TRYGONO
METRYA

2050

2050

TRYGONOMETRYA

PODŁUG

LEFEBURE DE FOURCY

UŁOŻONA

PRZEZ

X. Fr. KASTERSKIEGO S. P.

MAG. FILOZOFII.

Da veniam scriptis quorum non gloria nobis
Causa, sed utilitas officiumque fuit.

W WARSZAWIE

W DRUKARNI XX. PIJARÓW

1836 R.

Za pozwoleniem Cenzury Rządowéj.

TRYGONOMETRYA

ROZDZIAŁ 1szy.

Teorya linij trygonometrycznych.

1. Każdy wielokąt może bydź podzielony na trójkąty prowadząc przekątne do wszystkich jego wierzchołków, albo z wierzchołka jednego kąta, albo z punktu wziętego na którymkolwiek boku, albo nakoniec z punktu wziętego wewnątrz wielokąta; znaiąc przeto własności trójkąta i umiejąc wyrachować jego powierzchnią, poznamy tém samém własności i potrafimy wyrachować powierzchnią każdego wielokąta.

Trójkąt prostokreślny lub kulisty składa się z sześciu części, to jest: z trzech boków i z trzech kątów; wielkość tych części nie iest dowolna, lecz jedne od drugich zależą tak; iż od wielkości *np.* jednego boku i kątów jakie czyni z dwoma innymi, zależy wielkość tychże boków i kąta między niemi zawartego, a tém samém wielkość powierzchni tróykąta. Mając przeto dane trzy którekolwiek z sześciu części trójkąta, można wynaleźć trzy inne, byleby tylko między wiadomemi częściami, gdy trójkąt jest prostokreślny, był przynaymniej jeden bok, gdyż wiemy, że maiąc dane trzy kąty, których summa jest równa dwom kątom prostym, można, biorąc za jeden bok liniją jakąkolwiek, wykréślić nieograniczoną liczbę trójkątów też kąty zamykających, lecz trójkąty te będą sobie tylko podobne, ale nie równe.

Jeometrya podaie bardzo proste i łatwe sposoby kréślenia trójkątów, ile razy tylko mogą bydź wyznaczone za pomocą niektórych ich części, lecz sposoby te równie iak wszystkie inne oparte na samém tylko kreśleniu, którychby w pomoc użyć można, dają bardzo mierne i częstokroć niedostateczne przybliżenie, z przyczyny niedokładności narzędzi do kreślenia używanych. Dla tego też starano się zastąpić wykreślenie rachunkiem, aby tym sposobem wyznaczyć niewiadome części trójkąta z jak naywiększą dokładnością.

Nauka podająca sposoby wyrachowania trzech części niewiadomych trójkąta za pomocą trzech innych wiadomych, między któremi znayduje się przynajmniej jeden bok, ieżeli trójkąt iest prostokreślny, nazywa się Trygonometryą. Wyrachowanie zaś niewiadomych części trójkąta nazywa się rozwiązaniem trójkąta.

2. Aby pewną długość wyrazić w liczbach, porównywamy ją z inną długością wziętą za jedność *np.* z łokciem, prętem i t. d. każdy więc bok trójkąta równy jest pewnéj liczbie łokci, prętów i t. d.

3. Miarą kątów są łuki zawarte między ich ramionami, nakreślone jakimkolwiek promieniem z ich wierzchołków, jako środków, aby i te wielkości wyrazić w liczbach, podzielono okrąg koła na pewną liczbę części równych, stopniami zwanych, każdy więc kąt, lub łuk będący jego miarą, można wyrazić przez liczbę tychże stopni. Da-

wniejsi Jeometrowie dzielili okrąg koła na 360 stopni, stopień na 60 minut, minutę na 60 sekund i t. d. Lecz dla pozbycia się liczb wielorakich, podciągnięto i miary kątów pod podział dziesiętny; a biorąc za jedność czwartą część okręgu, która jest miarą kąta prostego, podzielono ją na sto stopni, stopień na sto minut, minutę na sto sekund i t. d. Stopnie, minuty i sekundy wskazują się znakami ° ′ ″. Tak *np.* 14 stopni, 9 minut, 37 sekund, wyrazi się przez 14°9′37″; w nowym zaś podziale, powyższa liczba stopni, minut i sekund porównana z czwartą częścią okręgu wziętą za jedność wyrazi się w ułomku 0,14937; w tym albowiem podziale stopnie są setnemi częściami $\frac{1}{4}$ okręgu, minuty dziesięciotysiącznemi, a sekundy milionowemi.

Linijach trygonometrycznych i użyciu znaków + i — dla wskazania przeciwnego położenia.

Ponieważ w rozwiązaniu trójkąta nie tylko potrzeba mieć wzgląd na jego boki, ale i na kąty; starano się więc naprzód odkryć stosunki między temi wielkościami; lecz gdy się przekonano, że stosunki kątów tróykąta, równie jak stosunki łuków będących ich miarami nie są równe stosunkom boków (jak się to najwyraźniéj pokazuje w trójkącie prostokątnym, rownoramiennym, w którym lubo każdy kąt ostry jest połową kąta prostego, każdy jednak bok przyległy kątowi prostemu jest większy od połowy przeciwprostokątnéj) postanowiono wprowadzić do rachunku, zamiast łuków zakreślonych jednym i niezmiennym promieniem, ich cięciwy. W tym celu ułożono tablice zamykające ważności łuków w stopniach i minutach, a obok nich ważności odpowiadających im cięciw, albo raczéj stosunki tych cięciw do promienia. Za pomocą takich tablic można było zawsze znaléźć cięciwę odpowiadającą danemu łukowi, i łuk odpowiadający danéj cięciwie. Tym sposobem rozwiązanie trójkąta przywiedzione zostało ostatecznie do ułożenia stosunków między linijami prostemi. Tablice takie łatwo było obliczyć, zaczynając rachunek od łuku, którego wiadoma jest cięciwa np. od $\frac{1}{6}$ okręgu; daléj za pomocą formuł na cięciwę łuku dwa razy większego, cięciwę summy lub różnicy dwóch łuków, i t. d. można znaleźć cięciwy wszystkich łuków.

Nakoniec odkryto związek między cięciwami, lub ich połowami, a innemi linijami prostemi dotykającemi okręgu lub go przecinającemi i stosunków między niemi użyto zamiast stosunków między cięciwami, a tém samém kątami. Linlje proste pomiędzy któremi stosunek można brać zamiast stosunku między kątami, nazywają się linijami trygonometrycznemi.

Niech będzie AMBB' (fig. 1.) okrąg koła zakreślony promieniem OA; AM łuk będący miarą kąta AOM. Z punktu M spuśćmy MP, prostopadłą do promienia AO, i MQ. prostopadłą do promienia OB; z punktu zaś A, wyprowadźmy prostopadłą AT do AO i przedłużmy ją aż do przecięcia OM w punkcie T, nakoniec z punktu B, wyprowadźmy BS prostopadłą do OB, przedłużając ją do przecięcia OM w punkcie S.

Prostopadła MP, nazywa się wstawą łuku AM. Wstawa zatém łuku jest to, prostopadła spuszczona z jednego końça łuku na promień przechodzący przez drugi koniec tegoż łuku.

Linija AT, nazywa się styczną łuku AM; styczna więc trygonometryczna łuku jest to prostopadła do promienia przechodzącego przez jeden koniec łuku, przedłużona do przecięcia się z promieniem przechodzącym przez drugi koniec tegoż łuku.

Linija OT. nazywa się sieczną łuku AM; sieczna zatém trygonometryczna łuku jest część przedłużonego promienia przechodzącego przez jeden koniec łuku, zawarta między środkiem koła a styczną wyprowadzoną z drugiego końca tegoż łuku.

Gdy łuk AM, nazwiemy x, jego wstawę, styczną i sieczną oznaczymy w skróceniu następującym sposobem: MP=wst:x. AT= sty: x. OT=siecz: x. Przedłużywszy liniją MP, do przecięcia okręgu w punkcie N; widzimy że cięciwa MN, iest dwa razy większa od MP i łuk MAN dwa razy większy od AM. a ztąd wniesiemy, że wstawa łuku jest połową cięciwy łuku dwa razy większego. Gdy r. znaczy promień koła, bok kwadratu w koło wpisanego iest $r\sqrt{2}$; a że bok ten jest cięciwą łuku 90°, więc połowa $r\sqrt{2}$. iest wstawą 45°, to iest: wst. $45° = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Podobnież bok sześciokąta foremnego wkoło wpisanego, jest rowny promieniowi r, i jest cięciwą 60°, więc $\frac{r}{2}$ jest wstawą 30°.

5. Dopełnieniem łuku lub kąta. nazywa się łuk lub kąt, który dodany do pierwszego czyni znim 90°. Gdy łuk jest większy od 90°, lub gdy kąt większy jest od kąta prostego, jego dopełnienie jest odjemne: tak np. dopełnienie łuku lub kąta 127° iest — 37°. Gdy zaś łuk lub kąt jest mniejszy od 90°, jego dopełnienie jest dodatne *np.* dopełnienie 69° iest + 21°; z dwóch więc kątów ostrych w trójkącie prostokątnym jeden jest dopełnieniem drugiego.

Łuk BM, jest dopełnieniem łuku AM, linije MQ, BS i OS to iest wstawa, styczna i sieczna, łuku BM, dopełniającego łuk AM nazywają się: dostawa, dotyczna, dosieczna łuku AM. w skroceniu wyraża się:

MQ = dostx. BS = dotycz. x OS = dosie. x.

Ztąd wypada że:

wst (90° — x) = dost. x: sty (90° — x) = dot x. siecz (90° — x) = dosie. x.

Ponieważ MQ=OP, więc dostawa łuku jest rowna części promienia zawartéj między środkiem koła a spodkiem wstawy.

6. Linija AP. zawarta między końcem łuku a spodkiem wstawy, nazywa się wstawą odwrotną łuku AM, a linija BQ, dostawą odwrotną tegoż łuku. Te dwie linije, z których pierwsza jest różnicą między promieniem a dostawą, a druga różnicą między promieniem a wstawą rzadko są używane.

7. Dając następnie punktowi M rozmaite położenia na okręgu, linije trygonometryczne, mogą wziąć położenie zupełnie przeciwne temu, które mają, gdy łuk AM jest mniejszy od 90°. Uważając *np.* łuk AM' którego dopełnienie BM' jest odjemne, widzimy, że jego dostawa QM' albo OP' przypada z lewéj strony punktu O, gdy w pierwszym razie przypadała z prawéj strony tegoż punktu. Takie zmiany w położeniu linij, przyczyniają się w ogólności do utrudzenia rachunku, iak to w następującém zagadnieniu zobaczymy. Niech będzie ABX linija jakakolwiek (fig. 2) na któréj dane są dwa punkta A i B. odległe od siebie o liniją AB = a. Przy-

puściwszy że wiadoma jest odległość x, pewnego punktu M, na téjże linii uważanego, od punktu B; znajdźmy odległość tegoż punktu od punktu A.

Odległość szukaną oznaczywszy przez z, będzie:

$$z = a + x, \text{ albo } z = a - x.$$

według tego, iak punkt M znajduje się za punktem B, lub przed punktem B; tak iż do wyznaczenia dwóch rożnych położeń punktu M, wypada zastosować dwie formuły. Lecz unikniemy téj niedogodności i jedna formuła będzie dostateczną, dając tylko przeciwne znaki przed odległościami mającemi przeciwne położenie względem punktu B. I tak gdy w pierwszém rownaniu $z = a + x$, uczynimy następnie $x = + MB$ i $x = - MB$, wypadnie $z = a + MB$, i $z = a - MB$; co też bydź powinno. Tym sposobem pierwsza formuła da się zastosować do wszystkich położeń punktu M. a druga będzie tem samém niepotrzebna. Możnaby także wziąć x, dodatne w kierunku BA, a odjemne w kierunku BX, a wtedy z drugiéj formuły otrzymalibyśmy każde położenie punktu M, a pierwsza byłaby nie potrzebna. Lubo z łatwościąby można więcéj podać przykładów, poprzedzający jednak dostateczny jest do przekonania, o ważności następującego prawidła:

Uważaiąc na linii jakiéjkolwiek prostéj lub krzywéj różne odległości, których wspólnym początkiem jest punkt stały téjże linii, wprowadzimy do rachunku odległości mające przeciwne położenie względem wspólnego początku, dając przed jednemi znak +, a przed drugiemi znak —.

Strona odległości dodatnych jest zupełnie dowolna, lecz gdy jest raz obrana, odległości odjemne powinny bydź brane w stronie przeciwnéj. Linije trygonometryczne uważają się pospolicie za dodatne w takiém położeniu, jakie mają gdy łuk jest mniejszy od 90°, to iest od $\frac{1}{4}$ okręgu.

8. Uważajmy teraz jakie zmiany dzieją się w liniiach trygonometrycznych, gdy się łuk powiększa lub zmniejsza. Kiedy promień OM, przystaje do OA, łuk AM jest O; wstawa jego jest O, styczna O, sieczna OA, dostawa OA, dotyczna zaś i dosieczna nieskończenie wielkie; bo linije BS i OS powiększają się w miarę

zbliżenia się promienia OM do OA, i mogą się stać tak wielkiemi jak tylko chcemy. Oznaczywszy więc promień przez r, będzie:

wst$O = O$. styc.$O = O$. siecz$O = r$.
dost$O = r$. dot.$O = \infty$ dos$O = \infty$.

Gdy promień OM, idzie ku OB, to jest gdy się łuk powiększa, wstawa, styczna i sieczna powiększają się także; a przeciwnie dostawa, dotyczna i dosieczna zmniejszają się.

Gdy punkt M. przyjdzie do środka łuku AB, łuk AM zawiera 45°, trójkąt OMP, jest równoramienny, a zatém $MP = OP$, to jest wstawa jest równa dostawie; aże $2\overline{MP}^2 = r^2$, więc $MP. = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$, a tém samém: wst $45^\circ =$ dost $45^\circ = \frac{1}{2} r\sqrt{2}$.

Trójkąty OAT i OBS są także równoramienne i równe; więc $AT = BS = OA$, to jest: styczna i dotyczna są równe promieniowi; czyli:

sty$45^\circ =$ dot $45^\circ = r$.

Nakoniec ponieważ $OT = OS$, więc sieczna jest równa dosiecznéj, a że w trójkącie OAT, $\overline{OT}^2 = 2r^2$ czyli $OT = r\sqrt{2}$, więc:

siecz $45^\circ =$ dos$45^\circ = r\sqrt{2}$.

Gdy punkt M przyjdzie do punktu B, łuk AB, będzie czwartą częścią okręgu czyli [Tang] 90°, [Sin] wstawą jego będzie BO, styczna i [Sec] sieczna nieskończenie wielkie, [Cos] dostawa zero, [Coty] dotyczna zero, [Cose] dosieczna OB. a zatém,

$wst 90^\circ = r.$ $sty 90^\circ = \infty$ $siecz\ 90^\circ = \infty$.
$dost 90^\circ = 0$ $dot 90^\circ = 0.$ $dos.\ 90^\circ = r.$

Ważności te wypadają także z ważności któreśmy otrzymali uważając łuk 0; bo skoro łuki 0 i 90° dopełniają się, musi więc być $wst 90^\circ = dost 0 = r.$ $sty 90^\circ = dot. 0 = \infty$ $siecz 90^\circ = dosiecz. 0 = \infty$ i odwrotnie $dost 90^\circ = wst. 0 = 0$, $dot 90^\circ = stycz.\ 0 = 0.$ $dosiecz\ 90^\circ = siecz 0 = r.$

9. Przypuśćmy teraz, że promień OM, obracając się ciągle wziął położenie OM', i uważajmy łuk AM'; wstawa tego łuku jest M'P'. Poprowadziwszy MM' równoodległą od AA', i wykreśliwszy wszystkie linije trygonometryczne, spostrzeżemy, że wstawy MP, i M'P' są sobie równe, to iest, że wstAM' = AM. Ponieważ dla otrzymania stycznej łuku AM' przedłużyć potrzeba promień OM', poniżéj średnicy AA', więc styczna AT', mając położenie przeciwnę pierwszemu jest odjemna; a że

trójkąty OAT i OAT' są równe, więc AT'=AT, to iest styAM'=—styAM.

Sieczna łuku AM' iest OT', linija ta; jako nie przypadająca na kierunku promienia OM', z téj saméj strony środka koła co punkt M', lecz ze strony przeciwnéj, jest odjemna; a że nadto OT'= OT więc siecz AM'=—siecz AM.

Podobne uwagi stosują się do dostawy, dotycznéj, i dosiecznéj. Łuk AM' jest większy od 90°, więc dopełnienie jego jest odjemne, nad to dostawa QM' lub OP', znaydując się z lewéj strony punktu O, powinna być wzięta ze znakiem odjemnym. Toż samo stosuje się do dotycznéj BS'. Co się tycze dosiecznéj OS' téj nie potrzeba brać ze znakiem odjemnym, bo przypada na promieniu OM', z téj saméj strony środka koła co punkt M'. Trójkąty OQM. i OQM', tudzież OBS i OBS' są równe; więc QM'=QM, BS'=BS i OS'=OS: a ztąd:

dost AM'=—dost AM, dot AM'= —dotAM, dosieczAM'=dosieczAM.

Spełnieniem łuku lub kąta, nazywa się łuk lub kąt, który dodany do niego czyni 180°, to iest półokręgu; lub dwa kąty proste; więc łuk AM'

lub

lub jemu równy AM, jest spełnieniem łuku AM', a własności dopiero wskazane można w ten sposób wysłowić: Dwa łuki spełniające się mają równe linie trygonometryczne, lecz z przeciwnémi znakami, prócz wstawy i dosiecznej które znaku nie zmieniają.

Aby te własności wyrazić przez równania oznaczmy przez x łuk AM', będzie AM=A'M'$=180°-x$, a ztąd:

Sin wst: $x=$ wst: $(180°-x)$,
Tang sty: $x=-$sty: $(180°-x)$,
Sec siecz: $x=-$siecz: $(180°-x)$,
Cosin dost: $x=-$dost: $(180°-x)$ (1),
Cotg dot: $x=-$ dot: $(180°-x)$,
Cosec dos: $x=$ dos: $(180°-x)$.

Ztąd jeszcze widzimy, że od 90° do 180° wstawa, styczna i sieczna zmniejszają się, a przeciwnie dostawa, dotyczna, dosieczna powiększają się.

Gdy promień OM, przyjdzie do OA', łuk przez punkt M przebieżony wynosi 180°, a

wst: $180°=0$ dost: $180°=-$r.
sty: $180°=0$ dot: $180°=-\infty$,
siecz: $180°=-$r. dos: $180°=\infty$

Wszystkie te ważności wyprowadzić się dadzą z równań(1) czyniąc $x=180°$, tak *np.* równanie dost: $x = -$ dost: $(180^\circ - x)$, daje w tym razie dost: $180^\circ = -$ dost: 0, a że dost: $0 = r$, więc dost: $180^\circ = -r$.

Kiedy promień OM, weźmie położenie ON′, łuk AM zmienił się na AMM′A′N, większy od 180°, a mniejszy od 270°; promień ON′ przedłużmy do przecięcia okręgu w punkcie M, i spuśćmy prostopadłe N′P′ i MP do średnicy AA′, będzie A′N′ = AM. N P′ = MP, czyli OQ = OQ′ i OP′ = OP; lecz że jedne z tych linij mają przeciwne położenie względem średnicy AA′, a drugie względem punktu O; wziąć je przeto należy z przeciwnémi znakami; idzie zatém, że wstawa i dostawa łuku większego od 180°, a mniejszego od 270° są równe, lecz z przeciwnémi znakami wstawie i dostawie łuku, który jest różnicą między łukiem danym a pół-okręgiem. Styczna AT i dotyczna BS. łuku ABA′N′, są te same co łuku AM; więc styczna i dotyczna łuku zawartego między 180° i 270° są dodatne i równe stycznej, łuku równego różnicy między łukiem danym a pół-okręgiem. Nakoniec sieczna łuku ABA'N', jest OT, a dosieczna OS, te same co łuku AM, lecz odjemne, jako nieprzypadające na kierunku promienia ON', ale na jego przedłużeniu. Oznaczywszy zatém łuk A'M'=AM=A'N' przez x, będzie łuk AMM'A'N=180°+x, a ztąd:

Sin wst: $(180°+x)=-$wst: x,
Tg sty: $(180°+x)=$sty: x,
Sec siecz: $(180°+x)=-$siecz: x,
Cos dost: $(180°+x)=-$dost: x (2),
Cotg dot: $(180°+x)=$dot: x,
Cosec dos: $(180°+x)=-$dos: x.

