, a więc dokładnie tyle ile otrzymaliśmy, startując z 26-cio elementowej konstrukcji wyjściowej (por. V_3).

W ostatnim etapie analizy rozpatrzono siatkę 5×5 , przy czym nie uwzględniono pełnego grafu połączeń (196 elementów), ze względu na czas obliczeń. Konstrukcja wyjściowa miała 136 elementów. Do znalezienia rozwiązania użyto algorytmu GH. Po ponad dwugodzinnych obliczeniach na komputerze PC Pentium 90, otrzymano 6-cio elementową kratownicę optymalną o objętości $V_{3a}=80.61 \times 10^3 \text{ cm}^3$, przedstawioną na Rys. 3.12a. Alternatywnie, stosując inny próg na współczynnik modyfikacji przekroju, przy którym eliminuje się elementy, uzyskano rozwiązanie o objętości $V_{3b}=80.21 \times 10^3 \text{ cm}^3$, pokazane na Rys. 3.12b.

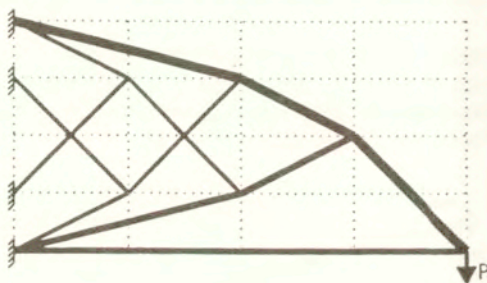
Dla porównania odwołano się do rozwiązania z literatury (por. [103]), przy zastosowaniu siatki 5×5 , pokazanego na Rys. 3.13. Ponieważ jest to konstrukcja przeszywniona, zatem została poddana przeprojektowaniu przy pomocy algorytmu GH, co doprowadziło do ustroju statycznie wyznaczalnego, przedstawionego na Rys. 3.14.



Rys. 3.12 Optymalne topologie wspornika kratowego przy siatce 5×5 (GH)



Rys. 3.13 Optymalna topologia wspornika przy siatce 5x5 na podstawie literatury



Rys. 3.14 Topologia literaturowa 5x5 po przeprojektowaniu algorytmem GH

Objętość kratownicy z Rys. 3.14 wynosi, dla przyjętych danych, $V_{3m}=80.26 \times 10^3 \text{ cm}^3$. Widzimy więc, że objętości V_{5a} oraz V_{5b} konstrukcji optymalnych, uzyskanych oryginalnie dzięki algorytmowi GH (przy uwzględnieniu 136-ciu elementów konstrukcji wyjściowej), minimalnie różnią się od V_{5m} .

W algorytmie GH niezwykle istotną sprawą jest ustalenie progu na wartość współczynnika przekroju poprzecznego, przy którym eliminuje się elementy. Rozwiązania z Rys. 3.12 zostały uzyskane przy progach na poziomie odpowiednio 9% i 7% wyjściowego przekroju. Ustalenie mniejszego progu spowoduje znaczne wydłużenie obliczeń i nie gwarantuje uzyskania globalnego minimum. Dzieje się tak dlatego, że przy gęstej siatce podziału na starcie algorytmu wiele elementów konstrukcji wyjściowej pracuje w podobnym stanie wyężenia. Na tym etapie trudno jest określić, które elementy będą później odgrywały kluczową rolę, zdarza się więc, że algorytm wyeliminuje element przynależny topologii globalnego minimum. Ponieważ fakt eliminacji pociąga za sobą automatycznie spełnienie warunku zerowania siły w takim elemencie (redystrybucja sił w całej konstrukcji), zatem w zasadzie do końca procesu optymalizacji będzie on należał do zbioru elementów wyeliminowanych, a tym samym osiągnięcie globalnego minimum jest niemożliwe. Aby temu zapobiec, należałoby opracować strategię przywracania nieopatrznie wyeliminowanych elementów.

Konstrukcje z Rys. 3.12 mają tę przewagę w stosunku do ustroju z Rys. 3.14, że składają się z mniejszej liczby elementów przy niemal takiej samej końcowej objętości. Zatem z technologicznego punktu widzenia są bardziej atrakcyjne.

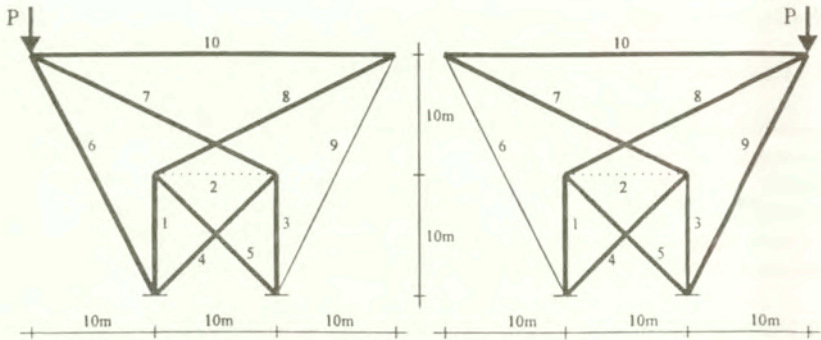
3.5.5 Kratownica dziesięcioelementowa w zakresie sprężysto-plastycznym

Przeanalizujmy teraz problem optymalnego przeprojektowywania w zakresie sprężysto-plastycznym, na przykładzie kratownicy dziesięcioelementowej (opisanej uprzednio w rozdziale 3.5.2), poddanej dwóm symetrycznym stanom obciążeń. Obowiązują przyjęte wcześniej dane. Postać przeprojektowanej kratownicy w zakresie sprężystym prezentuje Rys. 3.4. Elementy pogrubione osiągają narzuconą granicę naprężeń. Pręt nr 2, oznaczony linią przerywaną, został wyeliminowany. Optymalna objętość sprężysta wynosi $V_{sprężysta} = 3.20 \text{ m}^3$.

Aby poszerzyć strefę plastyczną dla każdego ze stanów obciążeń, możemy postąpić na trzy różne sposoby. Pierwszym z nich jest naturalne powiększenie strefy plastycznej, wynikające z odpowiedniej redystrybucji materiału, modelowanej dystorsjami, aż do momentu całkowitej utraty nośności (*natural plasticity*). Drugi sposób polega na wyposażeniu wybranych elementów konstrukcji w bezpieczniki (tzw. *structural fuses*), które utrzymują granicę plastyczności na odpowiednim poziomie i niwelują przeciążenie w pozostałych elementach konstrukcji, nie wymagając przy tym dostarczenia energii z zewnątrz. Problem najbardziej ekonomicznego rozmieszczenia tych bezpieczników wymaga zastosowania procedury optymalizacyjnej. Trzecim sposobem jest sprężenie pręta nr 10 (*external prestress*), który jest jedynym symetrycznym elementem konstrukcji, zachowanym po procesie przeprojektowania. Ten sposób wiąże się z dostarczeniem energii do układu, ale analiza ogranicza się do jednego tylko elementu. Wszystkie z opisanych powyżej sposobów prowadzą w efekcie do uzyskania tej samej objętości konstrukcji optymalnej. Nasza uwaga skupi się więc na drugim i trzecim sposobie, gdyż są one przykładem świadomego inżynierskiego wpływu na kształtowanie konstrukcji.

W algorytmie numerycznym sprężenie modeluje się przez wprowadzenie w elemencie nr 10 dystorsji przeciwnego znaku niż naprężenie. Dokonuje się tego, stopniowo zwiększając granicę plastyczności, co w efekcie prowadzi do sprężenia pręta nr 10. Rezultaty takiej symulacji przedstawia tabela:

Pręt	Lewa siła				Prawa siła		Sprężenie β^0	Przekrój μ
	σ_c [MPa]	ϵ^0	σ_{sp} [MPa]	σ_c [MPa]	ϵ^0	σ_{sp} [MPa]		
1	-27.754	-0.697x10 ⁻⁴	-38.031	34.385	0.697x10 ⁻⁴	38.040	0.0	0.82
2	0.000	-0.003x10 ⁻⁴	0.000	0.000	-0.003x10 ⁻⁴	0.000	0.0	0.00
3	34.385	0.697x10 ⁻⁴	38.040	-27.754	-0.697x10 ⁻⁴	-38.031	0.0	0.82
4	-34.385	-0.697x10 ⁻⁴	-38.040	27.754	0.697x10 ⁻⁴	38.031	0.0	0.82
5	27.754	0.697x10 ⁻⁴	38.031	-34.385	-0.697x10 ⁻⁴	-38.040	0.0	0.82
6	-34.385	-0.417x10 ⁻⁴	-38.040	4.322	0.060x10 ⁻⁴	5.434	0.0	0.89
7	34.385	0.697x10 ⁻⁴	38.040	-27.754	-0.697x10 ⁻⁴	-38.031	0.0	0.82
8	-27.754	-0.697x10 ⁻⁴	-38.031	34.385	0.697x10 ⁻⁴	38.040	0.0	0.82
9	4.322	0.060x10 ⁻⁴	5.434	-34.385	-0.417x10 ⁻⁴	-38.040	0.0	0.89
10	34.385	-0.045x10 ⁻⁴	38.040	34.385	-0.045x10 ⁻⁴	38.040	-0.199x10 ⁻³	1.01



Rys. 3.15 Kratownica dziesięcioelementowa w dwóch stanach obciążeń po przeprojektowaniu w zakresie sprężysto-plastycznym

Ostatecznie osiem elementów konstrukcji osiąga, w wyniku sprężenia pręta nr 10, granicę plastyczności $\sigma^p = 38.040 \text{ MPa}$, powiększoną o 10.6% w stosunku do pierwotnie przyjętej $\sigma^{pu} = 34.385 \text{ MPa}$ (Rys. 3.15). Należy teraz dokonać przeskalowania wyników przekrojów poprzecznych, mnożąc je przez współczynnik $\sigma^p/\sigma^{pu} = 1.106$, oraz dystorsji sprężającej w elemencie nr 10, mnożąc ją przez współczynnik $\sigma^{pu}/\sigma^p = 0.904$. Całkowita objętość konstrukcji maleje z $V_{sprężysta} = 3.20 \text{ m}^3$ do $V_{sprężysto-plastyczna} = 3.08 \text{ m}^3$, co stanowi oszczędność 4% materiału. Najbardziej istotny jest jednak fakt, że poszerzono strefę plastyczną z pięciu do ośmiu elementów w każdym stanie (por. Rys. 3.4 i 3.15), przez co poprawiono zdolności dysypatywne konstrukcji.

Tę samą końcową objętość konstrukcji można uzyskać wprowadzając dwa bezpieczniki w elementach nr 4 i 5, które posiadają największą potencjalną zdolność dysypacji energii spośród wszystkich elementów. Innymi słowy, dystorsje plastyczne wygenerowane w prętach nr 4 i 5, potrzebne do maksymalnego poszerzenia strefy plastycznej w każdym ze stanów obciążeń, są najmniejsze co do wartości bezwzględnej. W algorytmie numerycznym modeluje się konstrukcję z bezpiecznikami przez stopniowe zmniejszanie granicy plastyczności. Ostatecznie osiągnięto wartość $\sigma^p = 29.762 \text{ MPa}$, obniżoną w stosunku do pierwotnej o 13.4%. Tak jak w wypadku sprężenia, osiem elementów konstrukcji optymalnej pracuje w maksymalnym wyężeniu, na poziomie osiągniętej granicy σ^p . Po przeskalowaniu przekrojów poprzecznych (mnożąc przez $\sigma^p/\sigma^{pu} = 0.866$) oraz dystorsji plastycznych (mnożąc przez $\sigma^{pu}/\sigma^p = 1.155$), otrzymamy konstrukcję, której osiem elementów osiąga pierwotnie przyjętą granicę σ^{pu} . Całkowita objętość jest identyczna jak w przypadku sprężenia. Oto wyniki symulacji:

Pręt	Lewa siła				Prawa siła		Plastyczność	Przekrój
	σ_c [MPa]	ϵ^0	σ_{ep} [MPa]	σ_c [MPa]	ϵ^0	σ_{ep} [MPa]	β^0	μ
1	-27.754	0.131×10^{-4}	-29.762	34.385	-0.131×10^{-4}	29.764	0.0	1.04
2	0.000	-0.351×10^{-3}	0.000	0.000	-0.351×10^{-3}	0.000	0.0	0.00
3	34.385	-0.131×10^{-4}	29.764	-27.754	0.131×10^{-4}	-29.762	0.0	1.04
4	-34.385	0.131×10^{-4}	-29.764	27.754	-0.131×10^{-4}	29.762	-0.175×10^{-3}	1.04
5	27.754	-0.131×10^{-4}	29.762	-34.385	0.131×10^{-4}	-29.764	-0.175×10^{-3}	1.04
6	-34.385	0.411×10^{-4}	-29.764	4.322	-0.059×10^{-4}	4.252	0.0	1.14
7	34.385	-0.131×10^{-4}	29.764	-27.754	0.131×10^{-4}	-29.762	0.0	1.04
8	-27.754	0.131×10^{-4}	-29.762	34.385	-0.131×10^{-4}	29.764	0.0	1.04
9	4.322	-0.059×10^{-4}	4.252	-34.385	0.411×10^{-4}	-29.764	0.0	1.14
10	34.385	-0.873×10^{-4}	29.764	34.385	-0.873×10^{-4}	29.764	0.0	1.29

3.6 Podsumowanie i komentarz

Podsumujmy bieżący rozdział, poświęcony zastosowaniu metody dystorsji wirtualnych do zadania optymalnego przeprojektowywania konstrukcji.