10. Gdy promień OM przyjdzie do OB' łuk będzie zawierał 270°, jego wstawa będzie$=r$, dostawa O, stycz:$-\infty$, sieczna$-\infty$, dotyczna O, a dosieczna $-r$. Gdy zaś promień OM weźmie położenie ON łuk AMBN'B'N, będzie większy od 270°, a mniejszy od 360°; z punktu N spuściwszy prostopadłą NP i przedłużywszy ją do M, będzie AM=AN i MP=NP, nadto dostawa OP, jest wspólna dwóm łukom AMBB'N i AM; więc wstawa łuku zawartego między 270° a 360°, jest równa, lecz z przeciwnym znakiem, wstawie, łuku będącego różnicą między całym okrę-

giem a łukiem danym, dostawa zaś jest taż sama dla obu łuków.

Styczna AT' i dostyczna BS' łuku ABA'B'N, są równe stycznej i dotycznej łuku AM, lecz mają położenie przeciwne, obie więc są odjemne, a tém samém styczna i dotyczna łuku zawartego między 270° a 360°, jest równa, lecz z przeciwnym znakiem stycznej i dotycznej łuku równego różnicy między całym okręgiem a łukiem uważanym. Wreszcie sieczna łuku ABA'B'N, jest OT'=OT, a dosieczna OS'=OS; z tych pierwsza jest dodatna, jako przypadająca na kierunku promienia przez koniec uważanego łuku przechodzącego, druga zaś odjemna. Oznaczywszy więc łuk AN=AM przez x, będzie łuk ABA'B'N $=360°-x$, a ztąd:

wst: $(360°-x)=-$ wst: x,
sty: $(360°-x)=-$sty: x,
siecz: $(360°-x)=$siecz: x,
dost: $(360°-x)=$dost: x... (3),
dot: $(360°-x)=-$dot: x,
dosiecz: $(360°-x)=-$dos: x.

11. Nakoniec gdy promień OM wróci do położenia OA, łuk przebieżony przez

punkt M, będzie równy okręgowi, a jego linie trygonometryczne będą te same co łuku zero. Nareszcie przypuściwszy że punkt M po opisaniu jednego lub kilku okręgów, wraca do tych samych położeń, jakie miał opisując pierwszy okrąg, linie trygonometryczne przybiorą ważności poprzednio wyznaczone, to jest że w ogólności:

wst: $(360^\circ+x)=$wst: x,
sty: $(360^\circ+x)=$sty: x,
siecz: $(360^\circ+x)=$siecz: x,
dost: $(360^\circ+x)=$dost: x,
dot: $(360^\circ+x)=$dot: x, (3 bis),
dosie: $(360^\circ+x)=$dosie: x.

12. Wypada nam teraz mówić o łukach odjemnych, to jest o łukach, które zakreśla promień OM, obracając się w kierunku AB'A' przeciwnym pierwszemu.

Niech będą dwa łuki AM i AN, fig: 1 równe, lecz przeciwnie położone względem średnicy AA', które nazwijmy x, i $-x$; ich wstawy MP i NP, są także równe, lecz przeciwnie położone. Aby wynaleźć dostawy, uważać należy, że dopełnienia łuków x,

$i-x$, są $90°-x$ i $90°+x$, to jest: łuki BM i BMN, których wstawy MQ i NQ' są równe i mają jednakowe położenie względem średnicy BB'. Ztąd wypada, że wst: $(-x) = -$ wst: x, a dost: $(-x) =$ dost: x... (4).

Lubo na figurze łuki AM i AN, są mniejsze od $90°$, formuły jednak te są ogólne; bo oczywista jest, że powiększając oba łuki, tak żeby sobie zawsze były równe, ich wstawy MP i NP, nie przestaną bydź równe i przeciwnie położone, a więc zawsze będzie wst: $(-x) = -$ wst: x. Rrzypuściwszy, że łuki są większe od $90°$, jak *np.* łuki ABM' i AB'N, i uczyniwszy ABM' $= x$, a—AB'N' $= -x$. Dopełnienie $90° - x$ pierwszego łuku, to jest łuk BM', leżący z lewej strony punktu B, jest odjemne dopełnienie; zaś $90° + x$ drugiego łuku jest łuk BAN', leżący zawsze z prawej strony punktu B jest dodatne; a że wstawy M'Q i N'Q' łuków dopełniających, są równe i mają to samo położenie względem średniey BB', więc zawsze dost: $(-x) =$ dost: x. Uważać tu należy: 1°, że wielkość i położenie dostawy łuku jakiegokolwiek dodatnego lub odjemnego, oznacza zawsze odległość spodka wstawy od środka koła.

2°. Że formuły (1), (2), (3), (4), dotąd wyprowadzone, stosują się do wszystkich łuków dodatnych lub odjemnych. Jakoż w formuły (1) wst: x=wst: $(180°-x)$ i dost: x=— dost: $(180°-x)$, dowiedzione tylko na przypadek łuków zawartych między 0 a 180°— wstawiwszy $180°+x$, otrzymamy:

$$\text{wst: }(180°+x)=\text{wst: }(-x),$$
$$\text{dost: }(180°+x)=-\text{ dost: }(-x).$$

Równania prawdziwe na mocy równań (2) i (4).

Wstawiając, $-x$ za x, formuły (5) będą także prawdziwe, a tém samém stosują się do wszystkich łuków.

3°. Formuły (2) dowiedzione na wszystkie łuki dodatne, rozciągają się także do łuków odjemnych; jakoż zamieniwszy w nich x na $-x$, wypadnie:

$$\text{wst:}(180°-x)=-\text{wst:}(-x)=\text{wst:}x,$$
$$\text{dos:}(180°-x)=-\text{dos:}(-x)=-\text{dos:}x$$

4°. Ponieważ przez dodawanie 180° do łuku jakiegokolwiek $+x$, lub $-x$, zmienia się tylko znak wstawy i dostawy; więc przez dodawanie 360°, żadna zmiana miejsca nie ma, a tém samém formuły (3 bis) stosują się także i do łuków odjemnych.

13. Nic teraz łatwiejszego, jak przywieśdź do pierwszej $\frac{1}{4}$ okręgu linie trygonometryczne jakiegokolwiek łuku. Niech będzie *np.* łuk $x=1139°$, którego wstawę znaleźć chcemy. Od łuku tego odejmijmy tyle razy 360°, ile razy to uczynić można, otrzymamy resztę 59°, a więc wst: $x=$ wst: 59°. Gdyby po odciągnięciu pewnej liczby razy 360°, od łuku danego pozostała reszta była większa od 180°, odjąć od niej potrzeba 180°, a linia trygonometryczna łuku tą resztą wskazanego, będzie szukaną linią trygonemetryczną łuku danego.

Z tego cośmy dotąd powiedzieli wypada: 1°, że linie trygonometryczne wszystkich łuków większych od $\frac{1}{4}$ okręgu, są te same co łuków mniejszych, i różnią się tylko znakami, które przed jednemi są dodatne, a przed drugiemi odjemne, tak że z sześciu linij trygonometrycznych cztery sa zawsze odjemne, a dwie dodatne.

I tak łuki kończące się w drugiej ćwiartce koła, mają wstawę i dosieczną dodatną, a dostawę styczną i sieczną odjemną. Łuki kończące się w trzeciej ćwiartce, mają styczną i dotyczną dodatną, a wstawę, dostawę, sieczną i dosieczną odjemną. Nakoniec łuki kończące się w czwartej ćwiartce mają dostawę i sieczną dodatną, a wstawę styczną, dotyczną i dosieczną odjemną.

2°. Że z linij trygonometrycznych dwie, to jest: wstawa i dostawa są zawsze zawarte między granicami $+r$ i $-r$, to jest: że mogą przechodzić przez wszystkie stany wielkości od 0 do $+r$, i od 0 do $-r$, lecz nigdy tych granic nie przechodzą. Dwie inne, sieczne i dosieczne, mogą się stać tak wielkie jak tylko chcemy, lecz mają $+r$ i $-r$ za granicę ubywania, to jest: że rosną dodatnie od $+r$, do $+\infty$, a odjemnie od $-r$, do $-\infty$, a tém samém nie mogą mieć ważności zawartych między $+r$ i $-r$.

Nakoniec dwie ostatnie, styczna i dotyczna, mogą mieć wszelkie ważności od 0 do $+\infty$, i od 0 do $=-\infty$.

O Łukach odpowiadających danej wstawie, dostawie i t. d.

14. Z wiadomości poprzednio wyłożonych przekonywamy się, że jest nieograniczona liczba łuków, mających też same linie trygonometryczne. Przypuśćmy więc, że mamy jednę z nich daną, i szukajmy łuków jej odpowiadających. Dajmy na to, że łuk jest dany przez swoją wstawę, i niech będzie *np.* x = łuk. wst: $= a$. Wziąwszy punkt A za początek łuków, na promieniu OB, (fig. 1) prostopadłym do OA, odetnijmy $QO = a$, i przez punkt Q poprowadźmy MM', równoległą od OA; tu już widzimy, że x może znaczyć wszystkie łuki, kończące się w punktach M i M'. Nazwijmy α łuk AM, H, pół-okręgu, czyli 180°, łuk AM' będzie równy $H - \alpha$, a łuki dodatne i kończące się w punktach M i M', zamknięte będą w dwóch następujących szeregach:

α, $2H + \alpha$, $4H + \alpha$, $6H + \alpha$...

$H - \alpha$, $3H - \alpha$, $5H - \alpha$, $7H - \alpha$...

Łuk AB'M $= 2H - \alpha$, a łuk AB'M' $= H + \alpha$; dodawszy do każdego z nich pewną liczbę okręgów, i wziąwszy odjemne łuki, z dodania wynikające, otrzymamy wszystkie łuki odjemne odpowiadające danej wstawie, to jest:

$$-2H+\alpha, -4H+\alpha, -6H+\alpha \ldots$$
$$-H-\alpha, -3H-\alpha, -5H-\alpha \ldots$$

Wszystkie łuki w tych czterech szeregach zawarte, mogą bydź wyrażone w dwóch dosyć prostych formułach. Ponieważ w dwóch z tych szeregów, to jest: w pierwszym i trzecim, łuk α, jest dodany do parzystej liczby pół-okręgów H, tak dodatnych jak odjemnych; w dwóch zaś drugich, to jest drugim i czwartym odjęty od nieparzystéj liczby tychże pół-okręgów; więc oznaczywszy przez k liczbę jakąkolwiek dodatną lub odjemną, która nawet może bydź równa zero, wszystkie te łuki zamkniemy w formułach:

$$x=2kH+\alpha;\ x=(2k+1)\,H-\alpha,\ (1).$$

W przykładzie poprzedzającym wzięliśmy α dodatne: gdyby zaś było $x=$ łuk wst: $=-a$; odcięlibyśmy $OQ'=a$ na OB', a poprowadziwszy przez punkt Q', równoległą MN od AA', znaleźlibyśmy, że łukami odpowiadającemi danej wstawie $-a$, są łuki kończące się w punktach N i N'. Naznaczmy ABN' $= \alpha$, będzie ABN $= 3H - \alpha$, AB'N' $= 2H - \alpha$, AN $= \alpha - H$; więc łuki x, tak odjedmne jak dodatne, odpowiadające wstawie $-a$, czyli QQ', są:

$\alpha,\ 2H + \alpha,\ 4H + \alpha \ldots,$

$3H - \alpha,\ 5H - \alpha,\ 7H - \alpha \ldots,$

$-2H + \alpha, -4H + \alpha, -6H + \alpha \ldots,$

$H - \alpha, -H - \alpha, -3H - \alpha \ldots$

które jak łatwo poznać, są także objęte w formułach (1).

Gdy a jest większe od promienia, łuk x jest urojony, bo jak wiemy największa ważność dodatna wstawy i dostawy jest $+r$, a odjemna $-r$.

15. Znajdźmy teraz łuk odpowiadający danej dostawie, niech będzie *np.* $x =$ łuk dost: $= a$. Gdy a jest dodatne, na promieniu OA, odetnijmy OP $= a$, i z punktu P, wyprowadźmy prostopadłą MN. Ważnościami x, będą łuki tak dodatne jak odjemne, kończące się w punktach M i N. Uczyniwszy AM $= \alpha$, wszystkie te łuki zamkniemy w czterech następujących szeregach:

$\alpha,\ 2H + \alpha,\ 4H + \alpha \ldots;$

$2H - \alpha,\ 4H - \alpha,\ 6H - \alpha \ldots;$

$-\alpha, -2H-\alpha, 4H-\alpha...;$
$-2H+\alpha, -4H+\alpha, -6H+\alpha...;$
a ztąd wniesiemy, że oznaczywszy przez k, liczbę jakąkolwiek całkowitą dodatną lub odjemną; można będzie te wszystkie łuki objąć w dwóch formułach następujących:
$x = 2kH+\alpha, x = 2kH-\alpha$... (2).

Gdy a będzie odjemne, to jest: gdy będzie x = łuk dost: $= -a$, potrzeba odciąć a, na promieniu OA'; a w tym razie oznaczywszy przez α, łuk AMM', dojdziemy do tych samych wypadków, co w przypadku poprzedzającym. Gdy a jest większe od promienia, łuk x jest urojony.

16. Szukajmy teraz łuku odpowiadającego danej stycznej. Niech będzie *np.* x = łuk stycz: $= a$. Wziąwszy a za dodatne, weźmy styczną AT $= a$, nad promieniem OA, i poprowadźmy linią TMN', przechodzącą przez środek koła. Linia ta przetnie okrąg w punktach M i N', a ważnościami x, będą wszystkie łuki dodatne i odjemne kończące się w punktach M i N'. Naznaczywszy AM $= \alpha$, będzie AMN' $= H+\alpha$; ANM $= 2H-\alpha$, AN' $= H-\alpha$, a łuki szu-

kane zamknąć można w następujących czterech szeregach:

α, $2H+\alpha$, $4H+\alpha$...;
$H+\alpha$, $3H+\alpha$, $5H+\alpha$;
$-2H+\alpha$, $-4H+\alpha$, $-6H+\alpha$..;
$-H+\alpha$, $-3H+\alpha$, $-5H+\alpha$....

Tu widzimy, że łuk α, jest dodawany do pewnej liczby pół-okręgów dodatnych lub odjemnych, a tém samém, że łuki szukane wyrazić można w następującej formule ogólnej:

$x=kH+\alpha$.... (3).

Gdy styczna a jest odjemna, odciąć ją potrzeba na AT, poniżej OA, α znaczy w tenczas łuk zawarty między 90° a 180°, *np.* ABM'.

17. Nie zastanawiamy się tu nad przypadkiem, w którymby łuk był dany przez inną linią trygonometryczną, bo łatwo się domyśléć można, że łuki mające tę samę wstawę albo dostawę, albo też styczną, mają także tę samę dotyczną, sieczną i dosieczną, jak to w krótce zobaczymy, poznawszy związki zachodzące między liniami trygonometrycznemi. Formuły więc (1), (2), (3), stosują się i do przypadku, w którym łuk jest dany przez doty-

czną, sieczną lub dosieczną. Pamiętać tylko potrzeba, że α znaczy zawsze najmniejszy z łuków odpowiadających danej linii trygonometrycznej, zawarty między O a 360°; H, pół-okręgu, a *k*, liczbę całkowitą jakąkolwiek, dodatną lub odjemną, która nawet może bydź i zero.

Przywiedzenie linij trygonometrycznych do prostych stosunków.

18. Ponieważ w trygonometryi łuk uważa się tylko za miarę kąta, z tego więc względu nie dajemy uwagi na jego wielkość bezwzględną; lecz jedynie na jego stosunek do okręgu, którego jest częścią. Stosunek ten jako wskazany liczbą stopni zawartych w łuku, jest dostateczny do wyznaczenia kąta jemu odpowiadającego; wszystkie albowiem łuki zawarte między ramionami jednego kąta, zakreślone jakiemikolwiek bądź promieniami z jego wierzchołka, jako środka, zamykają równą liczbę stopni.

Stosunki między liniami trygonometrycznemi tych łuków, a promieniami kół, do których należą, zawisły także od liczby stopni. Tak widzimy (fig: 3), gdzie MP, M'P', M''P''..., są wstawy łuków podobnych zakreślonych promieniami OM, OM', OM''... że: $\frac{MP}{OM}=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{M''P''}{OM''}=$..., te to więc stosunki, lecz nie wstawy są wiadome, gdy dany jest kąt. Toż samo powiedzieć można o innych liniach trygonometrycznych. Ztąd widzimy, że nie długości bezwzględne linij trygonometrycznych, ale raczej ich stosunki do promienia powinny wchodzić do rachunku. Stosunki te wprowadzimy do rachunku, biorąc za jedność promień koła, w którém uważamy linie trygonometryczne, wtedy albowiem ważności liczebne tych linij, będą już témi stosunkami. Stosunki te znane są także pod nazwiskiem wstawy naturalne, dostawy naturalne.

19. Wreście gdy rachunek był wykonany, podług promienia uważanego za jedność, łatwo zmienić wypadki w ten sposób, aby się stosowały do każdego innego przypuszczenia na promieniu uczynionego. Bo podług tego co się

dopiero powiedziało, stosunki linij trygonometrycznych do promienia w drugiem przypuszczeniu, są równe liniom trygonometrycznym w przypuszczeniu pierwszém, to jest: $\frac{\text{wst}:a}{r.}=\text{wst}:a$, $\frac{\text{dost}:a}{r.}=\text{dost}:a$, $\frac{\text{sty}:a}{r.}=\text{stycz}a$, a zatém w wypadkach otrzymanych podług promienia wziętego za jedność, dosyć wstawić $\frac{\text{wst}:a}{r.}$ za wst a, $\frac{\text{dost}:a}{r.}$ za dost$a$, $\frac{\text{sty}:a}{r.}$ za stycz: a, aby otrzymać odpowiadające wypadki, podług promienia jakiegokolwiek r.

Ostrzedz tu wypada, że nie należy sądzić, iż jest długość bezwzględna, promień I, i inna długość promień r, tak jak są różne długości, *np.* 1 pręt, 2 pręty i t. d; promień jest zawsze istotnie niewyznaczony. A lubo każdą linią trygonometryczną danego kąta wyraża inna liczba, stosownie do przypuszczenia uczynionego na promieniu, liczby jednak te są zawsze w tym samym stosunku, to jest w stosunku stałym do liczby promień oznaczającej, i ten też stosunek tylko wchodzi do rachunku.

Związki pomiędzy liniami trygonometrycznemi.

20. Z trójkątów OMP, OAT, OMQ, i OSB, fig: I, daje się wyprowadzić związek sześciu linij trygonometrycznych.

1°. W trójkącie prostokątnym OMP jest:

$$\overline{MP}^2+\overline{OP}^2=\overline{OA}^2.$$

2°. W trójkątach OMP i OTA podobnych jest:

AT:MP=OA:OP.

i OT:OM=OA:OP.

3°. Trójkąty podobne OMQ i OSB, dają następujące proporcye:

BS:MQ=OB:OQ,

i OS:OM=OB:OQ.

Oznaczywszy przez *a* łuk AM, przez *r* promien OM i zamiast linij, wstawiwszy ich naazwiska trygonometryczne, to jest wst:*a* zamiast MP, dost:*a*, zamiast OP i t. d; z powyższych proporcyi otrzymamy pięć następujących równań:

wst:^2a+dost:$^2a=r^2$.... (1),

$$\text{stycz: } a = \frac{r \text{ wst: } a}{\text{dost: } a} \dots (2),$$

$$\text{siecz: } a = \frac{r^2}{\text{dost: } a} \dots (3),$$

$$\text{dot: } a = \frac{r \text{ dost: } a}{\text{wst: } a} \dots (4),$$

$$\text{dosie: } a = \frac{r^2}{\text{wsta: } a} \dots (5).$$

Równanie (1) posłuży do wyrachowania wstawy, za pomocą dostawy i odwrotnie. Gdy *np.* będzie dana wst:a, otrzymamy dost:$a = \pm\sqrt{r^2 - \text{wst:}^2 a}$ dwie ważności równe, lecz z przeciwnémi znakami, bo też jednej wstawie *np.* OQ odpowiadają dwie dostawy OP, OP' równe, lecz przeciwnie położone.

Formuły (2), (3), (4) i (5) dadzą ważności stycznej, siecznej, dotycznej, i dosiecznej, gdy będzie wiadoma ważność wstawy i dostawy.

21. Dla zastosowania weźmy *np.* ważność wstawy $30° = \frac{r}{2}$, i znajdźmy ważność dostawy, stycznej siecznej i t. d. tegoż łuku. Dopełnieniem łuku 30° jest 60°, więc

$$\text{wst: } 30° = \text{dost:} 60° = \frac{r}{2}, \text{ a dost: } 30° = \text{wst:} 60° = \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

3*

sty: 30° = dot: $60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{3}$; a dot: 30° = sty: $60^\circ = r\sqrt{3}$.

siecz: 30° = dosie: $60^\circ = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$;

dosiecz: 30° = siecz: $60^\circ = 2r$.

22. Lubo na figurze uważaliśmy łuk $a < 90^\circ$, formuły jednak (1), (2), (3), (4) i (5) są ogólne. Rzecz ta byłaby oczywistą, gdybyśmy uważali tylko bezwzględną wielkość linij trygonometrycznych, te linie bowiem tworzą zawsze trójkąty; z których można też formuły otrzymać. Widzimy oraz że mając wzgląd na znaki, formuła pierwsza zawsze mieć będzie miejsce, bo zamyka tylko same kwadraty; wypada przeto zastanowić się, czyli na mocy czterech pozostałych formuł, styczna, sieczna i t. d. przybierają znaki zgodne z ich położeniem.

Od 0 do 90°, wstawa i dostawa są dodatne, cztery zatem formuły dają na styczną, sieczną, dotyczną i dosieczną ważności dodatne, co też bydź powinno. Od 90° do 180°, wstawa jest dodatna, dostawa odjemna, ważności zatém stycznej, siecznej i dotycznej wyprowadzone z powyższych formuł są odjemne; gdy tym czasem ważność dosiecznej jest dodatna; rzeczywiście też figura pokazuje, że takie znaki powinny w tym przypadku mieć też linie. Od 180° do 270° wstawa i dostawa są odjemne; więc ważności otrzymane z formuł (2) i (4) będą w tym przypadku dodatne, a ważnośei z formuł (3) i (5) odjemne; co także bydź powinno ze względu na położenie, jakie wtenczas mają te cztery linie. Od 270° do 360° wstawa jest odjemna, dostawa dodatna, ważności, dane przez formuły (2), (4) i (5) są w tym razie odjemne, a ważność dana przez formułę (3) dodatna, co także podług wykreślenia bydź powinno. Kiedy łuk jest większy od 360°, *np.* $360°+a$; jego wstawa i dostawa mają tę samę ważność i ten sam znak, co wstawa i dostawa łuku a; cztery zatém formuły, o których mowa, dadzą te same wypadki, jak gdybyśmy tylko uważali łuk a, bo też rzeczywiście styczna, sieczna i t. d. łuku $360°+a$, są te same co łuku a.

Uważajmy teraz łuki odjemne. Ponieważ wst: $(-a) = -$ wsta:, a dost: $(-a) =$ dost:a (11), więc zmieniając znak łuku, formuły (2)....(5) dają, na styczną, dotyczną i dosieczną ważności też same, lecz z przeciwnémi znakami; na sieczną zaś ważność w niczém od pierwszej nieodmienną; wypadki te zgodne są z wykreśleniem.

Sciśle mówiąc, możnaby wątpić o rzetelności tych formuł co do łuków 0, 90°, 180°, 270° i 360°, bo wtedy trójkąty nikną; lecz łatwo spostrzedz że i w tych przypadkach dają wypadki zgodne z wykreśleniem. Uczyniwszy *np.* $a = 90^\circ$ będzie: wst: $90^\circ = 0$, a tém samém sty: $90^\circ = \infty$, dot: $90^\circ = 0$, dosiecz: $90^\circ = r$.

Uwaga. Ważność sty: $90^\circ = \infty$, powinna bydź wzięta ze znakiem $\pm$ bo jest razem granicą stycznych dodatnych i stycznych odjemnych, które wypadają gdy się łuk powiększa od 0 do 90°. i gdy się zmniejsza od 90° do 180°. Toż samo rozumieć należy o innych liniach trygonometrycznych, które się mogą stać nieskończenie wielkiemi.

23. Dosyć było dowieść, że formuły (2) i (3) są ogólne, aby już z tąd wnieść, że i formuły (4) i (5) są także ogólne, bo te mogą bydź wyprowadzone z pierwszych, przez wstawienie $90° - a$, zamiast a.

W ogólności ile razy tylko równanie między liniami trygonometrycznemi pewnych łuków, będzie dowiedzione na wszelkie ważności tychże łuków, zawsze można w nie wstawić zamiast łuków ich dopełnienia, to jest zamienić wst:, stycz:, sieczː, na dost:, dot:, dosiecz.

24. Z pięciu równań (1).... (5) można wyprowadzić wiele innych, a z tych ważniejsze przytoczymy:

1º. Rozmnożywszy przez siebie strony odpowiadające równań (2) i (4) wypadnie: stycz: a dot: $a = r^2$ (6),

to jest: że promień jest średnio jeometrycznie proporcyonalny do stycznej i dotycznej; co także wyprowadzić można bezpośrednio z trójkątów podobnych OTA i OSB.

2º. Z równania (2) wypada:

$$r^2 + \text{sty:}^2 a = r^2 + \frac{r^2 \text{wst:}^2 a}{\text{dost:}^2 a} =$$
$$\frac{r^2(\text{wst:}^2 a + \text{dost:}^2 a)}{\text{dost:}^2 a}, \text{ czyli } r^2 + \text{sty:}^2 a =$$
$\text{siecz:}^2 a$.... (7).

Podobnymże sposobem, znajdziemy:

$$r^2 + \text{dot:}^2 a = \text{dosiecz:}^2 a \text{.... (8).}$$

3º. Z równań (3) i (5), wypada:

$$\frac{1}{\text{siecz:}a} = \frac{\text{dost:}a}{r^2} \text{ i } \frac{1}{\text{dosie:}a} = \frac{\text{wst:}a}{r^2},$$

dodawszy do siebie kwadraty obu stron tych równań, i uważając że $\text{wst:}^2 a + \text{dost:}^2 a = r^2$, otrzymamy:

$$\frac{1}{\text{siecz:}^2 a} + \frac{1}{\text{dosie:}^2 a} = \frac{1}{r^2} \text{... (9).}$$

25. W ogólności mając daną którąkolwiek z sześciu linij trygonometrycznych; można za pomocą równań (1).... (5), wynaleźć pięć innych. Tak *np.* mając daną styczną, a chcąc znaleźć wstawę i dostawę, potrzeba z równań (1) i (2), to jest:

$$\text{wst:}^2 a + \text{dost:}^2 a = r^2 \text{ i sty:}a = \frac{r\,\text{wst:}a}{\text{dost:}a}$$

wziąć ważności na wst: a i dost: a. Z drugiego *np.* wypada:

$r^2 \text{wst:}^2 a = \text{sty:}^2 a.\ \text{dost:}^2 a$; a zatém $\text{dost:}^2 a = \frac{r^2 \text{wst:}^2 a}{\text{sty:}^2 a}$, $\text{wst:}^2 a = \frac{\text{sty:}^2 a.\ \text{dost:}^2 a}{r^2}$;

ważność tę wstawiwszy następnie w równanie (1), za $\text{dost:}^2 a$ i $\text{wst:}^2 a$, otrzymamy:

$$\text{wst:} a = \frac{\pm r\ \text{sty:} a}{\sqrt{r^2 + \text{sty:}^2 a}},$$

$$\text{dost:} a = \frac{\pm r^2}{\sqrt{r^2 + \text{sty:}^2 a}} \ldots. (10).$$

Znak podwójny $\pm$ ostrzega, że są dwie wstawy i dwie dostawy równe i przeciwne, odpowiadające tej samej stycznej. Należy tylko w obu równaniach brać razem znaki wyższe, i razem znaki niższe; bo inaczej nie otrzymalibyśmy na powrot z równań (10), równania $\frac{r\ \text{wst:}\ a}{\text{dost:}\ a} = \text{stycz:}\ a$.

26. Jedném z główniejszych zagadnień trygonometrycznych, od którego zależy ułożenie tablic jest następujące:

Zagad: Mając daną wstawę i dostawę dwóch łuków a i b, znaleść wstawę i dostawę ich summy $a+b$, i różnicy $a-b$.

Rozw: Niech będzie AG (fig: 4), czwarta część okręgu zakreślonego promieniem OA; weźmy na niej dwa łuki $AB=a$ i $BC=b$, będzie łuk $ABC = a+b$, a przeniosłszy BC od B do C', będzie łuk $AC'=a-b$.

Poprowadziwszy cięciwę CC', i promień OB, do niej prostopadły w punkcie I; spuśćmy do promienia OA z punktów B, C i C', prostopadłe BP, CQ i C'Q'. Podług opisania wstawy i dostawy, będzie:

BP=wst: a, OP=dost: a, CI=wst: b, OI=dost: b, CQ=wst: $(a+b)$, OQ=dost: $(a+b)$, C'Q'= wst: $(a-b)$, OQ'= dost. $(a-b)$. Wypada wyrazić tylko te cztery linie ostatnie, w funkcyi czterech pierwszych i promienia.

Z punktu I, spuśćmy prostopadłą IL, i poprowadźmy IH, równoległą do OA; trójkąty pododne OBP, OIL i CIH, porównane z sobą dadzą stosunki szukane, jakoż z samej figury wypada:

CQ=wst: $(a+b)$=HQ+CH=IL+CH,
OQ=dost: $(a+b)$=OL−LQ=OL−IH.

Poprowadziwszy C'H' równoległą od AO, aż do przecięcia IL, w punkcie H', trójkąty C'IH' i CIL, przystaną do siebie, bo mają łuki C'I i CI równe i po dwa kąty tymże bokom przyległe równe, a ztąd IH'=CH, C'H'=IH=Q'L, a zatém:

C'Q'=wst: $(a-b)$=H'L=IL—IH'= IL—CH,

O'Q'=dost:$(a-b)$=OL+LQ'=OL+ IH.

Zadanie więc poprzedzające przywodzi się ostatecznie do wyznaczenia czterech linij IL, OL, CH, IH.

W trójkątach podobnych OBP i OIL, jest:

OB:PB=OI:IL, r: wst.a=dost.b:IL,

czyli

OB:OP=OI:OL, r:dost$a$=dost$b$:OL;

ztąd IL$=\frac{\text{wst}:a.\ \text{wst}:b}{r}$, OL$=\frac{\text{dost}:a.\,\text{dost}:b}{r}$.

Trójkąty OBP i CIH, są podobne, bo ich boki odpowiadające są do siebie prostopadłe, więc:

OB:CI=OP:CH, r:wst:b=dost$a$: CH,

czyli

OB:BP=CI:IH, r:wst:a=wst:b; IH;

ztąd $CH=\frac{wst:b.\,dost:a}{r}$, $IH=\frac{wst:a.\,wst:b}{r.}$

Wstawiwszy te ważności zamiast linij IL, OL, CH, IH, w wyrażenia na wst: $(a+b)$, dost: $(a+b)$, wst: $(a-b)$ i dost: $(a-b)$, otrzymamy:

$$wst:(a+b)=\frac{wst:a.\,dost:b+wst:b.\,dost\,a}{r.}\;...(1)$$

$$dost\,(a+b)=\frac{dost\,a.\,dost\,b-wst:a.\,wst:b}{r.}\;...(2)$$

$$wst:(a-b)=\frac{wst\,a.\,dost\,b-wst:b.\,dost\,a}{r.}\;...(3)$$

$$dost:(a-b)=\frac{dost\,a.\,dost\,b+wst:a.\,wst:b}{r.}\;...(4)$$

formuły te do dwóch następujących przywieść można:

$$wst:(a\pm b)=\frac{wst:a.\,dost\,b\pm wst:b.\,dost\,a}{r.}$$

$$dost:(a\pm b)=\frac{dost\,a.\,dost\,b\mp wst\,b.\,dost\,a}{r.}$$

27. W wykreśleniu poprzedzającem, wzięliśmy każdy łuk, a nawet ich summę mniejszą od czwartej części okręgu; lecz przez podobneż wykreślenie, możnaby dowieść dokładności tych formuł na wszelki przypadek, zwracając tylko

uwagę na położenie linij trygonometrycznych, łuków uważanych. Przestaniemy na jednym z tych przypadków, biorąc jeden z dwóch łuków większy od 90°, ich summę większą od 180°, a różnicę większą od 90°.

Niech będzie fig: 5 $AB=a$, $BC=BC'$ $=b$, ztąd $ABC=a+b$, $AC'=a-b$. Poprowadźmy jak w przypadku poprzedzającym promień OB i cięciwę CC', i spuśćmy prostopadłe BP, CQ, C'Q'. Nakoniec poprowadźmy prostopadłą IL i równoległą HI, od promienia OD, przedłużając tę ostatnią, do przecięcia przedłużonej linii CQ; tudzież równoległą C'H', do przecięcia linii przedłużonej IL.

Ponieważ łuki AB i AC', są zawarte między 90°, a 180°; więc mają wstawy dodatne, a dostawy odjemne, to jest:

$BP=$wst:a, dost:$a=-OP$, czyli OP $=-$dost:a, $C'Q'=$wst: $(a-b)$, dost: $(a-b)=-OQ'$, czyli $OQ'=-$ dost: $(a-b)$.

Łuk ABC, jako większy od 180°, a mniejszy od 270°, ma i wstawę i dostawę odjemną, więc:

$CQ=-$wst:$(a+b)$, $OQ=-$dost:$(a+b)$.

Z wykreśleuia wypada:

$CQ = -\text{wst}:(a+b) = CH - HQ = CH - IL.$

$OQ = -\text{dost}:(a+b) = OL + LQ = OL + IH.$

$C'Q' = \text{wst}:(a-b) = H'L = H'I + IL = CH + IL.$

$OQ' = -\text{dost}:(a-b) = OL - LQ' = OL - IH.$

Cała więc rzecz zależy na wyznaczeniu czterech linij CH, IL, OL, IH.

Trójkąty OBP i CIH są podobne, więc:

$OB:OP = CI:CH$, $r:\text{dost}:a = \text{wst}:b:CH$,

czyli

$OB:BP = OI:IL$, $r:\text{wst}:a = \text{dost}:b:IL$;

ztąd

$$CH = -\frac{\text{dost}:a.\text{wst}:b}{r},\ IL = \frac{\text{wst}:a.\text{dost}:b}{r}.$$

Trójkąty podobne OBP i OIL, dają proporcye:

$OB:OP = OI:OL$, $r:-\text{dost}:a = \text{dost}:b:OL$,

czyli

$OB:BP = CI:IH$, $r:\text{wst}:a = \text{wst}:b.IH$;

ztąd $OL = -\dfrac{\text{dost}a\ \text{dost}b}{r}$, $IH = \dfrac{\text{wst}a.\text{wst}b}{r}.$

Wstawiwszy te ważności za CH, IL, OL, IH, otrzymamy:

$$1^\circ.\ -\text{wst}:(a+b)=\frac{-\text{dost}a.\text{wst}b-\text{wst}a.\text{dost}b}{r.}$$

czyli, odmieniwszy znaki

$$\text{wst}:(a+b)=\frac{\text{wst}:a.\text{dost}:b+\text{wst}:b.\text{dost}a}{r.}$$

$$2^\circ.\ -\text{dost}(a+b)=\frac{-\text{dost}a\text{dost}b+\text{wst}a\text{wst}b}{r.}$$

czyli

$$\text{dost}:(a+b)=\frac{\text{dost}a.\text{dost}:b-\text{wst}a.\text{dost}\,b}{r.}$$

$$3^\circ.\ \text{wst}:(a-b)=\frac{-\text{dost}a\text{wst}b+\text{wst}a.\text{dost}b}{r.}$$

czyli

$$\text{wst}:(a-b)=\frac{\text{wst}a.\text{dost}\,b-\text{wst}\,b.\text{dost}\,a}{r.}$$

$$4^\circ.\ -\text{dost}(a-b)=\frac{-\text{dost}a.\text{dost}b-\text{wst}a.\text{wst}b}{r.}$$

czyli

$$\text{dost}:(a-b)=\frac{\text{dost}a.\text{dost}b+\text{wst}:a.\text{wst}:b}{r.}$$

Uwaga. Lubo na pozór wyrażenie wst: $(a+b)$. zdaje się bydź summą dwóch ilości, rzeczywiście jednak jest różnicą; bo w iloczynie wst:$b\times$dost:a, czynnik dost:a jest odjemny, jako dostawa łuku zawartego między 90° a 180°. Uwaga ta stosuje się i do trzech innych wyrażeń.

Formuły na mnożenie i dzielenie łuków.

28. Dla ułatwienia rachunku, uważać odtąd będziemy promień r za jedność, przez co wstawy, dostawy i t. d. będą najprostszemi stosunkami, jak to już na swojém miejscu (18) wyłożyliśmy; a formuły otrzymane wyżej (20) i (26) zamienią się w następnjące:

$$\text{wst:}^2 a + \text{dost:}^2 a = 1.$$

$$\text{stycz:}a = \frac{\text{wst:}a}{\text{dost}a},\ \text{dot:}a = \frac{\text{dost}a}{\text{wst:}a}$$

$$\text{siecz:}a = \frac{1}{\text{dost}a},\ \text{dos:}a = \frac{1}{\text{wst:}a}$$

$$\text{wst:}(a+b) = \text{wst:}a.\text{dost:}b + \text{wst:}b.\text{dost:}a,$$

$$\text{dost}(a+b) = \text{dost:}a.\text{dost:}b - \text{wst:}a.\text{wst:}b,$$

$$\text{wst:}(a-b) = \text{wst:}a.\text{dost:}\ b - \text{wst:}b.\text{dost}a,$$

$$\text{dost}(a-b) = \text{dost:}a.\text{dost:}b + \text{wst:}a.\text{wst:}b.$$

29. Wwyrażeniach wst$(a+b)$ i dost$(a+b)$, uczyniwszy $b=a$, otrzymamy:

$$\text{wst:}2a = 2\text{wst:}a.\text{dost:}a \quad (1).$$

$$\text{dost:}2a = \text{dost:}^2 a - \text{wst:}^2 a \quad (2);$$

formuły te służą do wyrachowania wstawy i dostawy łuku dwa razy większego od łuku danego, gdy dana jest wstawa i dostawa tegoż łuku.

30. W tych samych wyrażeniach, uczyniwsszy $b=2a$, wypadnie:

$\mathrm{wst}{:}3a = \mathrm{wst}{:}a . \mathrm{dost}{:}2a + \mathrm{dost}{:}a . \mathrm{wst}{:}2a$,
$\mathrm{dost}{:}3a = \mathrm{dost}{:}a . \mathrm{dost}{:}2a - \mathrm{wst}{:}a : \mathrm{wst}{:}2a$,

wstawiwszy za wst: $2a$ i dost: $2a$, ich ważności i przywiodłszy wypadki do najprostszego wyrażenia, będzie:

$\mathrm{wst}{:}3a = 3\mathrm{wst}{:}a - 4\mathrm{wst}{:}^3a$.... (3).
$\mathrm{dost}{:}3a = 4\mathrm{dost}{:}^3a - 3\mathrm{dost}{:}a$... (4).

Tak dalej postępując, znajdziemy wstawę i dostawę łuku 4, 5, i t. d. razy większego od łuku danego.

31. Przyjdźmy teraz do formuł ua dzielenie łuków, i znajdźmy naprzód wyrażenie, na wstawę i dostawę łuku dwa razy mniejszego.