Problem optymalnego przeprojektowywania został sformułowany w postaci poszukiwania minimum objętości ustroju, podobnie jak w wielu innych pracach na ten temat. Funkcja celu jest w oryginalny sposób wyrażona przez dystorsje wirtualne (współczynnik modyfikacji przekrojów poprzecznych μ). Ograniczenia, towarzyszące funkcji celu, nie zawierają warunków równowagi, ponieważ w przypadku zastosowania MDW nie zachodzi taka konieczność. Mianowicie macierz wpływu D , występująca w funkcji celu (pośrednio w odkształceniach), uzyskuje się jako rozwiązanie zadania MES, przez przyłożenie kolejno w każdym przęcie konstrukcji samorównoważnych par sił, odpowiadających jednostkowemu odkształceniu tego przęta. W ten sposób równania równowagi w metodzie dystorsji wirtualnych są w niejawy sposób zawsze spełnione. W zakresie sprężystym narzucono ograniczenia na odkształcenia, natomiast w zakresie sprężysto-plastycznym wybrano ograniczenia naprężeniowe, aby mieć lepszą kontrolę nad wyeliminowaniem, mogącego się pojawić, niepożądanego sprężenia.

Zaproponowano dwa sformułowania problemu: liniowe, wyrażone przez dwie zmienne projektowe μ , ϵ^p , oraz nieliniowe, wyrażone przez jedną zmienną ϵ^p . Opracowano w związku z tym szereg algorytmów optymalnego przeprojektowywania. Omówiono ich zalety i wady. Do tych pierwszych należy z pewnością zaliczyć wykorzystanie w kodach programów analitycznych gradientów funkcji celu. Niektóre z algorytmów zawierają heurystyczną wiedzę o problemie w postaci strategii eliminacji wybranych elementów, poprzez nałożenie progu na współczynnik zmiany przekroju poprzecznego μ , oraz strategii zerowania sił wewnętrznych w tych elementach. W przypadku zmiany charakteru pracy przęta w trakcie procesu przeprojektowywania stosuje się technikę „zamrażania” dystorsji, polegającą na nadaniu jej wartości bieżącego odkształcenia (zerowanie współczynnika μ). Dla wielu stanów obciążeń istotne jest śledzenie ograniczeń aktywnych, umożliwiające osiągnięcie optimum (*fully stressed design*). Fakty te powodują, że algorytmy GH, AH są efektywniejsze niż standardowe pakiety optymalizacyjne PK, PL. W przypadku prostych konstrukcji doprowadzają one szybko

do rozwiązania. Przy analizie konstrukcji wieloelementowych, pojawia się wprawdzie problem dobrania właściwej strategii eliminacji elementów, w celu osiągnięcia globalnego minimum, ale aktualnie uzyskiwane rozwiązania są bardzo bliskie temu minimum i cechują się prostszą topologią, co w praktycznych zastosowaniach jest niewątpliwą zaletą.

W rozdziale zamieszczono różne przykłady, mające podkreślić zalety stosowania MDW w optymalnym przeprojektowywaniu konstrukcji. W zakresie sprężystym uzyskiwano niejednokrotnie znaczące oszczędności materiału. W zakresie sprężysto-plastycznym (algorytm SW) optymalna kratownica ma niewiele (do kilku procent) mniejszą objętość od optimum sprężystego, ale bardzo istotny, w takim rozwiązaniu, jest fakt poszerzenia strefy plastycznej. Umożliwia to zwiększenie możliwości dysypacji energii i jest wykorzystywane przy projektowaniu konstrukcji inteligentnych (*smart structures*), wyposażonych w odpowiednie bezpieczniki (*fuse devices*), które pozwalają na kontrolowane generowanie dystorsji typu plastycznego (nieniszczących konstrukcji). W konsekwencji, umożliwia to przystosowanie się ustroju do nieoczekiwanych, ekstremalnych obciążeń np. uderzeń. Problem ten zostanie omówiony w rozdziale 4.

Należy podkreślić, że problem optymalnego przeprojektowywania konstrukcji wybrano tutaj jako jedną z wielu możliwości aplikacji analizy wrażliwości, omówionej w rozdziale 2. Zadanie to zostało potraktowane raczej jako sprawdzian efektywności algorytmów, wykorzystujących analityczne postaci gradientów funkcji celu i ograniczeń. Jednocześnie rozwiązanie problemu optymalnego przemodelowywania konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym, dla wielu stanów obciążeń, jest punktem wyjścia dla rozważań rozdziału 4.

ROZDZIAŁ 4 :

Projektowanie konstrukcji adaptowalnych na ekstremalne obciążenie

4.1 Wprowadzenie

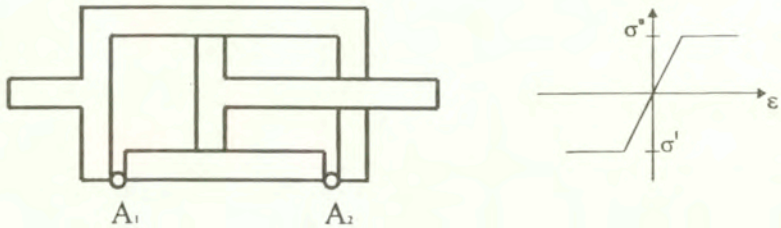
W rozdziale tym zostanie zaprezentowane zastosowanie metody dystorsji wirtualnych do rozwiązania problemu optymalnego projektowania konstrukcji adaptowalnej na ekstremalne obciążenie. Inaczej rzecz ujmując, będziemy poszukiwać takiej inteligentnej konstrukcji (*smart structure*), wyposażonej w bezpieczniki (*structural fuses*), pełniące tu rolę dysypatorów energii (*energy dissipaters*), która w warunkach ekstremalnego przeciążenia (np. zderzenia) rozproszy jego energię i, o ile to możliwe, nie ulegnie zniszczeniu. Problem dyskutowany jako zadanie quasi-statyczne, o zdefiniowanej geometrii konstrukcji, sprowadzono do optymalnego rozmieszczenia dysypatorów oraz określenia odpowiadających im naprężeń progowych, z podziałem na dwa etapy. Pierwszy ma na celu określenie redystrybucji sił na chwilę przed uaktywnieniem dysypatorów (ustalenie naprężeń progowych), drugi zaś, w optymalny dla danego obciążenia sposób, znajduje rozmieszczenie dysypatorów w ustroju. Analiza ta stanowi punkt wyjścia dla rozważań w zakresie dynamicznym. Jest to zagadnienie o szerokich zastosowaniach inżynierskich np. w lotnictwie, gdzie często występuje konieczność natychmiastowego rozproszenia energii uderzenia przez kratownicowe dźwigary kół samolotu, przy awaryjnym lądowaniu. Innym przykładem zastosowań może być kolejnictwo, gdzie ramy nośne lokomotyw projektowane są w ten sposób, aby w razie wypadku przejąć energię zderzenia czołowego i uchronić resztę taboru przed jego skutkami. Głównym problemem staje się wtedy ochrona pewnych, strategicznie istotnych części konstrukcji, z poświęceniem innych. Aby temu sprostać, należy włączyć jak najwięcej elementów ustroju do procesu aktywnego rozpraszania energii.

4.2 Idea aktywnego dysypatora energii

Zastosowanie w konstrukcji dysypatorów o zmiennych właściwościach fizycznych, dzięki odpowiedniemu dostosowaniu w nich granicy plastyczności, w zależności od kierunku obciążenia, jest aktywnym sposobem kontrolowanego rozpraszania energii. Wydaje się, że w konstrukcjach mechanicznych, narażonych na działanie nieoczekiwanych obciążeń dynamicznych o dużej wartości (np. przy zderzeniu czołowym pociągów), funkcje

dysypatorów mogłyby pełnić cylindry hydrauliczne. Schematyczną budowę takiego dysypatora przedstawia Rys. 4.1.

Załóżmy, że charakterystyka sprężysto-plastyczna, pokazana na Rys. 4.1, definiuje granice dla ściskania σ' i rozciągania σ'' , po przekroczeniu których następuje płynięcie materiału. Aktywny dysypator hydrauliczny umożliwia realizację takiej charakterystyki, poprzez utrzymywanie ciśnień w komorach cylindra (dzięki otwieraniu zaworów A_1 lub A_2), odpowiednio na poziomie $p_1 \leq \sigma'$ dla ściskania oraz $p_2 \leq \sigma''$ dla rozciągania.



Rys. 4.1 Aktywny dysypator energii

Wówczas elementy konstrukcji, wyposażone w dysypatory, zachowują się w sposób sprężysto-idealnie-plastyczny, z możliwością dowolnego, w ustalonym zakresie, ustawienia granic plastyczności. Można również przy zastosowaniu odpowiedniej strategii otwierania i zamykania zaworów wymuszać efekty wzmocnienia lub osłabienia materiału.

W rzeczywistych aplikacjach konstrukcja inteligentna będzie wyposażona:

- i) w system czujników, identyfikujących siłę i kierunek obciążenia
- ii) w dysypatory energii, zdolne do lokalnej zmiany właściwości konstrukcji
- iii) w sterownik, realizujący w czasie rzeczywistym strategię modyfikacji granic plastyczności w elementach, wyposażonych w dysypatory

W efekcie w konstrukcji inteligentnej następuje jednoczesne płynięcie (adaptacja plastyczna) w jak największej liczbie elementów, które stanowi najlepszy sposób rozproszenia energii uderzenia.

W toku rozważań zajmiemy się najpierw wyidealizowanym przypadkiem, gdy wszystkie elementy konstrukcji są aktywne (tj. wyposażone w dysypatory), pozwalającym na określenie globalnych zdolności dysypatywnych konstrukcji. Następnie przedyskutujemy możliwy do praktycznej realizacji przypadek kompromisowy tzn. taki, w którym ograniczona liczba zainstalowanych dysypatorów daje szansę znacznego zwiększenia ilości rozpraszanej energii.

4.3 Sformułowanie problemu projektowania na ekstremalne obciążenie

Zanim przystąpimy do właściwego sformułowania problemu, musimy wprowadzić kilka niezbędnych w dalszej dyskusji pojęć. Analogicznie do macierzy wpływu D , zawierającej odkształcenia konstrukcji, powstałe w wyniku wymuszenia jednostkowych odkształceń w kolejnych elementach, można wyznaczyć macierz D^σ , która zgromadzi odpowiedzi konstrukcji w naprężeniach na jednostkowe wymuszenia odkształceniowe. Zależność między obu macierzami przedstawia następujący wzór:

$$D_y^\sigma = E_i (D_y - \delta_y) \quad (4.1)$$

Można udowodnić, korzystając z twierdzenia o wzajemności prac Betti'ego, że mnożąc każdy wiersz naprężeniowej macierzy wpływu D_y^σ przez $A_i l_i$ (gdzie A_i oznacza pole przekroju poprzecznego, a l_i - odpowiednio długość i -tego elementu), uzyskamy macierz symetryczną (porównaj aneks C). Rząd macierzy $A_i l_i D_y^\sigma$ o wymiarach $n \times n$ (gdzie n oznacza liczbę elementów konstrukcji), jest równy stopniowi przeszytywnienia kratownicy k . Oznacza to, że z dowolnego pola dystorsji ϵ^o , wprowadzonego do konstrukcji, możemy uzyskać tylko $k = \text{rank}(A_i l_i D_y^\sigma)$ liniowo niezależnych stanów samorzównoważonych naprężeń rezydualnych σ^R :

$$\sigma_i^R = \sum_j D_{ij}^\sigma \epsilon_j^o \quad (4.2)$$

Jak wynika z teorii MDW (por. [52], [56]), każde pole dystorsji można jednoznacznie rozłożyć na dwa pola ortogonalne, przy czym składnik ϵ^R odpowiada ciągłej deformacji konstrukcji, natomiast składnik $-\sigma^R/E$ odpowiada powstałemu stanowi samorzównoważonych naprężeń:

$$\epsilon_i^o = \epsilon_{ci}^o + \epsilon_n^o = \epsilon_i^R - \frac{\sigma_i^R}{E_i} \quad (4.3)$$

Ortogonalność obu składników pociąga za sobą warunek:

$$\sum_i A_i l_i \epsilon_i^R \sigma_i^R = 0 \quad (4.4)$$

Przyjmijmy, że λ i ϵ^o są odpowiednio wartością własną i znormalizowanym wektorem własnym macierzy $A_i l_i D_y^\sigma$. Prowadzi to do relacji:

$$\sum_i \sum_j \epsilon_i^o A_i l_i D_{ij}^\sigma \epsilon_j^o = \lambda \quad (4.5)$$

Podstawiając (4.2) do (4.5), a następnie wykorzystując (4.3) i (4.4), dostajemy następującą formułę na wyznaczenie wartości własnej λ :

$$\lambda = -\sum_i \frac{A_i l_i}{E_i} (\sigma_i^R)^2 \quad (4.6)$$

Z powyższego wynika, że wszystkie niezerowe wartości własne naprężeniowej macierzy wpływu $A_i l_i D_{ij}^\sigma$ są ujemne (porównaj aneks C).