W formułach (1) i (2), zamieniwszy a na $\frac{1}{2}a$, będzie:

$2\mathrm{wst}{:}\frac{1}{2}a . \mathrm{dost}{:}\frac{1}{2}a = \mathrm{wst}{:}a$... (5),
$\mathrm{dost}{:}^2\frac{1}{2}a - \mathrm{wst}{:}^2\frac{1}{2}a = \mathrm{dost}{:}a$... (6);

a że

$\mathrm{dost}{:}^2\frac{1}{2}a + \mathrm{wst}{:}^2\frac{1}{2}a = 1$... (7);

więc mając daną dost:a, dosyć rozwiązać równania (6) i (7), aby znaleźć

4

wst:$\frac{1}{2}a$ i dost:$\frac{1}{2}a$. Lecz odjąwszy pierwsze z tych równań od drugiego, wypadnie:

$$2\text{wst:}^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \text{dost:}a,$$

zkąd $\text{wst:}\ \tfrac{1}{2}\,a = \pm\sqrt{\dfrac{1-\text{dost}\,a}{2}}$

Dodawszy zaś równanie pierwsze do drugiego, będzie:

$$2\text{dost:}^2\tfrac{1}{2}a = 1 + \text{dost:}a,$$

ztąd $\text{dost:}\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\dfrac{1+\text{dost:}a}{2}}$. (8)

Każda z niewiadomych wst:$\frac{1}{2}a$ i dost:$\frac{1}{2}a$, ma jak widzimy dwie ważności równe, lecz z przeciwnemi znakami; co też bydź powinno; bo gdy nie wchodzi do nich sam łuk a, lecz tylko jego dostawa, więc ważności te powinny dać od razu wstawę i dostawę połowy wszystkich łuków, mających jednę dostawę.

Łuki te (15) daje formuła

$$x = 2k.\text{H} \pm \alpha,$$

w której α znaczy najmniejszy łuk dodatny, odpowiadający danej dostawie, H pół-okręgu, a k jakąkolwiek liczbę całkowitą. Znaleźć przeto powinniśmy na wst:$\frac{1}{2}a$, ważności zamknięte w formułach:

$\text{wst:}(kH \pm \frac{1}{2}\alpha)$ i $\text{dost:}(kH \pm \frac{1}{2}\alpha)$.

Jeżeli k jest parzyste, kH będzie iloczynem z $360°$, który opuścić można, bez zmiany tak wstawy, jak dostawy (10), i wypadnie:

$$\text{wst:}(\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = \pm \text{wst:}\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\text{dost:}(\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = \text{dost:}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Jeżeli k jest nieparzyste, opuści się także kH, lecz należy zmienić znak przed wstawą i dostawą (10), a będzie:

$$-\text{wst:}(\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = \mp \text{wst:}\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$-\text{dost:}(\pm \tfrac{1}{2}\alpha) = -\text{dost:}\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Widzimy przeto, że muszą być dwie ważności równe, i z przeciwnemi znakami na $\text{wst:}\frac{1}{2}a$ i $\text{dost:}\frac{1}{2}a$.

32. Gdyby zamiast dostawy łuku, dana była jego wstawa, wstawę i dostawę łuku dwa razy mniejszego otrzymalibyśmy, wstawiwszy w równania (8) $\sqrt{(1-\text{wst:}^2 a)}$ za $\text{dost:}a$, a że pierwiastek ten ma znak podwójny $\pm$, więc każda niewiadoma $\text{wst:}\frac{1}{2}a$ i $\text{dost:}\frac{1}{2}a$ mieć będzie cztery ważności, które w najprostszej postaci, otrzymamy następującym sposobem:

Równania $2\text{wst:}\frac{1}{2}a.\text{dost:}\frac{1}{2}a = \text{wst:}a$,
$\text{dost:}^2\frac{1}{2}a + \text{wst:}^2\frac{1}{2}a = 1$;

naprzód dodajmy do siebie, a potém odejmijmy, będzie:

$$\text{dost:}^2\tfrac{1}{2}a+2\text{wst:}\tfrac{1}{2}a.\text{dost:}\tfrac{1}{2}a+\text{wst:}^2\tfrac{1}{2}a=1+\text{wst:}a,$$
$$\text{dost:}^2\tfrac{1}{2}a-2\text{wst:}\tfrac{1}{2}a.\text{dost:}\tfrac{1}{2}a+\text{wst:}^2\tfrac{1}{2}a=1-\text{wst:}a.$$

Wyciągnąwszy pierwiastek z obu stron każdego z tych równań, otrzymamy:

$$\text{dost:}\tfrac{1}{2}a+\text{wst:}\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{1+\text{wst:}a},$$
$$\text{dost:}\tfrac{1}{2}a-\text{wst:}\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{1-\text{wst:}a}.$$

Odjąwszy naprzód równanie pierwsze od drugiego, a potém dodawszy te dwa równania do siebie, wypadnie:

$$\text{wst:}\tfrac{1}{2}a=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst:}a}\mp\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst:}a}\text{.... (9).}$$
$$\text{dost:}\tfrac{1}{2}a=\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+\text{wst:}a},\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1-\text{wst:}a}\text{.... (10).}$$

Każde z tych wyrażeń jako złożone z dwóch pierwiastków kwadratowych, ma cztery ważności; co też bydź powinno, bo wyrażenia te dają ważności na wstawę i dostawę, połowy wszystkich łuków mających jednę dostawę.

Łuki te objęte są w formułach (14):

$$x=2k\text{H}+\alpha,\ x=(2k+1)\text{H}-\alpha,$$

wyrażenia zatém na wst:$\frac{1}{2}a$ i dost:$\frac{1}{2}a$, muszą dać wstawy i dostawy wszystkich łuków zamkniętych w formułach:

$$k\text{H}+\tfrac{1}{2}\alpha,\ \text{i}\ (k+\tfrac{1}{2})\text{H}-\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Lecz można opuścić kH, zachowując tę tylko ostrożność, aby zachować lub zmienić znak wstawy i dostawy, podług tego jak k jest parzyste lub nieparzyste. Tak więc na wst:$\frac{1}{2}a$ i dost: $\frac{1}{2}a$, powinniśmy mieć cztery następujące ważności:

$$\text{wst:}\tfrac{1}{2}a=\pm\text{wst:}\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\text{wst:}\tfrac{1}{2}a=\pm\text{wst:}(\tfrac{1}{2}\text{H}-\tfrac{1}{2}\alpha),$$
$$\text{dost:}\tfrac{1}{2}a=\pm\text{dost:}\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\text{dost:}\tfrac{1}{2}a=\pm\text{dost:}(\tfrac{1}{2}\text{H}-\tfrac{1}{2}\alpha).$$

Tu nadto widzimy, że ważności te po dwie uważane, są sobie równe, i z przeciwnemi znakami. Jeżeli $\alpha=90°$, $\frac{1}{2}\alpha=45°$, $\frac{1}{2}\text{H}-\frac{1}{2}\alpha=45°$, a cztery ważności przywodzą się do dwóch. Nadmienimy tu jeszcze, że ponieważ H, oznacza 180°, więc łuki $\frac{1}{2}\alpha$ i $\frac{1}{2}\text{H}-\frac{1}{2}\alpha$, dopełniają się, a tém samém ważności poprzedzające, mogą bydź wyrażone jak następuje:

$$\text{wst:}\tfrac{1}{2}a = \pm\,\text{wst:}\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\text{wst:}\tfrac{1}{2}a = \pm\,\text{wst:}\tfrac{1}{2}\alpha.$$
$$\text{dost:}\tfrac{1}{2}a = \pm\,\text{dost:}\tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\text{dost:}\tfrac{1}{2}a = \pm\,\text{wst:}\tfrac{1}{2}\alpha,$$

to jest: że ważności na wst:$\frac{1}{2}a$, są równe ważnościom na dost:$\frac{1}{2}a$; co też w tym przypadku bydź powinno.

Pozostaje jeszcze jedna trudność do ułatwienia, to jest: jak mając łuk a i jego wstawę, można poznać tę między czterema powyższemi ważnościami, którą wziąć potrzeba na wst:$\frac{1}{2}a$, lub dost:$\frac{1}{2}a$, gdyż łatwo się domyślić, że jedna tylko ważność być powinna. Dla skrócenia uważajmy tylko wst:$\frac{1}{2}a$, a biorąc pierwiastki z ich różnemi znakami cztery ważności wst:$\frac{1}{2}a$, można wyrazić jak następuje:

$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a = \pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\text{wst}a} - \sqrt{1-\text{wst}a}),$$
$$\text{wst}\tfrac{1}{2}a = \pm\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\text{wst}a} + \sqrt{1-\text{wst}a}).$$

Tu widoczna jest naprzód, że dwie pierwsze są równe i z przeciwnemi znakami, toż samo rozumieć należy o dwóch ostatnich. Dalej wyniosłszy pierwsze do kwadratu, ten będzie mniejszy od $\frac{1}{2}$, kwadrat zaś z drugich większy od $\frac{1}{2}$, a że jak wiemy (8) $\text{wst}^2 45° =$

$\text{dost}^2\, 45^\circ = \frac{1}{2}$, więc, nie mając względu na znak, dwie pierwsze ważności są mniejsze od wst 45°, a dwie ostatnie większe od wst: 45°.

Lecz z drugiej strony, mając dany łuk, łatwo się zawsze przekonać, czy wstawa jego połowy jest dodatna lub odjemna, i czy będzie mniejsza lub większa od wst: 45°; przez co wszelka niepewność zniknie.

I tak niech będzie $<a\,90^\circ$, $\text{wst}\frac{1}{2}a$ będzie dodatna i mniejsza od wst 45°. $\text{dost}\frac{1}{2}a$ będzie także dodatna i większa od dost 45°; ważności zatém (9) i (10) należy wziąć z właściwemi znakami.

Przejdźmy téraz do podzielenia łuku na trzy części. W formułach (3) i (4), Nru 30, zamieniwszy a na $\frac{1}{3}a$, otrzymamy:

$$\text{wst:}a = 3\,\text{wst:}\tfrac{1}{3}a - 4\,\text{wst:}^3\tfrac{1}{3}a.$$

$$\text{dost:}a = 4\,\text{dost:}^3\tfrac{1}{3}a - 3\,\text{dost:}\tfrac{1}{3}a.$$

Dajmy, że dana jest $\text{dost:}a$, a mamy wyznaczyć $\text{dost:}\frac{1}{3}a$, uczyniwszy $\text{dost:}\,a = b$, $\text{dost.}\frac{1}{3}a = z$, drugie z poprzedzających równań zamieni się w następujące:

$$z^3 \tfrac{3}{4}z - \tfrac{1}{4}b = o \ldots. \quad (11),$$

które rozwiązać wypada, chcąc otrzymać ważność dost: $\frac{1}{3}a$. Nie wchodząc w szczegóły tego rozwiązania, przestaniemy na okazaniu, że trzy pierwiastki równania (11) są rzeczywiste.

Ponieważ tu jest dana dostawa, a formuła na łuki tej dostawie odpowiadające jest $2k\mathrm{H}\pm\alpha$, więc pierwiastkami równania (11) są wszystkie ważności zamknięte w wyrażeniu:

$$z = \text{dost}: \frac{2k\mathrm{H}\pm\alpha}{3}.$$

Liczba całkowita k może mieć tylko jednę z trzech ważności $3n$, $3n+1$, $3n-1$, (n jest także liczbą całkowitą), uczynimy więc następnie $k=3n$, $k=3n+1$, $k=3n-1$, a po opuszczeniu okręgów, otrzymamy:

$$z = \text{dost}\frac{3n.2\mathrm{H}\pm\alpha}{3} = \text{dost}\,(2n\mathrm{H}\pm\frac{\alpha}{3}) =$$

$$\text{dost}\,(\pm\frac{\alpha}{3}) = \text{dost}\frac{\alpha}{3},$$

$$z = \text{dost}\,\frac{(3n+1)2\mathrm{H}\pm\alpha}{3} = \text{dost}\,(2n\mathrm{H}+$$

$$\frac{2\mathrm{H}}{3}\pm\frac{\alpha}{3}) = \text{dost}(\frac{2\mathrm{H}}{3}\pm\frac{\alpha}{3}),$$

$$z = \text{dost}\,\frac{(3n-1)2\mathrm{H}\pm\alpha}{3} = \text{dost}\,(2n\mathrm{H}-$$

$$\frac{2\mathrm{H}}{3}\pm\frac{\alpha}{3}) = \text{dost}(\frac{2\mathrm{H}}{3}\mp\frac{\alpha}{3}).$$

Dwie ostatnie ważności są równe dwóm pierwszym; a tak trzy są różne ważności, to jest $z=\text{dost}\frac{\alpha}{3}$, $z=\text{dost}\left(\frac{2\text{H}}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$, $z=\text{dost}\left(\frac{2\text{H}}{3}-\frac{\alpha}{3}\right)$. Bydź jednak może, że dwie z nich są sobie równe; i tak, pierwsza jest równa trzeciej, gdy $\alpha=\text{H}$.

33. Ponieważ styczna łuku, równa się wstawie podzielonej przez dostawę, więc:

$$\text{sty}(a+b)=\frac{\text{wst}(a+b)}{\text{dost}(a+b)}$$
$$=\frac{\text{wst}a.\text{dost}b+\text{wst}b.\text{dost}:a}{\text{dost}\,a.\text{dost}\,b-\text{wst}a.\text{wst}b}.$$

Lecz aby otrzymać wyrażenie stycznej summy dwóch łuków, w funkcyi stycznych tychże łuków; podzielmy licznik i mianownik drugiej strony tego równania przez dost a.dost b, wypadnie:

$$\text{sty}(a+b)=\frac{\frac{\text{wst}\,a}{\text{dost}a}+\frac{\text{wst}\,b}{\text{dost}b}}{1-\frac{\text{wst}a.\text{wst}b}{\text{wst}a.\text{dost}b}};$$

a że $\frac{\text{wst}\,a}{\text{dost}\,a}=\text{sty}\,a$, a $\frac{\text{wst}\,b}{\text{dost}\,b}=\text{sty}\,b$,

więc

$$\text{sty}(a+b)=\frac{\text{sty}\,a+\text{sty}\,b}{1-\text{sty}\,a.\text{sty}\,b}\dots.\ (a)$$

Tym sposobem postępując, znajdziemy: $\text{sty}(a-b)=\frac{\text{sty}\,a-\text{sty}\,b}{1+\text{sty}\,a.\text{sty}\,b}\dots.\ (b)$.

34. Naznaczywszy $b=a$, otrzymamy z równania (a) wyrażenie na styczną łuku dwa razy większego:

$$\text{stycz}\,2a=\frac{2\ \text{stycz}\,a}{1-\text{sty}^2 a}\dots.\ (c).$$

Naznaczając następnie $b=2a$, $3a$, $4a\dots$, otrzymamy styczną łuku, trzy, cztery i t. d. razy większego od łuku danego.

35. Znajdźmy teraz wyrażenie na styczną łuku dwa razy mniejszego.

W równaniu $\text{sty}\,2a=\frac{2\ \text{stycz}\,a}{1-\text{sty}^2 a}$, uczyniwszy $a=\frac{1}{2}a$, będzie:

$$\frac{2\ \text{sty}\,\frac{1}{2}a}{1\text{-}\text{sty}^2\frac{1}{2}a}=\text{stycz}\,a,\ \text{czyli}\ \text{stycz}^2\tfrac{1}{2}a$$

$$+\frac{2}{\text{sty}\,a}\ \text{sty}\tfrac{1}{2}a-1=o\dots.\ (d);$$

$$\text{ztąd sty}\tfrac{1}{2}a = \frac{1}{\text{sty } a}(-1 \pm \sqrt{1+\text{sty}^2 a}).$$

36. W równaniu (d) ostatni wyraz jest -1, więc iloczyn z dwóch ważności sty$\frac{1}{2}a$ jest -1; jeżeli zatem AT i AT', fig: 6, oznaczają też ważności, w położeniu odpowiadającem ich znakom, powinno bydź $AT \times AT' = \overline{OA}^2$; a tém samém kąt TOT', musi bydź prosty, czyli łuk MM' $= 90^\circ$.

37. Sty$\frac{1}{2}a$ może mieć jeszcze następujące ważności:

$$\text{stycz}\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-\text{dost } a}{1+\text{dost } a}} \dots (f),$$

$$\text{stycz}\tfrac{1}{2}a = \frac{\text{wst } a}{1+\text{dost} a} \dots (g),$$

$$\text{stycz}\tfrac{1}{2}a = \frac{1-\text{dost } a}{\text{wst } a} \dots (h),$$

Wyrażenia te łatwo otrzymać z wiadomych już formuł. Jakoż wiemy że:

$$1^{\underline{o}}.\ \text{stycz:}\tfrac{1}{2}a = \frac{\text{wst } \frac{1}{2} a}{\text{dost}\frac{1}{2} a};$$

$$\text{a że wst } \tfrac{1}{2} a = \pm\sqrt{\frac{1-\text{dost} a}{2}},$$

a $\text{dost}\tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\dfrac{1+\text{dost}\,a}{2}}$; więc

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}a = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{1-\text{dost}\,a}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{1+\text{dost}\,a}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\text{dost}\,a}{1+\text{dost}\,a}}$$

2°. $\text{stycz}\,\tfrac{1}{2}a = \dfrac{\text{wst}\tfrac{1}{2}a.\ \text{dost}\tfrac{1}{2}a}{\text{dost}^2\tfrac{1}{2}a}$;

a że $\text{wst}\tfrac{1}{2}a.\text{dost}\tfrac{1}{2}a = \dfrac{\text{wst}\,a}{2}$, a $\text{dost}^2\,\tfrac{1}{2}a$

$$= \frac{1+\text{dost}\,a}{2};$$

$$\text{więc sty}\tfrac{1}{2}\,a = \frac{\dfrac{\text{wst}\,a}{2}}{\dfrac{1+\text{dost}\,a}{2}} = \frac{\text{wst}\,a}{1+\text{dost}\,a}$$

3°. $\text{stycz}\tfrac{1}{2}a = \dfrac{\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a}{\text{wst}\tfrac{1}{2}a\ .\ \text{dost}\tfrac{1}{2}a}$,

ponieważ $\text{wst}^2\tfrac{1}{2}a = \dfrac{1-\text{dost}\,a}{2}$, a

$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,a.\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,a = \dfrac{\text{wst}\,a}{2}$, więc

$$\text{stycz}\tfrac{1}{2}a = \frac{\dfrac{1-\text{dost}\,a}{2}}{\dfrac{\text{wst}\,a}{2}} = \frac{1-\text{dost}\,a}{\text{wst}\,a}.$$

38. Formuły dające ważność na wstawę i dostawę łuków $a+b$ i $a-b$, prowadzą do wielu innych formuł, prawie ustawicznie używanych; przytoczymy więc z nich główniejsze.

Dodając i odejmując formuły na wst $(a+b)$, dost $(a+b)$, wst: $(a-b)$ i dost $(a-b)$, otzymamy:

$$2.\text{wst}a.\text{dost}b=\text{wst}(a+b)+\text{wst}(a-b),$$
$$2.\text{dost}a.\text{wst}\,b=\text{wst}(a+b)-\text{wst}\,(a-b),$$
$$2.\text{dost}a.\text{dost}b=\text{dost}(a-b)+\text{dost}(a+b),$$
$$2.\text{wst}a.\text{wst}b=\text{dost}(a-b)-\text{dost}(a+b).$$

Formuły te służą do wyrażenia iloczynu z wstawy przez dostawę, z wstawy przez wstawę, lub też dostawy przez dostawę, w postaci summy, lub różnicy.

39. Nazwijmy p i q, dwa łuki jakiekolwiek, i uczyńmy:
$a+b=p$, $a-b=q$, będzie $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$. Ważności te wstawiwszy za a i b, w formuły poprzedzające, i odmieniwszy porządek ich stron, wypadnie:

$$\text{wst}p+\text{wst}q=2\text{wst}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{dost}\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\text{wst}p-\text{wst}q=2\text{dost}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{wst}\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\text{dost}p+\text{dost}q=2\text{dost}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{dost}\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\text{dost}q-\text{dost}p=2\text{wst}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{wst}\tfrac{1}{2}(p-q).$$

Formuły te są bardzo dogodne do rachunku, za pomocą logarytmów odbywanego, bo jak widzimy zamieniają summę lub różnicę dwóch wstaw, albo dwóch dostaw na iloczyn.

40. Nakoniec dzieląc przez siebie strony odpowiadające formuł poprzedzających i mając wzgląd, że w gólności $\frac{\text{wst } A}{\text{dot } A} = \text{sty } A = \frac{1}{\text{dot } A}$, otrzymamy:

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{wst } p - \text{wst } q} = \frac{\text{wst} \tfrac{1}{2}(p+q) . \text{dost} \tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{dost} \tfrac{1}{2}(p+q) . \text{wst} \tfrac{1}{2}(p-q)}$$

$$= \text{sty} \tfrac{1}{2}(p+q) . \text{dot} \tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{\text{sty} \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{sty} \tfrac{1}{2}(p-q)}$$

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{dost} p + \text{dost} q} = \frac{\text{wst} \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{dost} \tfrac{1}{2}(p+q)} = \text{st} \tfrac{1}{2}(p+q)$$

$$\frac{\text{wst } p + \text{wst } q}{\text{dost} q - \text{dost} p} = \frac{\text{dost} \tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{wst } \tfrac{1}{2}(p-q)} = \text{dot} \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\frac{\text{wst } p - \text{wst} q}{\text{dost} q - \text{dost} p} = \frac{\text{dost} \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{wst } \tfrac{1}{2}(p+q)} = \text{dot} \tfrac{1}{2}(p-q)$$

$$\frac{\text{dost} p + \text{dost} q}{\text{dost} q - \text{dost} p} = \frac{\text{dost} \tfrac{1}{2}(p+q) . \text{dost} \tfrac{1}{2}(p-q)}{\text{wst } \tfrac{1}{2}(p+q) . \text{wst } \tfrac{1}{2}(p-q)}$$

$$= \text{dot } \tfrac{1}{2} (p+)q . \text{dot} \tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{\text{dot} \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{sty} \tfrac{1}{2}(p-q)}$$

Z tych formuł, pierwsza szczególniej zasługuje na uwagę, którą w ten sposób wysłowić można: *Summa wstaw dwóch łuków, tak się ma do ich różnicy, jak styczna połowy summy tychże łuków, do stycznej połowy ich różnicy.*

41. Natrafiamy niekiedy na wyrażenia trygonometryczne, których początku nie łatwo zgadnąć. W takim przypadku najlepiej sprawdzić też wyrażenia; w czém nie ma żadnej trudności, tak *np.* aby dojść zkąd powstało równanie:

$$\text{wst}\,(a+b).\text{wst}\,(a-b)=\text{wst}^2 a-\text{wst}^2 b,$$

potrzeba zamiast $\text{wst}(a+b)$ i $\text{wst}(a-b)$, wstawić ich ważności. Jakoż zrobiwszy to, otrzymamy:

$$\text{wst}(a+b).\text{wst}\,(a-b)=\text{wst}^2 a.\text{dost}^2 b- \text{wst}^2 b.\text{dost}^2 b,$$

za $\text{dost}^2 a$ i $\text{dost}^2 b$, wstawiwszy ich ważności $1-\text{wst}^2 a$ i $1-\text{wst}^2 b$, i wykonawszy redukcyą, otrzymamy równanie dane.

Podobnież aby dojść zkąd powstało równanie: $\underline{\text{dost}\,a}=\dfrac{1-\text{sty}^2\frac{1}{2}a}{1+\text{sty}^2\frac{1}{2}a}$, potrzeba za $\mathrm{sty}^2 \frac{1}{2}a$ wstawić $\frac{\mathrm{wst}^2 \frac{1}{2}a}{\mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a}$, przez co stron 2 zamieni się na $\frac{\mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a - \mathrm{wst}^2 \frac{1}{2}a}{\mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a + \mathrm{wst}^2 \frac{1}{2}a}$; a że $\mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a - \mathrm{wst}^2 \frac{1}{2}a = \mathrm{dost}\, a$, a $\mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a + \mathrm{wst}^2 \frac{1}{2}a = 1$, więc $\frac{\mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a - \mathrm{wst}^2 \frac{1}{2}a}{\mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a + \mathrm{dost}^2 \frac{1}{2}a}$ $= \frac{1 - \mathrm{sty}^2 \frac{1}{2}a}{1 + \mathrm{sty}^2 \frac{1}{2}a} = \mathrm{dost}\, a.$

Tak postępując znajdziemy łatwo początek następujących równań:

$\mathrm{dost}(a+b).\mathrm{dost}(a-b) = \mathrm{dost}^2 a - \mathrm{wst}^2 b$

$\mathrm{sty}(45^\circ + a) = \frac{1 + \mathrm{sty}\, a}{1 - \mathrm{sty}\, a}$,

$\mathrm{dost}\, a = \frac{1}{1 + \mathrm{sty}\, a.\mathrm{sty} \frac{1}{2}a}$,

$\mathrm{sty}\, a + \mathrm{sty}\, b = \frac{\mathrm{wst}\,(a+b)}{\mathrm{dost} a.\mathrm{dost} b}$,

$\mathrm{sty} a + \mathrm{sty} b + \mathrm{sty} c = \mathrm{sty} a.\mathrm{sty} b.\mathrm{sty} c.$

W ostatniém z tych równań, należy wziąć $a+b+c = 180^\circ$. Równanie to pokazuje, że można dobrać takie trzy ilości, których summa jest równa iloczynowi.

Okazanie geometryczne formuł poprzedzających.

42. Wyprowadziwszy geometrycznie formuły na wstawę i dostawę łuków $a+b$ i $a-b$, użyliśmy rachunku algebraicznego, do wyprowadzenia z nich wszystkich innych; ztąd wypada, że gdy pierwsze formuły są prawdziwe dla wszystkich łuków, i drugie takiemi bydź muszą, bo to jest istotną cechą sposobów analitycznych; kiedy przeciwnie używając wykreśleń geometrycznych, obawiać się zawsze potrzeba, aby wypadki nie stosowały się tylko do przypadków wskazanych na figurach; z tém wszystkiém, ponieważ figury widoczniej prawdę okazują, wyprowadzimy i tą drogą, niektóre z formuł poprzednio otrzymanych.

43. Mając daną wstawę i dostawę łuku a, znaleźć wstawę i dostawę łuku dwa razy większego.

Niech będzie AB=BC=a (fig: 7), poprowadziwszy cięciwę AC i promień OB, do niej prostopadły, tudzież z punktów C i P, śpuściwszy prostopadłe CQ i PH, do promienia OA, będzie:

wst $a=AP$, dost $a=OP$, wst$2a=CQ=2PH$, dost$2a=OQ=OH-QH=OH-AH$.

W trójkącie OPA prostokątnym przy P:

$$PH=\frac{AP\times OP}{OA},\ OH=\frac{\overline{OP}^2}{OA},\ AH=\frac{\overline{AP}^2}{OA}.$$

Zamiast linij, wstawiwszy ich nazwiska trygonometryczne i biorąc promień $OA=1$, otrzymamy:

$$\text{wst}\,2a=2PH=2\text{wst}\,a.\text{dost}\,a,$$
$$\text{dost}2a=OH-AH=\text{dost}^2 a-\text{wst}^2 a.$$

44. Mając daną wstawę i dostawę łuku a, znaleźć wstawę i dostawę łuku $\frac{1}{2}a$, dwa razy mniejszego.

Wziąwszy łuk $AC=a$, fig: 8. Spuśćmy CP, prostopadłą do średnicy AB, i poprowadźmy cięciwy AC i BC, tudzież promienie OD i OE, prostopadłe do nich w punktach Q i R. Naznaczywszy $OA=1$, będzie:

$OP=\text{dost}\,a, AP=1-\text{dost}\,a,\ BP=1+\text{dost}\,a,\ AC=2\text{wst}\frac{1}{2}a, BC=2\text{dost}\frac{1}{2}a.$

Ponieważ każda z cięciw AC i BC jest średnio geometrycznie proporcyonalna, do średnicy i odcinka jej przyległego, więc:

$\overline{AC}^2 = AB \times AB$, czyli $4\,\mathrm{wst}^2 \tfrac{1}{2} a = 2(1 - \mathrm{dost}\, a)$,

$\overline{BC}^2 = AB \times BP$, czyli $4\,\mathrm{dost}^2 \tfrac{1}{2} a = 2(1 + \mathrm{dost}\, a)$.

ztąd $\mathrm{wst} \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\dfrac{1 - \mathrm{dost}\, a}{2}}$,

$\mathrm{dost}\, \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\dfrac{1 + \mathrm{dost}\, a}{2}}$.

45. Mając daną wstawę i dostawę łuku a, znaleźć wstawę i dostawę łuku $3a$, trzy razy większego.

Niech będzie łuk jakikolwiek, zakreślony promieniem $OA = 1$, fig. 9, weźmy $AB = BC = CD = a$, z punktu B i D spuśćmy prostopadłe BP i DQ do OA, poprowadźmy cięciwę BD i promienie OB i OD. Trójkąt równoramienny BOD, jest podobny trójkątowi BDF; gdyż kąt OBD jest wspólny obu tym trójkątom, a kąt BDF, którego miarą jest $\frac{1}{2}$ BE, czyli BD, równy kątowi BOD; więc:

$BF : BD = BD : OB$, ztąd $BF = BD^2 = 4\,\mathrm{wst}^2 a$.

Poprowadźmy PG równoległą od BF, będzie $PG = BF = 4\,\mathrm{wst}^2 a$.

A że w trójkątach QGP i OBP podobnych:

$QG:PB=PG:OB$, $QG=4\text{wst}^3 a$.
więc
i $PQ:OP=PG:OB$, $PQ=4\text{wst}^3 a.\text{dost}a$.
$\text{wst}\,3\,a=DQ=DF+FG-QG=BD+BP-QG=3\text{wst}\,a-QG$,
$\text{dost}\,3\,a=OQ=OP-PQ=\text{dost}\,a-PQ$,
wstawiwszy za QG i PQ ich ważności, otrzymamy:

$$\text{wst}3a=3\text{wst}a-4\text{wst}^3 a,$$
$$\text{dost}3a=\text{dost}a-4\text{wst}^2 a.\text{dost}a.$$

Pierwsze z tych równań jest to samo co równanie (3), (30), w drugiém zaś położywszy $1-\text{dost}^2 a$ za $\text{wst}^2 a$, otrzymamy równanie (4), (30).

46. Mając dane styczne dwóch łuków a i b, znaleźć styczną summy $a+b$, i styczną różnicy $a-b$, tychże łuków.

Promieniem $OA=1$, fig: 10, zakreśliwszy łuk AM, weźmy $AB=a$, BC $=b$.

Z punktu A i B, poprowadźmy styczne AT i BS, łuków AC i BC, nakoniec z punktn S, spuśćmy prostopadłą SH do promienia OA. Podług wysłowienia dana jest $BR=\text{sty}a$, BS $=\text{sty}\,b$; a znaleźć potrzeba $AT=\text{sty}(a+b)$.

Ponieważ trójkąty OAT i OSH, są podobne, więc:

$$\frac{AT}{OA}=\frac{SH}{OH}, \text{ ztąd } AT=\text{sty}(a+b)=\frac{SH}{OH}..$$

W trójkątach SHR i OBR, podobnych, jest:

$$\frac{SH}{SR}=\frac{OB}{OR}, \text{ ztąd } SH=\frac{\text{sty}a+\text{sty}b}{OR}.$$

W trójkącie ORS ostrokątnym przy O.

$$\overline{SR}^2=\overline{OR}^2+\overline{OS}^2-2OR\times OH,$$

aże $\overline{SR}^2=\overline{BR}^2+\overline{BS}^2+2BR\times BS;$

więc $\overline{BR}^2+\overline{BS}^2+2BR\times BS=\overline{OR}^2+\overline{OS}^2-2OR\times OH,$

ztąd

$$2OR\times OH=\overline{OR}^2-\overline{BR}^2+\overline{OS}^2-\overline{BS}^2-2BR\times BS,$$

$$=2\overline{OB}^2-2BR\times BS$$

$$=2-\text{sty}\,a.\text{sty}\,b,$$

a tém samém $OH=\dfrac{1-\text{sty}a.\text{sty}b}{OR}.$

Wstawiwszy za SH i OH, ich ważności, w wyrażenie sty $(a+b)$, otrzymamy:

$$\text{sty}(a+b)=\frac{\text{sty}\,a+\text{sty}b}{1-\text{sty}\,a.\text{sty}\,b}$$

Z równąż łatwością wyprowadzić można ważność sty $(a-b)$, bo przypatrując się z uwagą, fig: 11, w któréj łuk AC$=a-b$, widzimy, że toż samo wykonać potrzeba co w poprzedzającym przypadku, z tą tylko różnicą, że ponieważ RS$=$sty$\,a-$ sty$\,b$; więc drugi wyraz liczników w ważnościach SH i OH zmieni znak $+$ na $-$ i będzie:

$$\text{sty}\,(a-b)=\frac{\text{sty}\,a-\text{sty}\,b}{1+\text{sty}\,a.\text{sty}\,b}.$$

47. Wyprowadźmy teraz formuły:

$$\text{wst}\,p+\text{wst}\,q=2\text{wst}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{dost}\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\text{wst}\,p-\text{wst}\,q=2\text{dost}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{wst}\tfrac{1}{2}(p-q).$$

Weźmy łuk AB$=p$ i AC$=q$, fig: 12, i poprowadziwszy cięciwę BC i promień OD do niej prostopadły w punkcie E, spuśćmy z punktów B, C, D i E, prostopadłe BP, CQ, DR i EF, na promień OA, nakoniec poprowadźmy EG równoległą od OA. Podług wykreślenia:

$$\text{BP}=\text{wst}\,p,\text{CQ}=\text{wst}\,q,\text{EF}=\frac{\text{wst}\,p+\text{wst}\,q}{2},$$

$$\text{BG}=\frac{\text{wst}\,p-\text{wst}\,q}{2},$$

$AD = \frac{1}{2}(p+q)$, $DR = \text{wst}\frac{1}{2}(p+q)$,
$OR = \text{dost}\frac{1}{2}(p+q)$,
$BD = \frac{1}{2}(p-q)$, $BE = \text{wst}\frac{1}{2}(p-q)$,
$OE = \text{dost}\frac{1}{2}(p-q)$.

Trójkąty OEF i ODR są podobne, więc:

$$EF:DR = OE:OD,$$
$$BG:OR = BE:OD;$$

ztąd

$$EF = \frac{DR \times OE}{OD} = \frac{\text{wst}\frac{1}{2}(p+q).\text{dost}\frac{1}{2}(p-q)}{OD}$$

$$BG = \frac{OR \times BE}{OD} = \frac{\text{dost}\frac{1}{2}(p+q).\text{wst}\frac{1}{2}(p-q).}{OD.}$$

Zamiast EF i BG, wziąwszy ich ważności i uczyniwszy $OD = 1$, wypadnie:

$$\frac{\text{wst}p + \text{wst}q}{2} = \text{wst}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{dost}\tfrac{1}{2}(p-q),$$

$$\frac{\text{wst}p - \text{wst}q}{2} = \text{dost}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{wst}\tfrac{1}{2}(p-q),$$

czyli

$$\text{wst}p + \text{wst}q = 2\text{wst}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{dost}\tfrac{1}{2}(p-q),$$
$$\text{wst}p - \text{wst}q = 2\text{dost}\tfrac{1}{2}(p+q).\text{wst}\tfrac{1}{2}(p-q).$$

Z tych samych trójkątów otrzymać można ważności na dost $p+$ dost q i dost $p-$dost q.

48. Summa wstaw dwóch łuków, tak się ma do ich różnicy, jak styczna połowy summy tychże łuków, do stycznej połowy ich różnicy.

W punkcie D poprowadźmy styczną ST, fig: 12, i przedłużmy cięciwę BC, do przecięcia przedłużonego promienia OA w punkcie H. W trójkątach podobnych EFH i EBG;

$$\frac{EF}{BG}=\frac{EH}{EB}; \text{ a że } \frac{EH}{EB}=\frac{DS}{DT},$$

więc

$$\frac{EF}{BG}=\frac{DS}{DT}, \text{ a tém samém i } \frac{2ET}{2BG}=\frac{DS}{DT},$$

Ponieważ zaś $2EF = \text{wst}\, p + \text{wst}\, q$, $2BG = \text{wst}\, p - \text{wst}\, q$,

$$DS = \text{sty}\, AD = \text{sty}\, \tfrac{1}{2}(p+q),$$
$$DT = \text{sty}\, DB = \text{sty}\, \tfrac{1}{2}(p-q);$$

$$\text{więc } \frac{\text{wst}\, p + \text{wst}\, q}{\text{wst}\, p - \text{wst}\, q} = \frac{\text{sty}\, \tfrac{1}{2}(p+q)}{\text{sty}\, \tfrac{1}{2}(p-q)}.$$

ROZDZIAŁ II.

O TABLICACH TRYGONOMETRYCZNYCH I ROZWIĄZYWANIU TRÓJKĄTÓW.

Układ tablic trygonometrycznych.

49. Tablicami trygonometrycznemi, nazywają się tablice zamykające ważności liczebne linij trygonometrycznych, łuków od 0 do 90°. Dla tego zaś obejmują tylko linie trygonometryczne łuków mniejszych od 90°, bo jak widzieliśmy wyżej (13), każdy łuk można przywieść do pierwszej ćwiartki okręgu. Okażemy tu sposób obliczenia wstawy, dostawy i t. d. różnych łuków powiększających się o jednę minutę, uważając dawny podział okręgu.

Gdyby wiadoma była wst 1', znaleźlibyśmy za pomocą formuł wyżej otrzymanych, inne linie trygonometryczne, tak *np.* z formuły dost$a = \pm\sqrt{(1 - \text{wst}^2 a)}$, otrzymalibyśmy dost 1'. Mając ważność wst 1', i dost 1', znajdziemy wstawę i dostawę 2', 3', 4' i t. d., czyniąc następnie w formułach:

$$\text{wst}\,2a = 2\,\text{wst}\,a.\text{dost}\,a;$$
$$\text{dost}\,2a = \text{dost}^2 a - \text{wst}^2 a;$$
$$\text{wst}(a+b) = \text{wst}a.\text{dost}b + \text{wst}b.\text{dost}a,$$
$$\text{dost}(a+b) = \text{dost}a.\text{dost}b - \text{wst}a.\text{wst}b,$$
$$a = 1',\ b = 1',\ 2',\ 3' \ldots\ m' - 1.$$

Ważności innych linij trygonometrycznych, obliczymy za pomocą formuł:

$$\text{sty}\,a = \frac{\text{wst}\,a}{\text{dost}a},\ \text{dost}\,a = \frac{1}{\text{sty}a},$$
$$\text{siecz}\,a = \frac{1}{\text{dost}a},\ \text{dost}\,a = \frac{1}{\text{wst}\,a}.$$

Cała więc trudność zależy na wyrachowaniu z jak największém przybliżeniem, wstawy łuku 1'.

50. Nim okażemy sposób wyrachowania wst 1', dowiedziemy naprzód: *że w pierwszej ćwiartce okręgu, łuk jest większy od swojej wstawy, a mniejszy od swojej stycznej.* 2°. *Kiedy się łuk zmniejsza następnie do zera, stosunek jego do wstawy, coraz bardziej*

zbliża się do jedności, to jest: że granicą tego stosunku jest jedność.

Co do 1°. Niech będzie łuk AB, zakreślony promieniem OA, fig: 13, którego cięciwa jest AB; wstawa BP, styczna AT. Łuk AB, jest większy od cięciwy AB, a że cięciwa jest większa od wstawy, więc tém bardziéj łuk AB, jest większy od swej wstawy BP.

Wycinek AOB, fig: 13, jest równy, Łuk $AB \times \frac{1}{2} AO$; trójkąt $ATO = AT \times \frac{1}{2} AO$; a że wycinek jest mniejszy od trójkąta, więc

Łuk $AB \times \frac{1}{2} AO < AT \times \frac{1}{2} AO$, ztąd łuk $AB < AT$.

Co do 2°. Z równania $\text{sty}\,a = \frac{\text{wst}\,a}{\text{dost}\,a}$, wypada: $\frac{\text{sty}\,a}{\text{wst}\,a} = \frac{1}{\text{dost}\,a}$, a że w miarę zmniejszania się łuku a, powiększa się jego dostawa, i może się tak zbliżyć do jedności jak tylko chcemy, więc też stosunek $\frac{1}{\text{dost}\,a}$, albo jemu równy $\frac{\text{sty}\,a}{\text{wst}\,a}$ zmniejsza się wraz z łukiem, i ma za granicą jedność.