Sformułujmy teraz postać funkcji rozpraszania energii obciążenia zewnętrznego przez konstrukcję:

$$f = \sum_i A_i l_i \sigma_i \varepsilon_i^o \quad (4.7)$$

przy czym:

$$\sigma_i = \sigma_i^L + \sigma_i^R = \sigma_i^L + \sum_j D_{ij}^\sigma \varepsilon_j^o \quad (4.8)$$

Wektor σ_i^L reprezentuje rozkład naprężeń, powstały w wyniku przyłożenia obciążenia zewnętrznego. Wektor dysypatywnych dystorsji plastycznych ε_i^o , który modeluje pracę rozmieszczonych w konstrukcji dysypatorów, musi dla każdego elementu spełniać warunek:

$$\sigma_i \varepsilon_i^o \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, \dots, n \quad (4.9)$$

Oznacza to, że wykluczamy z rozważań możliwość sprężenia konstrukcji, ponieważ jest to związane z koniecznością dostarczenia energii do układu. Zakładamy sprężysto-idealnie-plastyczne zachowanie konstrukcji, przy warunku:

$$|\sigma_i| \leq \sigma^* \quad (4.10)$$

Przyjmujemy też, że wszystkie składniki wektora σ_i^L są niezerowe. W przeciwnym wypadku niepracujące elementy konstrukcji można wykluczyć z rozważań.

Z zasady prac wirtualnych (por. [56]) wynika, że pole naprężeń σ_i^L , odpowiadające w sposób liniowy ciąglemu polu odkształceń ε_i^L ($\sigma_i^L = E \varepsilon_i^L$), jest ortogonalne do każdego z samorównoważnych pól naprężeń rezydualnych σ_i^R .

$$\sum_i A_i l_i \sigma_i^L \sigma_i^R = 0 \quad (4.11)$$

Wobec (4.3), (4.4) oraz (4.11), funkcję rozpraszania energii (4.7) można wyrazić w postaci:

$$f = f_r + f_c = \sum_i \sum_j A_{ij} D_{ij}^{\sigma} \varepsilon_{ij}^{\sigma} + \sum_i A_{ci} \sigma_i^L \varepsilon_{ci}^{\sigma} \quad (4.12)$$

Kwadratowa część funkcji dysypacji f_r odpowiada k -wymiarowej przestrzeni samorównoważnych naprężeń, wywołanych przez dystorsje $\varepsilon_{ri}^{\sigma}$, natomiast część liniowa f_c odpowiada $n-k$ -wymiarowej przestrzeni ciągłych deformacji, wywołanych przez dystorsje $\varepsilon_{ci}^{\sigma}$. Pamiętając o ortogonalnym rozkładzie dystorsji można łatwo pokazać, że warunek (4.10) stanowi ograniczenie tylko dla składnika $\varepsilon_{ri}^{\sigma}$, gdyż składnik $\varepsilon_{ci}^{\sigma}$ nie wywołuje w konstrukcji żadnych naprężeń. Macierz $A_{ij} D_{ij}^{\sigma}$ jest niedodatnio określona, co oznacza, że jej wszystkie k niezerowe wartości własne są ujemne.

Sformułujmy zatem problem maksymalizacji funkcji rozpraszania energii f . Niestety, zadanie to samo w sobie nie jest dobrze zdefiniowane. Można na przykład założyć, że składnik $\varepsilon_{ri}^{\sigma}$ jest zerowy, a składnik $\varepsilon_{ci}^{\sigma}$ proporcjonalny do odpowiedzi konstrukcji na obciążenie zewnętrzne ($\varepsilon_{ci}^{\sigma} = a \sigma_i^L$). Zauważmy, że współczynnik a może wtedy rosnać do nieskończoności, bez naruszenia ograniczeń (4.9) i (4.10), co oznacza jednoczesny przyrost wartości funkcji f . Jednak interpretacja fizyczna składnika dystorsji $\varepsilon_{ci}^{\sigma}$ natychmiast ogranicza jego wartość. Jest on mianowicie odpowiedzialny za przyrost deformacji konstrukcji i w związku z tym musi być kontrolowany.

Zadanie określenia maksymalnej energii, jaką przy danym obciążeniu może rozproszyć konstrukcja, rozwiążemy na poniżej opisane dwa sposoby.

4.3.1 Maksimum rozpraszanej energii przy minimum deformacji konstrukcji

To sformułowanie ($\max f_r$, $\min f_c$) prowadzi do rozwiązania problemu maksymalizacji pierwszego składnika funkcji celu f_r (kryterium główne) oraz do minimalizacji drugiego składnika f_c (kryterium drugorzędne). Wykorzystuje ono fakt redystrybucji naprężeń w konstrukcji tuż przed zderzeniem, wywołany odpowiednim ustawieniem dysypatorów. Rozpraszanie energii wskutek przyrostu deformacji konstrukcji w procesie adaptacji plastycznej jest zminimalizowane. Zadanie to można podzielić na dwa etapy:

$$\text{Etap 1: } \max f \quad (4.13)$$

gdzie funkcja f jest wyrażona przez (4.12), przy spełnieniu (4.10), oraz podlega następującym ograniczeniom na dystorsje:

$$|\varepsilon_i^{\sigma}| \leq \varepsilon^u \quad (4.14)$$

Etap 1 prowadzi do uzyskania rozwiązania $\dot{\varepsilon}_i^{\sigma} = \dot{\varepsilon}_{ci}^{\sigma} + \dot{\varepsilon}_{ri}^{\sigma}$.

$$\text{Etap 2a: } \min f \quad (4.15a)$$

gdzie funkcja f , wyrażona przez (4.12), spełnia (4.14) tzn. $|\varepsilon_i^* + \varepsilon_i^p| \leq \varepsilon^u$, oraz następujące ograniczenia:

$$\sum_i \sum_j A_i l_j D_{ij}^o \varepsilon_j^* \varepsilon_i^o = 0 \quad (4.16)$$

$$(\varepsilon_i^* + \varepsilon_i^o) \sigma_i \geq 0 \quad (4.17)$$

przy czym $\varepsilon_i^* = \varepsilon_{ci}^* + \varepsilon_{ri}^* = \text{const.}$ jest rozwiązaniem Etapu 1.

Etap 1 prowadzi do redystrybucji naprężeń, maksymalizującej składnik f_r funkcji celu (4.12), przy maksymalnie rozwiniętym składniku dystorsji ε_{ci}^p (wiele aktywnych ograniczeń (4.14)). Etap 2a niweluje niepożądany rozwój ε_{ci}^p , spełniając przy tym postulat dysypatywnego charakteru dystorsji (4.9) w formie (4.17). Ponieważ $\varepsilon_i^* = \text{const.}$ oraz ε_i^* jest ortogonalne do ε_i^p (patrz 4.16), zatem Etap 2a minimalizuje składnik f_c funkcji celu (4.12), który jest miarą końcowej deformacji konstrukcji, wywołanej przez $\varepsilon_i^* + \varepsilon_i^p$. Ograniczenie (4.16), nie nałożone w Etapie 1, pozwala na wygenerowanie tylko składnika ε_{ci}^p dystorsji w Etapie 2a, podczas gdy ograniczenie (4.17) zapewnia dysypatywny charakter tego składnika (bez konieczności sprężania konstrukcji). W rozdziale (4.4) pokażemy, że dodatkowym efektem rozwiązania Etapu 2a jest optymalna lokalizacja k dysypatorów (gdzie k jest stopniem przesztywnienia kratownicy), prowadząca do maksymalizacji składnika f_r funkcji celu (4.12).

4.3.2 Maksimum rozpraszanej energii przy technologicznych ograniczeniach na dystorsje plastyczne

To sformułowanie prowadzi do rozwiązania problemu ($\max f_r, \max f_c$), przy spełnieniu warunku (4.14), ograniczającego dystorsje plastyczne. Tutaj jednak zależności (4.14), w przeciwieństwie do zadania (4.3.1), nabierają realnego wymiaru ograniczeń technologicznych, związanych ze skończonym skokiem tłoka w cylindrze dysypatora. W tym sformułowaniu wykorzystuje się głównie składnik f_c funkcji celu (4.12), pozwalając na maksymalne odkształcenia prętów konstrukcji, które są ograniczone przez narzuconą granicę na dystorsje plastyczne. Analogicznie do zadania opisanego w (4.3.1), można ten problem podzielić na dwa etapy. Etap 1 jest taki sam jak poprzednio (zdefiniowany przez (4.13) oraz (4.10) i (4.14)). Etap 2b wyrazimy jako:

$$\text{Etap 2b: } \max f \quad (4.15b)$$

gdzie funkcja f , wyrażona przez (4.12), spełnia (4.14), (4.16) i (4.17), przy czym $\varepsilon_i^* = \varepsilon_{ci}^* + \varepsilon_{ri}^* = \text{const.}$ jest rozwiązaniem Etapu 1.

Etap 2b, alternatywny do Etapu 2a, umożliwia znalezienie optymalnego rozwiązania z maksymalnym wkładem składnika f_c funkcji celu (4.12) w rozpraszanie energii (zgodnie z warunkami (4.14)). Zauważmy, że rozwiązanie problemu (4.3.2) można uzyskać dla

nieznanego rozkładu dysypatorów (wszystkie elementy mogą być aktywne), rozkładu k dysypatorów, otrzymanego w (4.3.1), lub w jakiś inny sposób.

Zarówno problem (4.3.1) jak i (4.3.2) jest zdefiniowany dla a priori znanej wielkości oraz kierunku obciążenia zewnętrznego, reprezentowanego przez wektor σ^l . W rozdziale 4.6 przedstawimy również propozycję rozwiązania kompromisowego, określającego rozmieszczenie dysypatorów dla nieznanego obciążenia, tak jak się to dzieje w realnych konstrukcjach.

4.4 Rozwiązanie numeryczne

W rozwiązaniu numerycznym funkcja celu dla Etapu 1, wyrażonego przez (4.13), (4.10), (4.14), ma postać:

$$f(x) = x^T \left(\frac{I}{2} Ax + b \right) \quad (4.18)$$

gdzie $A := A_{ij} D_{ij}^{\sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b := A_{ij} \sigma_{ij}^l \in \mathbb{R}^n$ oraz $x := \varepsilon_{ij}^p \in \mathbb{R}^n$. Macierz A jest rzeczywista, symetryczna i niedodatnio określona, przy czym $\text{rank}(A) = k$. Wobec (4.18), gradient funkcji celu, ze względu na zmienną x , wyraża się wzorem:

$$\nabla f = Ax + b \quad (4.19)$$

Rozkład widmowy macierzy A jest następujący:

$$A = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + \dots + \lambda_k v_k v_k^T \quad (4.20)$$

przy czym k rzeczywistych wartości własnych $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq 0$, oraz odpowiadających im wektorów własnych v_i , tworzy k -wymiarową podprzestrzeń $L_{\tau} := \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Wprowadzając drugą podprzestrzeń $L_c := \text{span}\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$, dowolny wektor $x \in \mathbb{R}^n$ można przedstawić jako sumę (por. (4.3)):

$$x = x_{\tau} + x_c \quad (4.21)$$

przy czym $x_{\tau} \in L_{\tau}$, $x_c \in L_c$ oraz $x_{\tau}^T x_c = 0$.

Oznaczając rzędy macierzy A przez a_i , gdzie $i = 1, \dots, n$, Etap 1 prowadzi do następującego zadania programowania kwadratowego:

$$\max \left(\frac{I}{2} x^T Ax + b^T x \right) \quad (4.22)$$

przy ograniczeniach:

$$|a_i^T x + b_i| \leq \sigma^u \quad (4.23)$$

$$|x_i| \leq \varepsilon^u \quad (4.24)$$

gdzie σ^u i ε^u są dodatnimi stałymi. Zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest zwarty. Jeśli jest niepusty to ciągłość funkcji celu zapewnia istnienie optymalnego rozwiązania x^* , które można w następujący sposób rozłożyć (por. (4.21)):

$$x^* = x_r^* + x_c^* \quad (4.25)$$

Analityczna forma gradientu funkcji celu (4.19) jest wykorzystana w procedurze optymalizacyjnej TOLMIN (por. [92]). Metodę rozwiązania (poprzez zbiór zmiennych aktywnych) opisuje Powell (por. [91]). Stosuje się ją dla zdegenerowanych ograniczeń liniowych, tak jak ma to miejsce w naszym przypadku.

Mając na uwadze ortogonalny rozkład rozwiązania optymalnego (4.25) i wiedząc, że $b \in L_c$ (por. (4.11)), możemy przedstawić funkcję celu f w postaci (por. (4.12)):

$$f(x) = (x_r^* + x_c^*)^T (A(x_r^* + x_c^*) + b) = \dots = (x_r^*)^T A x_r^* + (x_c^*)^T b \quad (4.26)$$

Ignorując składnik rozwiązania x_c^* oraz przyjmując składnik x_r^* jako stały, Etap 2a prowadzi do następującego zadania programowania liniowego:

$$\min (b^T y + (x_r^*)^T A x_r^*) \quad (4.27)$$

przy czym drugi składnik w (4.27) jest stały. Wektor niewiadomych $y \in \mathbb{R}^n$ jest ortogonalny do podprzestrzeni L_r (por. (4.16)):

$$\begin{cases} y^T v_1 = 0 \\ y^T v_2 = 0 \\ \dots \\ y^T v_k = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

i wraz z x_r^* spełnia ograniczenia (4.17), w postaci:

$$(x_n^* + y_i) (a_i^T x_n^* + b_i) \geq 0 \quad (4.29)$$

oraz:

$$|x_n^* + y_n| \leq \varepsilon^n \quad (4.30)$$

Problem (4.27) z k liniowo niezależnymi ograniczeniami (4.28), wyrażonymi przez pomocnicze zmienne $z = x_r^* + y$, oraz z n ograniczeniami (4.29) i n ograniczeniami (4.30), można przedstawić w standardowej formie zadania programowania liniowego. Z teorii programowania liniowego wynika, że jeśli obszar dopuszczalny jest niepusty i istnieje rozwiązanie, to w zbiorze rozwiązań optymalnych istnieje przynajmniej jeden wektor (tzw. bazowe rozwiązanie dopuszczalne), który ma nie więcej niż k niezerowych składników (por. Gill [32]). Problem (4.27)–(4.29) można więc rozwiązywać numerycznie stabilną wersją metody simplex, opartą na dekompozycji QR, wykorzystującą technikę obrotów Givensa (por. Kozłowska, Maćkiewicz [72]).