Ponieważ łuk jest większy od swej wstawy a mniejszy od stycznej, więc stosunek $\frac{a}{\text{wst}\, a}$, nie może bydź, ani mniejszy od jedności, ani większy od $\frac{\text{sty}\, a}{\text{wst}\, a}$; a że ten ostatni może bydź tak przybliżony do jedności, jak się podoba, więc i stosunek $\frac{a}{\text{wst}\, a}$ może bydź podług upodobania przybliżony do jedności.

51. Kiedy łuk a jest bardzo mały, stosunek $\frac{a}{\text{wst}\, a}$ różni się bardzo mało od 1, i w tym przypadku różnica między łukiem a jego wstawą jest tak mała, że można wziąć łuk zamiast jego wstawy i odwrotnie; nadto można zawsze obliczyć stopień przybliżenia.

Wiemy że $\text{wst}\, a = 2\text{wst}\frac{1}{2}a \,.\, \text{dost}\frac{1}{2}a$; z nierówności zaś $\text{sty}\frac{1}{2}a > \frac{1}{2}a$, czyli $\frac{\text{wst}\frac{1}{2}a}{\text{dost}\frac{1}{2}a} > \frac{1}{2}a$, wypada: $2\text{wst}\frac{1}{2}a > a\,\text{dost}\frac{1}{2}a$; więc $\text{wst}\, a > a.\text{dost}^2\frac{1}{2}a$.

Lecz $\text{dost}^2\frac{1}{2}a = 1 - \text{wst}^2\frac{1}{2}a$; a tém samém: $\text{dost}^2\frac{1}{2}a > 1 - (\frac{1}{2}a)^2$,

więc $\quad \text{wst}\, a > a - \frac{a^3}{4}$.

52. Zastosujmy teraz to wszystko do łuku $1'$. Wiemy z geometryi, że biorąc średnicę za jedność, okrąg koła jest:

$$\pi = 3{,}14159265358979\,3....$$

lecz biorąc promień za jednośc, π znaczy tylko pół-okręgu, więc

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1{,}5707963267948\,96....$$

znaczy $\frac{1}{4}$ okręgu, to jest łuk 90°; a zatém

$$\text{Łuk } 1' = \frac{1{,}570796326794896}{5400},...$$

$$= 0{,}000290888208665.$$

Łuk ten jest, jak widzimy, mniejszy od 0,0003;

więc $\quad \frac{1}{4}(\text{łuk } 1')^3 < 0{,}000000000007$,

a tém samém

$$\text{wst } 1' > \begin{cases} 0{,}000290888208..... \\ -0{,}000000000007, \end{cases}$$

czyli $\quad \text{wst } 1' > 0{,}000290888201.....$

Wstawa ta zaczyna się różnić od łuku $1'$, dopiero w 12tej cyfrze dziesiętnej, wziąwszy przeto

wst 1'=0,0002908820I,

popełnimy uchybienie mniejsze od jednej jedności dwunastego rzędu.

Przybliżenie to byłoby zbyteczne, gdyby szło tylko o ważność wst 1', musiało jednak bydź tak daleko posunięte, bo ważność wst 1', jest potrzebna do wyrachowanie wstaw innych łuków, które, jak widzieliśmy, zależą od wst 1' i dost 1'; błędy w rachunku ustawicznie się powiększając, wpływają na następne cyfry dziesiętne.

Daliśmy tylko krótkie wyobrażenie sposobu obliczania tablic trygonometrycznych; są bowiem inne, za pomocą których daleko prędzej i łatwiej można wyrachować wstawę i dostawę łuku danego.

53. W zastosowauiu trygonometryi prawie wszystkie rachunki odbywają się za pomocą logarytmów, dla tego też w tablicach umieszczono logarytmy wstaw dostaw, stycznych i t. d., zamiast ich ważności liczebnych. Logarytmy te wyrachowano, biorąc promień $r=(10)^{10}$, czyli 10000000000, nie zaś $r=1$; gdyż

wziąwszy $r=1$, byłby log: $r=0$, a przez to logarytmy wstaw i dostaw, jako ułomków względem promienia, byłyby odjemne; toż samo rozumieć należy o stycznych łuków mniejszych od 45° i dotycznych łuków większych od 45°. Logarytmy zaś siecznych i dosiecznych byłyby zawsze dodatne, jako linij większych od promienia. Dla uniknienia tej niedogodności, podzielono promień na 10000000000 części równych, to jest, wzięto $r=(10)^{10}$; i wypadki otrzymane podług promienia $r=1$, zamieniono na odpowiadające im, podług promienia $(10)^{10}$, mnożąc je przez $(10)^{10}$, albo dodając 10 do ich logarytmów. Biorąc albowiem $r=1$, otrzymujemy stosunki wstaw, dostaw i t. d. do tego promienia, więc dzieląc tenże promień na m części równych, należy każdy z tych stosunków pomnożyć przez m, aby wiedzieć ile takichże części zawierają wstawa, dostawa i t. d.

Uwaga. Zamiast uczynić $r=(10)^{10}$ można było uczynić $r=(10)^4$ lub $(10)^3$, dla tego jednak uczyniono $r=(10)^{10}$, że w tém przypuszczeniu logarytmy linij trygonometrycznych, są tylko dopełnieniami arytmetycznemi ich logarytmów, obliczonych podług promienia 1.

54. Logarytmy stycznych wyrachować można podług formuły sty $a = \frac{r. \text{ wst } a}{\text{dost } a}$, podług któréj log. sty $a =$ log: wst $a +$ (10—log: dost a); to jest, że do logarytmu wstawy pewnego łuku, potrzeba dodać dopełnienie arytmetyczne logarytmu jego dostawy, aby otrzymać logarytm stycznej tegoż łuku.

Logarytmy dotycznych otrzymamy z formuły sty a. dot $a = r^2$, z której log. dot $a = 10 + (10 —$ log. sty a).

Rachunek wstaw i dostaw od 9° do 9°, celem sprawdzenia tablic.

Dla okazania sposobu sprawdzania tablic, przytaczamy rachunek wstaw i dostaw łuków od 9° do 9°.

Niech będzie naprzód wst $18° = x$; $2x$ będzie cięciwą łuku 36°, czyli bokiem dziesięcio-kąta foremnego w koło wpisanego: a że bok ten jest równy większej części promienia podzielonego, w stosunku średnim i skrajnym, wziąwszy zatém promień za 1, będzie:

$$1:2x=2x:1-2x,$$

ztąd $x^2+\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$,

rozwiązawszy to równanie i opuściwszy ważność odjemną, która tu jest nieużyteczną, otrzymamy:

$$x=\text{wst}\,18°=\text{dost}\,72=\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5}).$$

Za pomocą tej ważności, znajdziemy łatwo:

$$\sqrt{1-x^2}=\text{dost}\,18°=\text{wst}\,72°=$$
$$\tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Ważności te wst 18° i dost 18°, wstawmy za wst a i dost a w formuły dające ważność na wst $2a$ i dost $2a$ (29), będzie:

$$\text{wst}\,36°=\text{dost}\,54°=\tfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$
$$\text{dost}\,36°=\text{wst}\,54°=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}).$$

Tęż ważność wst 18° wstawmy w formuły na wst$\frac{1}{2}a$ i dost$\frac{1}{2}a$, otrzymane w funkcyi wst a, wypadnie:

$$\text{wst}\,9°=\text{dost}\,81°=\tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$
$$\text{dost}\,9°=\text{wst}\,81°=\tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}$$
$$+\tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

Nakoniec wstawiwszy w też formuły ważność wst 54°, za wst *a*, otrzymamy:

$$\text{wst}\,27° = \text{dost}\,63° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{1}},$$

$$\text{dost}\,27° = \text{wst}\,63° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Nadto przypomnijmy sobie, że wst 45° = dost 45° = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, a ułożymy następującą tablicę:

$$\text{wst}\,0° = \text{dost}\,90° = 0,$$
$$\text{wst}\,9 = \text{dost}\,81° = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$
$$\text{wst}\,18° = \text{dost}\,72° = \tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5});$$
$$\text{wst}\,27° = \text{dost}\,63° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$-\tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\text{wst}\,36° = \text{dost}\,54° = \tfrac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$
$$\text{wst}\,45° = \text{dost}\,45° = \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$\text{wst}\,54° = \text{dost}\,36° = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}),$$
$$\text{wst}\,63° = \text{dost}\,27° = \tfrac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}}$$
$$+\tfrac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$
$$\text{wst}\,72° = \text{dost}\,18° = \tfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$
$$\text{wst}\,81° = \text{dost}\,9° = \tfrac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}}$$
$$+\tfrac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}$$
$$\text{wst}\,90° = \text{dost}\,0° = 1.$$

Wyrażenia te są bardzo proste i zamykają tylko pierwiastki kwadratowe, można je przeto łatwo obliczyć z żądanem przybliżeniem.

53. Sposób użycia tablic trygonometrycznych, polega na rozwiązaniu dwóch następujących zagadnień:

1°. Mając dany kąt, znaleźć za pomocą tablic, logarytm jego wstawy, dostawy, stycznej i dotycznej.

2°. Mając dany logarytm wstawy lub stycznej, dostawy lub dotycznej kąta niewiadomego, wyznaczyć tenże kąt.

Dwa te zagadnienia z łatwością rozwiązać można, znając układ tablic trygonometrycznych.

W tablicach pospolicie używanych, znajdują się logarytmy wstaw, dostaw, stycznych i dotycznych, obliczone do siedmiu znaków dziesiętnych, na wszystkie stopnie i minuty $\frac{1}{4}$ okręgu. Logarytmy te znajdują się w kolumnach mających napisy wst. dost. sty. doty. Stopnie kątów mniejszych od 45°, znajdują się u góry, a minuty w pierwszej kolumnie z lewej strony. Stopnie zaś kątów zawierających od 45° do 90°, znajdują się na dole, a minuty odpowiadające, w pierwszej kolumnie z prawej strony.

Tym sposobem znajdziemy, że

log.wst. 17° 23′=log.dost. 72°37′=
9,4753271,

log.wst. 72°37′=log.dost. 17° 23′=
9,9789386.

log.sty. 32° 19′=log.dot. 57° 41′=
9,8011161.

log.sty. 57°41′=log.dot. 32° 19′=
10,1988839.

Gdy kąt dany oprócz minut, zamyka jeszcze sekundy, potrzeba zwrócić uwagę na różnice w tablicach wyrażone, i wykonać rachunek podobny temu, który się wykonywa, szukając logarytmu liczby nie znajdującej się w tablicaeh.

Przypadek 1. Wyrachować logarytm wstawy kąta danego.

Gdy kąt dany jest ostry, bierze się z tablic logarytm wstawy stopni i minut wchodzących w wyrażenie kąta danego. Poczém rachuje się ilość x, którą potrzeba dodać do tego logarytmu, aby otrzymać logarytm żądany, przypuszczając, że kiedy kąt ostry (zamykający stopnie i minuty), powiększa się pewną liczbą sekund, nie przechodzącą 60, logarytm jego wstawy powiększa się proporcyonalnie. To jest: układa się następująca proporcya:

Liczba 60 *sekund zawartych w jednej minucie, jest do liczby sekund kąta danego, jak różnica między dwoma następnemi logarytmami wstaw kątów, między któremi jest zawarty kąt dany, do ilości x, którą potrzeba dodać do mniejszego z tych logarytmów, aby otrzymać logarytm żądany.*

Przykład. *Wyrachować logarytm wstawy* 37° 5' 9".

Logarytm ten przypada między logarytmem wst 37°5', a log. wst. 37°6', dosyć przeto znaleźć ilość *x*, którą potrzeba dodać do log. wst. 37°5', aby otrzymać log. wst. 37° 5' 9". W tym celu układamy proporcyą:

Różnica 60" między kątami 37° 5' i 37°6', pomiędzy któremi jest zawarty kąt dany, jest do różnicy 9" między kątem danym, a kątem bezpośrednio mniejszym 37°5', jak różnica 0,0001671 między logarytmami wstaw kątów, między któremi jest zawarty kąt dany, do różnicy szukanej x, między log. wst. 37°5', a log. wst. 37° 5' 9", to jest:

60:9=0,0001671:x, ztąd x=0,0000251.

Dodawszy 0,0000251 do logarytmu 9,7803000, wst. 37°5', summa 9,7803251, wyrażać będzie logarytm szukany wst. 37°5'9".

Tym samym sposobem znajdziemy, że log. wst. 52°54' 51", jest 9,9018579.

Gdy kąt dany jest roztwarty, ten przypadk przywodzi się do poprzedzającego, zważając, że wstawa kąta jest równa wstawie jego spełnienia, dosyć zatém odjąć kąt dany od 180°, i wyrachować logarytm wstawie kąta ostrego, z tego odjęcia wynikłego.

Przypadek 2. Wyrachować logarytm stycznej kąta danego.

Logarytm ten otrzymuje się przez rozumowanie i rachunek, podobny odbytemu w poprzedzającym przypadku.

Przykład 1. Wyrachować logarytm stycznej 37°3'9".

Bierze się z tablic log.sty 37°5', który jest 9,8784281, i różnica 0,0002626, między logarytmami stycznych kątów 37°5' i 37°6', między któremi znajduje się kąt dany 37°5'9"; i dla znalezienia ilości x, któraby dodana do log sty. 37°5', dała logarytm szukany, układa się następująca proporcya: 60:9=0,0002626:x; ztąd x=0,0000394

Dodawszy 0,0000394 do 9,8784281 summa 9,8784675, będzie logarytmem żądanym.

Przykład 2. Wyrachować logarytm stycznej 52°54' 51".

Bierze się naprzód log. sty. 52° 54', to jest 10,1213093, szukając go w kolumnach pionowych, których napisy są umieszczone na dole. Aby zaś znaleźć ilość x, któraby dodana do tego logarytmu, dała logarytm szukany, bierze się z tablic różnica 0,0002626, między log. sty. 52°54, i log. sty. 52°55', i układa proporcya:

60:51=0,0002626:x; ztąd x= 0,0002232.

Ta ważność x dodana do 10,1213093 da logarytm szukany 10,1215325.

Uwaga. Aby znaleźć logarytm stycznej kąta roztwartego, szuka się wprost logarytmu stycznej spełnienia tegoż kąta; lecz dla wskazania, że ta styczna jest odjemna, daje się znak —, z prawej strony logarytmu. Ma się potém wzgląd na ten znak w przejściu od logarytmów do liczb lub kątów. I tak log. sty. 127° 5' 9", napiszemy w ten sposób:

10,1215325.

Taż sama uwaga stosuje się do logarytmu dostawy i dotycznej kąta roztwartego.

Przypadek 3. Wyrachować logarytm dostawy lub dotycznej danego kąta ostrego.

Pierwszy sposób. Ponieważ dostawa i dotyczna kąta ostrego a, są też same co wstawa i styczna kąta dopełnienia $90°—a$, można więc obecny przypadek przyprowadzić do jednego z dwóch poprzedzających, szukając logarytmu wstawy lub stycznej dopełuienia kąta danego.

Przykład. Znaleźć logarytm dostawy i dotycznej 52°54'51".

Bierze się najprzód dopełnienie 52°

54' 51", to jest: 37°5'9", a potém szuka się logarytmu wstawy i stycznej 37° 5' 9". Tak postępując znajdziemy, że logarytmy szukane są: 9,7803251, i 9,8784675.

Drugi sposób. Chcąc wprost wyrachować logarytm żądany, postępować należy jak względem wstaw i stycznych, z tą tylko różnicą, że ponieważ dostawa i dotyczna kąta ostrego zmniejszają się, gdy się kąt powiększa, więc czwarty wyraz proporcyi, oznacza to, co odjąć należy od większego z dwóch logarytmów z tablic wziętych, odpowiadających kątom, pomiędzy któremi mieści się kąt dany, aby otrzymać logarytm żądany.

Przykład. Wyrachować logarytm dostawy 52°54' 51".

Kąt dany jest zawarty między 52°54', a 52°55', więc logarytm szukany, przypada między logarytmami 9,7804671 i 9,7803000, odpowiadającemi dost 52° 54' i dost 52°55'. Różnica między temi logarytmami jest 0,0001671, więc kiedy kąt 52°54' powiększa się o 1' lub 60", logarytm 9,7804671 jego dostawy zmniejsza się o 0,0001671; aby więc znaleźć ilość, którą zmniejszyć potrzeba tenże logarytm, kiedy się kąt 52°54' powiększa o 51", ułożymy następującą proporcyą:

$60:51=0{,}0001671:x$;

ztąd $x=0{,}0001420$.

Odjąwszy 0,0001420 od logarytmu dost 52° 54', reszta 9,7803251 będzie logarytmem szukanym.

56. *Zagadnienie* 2. Mając dany logarytm wstawy, albo stycznej, albo dostawy, albo dotycznej kąta niewiadomego x, wyrachować tenże kąt za pomocą tablic.

Kiedy logarytm dany znajduje się całkowicie w tablicach, otrzymujemy bezpośrednio kąt szukany.

Dosyć będzie uważać przypadek w którym logarytm ten nie znajduje się w tablicach.

Pierwszy przypadek. Wyrachować kąt, mając dany logarytm jego wstawy.

Przykład 1. Niech będzie log. wst.x $=9{,}7803251$.

Ponieważ ten logarytm jest mniejszy od logarytmu 9,8494850, wstawy 45°, więc kąt x, jest mniejszy od 45°.

Szukać zatém należy logarytmu danego w kolumnach pionowych mających u góry napis *Wstawa*; a tak postąpiwszy zobaczymy, że przypada między dwoma logarytmami 9,7803000 i 9,7804671, to jest, logarytmami wst. 37°5' i wst. 37°6'. Tak że kąt x składa się z 37°5', i pewnej liczby z sekund, którą wyrachować należy. W tym celu układa się proporcya:

Różnica 0,0001671 między dwoma logarytmami, w tablicach będącemi i najbliższemi logarytmu danego, jest do różnicy 0,0000251 między logarytmem danym, a logarytmem mniejszym od niego, jak 60 do z.

Z proporcyi tej wypada $z=9''$, a więc kąt szukany x, jest prawie 37°5'9''.

Przykład 2. Niech będzie log. wst.x $=9,9790313$.

Logarytm ten jest większy od logarytmu wst. 45°, więc kąt x jest większy od 45°, szukać zatém należy logarytmu danego w kolumnach pionowych, mających u dołu napis *Wstawa*. Logarytm ten przypada między dwa logarytmy 9,9790192 i 9,9790594, z których pierwszy jest logarytmem wstawy 72°20', drugi wstawy 72°21'; tak iż kąt szukany składa się z 72°, i pewnej liczby sekund, którą się wyznacza, jak w poprzedzającym przykładzie. To jest: bierze się różnica 0,0000402, między dwoma logarytmami następnemi, najbliższemi logarytmu danego, tudzież różnica 0,0000121, między logarytmem danym, a od niego mniejszym, i układa proporcya:

$0,0000402 : 0,0000121 = 60 : z$;

ztąd $z = 18''$.

Ważność zatém kąta x, jest 72°20' 18''.

Drugi przypadek. Wyrachować kąt mając dany logarytm jego stycznej.

Przykład. Niech będzie log. sty.x= 9,8784675.

Logarytm ten jest mniejszy od 10, to jest: od logarytmu sty. 45°, więc kąt jest x mniejszy od 45°. Szukać przeto należy tego logarytmu w kolumnach pionowych mających u góry napis *Styczna.* To uskuteczniwszy spostrzeżemy, że przypada między dwa logarytmy 9,8784281 i 9,8786907, sty 37°5' i sty 37°6'; tak iż kąt szukany zawiera 37°5', więcej pewną liczbę z sekund, która się oblicza sposobem przy wyznaczaniu kąta danego przez jego wstawę wskazanym, to jest: układa się proporcya:

$$0{,}0002626 : 0{,}0000394 = 60 : z;$$

ztąd $z = 9''$.

Ważność zatém przybliżona kąta ostrego x jest $37°5'9''$.