Podsumujmy powyższe rozważania w następującej konkluzji:

Jeśli istnieje rozwiązanie problemu maksymalizacji rozpraszania energii poprzez redystrybucję naprężeń ($\max f_r$, $\min f_c$) to może być ono zrealizowane przez wygenerowanie k dystorsji plastycznych w konstrukcji, gdzie k jest stopniem przeszywnienia kratownicy.

Istotny przy tym jest fakt, że optymalne rozmieszczenie k aktywnych elementów w konstrukcji (tj. wyposażonych w dysypatory) można znaleźć jako efekt zastosowania metody simplex, bez uciekania się do kosztownych procedur programowania całkowitego.

Etap 2b zadania maksymalizacji rozpraszania energii ($\max f_r$, $\max f_c$) prowadzi do następującego problemu:

$$\max \left(b^T y + (x_r^*)^T A x_r^* \right) \quad (4.31)$$

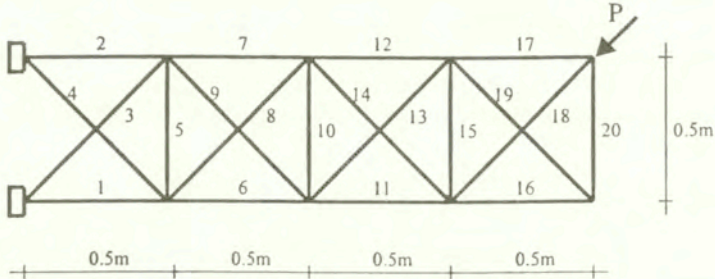
przy ograniczeniach (4.28), (4.29) oraz (4.30).

Można się spodziewać rozwiązania z wieloma aktywnymi ograniczeniami (4.30) w tym przypadku.

4.5 Przykład kratownicy

Zademonstrujmy koncepcję konstrukcji inteligentnej na przykładzie kratownicy, pokazanej na Rys. 4.2, obciążonej statycznie siłą P . Każdy z segmentów konstrukcji jest jednokrotnie przeszywniony, zatem stopień przeszywnienia całości wynosi $k=4$. Dla wszystkich elementów przyjęto jednakowy moduł Younga $E=100 \text{ GPa}$, przekroje poprzeczne $A=1.60 \text{ cm}^2$ i granicę plastyczności $\sigma^u=120 \text{ MPa}$.

Wyznaczono siłę krytyczną, powodującą zniszczenie konstrukcji wskutek uplastycznienia elementów nr 1 i 2, o wartości $P_c=9070\text{ N}$. Pozwalając na osiągnięcie w elementach nr 1 i 2 technologicznych ograniczeń na dystorsje $|\epsilon^p|=0.03$ (maksymalne wykorzystanie dysypatorów), rozpraszana energia osiąga wartość $U=5.760 \times 10^2\text{ J}$ (przypadek NP_c na Rys. 4.3), wskutek gwałtownego przyrostu odkształceń w elementach nr 1 i 2. Postać deformacji konstrukcji pokazuje Rys. 4.4.



Rys. 4.2 Kratownica dwudziestoelementowa poddana ekstremalnemu obciążeniu

Następnie znaleziono największe obciążenie, powodujące sprężystą odpowiedź konstrukcji, o wartości $P_o=7920\text{ N}$. Dla tej siły rozwiązano problem maksymalizacji rozpraszanej energii przy warunku zachowania minimalnych deformacji ($\max f_r$, $\min f_c$). Zgodnie z konkluzją z rozdziału 4.4, uzyskano $k=4$ dystorsje w elementach nr 3, 9, 13, 19, o wartościach $\epsilon^p_3=-0.00003$, $\epsilon^p_9=0.00025$, $\epsilon^p_{13}=-0.00042$, $\epsilon^p_{19}=0.00025$. Wartość rozproszonej wskutek redystrybucji naprężeń energii wynosi $U=0.014 \times 10^2\text{ J}$ (przypadek SP_o na Rys. 4.3). Listę naprężeń po redystrybucji zawiera Tabela 4.1.

Tabela 4.1

$\sigma_1=-120.00\text{ MPa}$	$\sigma_2=-78.13\text{ MPa}$	$\sigma_{11}=-39.67\text{ MPa}$	$\sigma_{16}=-6.18\text{ MPa}$
$\sigma_2=89.71\text{ MPa}$	$\sigma_7=61.67\text{ MPa}$	$\sigma_{12}=10.23\text{ MPa}$	$\sigma_{17}=-6.18\text{ MPa}$
$\sigma_3=-28.01\text{ MPa}$	$\sigma_4=-37.79\text{ MPa}$	$\sigma_{13}=-14.47\text{ MPa}$	$\sigma_{18}=-40.69\text{ MPa}$
$\sigma_4=21.42\text{ MPa}$	$\sigma_9=11.64\text{ MPa}$	$\sigma_{14}=34.96\text{ MPa}$	$\sigma_{19}=8.74\text{ MPa}$
$\sigma_5=11.58\text{ MPa}$	$\sigma_{10}=2.00\text{ MPa}$	$\sigma_{15}=4.03\text{ MPa}$	$\sigma_{20}=-6.18\text{ MPa}$

Rozpraszana energia rośnie do wartości $U=16.798 \times 10^2\text{ J}$ (przypadek AP_o na Rys. 4.3), jeśli nie będziemy ograniczać wpływu składnika ϵ^p_c dystorsji w funkcji celu, tzn. gdy rozwiązujemy problem ($\max f_r$, $\max f_c$). Wówczas w 19 elementach kratownicy (oprócz elementu nr 10) powstają dystorsje o wartościach $\epsilon^p_3=0.00001$, $\epsilon^p_8=-0.00297$, $\epsilon^p_{13}=-0.00154$, $\epsilon^p_{19}=0.00247$ oraz $|\epsilon^p|=0.03$ (ograniczenia aktywne dla reszty elementów). Redystrybucja naprężeń jest taka sama jak w przypadku SP_o (patrz Tabela 4.1).

Jeśli postanowimy ograniczyć liczbę dysypatorów do pięciu (w elementach nr 1, 3, 9, 13, 19 czyli tylko o jeden więcej niż w przypadku SP_o), to uzyskana wartość rozpraszanej energii

wyniesie $U=3.373 \times 10^2 J$ (przypadek CP₀ na Rys. 4.3). Zatem w porównaniu z przypadkiem SP₀ stanowi to wzrost o ponad dwa rzędy wielkości, głównie wskutek powstania maksymalnej, dopuszczalnej dystorsji $\epsilon^p_1 = -0.03$. Poszukujemy dalej rozwiązania kompromisowego, takiego, w którym rozsądna liczba dysypatorów pozwoli nam na zbliżenie się do wyniku idealnej dysypacji (przypadek AP₀). Rozmieścimy więc dysypatory w elementach nr 1, 3, 7, 9, 11, 13, 18, 19, kierując się rozwiązaniem SP₀ i dodatkowo wybierając po jednym, najbardziej przeciążonym elemencie z każdego segmentu kratownicy. Uzyskujemy wówczas wartość $U=8.400 \times 10^2 J$ rozpraszanej energii (przypadek BP₀ na Rys. 4.3), co stanowi 50% idealnej dysypacji.

W kolejnym etapie analizy zwiększamy intensywność obciążenia do wartości $P_1 = 1.14 P_0 = 9030 N$, co odpowiada maksymalnemu uplastycznieniu elementu nr 1 (tuż przed uplastycznieniem elementu nr 2). Naturalna (bez dysypatorów) sprężysto-plastyczna odpowiedź konstrukcji prowadzi do wartości $U = A l \sigma^p \epsilon^p_1 = 1.60 \text{ cm}^2 \times 50 \text{ cm} \times (-120) \text{ MPa} \times (-0.00133) = 0.128 \times 10^2 J$ rozpraszanej energii, wskutek powstania dystorsji plastycznej $\epsilon^p_1 = -0.00133$ w elemencie nr 1.

Rozwiązując problem (max f_r , min f_c), uzyskujemy wartość $U=0.018 \times 10^2 J$ rozpraszanej energii (przypadek SP₁ na Rys. 4.3), dzięki dystorsjom powstałym w elementach 4, 9, 13, 19. Wartości dystorsji wynoszą odpowiednio $\epsilon^p_4 = 0.00070$, $\epsilon^p_9 = 0.00028$, $\epsilon^p_{13} = -0.00048$, $\epsilon^p_{19} = 0.00028$. Redystrybucję naprężeń przedstawia Tabela 4.2.

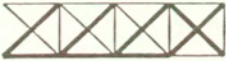
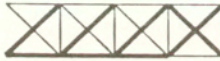
Tabela 4.2

$\sigma_1 = -120.00 \text{ MPa}$	$\sigma_6 = -91.09 \text{ MPa}$	$\sigma_{11} = -68.01 \text{ MPa}$	$\sigma_{16} = -7.08 \text{ MPa}$
$\sigma_2 = 119.67 \text{ MPa}$	$\sigma_7 = 68.69 \text{ MPa}$	$\sigma_{12} = 11.88 \text{ MPa}$	$\sigma_{17} = -7.08 \text{ MPa}$
$\sigma_3 = -36.24 \text{ MPa}$	$\sigma_8 = -40.63 \text{ MPa}$	$\sigma_{13} = -16.80 \text{ MPa}$	$\sigma_{18} = -46.48 \text{ MPa}$
$\sigma_4 = 0.23 \text{ MPa}$	$\sigma_9 = 15.83 \text{ MPa}$	$\sigma_{14} = 39.69 \text{ MPa}$	$\sigma_{19} = 10.01 \text{ MPa}$
$\sigma_5 = 28.58 \text{ MPa}$	$\sigma_{10} = 0.68 \text{ MPa}$	$\sigma_{15} = 4.80 \text{ MPa}$	$\sigma_{20} = -7.08 \text{ MPa}$

Jeśli nie ograniczamy wpływu składnika ϵ^p_c dystorsji w funkcji celu, to w rozwiązaniu problemu (max f_r , max f_c) otrzymamy wartość $U=19.155 \times 10^2 J$ rozpraszanej energii (przypadek AP₁ na Rys. 4.3). Wtedy w 18 prętach kratownicy (oprócz elementów nr 5 i 10) powstają dystorsje o wartościach $\epsilon^p_3 = -0.00293$, $\epsilon^p_8 = -0.00297$, $\epsilon^p_{13} = -0.00155$, $\epsilon^p_{19} = 0.00282$ oraz $|\epsilon^p_1| = 0.03$ (ograniczenia aktywne dla reszty elementów). Redystrybucja naprężeń jest taka jak w przypadku SP₁. Wynikowe odkształcenia pokazuje Rys. 4.5, przy czym widać, że efekt aktywnej adaptacji plastycznej konstrukcji jest podobny do powstania czterech przegubów plastycznych (w każdym segmencie), zamiast jednego, tak jak w przypadku naturalnym (por. Rys. 4.4).

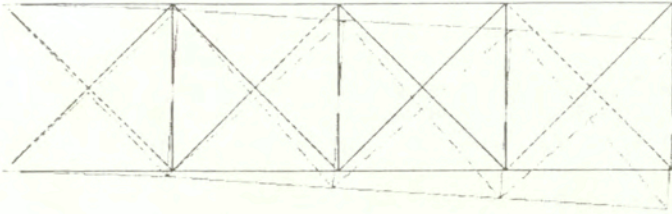
Postępując w analogiczny sposób jak dla siły P_0 przy poszukiwaniu rozwiązań kompromisowych, uzyskamy wartość $U=2.898 \times 10^2 J$ rozpraszanej energii (przypadek CP₁ na Rys. 4.3), gdy rozmieścimy 5 dysypatorów w elementach nr 2, 4, 9, 13, 19. Jeśli zdecydujemy się na 8 dysypatorów w elementach nr 2, 4, 7, 9, 11, 13, 18, 19 to wartość rozpraszanej energii wynosi $U=8.640 \times 10^{-3} J$ (przypadek BP₁ na Rys. 4.3), co stanowi 45% idealnej dysypacji.

rozpraszanie energii

AP₀AP₁DP₀DP₁BP₀BP₁CP₀CP₁NP_cSP₀NP₁SP₁

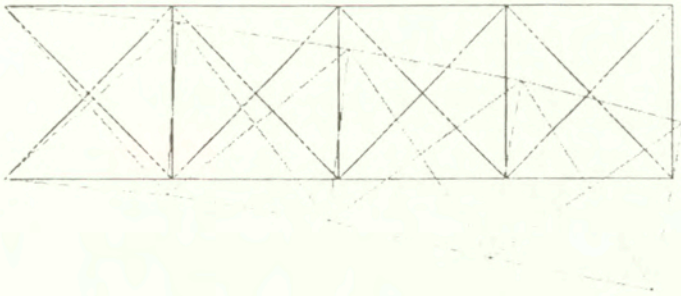
poziom obciążenia

Rys. 4.3 Mapa rozmieszczeń dysypatorów w konstrukcji z odpowiadającym poziomem rozpraszania energii



Rys. 4.4 Postać deformacji sprężysto-plastycznej, odpowiadającej naturalnemu rozpraszaniu energii (przypadek NP₂)

Warto zauważyć, że zwiększenie obciążenia z P_0 na P_1 spowodowało zmianę w rozmieszczeniu dysypatorów dla zadania ($\max f_r$, $\min f_c$), co wiąże się z wejściem konstrukcji w obszar plastyczny.