Przykład 2. Niech będzie sty $x =$ 11,1741505.

Logarytm ten jest większy od log. sty. 45°, szukając go przeto w kolumnach pionowych, mających u dołu napis *Styczna*, spostrzeżemy że przypada między dwa logarytmy 11,1738974 i 11,1757954, to jest: między log. sty. 86°10' i log. sty. 86°11'. Aby znaleźć liczbę z sekund, którą potrzeba dodać do 86°10', dla otrzymania kąta szukanego, bierze się z tablic różnica 0,0018980 między log. sty. 86°10' i log. sty. 86°17', i układa proporcya:

$$0{,}0018980 : 0{,}0002531 = 60 : z;$$

ztąd $z = 8''$.

Ważność zatém przybliżona kąta szukanego x, jest $86°10'8''$.

Trzeci przypadek. Mając dany logarytm dostawy, lub dotycznej kąta ostrego x, wyznaczyć tenże kąt.

Iszy sposób. Przypadek ten łatwo przyprowadzić do jednego z dwóch poprzedzających; i tak, ponieważ dostawa i dotyczna kąta ostrego x, jest równa wstawie i stycznej dopełnia $90° - x$, więc oznaczywszy to dopełnienie przez y, będzie:

log. dost. x=log. wst. y; log. dot x= log. sty. y i $y=90°-x$.

Obliczywszy log. wst. y, albo log. sty. y, wyrachujemy kąt y, podług sposobu podanego w pierwszym lub drugim przypadku, a odjąwszy go od $90°$, otrzymamy kąt szukany x.

Przykład. Niech będzie log. dost. x $=9,4753271$.

Naznaczywszy $y = 90° - x$, będzie $x=90°-y$:

log. dost. x=log. wst. y=9,4753271.

Ponieważ log. wst. y= 9,4753271, więc $y=17°23'$, a tém samém $x=90°$ $-y=90°-17°23'=72°37'$.

Drugi sposób. Chcąc wyrachować wprost kąt żądany, uważać naprzód potrzeba, że kiedy się kąt ostry powiększa, zmniejsza się jego dostawa i dotyczna; nadto:

log. dost. 0=10, log. dost. 45°= 9,8494850,
log. dost. 89°59'=6,4637261;
log. dot. 0 = nieskończenie wielki,
log. dot. 45°=10,
log. dot. 89°59'=6,4637261.

Gdy więc log. dost x, przypada między 10, i 9,8494850, kąt x przypada między 0 i 45°; gdy logarytm dost x, przypada między 9,8494850, a 6,4637261, kąt x przypada między 45° a 89° 59'; kiedy log. dot. x jest większy od 10, kąt x jest mniejszy od 45°, a kiedy log. dot. x, przypada między 10, a 6,4632671, tąk x przypada między 45° a 89°59'.

Przykład 1. Niech będzie log. dost.x =9,9879386.

Logarytm ten jest większy od log. dost. 45°, więc kąt x jest mniejszy od 45°. Szukając danego logarytmu w tablicach, spostrzeżemy, że odpowiada dost 17°42°, więc kąt x=17°42'.

57. W formułach zamykających wstawy, dostawy i t. d. promień jest wzięty za jedność, rachunek w nich wskazany można dwojakim sposobem za pomo-

cą tablic wykonać, to jest: albo przywrócić promień, jak się to już wyżej powiedziało, i wziąć logarytmy, biorąc 10 za logarytm promienia; albo też uważać zawsze promień za jedność, lecz odjąć 10 od każdego logarytmu z tablic wziętego. Odejmowanie to najlepiej wykonać na samej cesze, która przez to może się stać odjemną; a lepiej jeszcze brać logarytmy takie, jakie się w tablicach znajdują, i dopiero od wypadku odjąć tyle razy 10, ile się wzięło logarytmów z tablic. Poprawka taka będzie zawsze łatwa do uskutecznienia, bo w ciągu rachunku logarytmy będą się tylko dodawać lub odejmować; nadto widoczna, że każdy logarytm dodatny wzięty z tablic, będzie o 10 za wielki, a każdy odjemny o 10 za mały.

Dla skrócenia zaś najlepiej odejmowanie logarytmów zamienić na dodawanie, działając za pomocą dopełnień, bo w tenczas 10, które potrzeba odjąć od logarytmu każdej linii trygonometrycznej, aby otrzymać jej logarytm, biorąc promień za jedność, będzie nagrodzone przez 10 dodane do niego dla wzięcia dopełnienia.

Niech będzie *np.* $x=419\times \text{wst}^2 40^\circ$;
ztąd log. $x=$log. $419+2$log. wst. 40°.

log. $419=2,6222140$.
2 log. wst. $40^\circ=19,6161350$.

log. $x=22,2383490$.

Wypadek o 20 za wielki; odjąwszy więc 20, zostanie:

log. $x=2,2383490=$log $173,12$,
ztąd $x=173,12$.

Związek między bokami i kątami trójkąta prostokreślnego.

58. Dla skrócenia oznaczać będziemy kąty trójkątów przez głoski A, B, C; a boki im przeciwne przez a, b, c. Nadto jeżeli trójkąt jest prostokątny, A będzie kąt prosty, a, przeciw prostokątna.

59. Twierdz: I. *W trójkącie prostokątnym, każdy z boków przyległych kątowi prostemu, jest równy przeciw prostokątnej, pomnożonej przez wstawę kąta temuż bokowi przeciwnego.*

Dowodz. Niech będzie ABC, fig: 14, trójkąt prostokątny przy A; z punktu B jako środka promieniem jakimkolwiek zakreślmy łuk DG, i spuśćmy

DE prostopadłą do AB. Wstawą kąta B jest stosunek DE, do promienia BD; w trójkątach zaś podobnych BED i ABC, jest:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{DE}{BD}, \text{więc} \frac{b}{a}= \text{wst B.}$$

czyli $b=a.\text{wst B}$.... (1).

Kąt B jest dopełnieniem kąta C, więc wst B=dost C.

Można zatém powiedzieć: *że każdy z boków przyległych kątowi prostemu, jest równy przeciw-prostokątnej, pomnożonej przez dostawę kąta przyległego temuż bokowi.*

60. Twierdz. II. *W trójkącie prostokątnym każdy z boków przyległych kątowi prostemu, jest równy drugiemu bokowi rozmnożonemu przez styczną kąta przeciwnego pierwszemu bokowi.*

Dowodz. Niech będzie ABC, fig. 14, trójkąt prostokątny przy A, zakreśliwszy łuk DG, wyprowadźmy z punktu G, prostopadłą GH do AB. Stosunek GH do BD, jest styczną kąta B. A że

$$\frac{AC}{AB}=\frac{GH}{BD}, \text{ więc} \frac{b}{c} = \text{sty B,}$$

czyli $b=c \text{ sty B}$.... (2).

Wypadek ten można także wyprowadzić z twierdzenia Igo. Jakoż zastosowawszy to twierdzenie do każdego z boków b i c, i zważając, że wst C = dost B, będzie $b=a$ wst B, $c=a$ dost B,

$$\text{więc } \frac{b}{c} = \frac{\text{wst B}}{\text{dost B}} = \text{sty B, czyli}$$

$$b = c \text{ sty B.}$$

61. Twierdz: III. *W każdym trójkącie prostokreślnym wstawy kątów, są do siebie, jak boki im przeciwne.*

Dowodz. Niech będzie trójkąt ABC, fig: 15; z punktu C spuśćmy prostopadłą CD do AB; gdy prostopadła ta przypada wewnątrz trójkąta, w trójkątach prostokątnych ACD, BCD, jest:

$$\text{CD} = b.\text{ wst A, CD} = a.\text{ wst B,}$$
$$\text{więc } b \text{ wst A} = a \text{ wst B;}$$
$$\text{ztąd wst A} : \text{wst B} = a : b.$$

Gdy zaś prostopadła CD, *fig.* 15 *bis*, przypada na przedłużenie BA, w trójkącie ACD jest: CD $=b$.wst CAD. Lecz kąt CAD jest spełnieniem kąta CAB, więc wst CAD = wst CAB = wst A, a tém samém

$$\text{wst A} : \text{wst B} = a : b \text{.... (3).}$$

62. Twierdz: IV. *W każdym trójkącie prostokreślnym, kwadrat z jednego boku jest równy summie kwadratów z dwóch innych boków, zmniejszonej podwójnym iloczynem z tychże boków przez dostawę kąta między niemi zawartego;* to jest: że

$$a^2=b^2+c^2-2bc \text{ dost } A\ldots \quad (4).$$

Dowodz. W trójkącie ABC fig: 15, spuściwszy prostopadłą CD do boku AB, gdy kąt A jest ostry, będzie:

$$\overline{CB}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2AB\times CD,$$

czyli $a^2=b^2+c^2-2c\times AD$.

Lecz w trójkącie ACD prostokątnym przy D, $AD=b$.dost CAD, czyli $AD=b$. dost A, więc:

$$a^2=b^2+c^2-2bc.\text{dost } A.$$

Gdy zaś kąt A jest roztwarty, fig: 15 bis, będzie:

$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2+2AB\times AD,$$

czyli $a^2=b^2+c^2+2c\times AD$.

W trójkącie prostokątnym ADC, $AD=b$. dost CAD; a że kąt CAD jest spełnieniem kąta BAC, więc

dost CAD=—dost A, a tém samém

$AD=-b$.dost A.

Ważność tę wstawiwszy za AD, w równanie poprzedzające, otrzymamy równanie (4).

Twierdzenie to zastosowawszy do każdego boku trójkąta, otrzymamy trzy równania następujące:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\text{dost}A,$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\text{dost}B,$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab.\text{dost}C,$$

za pomocą których można zawsze wyrachować trzy z sześciu części trójkąta, gdy trzy inne są dane (wyjąwszy przypadek, gdy trójkąt jest nie podobny do wykreślenia, albo gdy dane są tylko trzy kąty).

Twierdzenie III, jako wyrażające związek między dwoma bokami i dwoma kątami im przeciwnemi, musi bydź wypadkiem z tych równań. Wyprowadza się zaś następującym sposobem:

Z równania pierwszego wypada:

$$\text{dost } A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \text{ więc}$$

$$\text{wst}^2 A = 1 - \text{dost}^2 A = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2},$$

$$= \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}$$

a tém samém $\frac{\text{wst}A}{a}$

$$=\sqrt{\frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{2abc.}}$$

Tym samym sposobem otrzymamy z dwóch innych równań stosunki $\frac{\text{wst } B}{b}$ i $\frac{\text{wst } C}{c}$. Ale otrzymamy je daleko łatwiej, zamieniając w drugiej stronie poprzedzającej równości naprzód a na b, a b na a, potém a na c, a c na a. Lecz że ta druga strona jest funkcyą symetryczną a, b, c, to jest: że się nie zmienia, za zmianą wykonaną między głoskami, więc stosownie do twierdz: III, jest:

$$\frac{\text{wst } A}{a}=\frac{\text{wst } B}{b}=\frac{\text{wst } C}{c}.$$

Rozwiązywanie trójkątów prostokreślnych prostokątnych.

63. W trójkącie prostokątnym kąt prosty jest zawsze wiadomy. Aby więc trójkąt prostokątny rozwiązać, dosyć prócz kąta prostego mieć dane dwie

części, pomiędzy któremi powinien bydź jeden bok. Dwie zaś dane części mogą bydź: 1°, przeciw-prostokątna i jeden z kątów ostrych; 2°, jeden z boków przyległych kątowi prostemu i jeden z kątów ostrych; 3°, przeciw-prostokątna i jeden z boków przyległych kątowi prostemu; 4°, dwa boki przyległe kątowi prostemu. Wszystkie zatém przypadki rozwiązywania trójkątów prostokątnych, zamkniemy w czterech następujących:

Przypadek 1. *Mając daną przeciw-prostokątną a, i kąt ostry B, znaleźć kąt C i boki b i c.*

Naprzód $C=90°-B$; dalej podług twierdzenia Igo:

$$b=a \text{ wst } B,\quad c=a \text{ dost } B.$$

Wziąwszy logarytmy, otrzymamy;

$$\log. b=\log. a+\log. \text{wst } B-10,$$
$$\log. c=\log. a+\log. \text{dost } B-10.$$

Przykład 2. *Mając dany bok b i kąt ostry B, znaleźć kąt C, i boki a i c.*

$C=90°-B$. Podług twierdzenia Igo.

$$b=a \text{wst } B;\ \text{ztąd } a=\frac{b}{\text{wst } B},$$

a podług twierdzenia IIgo:

$c = b$ sty C, czyli $C = b$ dot B.

Wziąwszy logarytmy, będzie:

$\log a = 10 + \log b - \log$ wst B,

$\log c = \log b + \log$ sty C $- 10$,

albo $\log c = \log b + \log$ dot B $- 10$.

Przypadek 3. *Mając daną przeciw-prostokątną a i bok b, znaleźć kąty* B *i* C, *i bok c.*

Kąt B otrzymamy z równania $b = a.$wstB, ztąd wstB$= \frac{b}{a}$, $C = 90° - B$; bok zaś c obliczymy za pomocą równania $c = a$ wst C, albo też $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ czyli $c = \sqrt{(a+b).(a-b)}$.

Przypadek 4. *Mając dane boki b i c, znaleźć kąty* B, C *i przeciw-prosto-kątną a.*

Kąt B wyrachujemy za pomocą równania $b = c$ sty B, ztąd sty B$= \frac{b}{c}$; $C = 90° - B$; nakoniec przeciw-prosto-kątną a, otrzymamy z równania $b = a$wst B.

Możnaby także znaleźć a, za pomocą formuły $a = \sqrt{b^2 + c^2}$. Lecz że $b^2 +$

c^2 nierozkłada się na czynniki, formuła ta jest niedogodna do rachunku logarytmicznego, i dla tego lepiej wyznaczyć wprzód kąt B, a potém bok a.

Rozwiązywanie trójkątów prostokreślnych ostro lub roztwartokątnych.

63. Trzy części dane trójkąta ostro lub roztwartokątnego, mogą bydź: 1, jeden bok i dwa kąty; 2, dwa boki i kąt jednemu z nich przeciwny; 3, dwa boki i kąt między niemi zawarty; 4, trzy boki. Wszystkie zatém przypadki rozwiązywania tych trójkątów, przywieść można do czterech następujących:

Przypadek 1. Mając dany bok a i dwa kąty trójkąta, znaleźć inne jego części.

Od 180° odjąwszy summę dwóch kątów danych, otrzymamy kąt trzeci. Boki zaś b i c, otrzymamy podług twierdzenia IIIgo, z proporcyj:

$$\text{wst}\,A:\text{wst}\,B=a:b,\quad \text{wst}\,A:\text{wst}\,C=a:c,$$

$$\text{ztąd}\ b=\frac{a\,\text{wst}\,B}{\text{wst}\,A};\ c=\frac{a\,\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A}.$$

Przypadek 2. Mając dane dwa boki a i b, i kąt A jednemu z nich przeciwny, znaleźć bok trzeci c i dwa inne kąty B i C.

Kąt B otrzymamy z proporcyi: $a:b = \text{wst}\,A:\text{wst}\,B$.

Mając wiadome A i B, będzie: $C = 180^\circ - (A + B)$; nakoniec wyrachujemy bok c za pomocą proporcyi:

$$\text{wst}\,A:\text{wst}\,C = a:c.$$

Rozwiązanie to potrzebuje objaśnienia, co do wyrachowanej ważności jednego z kątów niewiadomych.

I tak z pierwszej proporcyi wypada:

$$\text{wst}\,B = \frac{b\ \text{wst}\,A}{a},$$

gdzie jak widzimy kąt szukany jest wyznaczony przez swoię wstawę; a ponieważ dwa kąty spełniające się, mają jednę wstawę, więc obliczywszy log wst A według powyższego równania, można wziąć za ważność kąta szukanego B, jużto kąt ostry M znajdujący się w tablicach, już też jego spełnienie $180^\circ - M$, to jest: że będzie $B = M$ i $B = 180^\circ - M$, co zdaje się wskazywać dwa rozwiązania, i prowadzi do następujących uwag:

1º. Kiedy kąt A jest prosty lub roztwarty, dwa inne kąty muszą bydź ostre; więc na B potrzeba wziąć taką ważność, jaką dają tablice, to jest: B=M; lecz aby w tym razie trójkąt mógł bydź wykreślony, powinno bydź $a>b$, fig: 16.

2º. Gdy dany kąt A jest ostry i bok $a>b$, musi także bydź A>B, a w tym przypadku tablice dadzą jeszcze ważność kąta B; trójkąt można będzie zawsze wykreślić; a gdy będzie $a=b$ trójkąt będzie równoramienny, fig: 17.

3º. Lecz gdy dany kąt A jest ostry, a bok $a<b$, to jest; gdy bok przeciwny kątowi danemu, jest mniejszy od koku przeciwnego kątowi szukanemu, wtenczas można wziąć B=M, albo B=180°—M. I tak niech będzie kąt ostry BAC=A, BC=a, AC=b, fig: 18; okrąg zakreślony z punktu C jako środka, promieniem a może, w pewnych przypadkach przeciąć linią AB w dwóch punktach B i B'; a wtenczas będą dwa trójkąty ACB, ACB', wykreślone za pomocą tych samych części danych, i wktórych się kąty ABC i AB'C spełniają. Istotny zaś warunek dwóch

rozwiązań jest, aby bok a z założenia mniejszy od b, był większy od prostopadłej CD, spuszczonej z wierzchołka C do AB. Bo gdy bok a jest równy prostopadłej CD, okrąg zakreślony promieniem a jest styczny do AB, i dwa trójkąty zamieniają się na jeden prostokątny ACD. Nakoniec gdy bok $a<CD$, trójkąta wykreślić nie można, bo wtenczas okrąg zakreślony promieniem a ze środka C, nieprzetnie boku AB.

Te dwie ostatnie okoliczności, objaśniają same ważności kąta B. I tak w pierwszym przypadku, w trójkącie prostokątnym ACD; $CD=b$ wst A, a że $CD=a$, więc $a=b$. wst A; ztąd

$$\frac{b \text{ wst A}}{a}=1,$$ a tém samém:

$$\log b+\log \text{wst A}-\log a= \log \text{wst B}=10,$$

to jest: że gdy bok a jest równy prostopadłej CD, log wst B=10.

W drugim przypadku, w trójkącie prostokątnym ACD, jest $CD=b$ wstA; a że z przypuszczenia $a<CD$, więc $a<b$ wst A, czyli $\frac{b \text{ wst A}}{a}>1$, a tém samém wstawa kąta B większa od promienia; a ponieważ nie masz wstawy większej od promienia, więc też trójkąt nie może bydź wykreślony.

Lubo powiedzieliśmy że boku c szukać należy po wyznaczeniu kąta B, można go przecież wyznaczyć bezpośrednio za pomocą danych a, b, A. Jakoż na mocy twierdz: IV jest:

$$a^2=b^2+c^2-2bc \text{ dost A},$$

czyli $c^2-2bc \text{ dost A}=a^2-b^2$;

ztąd

$$c=b \text{ dost A}\pm\sqrt{a^2-b^2+b^2 \text{dost}^2\text{A}}$$
$$=b \text{ dost A}\pm\sqrt{a^2-b^2\text{wst}^2\text{A}}.$$

Ponieważ bok trójkąta powinien bydź zawsze ilością rzeczywistą i dodatną, łatwo więc przewidzieć jakie związki zachodzić powinny między a, b, A, aby na c była jedna lub dwie ważności.

Poprzedzające ważności c, jako niedogodne do rachunku logarytmicznego nie używają się w trygonometryi. Jednakże, ponieważ często na podobne natrafić można, okażemy sposób używany w astronomii, do zamienienia ich na inne, dogodniejsze do użycia.