Rys. 4.5 Postać deformacji przy idealnym rozpraszaniu energii (przypadek AP₁)

4.6 Rozwiązania kompromisowe

Przykład, zaprezentowany w rozdziale 4.5, świadczy o dużych potencjalnych możliwościach rozpraszania energii przez konstrukcję wyposażoną w dysypatory. Zalety zastosowania dysypatorów widoczne są zwłaszcza dla zakresu obciążeń przedkrytycznych, co może być bardzo korzystne w przypadku modelowania obciążeń dynamicznych, gdzie energię trzeba rozproszyć w jak najkrótszym czasie po zderzeniu. Można zaobserwować, że dysypatory,

odpowiedzialne za redystrybucję naprężeń, rozmieszczone są zawsze we wszystkich segmentach kratownicy (każdy o stopniu przeszywnienia równym jeden), przy czym największy wkład w rozpraszanie energii mają raczej elementy niedociążone. Z kolei dysypatory, odpowiedzialne za kinematyczne ruchy konstrukcji, są również równomiernie rozmieszczone we wszystkich segmentach, ale w elementach przeciążonych. Udział drugiej grupy dysypatorów jest bardziej znaczący dla maksymalizacji funkcji celu, ale niestety powoduje niepożądany wzrost deformacji konstrukcji i dlatego musi być kontrolowany. Istotne jest, aby obie fazy rozpraszania energii współgrały ze sobą w celu osiągnięcia jak najlepszego efektu. Najpierw następuje akumulacja energii odkształcenia poprzez optymalną redystrybucję naprężeń w konstrukcji, a następnie jej uwolnienie poprzez kontrolowaną deformację, wywołaną odpowiednią pracą dysypatorów.

Pokazano, że rozmieszczenie dysypatorów w konstrukcji zależy od intensywności obciążenia (por. przypadki SP_0 i SP_1 na Rys. 4.3). Zasadniczy wkład w rozpraszanie energii wnoszą elementy aktywne, wywołujące zmienność geometrii konstrukcji. W praktycznych zastosowaniach należy jednak brać pod uwagę ograniczoną liczbę dysypatorów, ze względu na ich koszt i wykonalność konstrukcji. Rozsądne wydaje się być przyjęcie k dysypatorów, odpowiedzialnych za redystrybucję naprężeń i dodatkowe k sztuk, kontrolujących deformację układu. Wówczas dla znanego a priori obciążenia (kierunek i wielkość), opisane w rozdziale 4.3.1 rozwiązanie problemu ($\max f_r$, $\min f_c$) daje nam informację o optymalnym rozmieszczeniu k dysypatorów, redystrybuujących naprężenia przy warunku minimum deformacji. Jeśli jednak obciążenie jest nieznane, tak jak w większości rzeczywistych przypadków, to można postępować według następującej strategii:

- 1) należy zdefiniować optymalne rozmieszczenie k aktywnych elementów, kontrolujących stan naprężenia w konstrukcji (określić zbiór k -elementowych kombinacji B)
- 2) wybrać najlepszą k -elementową konfigurację ze zbioru B, dającą największy wkład w funkcję celu dla kilku przewidywanych rodzajów obciążeń
- 3) wybrać dodatkowy k -elementowy zestaw elementów aktywnych, kontrolujących deformację konstrukcji (np. maksymalnie wytężone elementy z każdego segmentu dla różnych obciążeń)
- 4) rozwiązać Etap 2b problemu ($\max f_r$, $\max f_c$) - przy założeniu stałego składnika rozwiązania, znalezionego w Etapie 1 - dla zbioru $2k$ elementów aktywnych, określonych w punktach 2) i 3)

Metoda rozwiązania zadania 1), określająca zbiór k -elementowych kombinacji, mających największy wkład w wartość funkcji celu (4.18), zdefiniowanej na podprzestrzeni L_1 , jest opisana w pracy Maćkiewicza i innych [75]. Na jej podstawie wybrano ze zbioru B rozmieszczenie dysypatorów, odpowiadających za redystrybucję naprężeń. Ustalono, że największy wkład w funkcję celu dla przyłożonego obciążenia (Rys. 4.2) mają aktywne elementy nr 3, 8, 13, 18. Następnie, zgodnie z punktem 3), wybrano dodatkowo cztery elementy nr 1, 6, 11, 19, maksymalnie wytężone w poszczególnych segmentach kratownicy. Dla obciążeń P_0 i P_1 rozwiązano zadanie 4), przyjąwszy zbiór aktywnych elementów nr 1, 3, 6, 8, 13, 18, 19. Otrzymano, odpowiednio, wartości $U=9.226 \times 10^2 J$ (przypadek DP_0 na Rys. 4.3) oraz $U=10.497 \times 10^2 J$ (przypadek DP_1 na Rys. 4.3) rozpraszanej energii. Dla obu

obciążenia stanowi to 55% idealnej dysypacji. W ten sposób uzyskano rozwiązanie kompromisowe z ograniczoną liczbą ośmiu dysypatorów, mające znaczący wkład w funkcję celu. Zauważmy, że rozwiązanie to (przypadki DP_0 i DP_1) jest lepsze niż rozwiązanie problemu ($\max f_r$, $\max f_c$) dla ograniczonej liczby dysypatorów (przypadki BP_0 i BP_1). Należy jednak pamiętać, że koszt numeryczny określenia zbioru k -elementowych kombinacji B dla konstrukcji wieloelementowych może być znaczny.

4.7 Podsumowanie i komentarz

Podsumujmy bieżący rozdział, omawiający zagadnienie projektowania konstrukcji adaptowalnych na ekstremalne obciążenie.

Problem ten dotyczy projektowania konstrukcji inteligentnych na nieoczekiwane, ekstremalne obciążenia zewnętrzne. W niniejszym rozdziale przedstawiono tylko analizę quasi-statyczną, w której obciążenie jest traktowane jako statyczne, ale wyposażony w dysypatory ustrój rozprasza energię, co charakteryzuje zjawiska dynamiczne. Najkrócej rzecz ujmując, zadanie to sprowadza się do jak najszybszego i efektywnego rozproszenia energii zderzenia. Pozwala to na zachowanie nośności przy ekstremalnym obciążeniu, jakkolwiek powoduje znaczne deformacje konstrukcji. Jest to zachowanie pożądane i uzyskiwane zazwyczaj poprzez projektowanie elementów pasywnych, gdzie fakt zastosowania struktur mikromechanicznych, wielokrotnie przeszytnionych (*honey comb packages*), zapewnia odpowiednie rozpraszanie energii. W tym rozdziale zaproponowano alternatywny sposób rozwiązania problemu projektowania na ekstremalne obciążenie, polegający na wyposażeniu konstrukcji w sterowalne dysypatory energii. Zadaniem tych dysypatorów (cylindrów hydraulicznych) jest symulacja sprężysto-idealnie-plastycznego zachowania materiału. Jest to tym samym projektowanie aktywne, pozwalające na globalną zmianę właściwości fizycznych konstrukcji poprzez odpowiednie dostosowanie granic plastyczności w dysypatorach. Możliwe są przy tym różne warianty ustawień dysypatorów w zależności od wartości i kierunku obciążenia.

Funkcja celu (4.12) jest sumą dwóch składników, odpowiadających ortogonalnemu rozkładowi pola dystorsji wirtualnych (4.3). Problem znalezienia optymalnego rozmieszczenia dysypatorów w konstrukcji rozwiązuje się w dwóch etapach. Pierwszy etap polega na maksymalizacji kwadratowego składnika funkcji celu. Jego rezultatem jest optymalna redystrybucja naprężeń w konstrukcji, równoznaczna z ustaleniem optymalnych naprężeń progowych w dysypatorach. W drugim etapie traktuje się rozwiązanie etapu pierwszego jako stałe i rozwiązuje się problem programowania liniowego. Przystępuje się do maksymalizacji funkcji celu na dwa sposoby. Najpierw poszukuje się rozwiązania zadania maksymalizacji rozpraszania energii przy warunku minimum deformacji ($\max f_r$, $\min f_c$), które daje w wyniku optymalne rozmieszczenie k dysypatorów (gdzie k jest stopniem przeszytnienia kratownicy). Następnie przy założeniu aktywności wszystkich elementów konstrukcji rozwiązuje się problem ($\max f_r$, $\max f_c$), aby określić wartość rozpraszanej energii w warunkach idealnych. Proponuje się również rozwiązania kompromisowe, w których ograniczona liczba dysypatorów pozwala na uzyskanie znaczącego efektu rozpraszania energii. Rozdział 4.6 omawia algorytm postępowania w wypadku nieznajomości charakteru obciążenia dla

rozwiązań kompromisowych, oparty na wiedzy heurystycznej i zapewne trudny do implementacji, zwłaszcza dla konstrukcji niemodularnych, w których nie da się wyróżnić powtarzalnych segmentów.

Niniejszy rozdział pokazuje, że konstrukcja inteligentna, wyposażona w dysypatory, jest w stanie efektywnie rozpraszać energię ekstremalnego obciążenia. W zaprezentowanym przykładzie kratownicy, wzrost dysypacji w porównaniu ze standardową konstrukcją (bez dysypatorów) jest ponad trzykrotny. Należy podkreślić, że sterowanie pracą dysypatorów wymaga niewielkiego nakładu energii zewnętrznej. Efektywność konstrukcji inteligentnej zależy od prawidłowego rozmieszczenia dysypatorów, jak również przyjęcia odpowiedniej strategii uwalniania energii zderzenia. Zaprezentowana dwuetapowa strategia wstępnej akumulacji energii odkształcenia przez redystrybucję naprężeń, a następnie uwolnienia jej przez kontrolowany wzrost deformacji, jest obiecująca i może być zastosowana w praktyce.

Wnioski końcowe

Dotyczące pierwszej części pracy:

- 1) opracowano efektywną i oszczędną numerycznie dyskretno-analityczną metodę analizy wrażliwości sprężysto-plastycznych układów kratowych, podlegających postępującemu zniszczeniu; o ile nie nastąpiło odciążenie elementu w procesie obciążania konstrukcji, to wrażliwość ustroju na modyfikacje zmiennych projektowych można wyznaczyć na podstawie znajomości podstawowej dla MDW macierzy wpływu ustroju oraz aktualnych stanów deformacji i dystorsji wirtualnych, natomiast w przypadku odciążenia należy zapamiętywać wrażliwości dystorsji plastycznych na dystorsje wirtualne, na każdym kroku przyrostowym
- 2) uwzględniono w analizie wrażliwości wzmocnienie bądź osłabienie elementów uplastycznionych, które są przykładami rozmaitych, odcinkami liniowych zachowań pokrytycznych ustroju, dających się modelować dzięki MDW
- 3) analiza wrażliwości metodą dystorsji wirtualnych umożliwia wyznaczenie gradientów takich wielkości jak: naprężenia, deformacje, przemieszczenia, nośność graniczna względem takich zmiennych projektowych jak: pola przekrojów poprzecznych elementów, ich parametry sztywności, współczynniki wzmocnienia lub osłabienia elementów uplastycznionych, poziom granicy plastyczności
- 4) opracowano kod numeryczny VDM/S realizujący wyżej wymienione zadania i przetestowano go na przykładach - jest to wersja pilotażowa, która będzie zaimplementowana w komercyjnym programie analizy konstrukcji RASOS dla ustrojów ramowych

Dotyczące drugiej części pracy:

- 1) opracowano kilka algorytmów optymalnego przeprojektowywania konstrukcji (optymalizacja topologii + wymiarowanie), opartych na modelowaniu redystrybucji materiału przy pomocy jednego, fikcyjnego pola dystorsji wirtualnych oraz modelowaniu plastycznych zachowań konstrukcji przy pomocy drugiego, posiadającego bezpośredni sens fizyczny, pola dystorsji plastycznych
- 2) w algorytmach, wykorzystujących gradientową metodę optymalizacji nieliniowej, posłużono się analizą wrażliwości VDM/S

- 3) zaproponowano heurystyczne podejście przyspieszenia zbieżności procesu przeprojektowywania poprzez kontrolowaną eliminację elementów nieefektywnych oraz doprowadzenie do pełnego wyłączenia wszystkich elementów konstrukcji
- 4) przedstawiono iteracyjną metodę rozwiązywania problemu przeprojektowywania, wyrażonego w postaci zadania programowania liniowego, prowadzącą do optymalnej topologii przy kontroli stanów pośrednich
- 5) sformułowano i rozwiązano (na przykładzie) zadanie optymalnego przemodelowania ustrojów sprężysto-plastycznych, poddanych wielu stanom obciążeń
- 6) opracowano kody numeryczne realizujące powyższe zadania i przetestowano je na wielu przykładach; dokonano porównania z wynikami literaturowymi

Dotyczące trzeciej części pracy:

- 1) zaproponowano metodę optymalnego projektowania konstrukcji adaptowalnej (wyposażonej w dysypatory), opartą na optymalnym przeprojektowywaniu ustrojów sprężysto-plastycznych, omówionym w drugiej części pracy; zaobserwowano znaczny wzrost aktywnej strefy plastycznej optymalnie zaprojektowanego ustroju, biorącej udział w rozpraszaniu energii ekstremalnego obciążenia
- 2) opracowano metodę wyznaczania optymalnego rozmieszczenia ograniczonej liczby dysypatorów w konstrukcji adaptowalnej oraz ich optymalnych charakterystyk mechanicznych
- 3) określono potencjalne możliwości maksymalnego rozpraszania energii przez konstrukcję adaptowalną
- 4) opracowano kody numeryczne realizujące powyższe zadania i przetestowano je na przykładach
- 5) z przeprowadzonych testów numerycznych wynika duża skuteczność rozpraszania energii obciążeń ekstremalnych przez konstrukcję adaptowalną

Oryginalne koncepcje i osiągnięcia pracy

Zostaną tu wymienione koncepcje i osiągnięcia pracy, które autor uważa za oryginalne.

Rozdział drugi traktuje o analizie wrażliwości metodą dystorsji wirtualnych. Do oryginalnych zaliczam w nim:

- 1) sformułowanie, na bazie MDW, problemu wyznaczania wrażliwości pól naprężeń, odkształceń i przemieszczeń na wybrany parametr projektowy (oprócz parametrów kształtu) w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym
- 2) poszerzenie analizy wrażliwości o gradienty względem niestandardowych zmiennych projektowych tj. granicy plastyczności oraz współczynnika wzmocnienia
- 3) omówienie problemu obliczania wrażliwości przy analizie postępującego zniszczenia dla przypadku nieproporcjonalnego obciążania konstrukcji (z uwzględnieniem odciążania)
- 4) zaproponowanie metody obliczania globalnej wrażliwości obciążania krytycznego
- 5) opracowanie kodów numerycznych analizy wrażliwości VDM/S

Rozdział trzeci dotyczy optymalnego przeprojektowywania konstrukcji ze względu na minimum objętości metodą dystorsji wirtualnych. Oryginalne koncepcje w nim zawarte to:

- 1) sformułowanie, na bazie MDW, problemu minimalizacji objętości konstrukcji (współczynnik zmiany przekrojów poprzecznych) dla jednego i wielu stanów obciążeń, w zakresie sprężystym i sprężysto-plastycznym
- 2) zaimplementowanie analitycznej postaci gradientu funkcji celu w opracowanych algorytmach obliczeniowych
- 3) kontrolowanie osobliwości rozwiązań, powstających wskutek eliminacji nadmiernej liczby elementów
- 4) wykorzystanie wiedzy heurystycznej, w celu uczynienia algorytmów efektywniejszymi lub wykonalnymi, dającej możliwość wpływu na jakość rozwiązań poprzez parametry sterujące
- 5) uzyskanie interesujących wyników obliczeniowych, porównanych z osiągnięciami innych autorów
- 6) opracowanie algorytmów i kodów numerycznych optymalnego przeprojektowywania

Rozdział czwarty omawia problem optymalnego projektowania konstrukcji na ekstremalne obciążenie metodą dystorsji wirtualnych. Za oryginalne uważam w nim:

- 1) sformułowanie, na bazie MDW, quasi-statycznego problemu maksymalizacji rozpraszania energii przez konstrukcję adaptowalną (z podziałem na dwa etapy)
- 2) opracowanie metodologii określenia optymalnego rozmieszczenia dysypatorów, odpowiedzialnych za redystrybucję naprężeń w konstrukcji oraz wyznaczenia maksymalnej wartości dysypacji energii dla danej konstrukcji
- 3) omówienie strategii rozmieszczenia ograniczonej liczby dysypatorów przy osiągnięciu znaczącej wartości rozpraszanej energii (rozwiązania kompromisowe)
- 4) opracowanie kodów numerycznych optymalnego projektowania konstrukcji na ekstremalne obciążenie

Bibliografia

- [1] ABU KASSIM A. M., TOPPING B. H. V. (1985) The Theorems of Structural Variation for Linear and Nonlinear Finite Element Analysis, Civil-COMP 85, *2nd International Conference on Civil and Structural Engineering Computing*, U.K.
- [2] ABU KASSIM A. M., TOPPING B. H. V. (1987) Static Reanalysis: A Review, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 113(5), pp. 1029-1045
- [3] ARGYRIS J. H., BONI B., HINDENLANG U., KLEIBER M. (1982) Finite Element Analysis of Two- and Three-dimensional Elasto-plastic Frames: the Natural Approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 35, pp. 221-248
- [4] ARORA J. S., WU C. C. (1987) Design Sensitivity Analysis and Optimization of Nonlinear Structures, in: Mota Soares C. A. (ed.) *Computer-aided Optimal Design: Structures and Mechanical Systems*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, pp. 589-604
- [5] ARORA J. S. (1989) *Introduction to Optimal Design*, McGraw-Hill, New York
- [6] ATREK N. (1985) The Elastic-Plastic Analysis of Frames by Theorems of Structural Variation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, pp. 481-485
- [7] BARNES M. R., TOPPING B. H. V., WAKEFIELD D. S. (1977) Aspects of Form-finding by Dynamic Relaxation, in: *International Conference on the Behaviour of Slender Structures*, London, U.K.
- [8] BARTHELEMY B., HAFTKA R. T., COHEN G. A. (1989) Physically-based Sensitivity Derivatives for Structural Analysis Programs, *Computational Mechanics*, 4(6), pp. 465-476
- [9] BARTHELEMY J-F. M., RILEY M. F. (1988) Improved Multilevel Optimization Approach for the Design of Complex Engineering Systems, *AIAA Journal*, 26(3), pp. 353-360
- [10] BATHE K. J., WILSON E. L. (1996) *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey
- [11] BELEGUNDU A. D. (1985) Lagrangian Approach to Design Sensitivity Analysis, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 111, pp. 680-695
- [12] BENDSOE M. P., SOKOŁOWSKI J. (1987) Sensitivity Analysis and Optimization of Elastic-Plastic Structures, *Engineering Optimization*, 11, pp. 31-38
- [13] BENDSOE M. P., SOKOŁOWSKI J. (1988) Design Sensitivity Analysis of Elastic-Plastic Analysis Problems, *Mechanics of Structures and Machines*, 16, pp. 81-102

- [14] BENDSOE M. P., KIKUCHI N. (1988) Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71, pp. 197-224
- [15] BENDSOE M. P., BEN-TAL A., HAFTKA R. T. (1991) New Displacement-based Methods for Optimal Truss Topology Design, *Proc. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 32nd Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Baltimore, MD, U.S.A.
- [16] BENDSOE M. P., BEN-TAL A., ZOWE J. (1994) Optimization Methods for Truss Geometry and Topology Design, *Structural Optimization*, 7, pp. 141-159
- [17] BEN-TAL A., BENDSOE M. P. (1991) Truss Topology Optimization by a Displacement Based Optimality Criterion Approach, *NATO/DFG/ASI Lecture Notes on Optimization of Large Structural Systems*, Berchtesgaden, Germany, 1, pp. 67-81
- [18] CARDOSO J. B., ARORA J. S. (1988) Variational Method for Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Structural Mechanics, *AIAA Journal*, 26, pp. 595-605
- [19] CHAN H. S. Y. (1960) The Design of Michell Optimum Structures, *Report No. 142*, College of Aeronautics, Cranfield, U.K.
- [20] CHENG G., YINGWEI L. (1987) A New Computation Scheme for Sensitivity Analysis, *Engineering Optimization*, 12, pp. 219-234
- [21] CHOI K. K., SANTOS J. L. T., FREDERICK M. C. (1987) Implementation of Design Sensitivity Analysis with Existing Finite Element Codes, *ASME Journal Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, 109, pp. 385-391
- [22] COX H. L. (1956) *The Design of Structures of Least Weight*, Pergamon, London
- [23] DEMS K., MRÓZ Z. (1983) Variational Approach by means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis, Part I: Variation of Material Parameters within Fixed Domain, *International Journal of Solids and Structures*, 19(8), pp. 677-692
- [24] DEMS K., MRÓZ Z. (1984) Variational Approach by means of Adjoint Systems to Structural Optimization and Sensitivity Analysis, Part II: Structure Shape Variation, *International Journal of Solids and Structures*, 20(6), pp. 527-552
- [25] DEMS K., MRÓZ Z. (1985) Variational Approach to First- and Second-order Sensitivity Analysis of Elastic Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21, pp. 637-661
- [26] DEMS K., MRÓZ Z. (1987) A Variational Approach to Sensitivity Analysis and Structural Optimization of Plane Arches, *Mechanics of Structures and Machines*, 15, pp. 297-321
- [27] DEMS K., HAFTKA R. T. (1989) Two Approaches to Sensitivity Analysis for Shape Variation of Structures, *Mechanics of Structures and Machines*, 16, pp. 501-522
- [28] DIAZ A. R., BELDING B. (1990) On Optimum Truss Design Layout by a Homogenization Method, *Report CDL-90-2*, Department of Mechanical Engineering, Michigan State University, U.S.A.
- [29] DORN W. S., GOMORY R. E., GREENBERG H. J. (1964) Automatic Design of Optimal Structures, *Journal de Mecanique*, 3(1), pp. 25-52
- [30] GARSTECKI A., GLEMA A. (1991) Sensitivity Analysis and Optimal Redesign of Columns in the State of Initial Distortions and Prestress, *Structural Optimization*, 3, pp. 141-148

- [31] GIERLIŃSKI J. T., HOLNICKI-SZULC J., SORESENSEN J. D. (1990) Sensitivity Analysis of Structures by Virtual Distortion Method, *Proc. 3rd IFIP Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, Berkeley, U.S.A.
- [32] GILL P. E. (1991) *Numerical Linear Algebra and Optimization*, Vol.1, Addison Wesley
- [33] GILL P. E., MURRAY W., SAUNDERS M. A., WRIGHT M. H. (1983) Computing Forward-difference Intervals for Numerical Optimization, *SIAM Journal. Scientific and Statistical Computations*, 4, pp. 310-321
- [34] HAFTKA R. T., KAMAT M. P. (1985) *Elements of Structural Optimization*, Nijhoff Martinus Publishers, the Hague, the Netherlands
- [35] HAFTKA R. T., MRÓZ Z. (1986) First- and Second-order Sensitivity Analysis of Linear and Nonlinear Structures, *AIAA Journal*, 24(7), pp. 1187-1192
- [36] HAFTKA R. T., ADELMAN H. M. (1989) Recent Developments in Structural Sensitivity Analysis, *Structural Optimization*, 1, pp. 137-151
- [37] HAFTKA R. T. (1989) Integrated Nonlinear Structural Analysis and Design, *AIAA Journal*, 27(11), pp. 1622-1627
- [38] HAFTKA R. T., GURDAL Z. (1992) *Elements of Structural Optimization* (3rd ed.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands
- [39] HAFTKA R. T. (1993) Semi-Analytical Static Nonlinear Structural Sensitivity Analysis, *AIAA Journal*, 31(7), pp. 1307-1312
- [40] HAUG E. J., CHOI K. K., KOMKOV V. (1986) *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, New York
- [41] HEMP W. S. (1958) Theory of Structural Design, *Report No. 115*, College of Aeronautics, Cranfield, U.K.
- [42] HEMP W. S. (1973) *Optimum Structures*, Clarendon, Oxford, U.K.
- [43] HOLNICKI-SZULC J. (1973) Distortion Problems in Bar Structures, *Proc. Symposium of International Association for Shell and Spatial Structures on Industrialized Shell and Spatial Structures*, June, Kielce, Poland, pp. 231-243
- [44] HOLNICKI-SZULC J. (1976) Theory of Prestressing I and II, *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Serie des Sciences Techniques*, 1, pp. 1-21
- [45] HOLNICKI-SZULC J. (1978) Problemy sprężania ośrodków dwufazowych, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 18(1), Warszawa, pp. 41-51
- [46] HOLNICKI SZULC J. (1979) Prestress of Truss and Frame Structures, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 105(3), pp. 601-616
- [47] HOLNICKI-SZULC J. (1987) Degradation of Elastic Structures - Simulation by Initial Distortions, *Mechanics of Structures and Machines*, 15(1), pp. 1-15
- [48] HOLNICKI-SZULC J., MRÓZ Z. (1985) Active Control of Stresses and Deflections of Elastic Structures by means of Imposed Distortions, *Proc. of the 2nd International Symposium on Structural Control*, University of Waterloo
- [49] HOLNICKI-SZULC J., GIERLIŃSKI J. T. (1989) Structural Modifications Simulated by Initial Distortions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(3), pp. 645-666
- [50] HOLNICKI-SZULC J. (1989) Optimal Structural Remodelling - Simulation by Virtual Distortions, *Communications in Applied Numerical Methods*, 5(5), pp. 289-298
- [51] HOLNICKI-SZULC (1990) Simulation of Initially Slackened and Stiffened Structures by Virtual Distortions, *Mechanics of Structures and Machines*, 18(3)

- [52] HOLNICKI-SZULC J. (1991) *Virtual Distortion Method*, Lecture Notes in Engineering, 65, Springer, Berlin
- [53] HOLNICKI-SZULC J. (1991) Damping of Vibration by Actively Controlled Initial Distortions, *Journal of Aerospace Engineering ASCE*, 4(1), pp. 31-46
- [54] HOLNICKI-SZULC J., HAFTKA R. T. (1992) Vibration Mode Shape Control by Prestressing, *AIAA Journal*, 30(7), pp. 1924-1927
- [55] HOLNICKI-SZULC J. (1994) Optimal Design of Adaptive Composites - Virtual Distortion Method Approach, *Proc. 5th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 7-9 September, Panama City Beach, FL, U.S.A., pp. 1213-1227
- [56] HOLNICKI-SZULC J., GIERLIŃSKI J. T. (1995) *Structural Analysis, Design and Control by the Virtual Distortion Method*, J. Wiley & Sons, Chichester, U.K.
- [57] HOLNICKI-SZULC J., LÓPEZ-ALMANSA F. (1995) Optimal Design of Adaptive Structures, *Proc. 1st World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, May, Goslar, Germany
- [58] HOLNICKI-SZULC J., MAĆKIEWICZ A., KOŁAKOWSKI P. (1996) Design of Adaptive Structures for Improved Impact Absorption, *Proc. 6th AIAA/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis & Optimization*, 4-6 September, Bellevue, WA, U.S.A., pp. 873-881
- [59] HOLNICKI SZULC J., MAĆKIEWICZ A., KOŁAKOWSKI P. (1997) Design of Adaptive Structures for Improved Load Capacity, submitted to *AIAA Journal*
- [60] IOTT J., HAFTKA R. T., ADELMAN H. M. (1985) Selecting Step Sizes in Sensitivity Analysis by Finite Differences, *NASA TM-86382*
- [61] KAMAT M. (ed.) (1993) *Structural Optimization: Status & Promise*, Progress in Astronautics and Aeronautics, Vol. 150, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, D.C.
- [62] KIRSCH U., TAYE S. (1986) On Optimal Topology of Grillage Structures, *Engineering Computations*, 1, pp. 229-243
- [63] KIRSCH U. (1989) Optimal Topologies of Structures, *Applied Mechanics Reviews*, 42(8), pp. 223-238
- [64] KIRSCH U., LIU S. (1997) Structural Reanalysis for General Layout Modifications, *AIAA Journal*, 35(2), pp. 382-388
- [65] KLEIBER M., WOŹNIAK C. (1991) *Nonlinear Mechanics of Structures*, PWN - Warszawa, Kluwer - Dordrecht
- [66] KLEIBER M., HIEN T. D., POSTEK E. (1991) Incremental Finite Element Analysis of Nonlinear Structural Design Sensitivity Problems, in: Onate E., Periaux J., Samuelson A. (eds.) *Finite Elements in the 1990s*, Springer, Berlin
- [67] KLEIBER M. (1993) Shape and Non-Shape Structural Sensitivity Analysis for Problems with any Material and Kinematic Non-linearity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108, pp. 73-97
- [68] KLEIBER M., HIEN T. D., POSTEK E. (1994) Incremental Finite Element Sensitivity Analysis for Nonlinear Mechanics Applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 3291-3308
- [69] KLEIBER M. (1997) *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*, J. Wiley & Sons, Chichester, U.K.

- [70] KOŁAKOWSKI P., HOLNICKI-SZULC J. (1997) Sensitivity Analysis of Truss Structures - Virtual Distortion Method Approach, submitted to *International Journal for Numerical Methods in Engineering*
- [71] KOŁAKOWSKI P., HOLNICKI-SZULC J. (1997) Optimal Remodelling of Truss Structures - Simulation by Virtual Distortions, *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4(97), pp. 257-281
- [72] KOZŁOWSKA D., MAĆKIEWICZ A. (1995) *Numerical Optimization Methods in FORTRAN* - unpublished manuscript
- [73] LEE T. H., ARORA J. S. (1995) A Computational Method for Design Sensitivity Analysis of Elasto-plastic Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122, pp. 27-50
- [74] LEWIŃSKI T., ZHOU M., ROZVANY G. I. N. (1994) Extended Exact Solutions for Least-Weight Truss Layouts, *International Journal of Mechanical Sciences*, 36, pp. 375-398
- [75] MAĆKIEWICZ A., HOLNICKI-SZULC J., LÓPEZ-ALMANSA F. (1996) Optimal Location of Actuators for Active Stress Control, *Proc. 1st European Conference on Structural Control*, 29-31 May, Barcelona, Spain
- [76] MAIER G. (1970) A Matrix Structural Theory of Piecewise-linear Plasticity with Interacting Yield Planes, *Meccanica*, 7, pp. 51-66
- [77] MAKODE P. V., RAMIREZ M. R., COROTIS R. B. (1994) Reanalysis of Rigid Frame Structures by Virtual Distortion Method, *Proc. 5th AIAA/NASA/USAF/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 7-9 September, Panama City Beach, FL, U.S.A., pp. 1213-1227
- [78] MAXWELL J. C. (1890) On Reciprocal Figures, Frames and Diagrams of Forces, in: *Scientific Papers*, Cambridge University Press, 2, pp. 175-177
- [79] MICHELL A. G. M. (1904) The Limits of Economy of Material in Frame Structures, *Phil. Mag.*, 8, pp. 589-597
- [80] MRÓZ Z., KAMAT M. P., PLAUT R. H. (1985) Sensitivity Analysis and Optimal Design of Nonlinear Beams and Plates, *Journal of Structural Mechanics*, 13, pp. 245-266
- [81] MRÓZ Z. (1987) Sensitivity Analysis and Optimal Design with Account for Varying Shape and Support Conditions, in: Mota Soares C. A. (ed.) *Computer-aided Optimal Design: Structures and Mechanical Systems*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, pp. 407-438
- [82] MRÓZ Z., HAFTKA R. T. (1994) Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Structures in Regular and Critical States, *International Journal of Solids and Structures*, 31, pp. 2071-2098
- [83] MURTHY D. V., HAFTKA R. T. (1988) Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors of General Complex Matrix, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, pp. 293-311
- [84] NAGENDRA G. K., FLEURY C. (1987) Sensitivity and Optimization of Composite Structures using MSC/NASTRAN, in: Adelman H. M., Haftka R. T. (eds.) *Sensitivity Analysis in Engineering*, NASA CP-2457, pp. 147-166
- [85] NOWACKI W. (1970) *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa

- [86] OLHOFF N., ROZVANY G. I. N. (1982) Optimal Grillage Layout for Given Natural Frequency, *Journal of Structural Mechanics ASCE*, 108, pp. 971-974
- [87] OWEN J. B. B. (1975) *The Analysis and Design of Light Structures*, Edward Arnold, London
- [88] PARK Y. H., CHOI K. K. (1996) Design Sensitivity Analysis of Truss Structures with Elastoplastic Material, *Mechanics of Structures and Machines*, 24(2), pp. 189-216
- [89] PARKES E. W. (1974) *Braced Frameworks*, Pergamon, London
- [90] POSTEK E. (1996) Numeryczna analiza wrażliwości na parametry projektowe dużych, nieliniowych układów konstrukcyjnych, *Rozprawa doktorska*, IPPT, Warszawa
- [91] POWELL M. J. D. (1989) A Tolerant Algorithm for Linearly Constrained Optimization Calculations, *Mathematical Programming*, 45, pp. 547-566
- [92] POWELL M. J. D. (1989) TOLMIN: A Fortran Package for Linearly Constrained Optimization Calculations, *Report DAMTP/1989/NA2*, University of Cambridge, Cambridge, U.K.
- [93] PRAGER W. (1974) A Note on Discretized Michell Structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3, pp. 349-355
- [94] PRAGER W., ROZVANY G. I. N. (1977) Optimal Layout of Grillages, *Journal of Structural Mechanics*, 5, pp. 1-18
- [95] PRAGER W., ROZVANY G. I. N. (1977) Optimization of Structural Geometry, in: Bednarek A. R., Cesari L. (eds.) *Dynamical Systems*, Academic, New York, pp. 265-294
- [96] PRAGER W. (1978) Nearly Optimal Design of Trusses, *Computers and Structures*, 8, pp. 451-454
- [97] REINSCHMIDT K. F., RUSSELL A. D. (1974) Applications of Linear Programming in Structural Layout and Optimization, *Computers and Structures*, 4, pp. 855-869
- [98] ROZVANY G. I. N., HILL R. D. (1976) General Theory of Optimal Load Transmission by Flexure, *Advances in Applied Mechanics*, 16, pp. 183-308
- [99] ROZVANY G. I. N. (1977) Optimal Plastic Design: Allowance for Self-weight, *Journal of Engineering Mechanics ASCE*, 103, pp. 1165-1170
- [100] ROZVANY G. I. N., ZHOU M. (1991) Applications of the COC Algorithm in Layout Optimization, *Proc. of the International Conference on Engineering Optimization in Design Process*, Karlsruhe, Germany, in: Lecture Notes in Engineering, Springer, pp. 59-70
- [101] RYU Y. S., HARIRAN M., WU C. C., ARORA J. S. (1985) Structural Design Sensitivity of Nonlinear Response, *Computers and Structures*, 21, pp. 245-255
- [102] SANCHEZ PALENCIA E. (1980) *Non-homogenous Media and Vibration Theory*, Lecture Notes in Physics, 127, Springer
- [103] SANKARANARAYANAN S., HAFTKA R., KAPANIA R. K. (1994) Truss Topology Optimization with Simultaneous Analysis and Design, *AIAA Journal*, 32(2), pp. 420-424
- [104] SCHITTKOWSKI K. (1983) On the Convergence of a Sequential Quadratic Programming Method with an Augmented Lagrangian-Type Line Search Function, *Mathematische Operationsforschung und Statistik*, Series Optimization, 14, pp. 197-216
- [105] SCHITTKOWSKI K. (1984) NLPQL: A Fortran Subroutine Solving Constrained Nonlinear Programming Problems, *Report of Institute of Informatics*, University of Stuttgart, Germany

- [106] SOBIESZCZAŃSKI-SOBIESKI J. (1968) Structural Modification by Perturbation Method, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 94(12)
- [107] SOKOŁOWSKI J., ZOLESIO J. P. (1987) Shape Design Sensitivity of Plates and Plane Elastic Solids under Unilateral Constraints, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 54, pp. 361-382
- [108] SUZUKI K., KIKUCHI N. (1991) A Homogenization Method for Shape and Topology Optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 93(3), pp. 291-318
- [109] SVED G., GINOS Z. (1968) Structural Optimization under Multiple Loading, *International Journal of Mechanical Sciences*, 10, pp. 803-805
- [110] TOPPING B. H. V. (1978) Form-finding of Modular Space Structures using Dynamic Relaxation, *Ph.D. Thesis*, The City University, London
- [111] TOPPING B. H. V. (1983) Shape Optimization of Skeletal Structures: A Review, *Journal of Structural Engineering ASCE*, 109, pp. 1933-1951
- [112] TOPPING B. H. V. (1992) Mathematical Programming Techniques for Shape Optimization of Skeletal Structures, in: Rozvany G. I. N. (ed.) *Shape and Layout Optimization in Structural Design*, Springer, Vienna, pp. 349-376
- [113] TSAY J. J., ARORA J. S. (1988) Variational Methods for Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response with History-dependent Effects, in: Atluri S. N., Yagawa G. (eds.) *Computational Mechanics '88*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York
- [114] TURNER R. C., GIERLIŃSKI J. T., ZINTILIS G. M., BAKER M. J., HOLNICKI-SZULC J. (1988) The Virtual Distortion Method Applied to the Reliability Analysis of Offshore Structures, in: Toft-Christensen P. (ed.) *Proc. 2nd IFIP Conference on Reliability and Optimization of Structural Systems*, London, U.K., pp. 337-356
- [115] VETTERLING W. T., PRESS W. H., TEUKOLSKY S. A., FLANNERY B. P. (1992) *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- [116] VIDAL C. A., LEE H. S., HABER R. B. (1991) The Consistent Tangent Operator for Design Sensitivity Analysis of History-dependent Response, *Computing Systems in Engineering*, pp. 509-523
- [117] WASIUTYŃSKI Z. (1939) *O kształtowaniu wytrzymałościowym*, Akademia Nauk Technicznych, Warszawa
- [118] WIĄCEK D., HOLNICKI-SZULC J. (1997) Progressive Damage Analysis in Historical Buildings - VDM Approach, *Proc. 5th International Conference on Computational Plasticity*, 17-20 March, Barcelona, Spain, pp. 1594-1599
- [119] WIT R. (1986) *Metody programowania nieliniowego*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa
- [120] WU C. C., ARORA J. S. (1987) Design Sensitivity Analysis of Nonlinear Response using Incremental Procedure, *AIAA Journal*, 25, pp. 1118-1125

Aneks A

Pręt	Konstrukcja początkowa		Konstrukcja przeprojektowana		Zmiana przekroju μ
	ϵ	σ [MPa]	ϵ	σ [MPa]	
111	0.808×10^{-3}	80.826	0.350×10^{-3}	78.294	2.24
112	0.310×10^{-3}	31.000	0.350×10^{-3}	21.580	0.62
211	0.099×10^{-3}	9.902	-0.256×10^{-3}	0.000	0.00
212	-0.108×10^{-3}	-10.780	0.286×10^{-18}	0.000	0.00
213	-0.209×10^{-3}	-20.889	0.256×10^{-3}	0.000	0.00
312	-0.448×10^{-3}	-44.799	-0.350×10^{-3}	-21.580	0.62
313	-1.016×10^{-3}	-101.644	-0.350×10^{-3}	-130.490	3.73
1112	-0.194×10^{-3}	-19.413	-0.350×10^{-3}	-12.948	0.37
1121	0.629×10^{-3}	62.853	0.350×10^{-3}	52.196	1.49
1122	0.309×10^{-3}	30.933	0.350×10^{-3}	30.538	0.87
1213	0.319×10^{-3}	31.926	0.350×10^{-3}	12.948	0.37
1221	0.395×10^{-5}	0.395	-0.280×10^{-3}	0.000	0.00
1222	-0.108×10^{-3}	-10.807	0.350×10^{-18}	0.000	0.00
1223	-0.127×10^{-3}	-12.708	0.280×10^{-3}	0.000	0.00
1322	-0.440×10^{-3}	-43.964	-0.350×10^{-3}	-30.538	0.87
1323	-0.819×10^{-3}	-81.923	-0.350×10^{-3}	-104.392	2.98
2122	-0.110×10^{-3}	-11.046	-0.350×10^{-3}	-12.948	0.37
2131	0.341×10^{-3}	34.118	0.350×10^{-3}	17.399	0.50
2132	0.323×10^{-3}	32.274	0.350×10^{-3}	38.604	1.10
2223	0.224×10^{-3}	22.436	0.350×10^{-3}	19.422	0.55
2231	-0.162×10^{-3}	-16.176	-0.187×10^{-3}	0.000	0.00
2232	-0.081×10^{-3}	-8.134	0.616×10^{-18}	0.000	0.00
2233	0.015×10^{-3}	1.520	0.187×10^{-3}	0.000	0.00
2332	-0.457×10^{-3}	-45.711	-0.350×10^{-3}	-57.906	1.65
2333	-0.522×10^{-3}	-52.175	-0.350×10^{-3}	-52.196	1.49
3132	-0.136×10^{-3}	-13.623	-0.350×10^{-3}	-15.106	0.43
3141	0.103×10^{-3}	10.348	0.350×10^{-3}	17.264	0.49
3142	0.105×10^{-3}	10.450	0.294×10^{-3}	0.000	0.00
3233	0.081×10^{-3}	8.073	0.350×10^{-3}	15.106	0.43
3241	-0.176×10^{-3}	-17.593	-0.350×10^{-3}	-21.580	0.62
3242	-0.096×10^{-3}	-9.577	-0.044×10^{-3}	0.000	0.00
3243	0.044×10^{-3}	4.374	0.350×10^{-3}	0.000	0.00
3342	-0.251×10^{-3}	-25.131	-0.350×10^{-3}	-35.967	1.03
3343	-0.302×10^{-3}	-30.244	-0.350×10^{-3}	-23.019	0.66
4142	-0.076×10^{-3}	-7.589	-0.350×10^{-3}	-4.316	0.12
4151	-0.049×10^{-3}	-4.900	-0.044×10^{-3}	0.000	0.00
4152	0.015×10^{-3}	1.468	-0.154×10^{-3}	0.000	0.00
4243	0.051×10^{-3}	5.062	0.350×10^{-3}	4.316	0.12
4251	-0.155×10^{-3}	-15.455	-0.350×10^{-3}	-21.580	0.62
4252	-0.082×10^{-3}	-8.190	-0.350×10^{-3}	-11.510	0.33
4253	-0.959×10^{-5}	-0.959	0.022×10^{-3}	0.000	0.00
4352	-0.128×10^{-3}	-12.811	-0.350×10^{-3}	-7.193	0.21
4353	-0.165×10^{-3}	-16.497	-0.350×10^{-3}	-17.264	0.49
5152	-0.080×10^{-3}	-7.991	-0.350×10^{-3}	-4.316	0.12
5253	0.576×10^{-5}	0.576	-0.016×10^{-3}	0.000	0.00

Aneks B

Pręt	Lewe obciążenie		Prawe obciążenie		Zmiana przekroju
	ϵ	σ [MPa]	ϵ	σ [MPa]	μ
111	0.216×10^{-3}	79.657	-0.350×10^{-3}	-129.127	3.69
112	0.299×10^{-3}	19.889	-0.350×10^{-3}	-23.271	0.66
211	-0.307×10^{-3}	0.000	-0.227×10^{-3}	0.000	0.00
212	-0.040×10^{-3}	0.000	-0.040×10^{-3}	0.000	0.00
213	-0.227×10^{-3}	0.000	-0.307×10^{-3}	0.000	0.00
312	-0.350×10^{-3}	-23.271	0.299×10^{-3}	19.889	0.66
313	-0.350×10^{-3}	-129.127	0.216×10^{-3}	79.657	3.69
1112	-0.298×10^{-3}	-9.134	0.350×10^{-3}	10.746	0.31
1121	0.199×10^{-3}	61.247	-0.350×10^{-3}	-107.466	3.07
1122	0.298×10^{-3}	21.542	-0.350×10^{-3}	-25.346	0.72
1213	0.350×10^{-3}	10.746	-0.298×10^{-3}	-9.134	0.31
1221	-0.350×10^{-3}	-8.238	0.222×10^{-3}	5.214	0.24
1222	-0.073×10^{-3}	0.000	-0.073×10^{-3}	0.000	0.00
1223	0.222×10^{-3}	5.214	-0.350×10^{-3}	-8.238	0.24
1322	-0.350×10^{-3}	-25.346	0.298×10^{-3}	21.542	0.72
1323	-0.350×10^{-3}	-107.466	0.199×10^{-3}	61.247	3.07
2122	-0.193×10^{-3}	-8.227	0.350×10^{-3}	14.910	0.43
2131	0.123×10^{-3}	19.335	-0.350×10^{-3}	-54.863	1.57
2132	0.252×10^{-3}	38.259	-0.350×10^{-3}	-53.144	1.52
2223	0.350×10^{-3}	14.910	-0.193×10^{-3}	-8.227	0.43
2231	-0.350×10^{-3}	-4.161	0.060×10^{-3}	0.717	0.12
2232	-0.108×10^{-3}	0.000	-0.108×10^{-3}	0.000	0.00
2233	0.060×10^{-3}	0.717	-0.350×10^{-3}	-4.161	0.12
2332	-0.350×10^{-3}	-53.144	0.252×10^{-3}	38.259	1.52
2333	-0.350×10^{-3}	-54.863	0.123×10^{-3}	19.335	1.57
3132	-0.350×10^{-3}	-15.046	0.154×10^{-3}	6.602	0.43
3141	0.129×10^{-3}	13.101	-0.350×10^{-3}	-35.557	1.02
3142	0.042×10^{-3}	2.735	-0.350×10^{-3}	-22.764	0.65
3233	0.154×10^{-3}	6.602	-0.350×10^{-3}	-15.046	0.43
3241	-0.350×10^{-3}	-23.238	0.133×10^{-3}	8.810	0.66
3242	-0.273×10^{-3}	-1.771	-0.273×10^{-3}	-1.771	0.06*
3243	0.133×10^{-3}	8.810	-0.350×10^{-3}	-23.238	0.66
3342	-0.350×10^{-3}	-22.764	0.042×10^{-3}	2.735	0.65
3343	-0.350×10^{-3}	-35.557	0.129×10^{-3}	13.101	1.02
4142	-0.250×10^{-3}	-1.410	0.350×10^{-3}	1.976	0.06
4151	-0.055×10^{-3}	-2.941	-0.350×10^{-3}	-18.826	0.54
4152	0.092×10^{-3}	-3.186	-0.350×10^{-3}	-12.104	0.35
4243	0.350×10^{-3}	1.976	-0.250×10^{-3}	-1.410	0.06
4251	-0.350×10^{-3}	-17.904	0.038×10^{-3}	1.952	0.51
4252	-0.299×10^{-3}	-5.033	-0.299×10^{-3}	-5.033	0.17*
4253	0.038×10^{-3}	1.952	-0.350×10^{-3}	-17.904	0.51
4352	-0.350×10^{-3}	-12.104	0.092×10^{-3}	-3.186	0.35
4353	-0.350×10^{-3}	-18.826	-0.055×10^{-3}	-2.941	0.54
5152	-0.350×10^{-3}	-6.522	0.063×10^{-3}	-1.171	0.19
5253	0.063×10^{-3}	-1.171	-0.350×10^{-3}	-6.522	0.19

Aneks C

Wartości własne macierzy $A_i I_i D_{ij}^\sigma$

Niech λ , ε_i^σ będą odpowiednio wartością własną i wektorem własnym macierzy $A_i I_i D_{ij}^\sigma$. Wówczas zachodzi:

$$\sum_i \sum_j \varepsilon_i^\sigma A_i I_i D_{ij}^\sigma \varepsilon_j^\sigma = \lambda$$

Podstawiając związki $\varepsilon_i^\sigma = \varepsilon_i^R - \frac{\sigma_i^R}{E_i}$ oraz $\sigma_i^R = \sum_j D_{ij}^\sigma \varepsilon_j^\sigma$, mamy:

$$\sum_i A_i I_i \varepsilon_i^R \sigma_i^R - \sum_i \frac{A_i I_i}{E_i} (\sigma_i^R)^2 = \lambda$$

Uwzględniając warunek ortogonalności $\sum_i A_i I_i \varepsilon_i^R \sigma_i^R = 0$, otrzymujemy:

$$- \sum_i \frac{A_i I_i}{E_i} (\sigma_i^R)^2 = \lambda \leq 0$$

Wniosek: Macierz $A_i I_i D_{ij}^\sigma$ jest niedodatnio określona

Wartości własne macierzy $A_i I_i D_{ij}$

Niech λ , ε_i^σ będą odpowiednio wartością własną i wektorem własnym macierzy $A_i I_i D_{ij}$. Wówczas zachodzi:

$$\sum_i \sum_j \varepsilon_i^\sigma A_i I_i D_{ij} \varepsilon_j^\sigma = \lambda$$

Podstawiając związki $\varepsilon_i^\sigma = \varepsilon_i^R - \frac{\sigma_i^R}{E_i}$ oraz $\varepsilon_i^R = \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^\sigma$, mamy:

$$\sum_i A_i I_i (\varepsilon_i^R)^2 - \sum_i \frac{A_i I_i}{E_i} \varepsilon_i^R \sigma_i^R = \lambda$$

Uwzględniając warunek ortogonalności $\sum_i A_i I_i \varepsilon_i^R \sigma_i^R = 0$ przy założeniu $E = \text{const.}$, otrzymujemy:

$$\sum_i A_i I_i (\varepsilon_i^R)^2 = \lambda \geq 0$$

Wniosek: Macierz $A_i I_i D_{ij}$ jest nieujemnie określona

Rząd macierzy $A_{i,l}D_{ij}^{\sigma}$ i $A_{i,l}D_{ij}$

W kratownicy k -krotnie przesztywnionej można wprowadzić co najwyżej k liniowo niezależnych pól samorzównoważonych sił $A_i \sigma_i^R$.

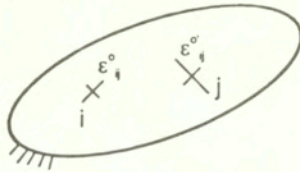
Wobec tego rząd macierzy $A_{i,l}D_{ij}^{\sigma} = E_i A_{i,l} (D_{ij} - \delta_{ij})$ wynosi k , gdzie k oznacza stopień statycznej niewyznaczalności kratownicy.

Z ortogonalnego rozkładu dystorsji $\varepsilon_i^{\sigma} = \varepsilon_{ci}^{\sigma} + \varepsilon_n^{\sigma} = \varepsilon_i^R - \frac{\sigma_i^R}{E_i}$ wnioskujemy, że rząd macierzy

$A_{i,l}D_{ij} (\varepsilon_i^R = \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^{\sigma})$ wynosi $n-k$, gdzie n jest liczbą wszystkich elementów kratownicy.

Symetria macierzy $A_{i,l}D_{ij}^{\sigma}$ i $A_{i,l}D_{ij}$

Tw. Majziela: Zasada wzajemności prac dla układu z dystorsjami
(W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970, str. 479)



$$\int_V (\sigma_y' \varepsilon_y^{\sigma} - \sigma_y \varepsilon_y^{\sigma'}) dV = 0$$

Dla kratownic:

$$\sigma_i = E_i \sum_j (D_{ij} - \delta_{ij}) \varepsilon_j^{\sigma}$$

Jeżeli $\varepsilon_j^{\sigma} = 1$ oraz $\varepsilon_{i \neq j}^{\sigma} = 0$ to $\sigma_i = E_i D_{ij}$

Jeżeli $\varepsilon_i^{\sigma} = 1$ oraz $\varepsilon_{i \neq i}^{\sigma} = 0$ to $\sigma_j = E_j D_{ji}$

Korzystając z twierdzenia Majziela, mamy:

$$A_{i,l} E_i D_{ij} - A_{j,l} E_j D_{ji} = 0$$

Przy założeniu $E = \text{const.}$, dostajemy:

$$A_{i,l} D_{ij} = A_{j,l} D_{ji}$$

Wniosek: Macierz $A_{i,l} D_{ij}$ jest symetryczna

Zachodzi również związek:

$$A_i l_i (D_y - \delta_y) = A_j l_j (D_\mu - \delta_\mu)$$

Wniosek: Macierz $A_i l_i D^{\sigma}_{ij}$ jest symetryczna

Ułamkowe wyrazy na przekątnej macierzy D_{ij}

Z zasady prac wirtualnych wynika zależność:

$$\sum_i A_i l_i \varepsilon_i^R \sigma_i^R = 0$$

Podstawiając $\sigma_i^R = E_i (\varepsilon_i^R - \varepsilon_i^o)$, mamy:

$$\sum_i A_i l_i E_i \left[(\varepsilon_i^R)^2 - \varepsilon_i^o \varepsilon_i^R \right] = 0$$

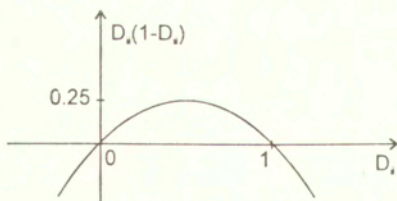
Pamiętając, że $\varepsilon_i^R = \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o$, otrzymujemy:

$$\sum_i A_i l_i E_i \left[\left(\sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o \right)^2 - \varepsilon_i^o \sum_j D_{ij} \varepsilon_j^o \right] = 0$$

Niech $\varepsilon_i^o = 1$ oraz $\varepsilon_{j \neq i}^o = 0$ ($E = \text{const.}$)

Wtedy: $A_i l_i (D_{ii}^2 - D_{ii}) + \sum_{j \neq i} A_j l_j D_{ji}^2 = 0$

Stąd: $\sum_{j \neq i} A_j l_j D_{ji}^2 = A_i l_i D_{ii} (1 - D_{ii}) \geq 0$



Wniosek: $0 \leq D_{ii} \leq 1$ oraz $-1 \leq D_{ii} - 1 \leq 0$