Wyraźmy najprzód te ważności w postaci:

$$c = b \,\mathrm{dost}\, A \pm a \sqrt{1 - \frac{b^2 \,\mathrm{wst}^2 A}{a^2}}.$$

Ponieważ je uważamy za rzeczywiste, więc ilość $\frac{b \,\mathrm{wst}\, A}{a}$ jest mniejsza od 1, i można ją uważać za wstawę pewnego kąta x, który wyznaczymy, czyniąc:

$$\mathrm{wst}\, x = \frac{b \,\mathrm{wst}\, A}{a}.$$

Natenczas będzie $b = \frac{a \,\mathrm{wst}\, x}{\mathrm{wst}\, A}$,

$$\sqrt{1 - \frac{b^2 \,\mathrm{wst}^2 A}{a^2}} = \mathrm{dost}\, x;$$

a ztąd

$$c = \frac{a\,(\mathrm{wst}\, x . \,\mathrm{dost}\, A \pm \mathrm{wst}\, A . \mathrm{dost}\, x)}{\mathrm{wst}\, A}$$

$$= \frac{a \,\mathrm{wst}\,(x \pm A)}{\mathrm{wst}\, A};$$

ważności łatwe do obliczenia przez logarytmy.

Przypadek 3. Mając dane dwa boki a, b, i kąt C między niemi zawarty, znaleźć bok c i kąty A, B.

Twierdzenie III nie może bydź zastosowane do tego przypadku, bo w każdej z proporcyj $a:b=\text{wst}\,A:\text{wst}\,B$ i $a:c=\text{wst}\,A:\text{wst}\,C$, znajdują się dwa wyrazy niewiadome. Lecz z proporcyi:

$$a:b=\text{wst}\,A:\text{wst}\,B,$$

wypada:

$$a+b:a-b=\text{wst}A+\text{wst}B:\text{wst}A-\text{wst}B;$$

wiemy zaś iż (40)

$$\text{wst}A+\text{wst}B:\text{wst}A-\text{wst}B=\text{sty}\tfrac{1}{2}(A+B):\text{sty}\tfrac{1}{2}(A-B),$$

więc

$$a+b:a-b=\text{sty}\tfrac{1}{2}(A+B):\text{sty}\tfrac{1}{2}(A-B)\ldots(I).$$

Ponieważ $\frac{1}{2}(A+B)=\frac{1}{2}(180^\circ-C)=90^\circ-\frac{1}{2}C$, więc trzy pierwsze wyrazy tej proporcyi są wiadome, i można będzie z niej wyprowadzić ważność $\frac{1}{2}(A-B)$. Mając wiadome połowę summy i połowę różnicy kątów A i B, znajdziemy każdy z nich, gdyż:

$$A=\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2},\quad B=\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}.$$

Po wyznaczeniu A i B, wyrachujemy bok c, przez proporcyą:

$$\text{wst}A:\text{wst}C=a:c \dots (2).$$

Proporcya ta wymaga szukania trzech nowych logarytmów, to jest: log a, log wst A, log wst C. W następującym sposobie, szuka się jeden mniej. Ponieważ wst A:wst B:wst C$=a:b:c$, więc powinno także być:

$$\text{wst}A+\text{wst}B:\text{wst}C=a+b:c, \text{ ztąd}$$

$$c=\frac{(a+b)\,\text{wst}C}{\text{wst}A+\text{wst}B}.$$

Na mocy formuł (N° 29 i 39), jest wst A+wst B$=2$wst$\frac{1}{2}$(A+B)dost$\frac{1}{2}$(A—B), wst C$=2$wst $\frac{1}{2}$C.dost $\frac{1}{2}$ C, a nadto wst $\frac{1}{2}$(A+B)$=$wst (90°—$\frac{1}{2}$C)$=$ dost$\frac{1}{2}$C. Ważności te wstawiwszy w równanie na c, otrzymamy:

$$c=\frac{(a+b)\text{wst}\tfrac{1}{2}C}{\text{dost}\tfrac{1}{2}(A-B)} \dots (3).$$

Formuła ta zawierająca $a+b$, którego logarytm jest już wiadomy, wymaga rzeczywiście szukania tylko dwóch logarytmów.

Bok c wyznaczyliśmy dopiero po A i B; aby zaś c wyznaczyć od razu, zastosujemy twierdzenie IV, podług którego

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab.\text{dost}C}.$$

Lecz że logarytmy nie mogą być zastosowane do formuły, udamy się zatém do kąta przybranego; a z różnych przemian tej formuły, weźmiemy następującą:

Wiadomo że $\text{dost}^2\frac{1}{2}C+\text{wst}^2\frac{1}{2}C=1$, a $\text{dost}^2\frac{1}{2}C-\text{wst}^2\frac{1}{2}C=\text{dost}C$ (31), więc:

$$c=\sqrt{\{(a^2+b^2)(\text{dost}^2\tfrac{1}{2}C+\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C)-2ab\,(\text{dost}^2\tfrac{1}{2}C-\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C)\}}$$

$$=\sqrt{(a+b)^2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}C+(a-b)^2\text{dost}^2\tfrac{1}{2}C}$$

$$=(a+b)\,\text{wst}\tfrac{1}{2}C\sqrt{1+\frac{(a-b)^2\,\text{dot}\,\frac{1}{2}C}{(a+b)^2}}.$$

Styczna może przechodzić przez wszystkie stany wielkości, uczyńmy więc:

$$\text{sty}\,x=\frac{(a-b)\,\text{dot}\frac{1}{2}C}{a+b},$$

a przedostatni pierwiastek zamieni się na:

$$\sqrt{1+\text{sty}^2x}=\sqrt{1+\frac{\text{wst}^2x}{\text{dost}^2x}}=\frac{1}{\text{dost}\,x}$$

a tém samém będzie:

$$c = \frac{(a+b)\ \text{wst}\ \frac{1}{2}C}{\text{dost}\ x}.$$

Tak więc znajdziemy następnie kąt posiłkowy x i bok c, za pomocą formuł łatwych do obliczenia.

Rozwiązanie to różni się tylko na pozór od poprzedzającego, gdyż sty $\frac{1}{2}(A+B)$, jest równa dot$\frac{1}{2}C$; ważność przeto sty x jest równa ważności sty $\frac{1}{2}(A-B)$, wyprowadzonej z proporcyi (1), a tém samém ostatnia ważność c jest identyczna z formułą (3).

Zdarza się często w zastosowaniu, że boki są dane przez ich logarytmy. I tak dajmy, że dane są logarytmy boków a i b, i kąt C, i że potrzeba tylko wyrachować kąty A i B. Ażeby w tym razie wyrachować $\frac{1}{2}(A-B)$, podług proporcyi (1), potrzebaby wyrachować pierwej a i b, za pomocą tablic; lecz można uniknąć tego rachunku przez wprowadzenie kąta posiłkowego. Jakoż, niech będzie ψ kąt znaleziony, czyniąc sty $\psi = \frac{b}{a}$; z formuły (2) N° 34, wypada:

$$\text{sty}\,(45^\circ - \psi) = \frac{\text{sty}\,45^\circ - \text{sty}\,\psi}{1 + \text{sty}\,45^\circ\,\text{sty}\,\psi}$$

$$= \frac{1 - \text{sty}\,\psi}{1 + \text{sty}\,\psi};$$

wstawiwszy za sty ψ, jej ważność, będzie:

$$\text{sty}(45^\circ - \psi) = \frac{a-b}{a+b}.$$

Z drugiej strony proporcya (1) daje:

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b}\,\text{sty}\tfrac{1}{2}(A+B);$$

więc

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(A-B) = \text{sty}(45^\circ - \psi)\,\text{sty}\tfrac{1}{2}(A+B);$$

a ponieważ ψ jest wiadome, znajdziemy przeto łatwo $\frac{1}{2}(A-B)$. Tak postępując, potrzeba będzie rachować dwa logarytmy mniej, jak w proporcyi (1).

Przypadek 4. Mając dane trzy boki a, b, c, wyrachować kąty A, B, C.

Podług twierdzenia IV jest: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\text{dost}\,A$; więc:

$$\text{dost}\,A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Tym samym sposobem wyznaczają się kąty B i C. Szukać jednak wypada formuły dogodniejszej do rachunku logarytmicznego.

Wiemy (31) że:

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A=1-\text{dost}\,A;$$

tu wstawiwszy ważność dostA, otrzymamy następnie:

$$2\text{wst}^2\tfrac{1}{2}A=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c}{2bc};$$

więc

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4bc.}}$$

Aby tej formule nadać prostszą postać, uczyńmy obwód trójkąta $a+b+c=2s$, a następnie:

$$a+b-c=2s-2c=2(s-c),$$
$$a-b+c=2s-2b=2(s-b);$$

więc

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Ztąd wypada następujące prawidło: *Aby znaleźć wstawę połowy kąta, potrzeba od połowy obwodu trójkąta, odjąć następnie, każdy z boków między którémi ten kąt zawarty, reszty ztąd wynikłe rozmnożyć przez siebie, iloczyn ten podzielić przez iloczyn z tychże boków, i z ilorazu wyciągnąć pierwiastek kwadratowy.*

Lubo kąt $\frac{1}{2}A$ jest wyznaczony przez swoję wstawę, nie wynika ztąd żadna niepewność; bo skoro kąt A należy do trójkąta, powinno bydź $A<180°$; a tém samém $\frac{1}{2}A<90°$.

Z równąż łatwością wyprowadzić można formuły na dost $\frac{1}{2}$ A i sty $\frac{1}{2}$ A. I tak, ponieważ $2\text{dost}^2\frac{1}{2}A=1+\text{dost}A$, więc za dost A wstawiwszy jej ważność i odbywszy rachunek zupełnie podobny poprzedzającemu, otrzymamy:

$$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Nakoniec podzieliwszy wst $\frac{1}{2}$ A, przez dost$\frac{1}{2}$A, wypadnie:

$$\text{stycz}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Chcąc za pomocą którejkolwiek z tych trzech formuł wyznaczyć kąt, potrzeba szukać czterech logarytmów; dla tego też nie można dać żadnej z nich pierwszeństwa nad innemi, gdy idzie tylko o wyrachowanie jednego kąta w trójkącie. Lecz rachując dwa kąty, lepiej użyć ostatniej, bo dosyć wyznaczyć logarytmy czterech ilości, s, $s-a$, $s-b$, $s-c$, gdy biorąc którąkolwiek z dwóch pierwszych, potrzebą szukać sześciu.

64. *Uwaga.* Z trzech linij dowolnie wziętych, w tenczas tylko, jak wiadomo, można wykreślić trójkąt, gdy każda z nich jest mniejsza od summy, a większa od różnicy dwóch innych; ile razy więc dane boki trójkąta dopełniają tego warunku, trzy formuły o których mowa, dadzą na wst $\frac{1}{2}$A i dost$\frac{1}{2}$A, ważności rzeczywiste mniejsze od jedności, a na sty$\frac{1}{2}$A, ważność rzeczywistą mniejszą lub większą od jedności; w przeciwnym zaś razie ważności te albo będą urojone, albo też ważność wst$\frac{1}{2}$A i dost$\frac{1}{2}$A będzie większa od 1. I tak wziąwszy *np.* formułę:

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

przypuśćmy:

1°, $b>a+c$, będzie $2b>a+b+c$; więc $2b>2s$, a tém samém $s-b<o$. Lecz że w tym razie $a+b>c$, więc $a+b+c>2c$ czyli $2s>2c$, a tém samém $s-c>o$; ważność zatém wst$\tfrac{1}{2}$A jest urojona.

2°, Niech będzie $c>a+b$: będzie $s-c<o$, a $s-b>o$, to jest: że wst $\tfrac{1}{2}$ A będzie i w tym przypadku urojona.

3°. Niech będzie $a>b+c$: będzie $a+b+c$ czyli $2s>2b+2c$, więc $s>b+c$; a ztąd $s-b>c$, $s-c>b$, i $(s-c)(s-b)>bc$; ważność zatém wst $\tfrac{1}{2}$ A byłaby większa od 1, co się nie może stosować do żadnego kąta.

Zastosowanie do przykładów.

65. Do wymierzania kątów na ziemi używa się zwyczajnie narzędzie zwane kątomiar, którém jest łuk podzielony na stopnie, pół-stopnie i t. d.

Promień tego łuku jest większy lub mniejszy, stosownie do żądanej dokładności; w pospolicie używanych, promień ma jednę stopę długości. Odsyłając po szczegółowe opisanie kątomiaru i sposobów używania go, do dzieł o miernictwie traktujących, wspomniemy tu tylko, że najdogodniejsze kątomiary są te, które zamiast prostych celowników, opatrzone są lunetami. Luneta należąca do promienia nieruchomego, jest od niego równo-odległa, druga zaś przytwierdzona do promienia ruchomego, może się wraz z nim obracać, i o kilka stopni podnosić lub zniżać, aby przy poziomem ustawieniu narzędzia, można ją podnosić lub zniżyć, dla spostrzeżenia podniesionych, lub też zniżonych przedmiotów, co w działaniach na gruncie jest bardzo wygodne, bo wiele na tém zależy, aby kątomiar był ustawiony poziomo, a tém samém aby wszystkie kąty uważane, były na jednej płaszczyznie.

Chcąc tém narzędziem wyznaczyć kąt zawarty między dwoma przedmiotami, potrzeba je tak ustawić, aby jego środek odpowiadał wierzchołkowi wyznaczyć się mającego kąta; dalej wykierowawszy promień nieruchomy, do jednego przedmiotu, ruchomy póty obracać należy, póki przez celowniki do niego przytwierdzone, nie ujrzymy drugiego przedmiotu; a łuk kątomiaru zawarty między tak wykierowanemi promieniami, będzie miarą kąta szukanego.

66. *Zagadn.* I. Znaleźć szerokość rzeki.

Rozw. Niech będzie DX, fig. 19, szerokość rzeki, którą wymierzyć mamy. Wymierzywszy podstawę AB, równoległą od koryta rzeki, a tém samém prostopadłą do jej szerokości DX, i wyznaczywszy kąt ABX, zawarty między podstawą AB, a promieniem ocznym BX, poprowadzonym z punktu B do przedmiotu X, na drugim brzegu rzeki będącego, trójkąt ABX, będzie prostokątny przy A. Bok AB i kąt B jest wiadomy, wyrachujemy przeto bok AX; a odjąwszy AD odległość podstawy od brzegu rzeki, otrzymamy szukaną szerokość DX.

Niech będzie $AB=57{,}8$, $B=48^\circ 24'$, $AD=6{,}3$,

będzie $AX=AB\times \mathrm{sty}\ B$;

ztąd log AX=log AB+log sty B—10.

$$\begin{array}{r} \log 57{,}8 = 1{,}7619278, \\ \log \text{sty } 48^\circ 24' = 10{,}0516645, \\ \hline \log AX = 1{,}8135923 = \log 65{,}1, \end{array}$$

AX=65,1, DX=AX—AD=58,8.

67. *Zagad.* 2. Znaleźć wysokość AB przedmiotu, którego spodek jest przystępny.

Rozw. Wymierzywszy na gruncie podstawę BC, fig. 20, i kąt EDA zawarty między promieniem ocznym AD, i linią poziomą DE, równoległą od podstawy BC; w trójkącie prostokątnym ADE, mając wiadomy kąt D i bok DE, wyrachujemy bok AE, do którego dodawszy CD, otrzymamy wysokość żądaną.

Niech będzie CD=1,10, DE=61,28, D=41°31'25",

wypadnie:

$$\begin{array}{r} AE = 61{,}28 \times \text{sty } 41^\circ 31' 25'', \\ \log \text{sty } 41^\circ 31' 25'' = 9{,}9471690, \\ \log 61{,}28 = 1{,}7873188, \\ \hline \log AE \;\ldots\ldots\; 1{,}7344878; \end{array}$$

ztąd AE=54,261; AB=55,361.

Gdy spodek przedmiotu jest nieprzystępny, lub gdy *np.* AB, fig. 21, znaczy wysokość góry, spodek tej prostopadłej jest niewiadomy, a tém samém nie można wymierzyć odległości BC. Lecz i w tym przypadku można dać takie położenie płaszczyznie kątomiaru, iż będzie przechodzić przez prostopadłą AB. Nadto wyznaczywszy odległość AD, sposobem, który się w następującém zagadnieniu okaże, w trójkącie prostokątnym będzie wiadoma przeciwprostokątna AD i kąt D, trójkąt więc ten łatwo rozwiążemy:

68. *Zagad.* 3. Znaleźć odległość punktu P, fig. 22, niedostępnego, lecz widzialnego, od punktu dostępnego A.

Rozw. Wymierzywszy podstawę AB i kąty PAB, PBA, w trójkącie APB, wiadome będą trzy kąty i bok AB; szukaną więc odległość znajdziemy przez proporcyą:

$$\text{wst } P : \text{wst } B = p : b.$$

Weźmy AB=247,9, A=62°41', B=59°42', a tém samém P=57°37'. Ponieważ:

$$\text{wst } P : \text{wst } B = AB : AP,$$

więc $AP = \frac{AB \times wst B}{wst P}$,

log. AB	2,3935577,
log wst B	9,9362098,
dop log wst P	0,0734087,
log AP	2,4031762.

Odległość szukana AP=253,032.

69. *Zagad.* 4. Znaleźć odległość PQ, fig. 23, dwóch punktów widzialnych, lecz niedostępnych.

Rozw. Wymierzywszy podstawę AB i kąty BAP, BAQ, ABP i ABQ, i wyrachowawszy sposobem w poprzedzającém zagadnieniu podanym, boki AP, AQ, trójkątów ABP i ABQ; wyrachujemy kąt PAQ; bo gdy cztery punkta A, B, P, Q są na jednej płaszczyznie, PAQ = BAP — BAQ, nadto mając, w trójkącie PAQ wiadome boki AP, AQ, i kąt PAQ między niemi zawarty, wyrachujemy bok PQ.

Niech będzie: AB=345,29, BAP=69°36', BAQ=44°31', PAQ = 25°41', ABP=48°15', ABQ=102°14'.

Ztąd już bezpośrednio wniesiemy, że APB=62° 19', AQB=33° 15'; dalszy zaś rachunek, wykonywa się jak następuje:

1º. Rachunek AP:

wst APB : wst ABP = AB : AP,

log AB....2,5381840,

log wst ABP....9,8727722,

dop log wst APB....0,0527973,

log AP....2,4637535,

AP = 290,907.

2º. Rachunek AQ:

wst AQB : wst ABQ = AB : AQ,

log AB....2,5381840,

log wst ABQ....9,9900247,

dop log wst AQB....0,2609871,

log AQ....2,7891958,

AQ = 615,454.

3º. Rachunek kątów P i Q:

Niech będzie AQ = p, AP = q, APQ = P, AQP = Q.

Otrzymamy: $p+q=906,361$, $p-q=324,547$, $\frac{1}{2}(P+Q)=77°9'30''$.

Dalej ułożymy proporcyą:

$p+q : p-q = \text{sty}\,\frac{1}{2}(P+Q) : \text{sty}\,\frac{1}{2}(P-Q)$.

log sty $\frac{1}{2}$(P+Q)....10,6421427,

log $(p-q)$.... 2,5112776,

dop log $(p+q)$.... 7,0426988,

log sty $\frac{1}{2}$(P−Q)....10,1961191,

$\frac{1}{2}(P-Q)=57°31'6''$, a następnie:
$P=134°40'36''$, $Q=19°38'24''$.

4º. Rachunek PQ:

$\text{wst}\, Q : \text{wst}\, PAQ = q : PQ$,

log q....2,4637535,
log wst PAQ....9,6368859,
dop log wst Q....0,4735196,

log PQ....2,5741590.
PQ=375,110.

Inne rozwiązanie. Otrzymaliśmy odległości AP i AQ, przechodząc przez ich logarytmy; tu więc jest miejsce użyć kąta posiłkowego ψ. A w tenczas wyrachowawszy log AP i log AQ, szukamy kątów P i Q, jak następuje:

Rachunek kąta ψ:

$$\text{sty}\,\psi = \frac{AP}{AQ},$$

log AP....2,4637535,
dop log AQ....7,2108042.

log sty ψ....9,6745577,
$\psi=25°17'55''$,
$45°-\psi=19°42'5''$.

Rachunek kątów P i Q.

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}(P-Q)=\text{sty}\tfrac{1}{2}(P+Q)\times\text{sty}(45°-\psi).$$

$\log \operatorname{sty} \frac{1}{2}(P+Q) \ldots 10{,}6421427,$

$\log \operatorname{sty}(45^\circ-\psi) \ldots 9{,}5539790,$

$\log \operatorname{sty} \frac{1}{2}(P-Q) \ldots 10{,}1961217,$

$\frac{1}{2}(P-Q)=57^\circ 31' 6'',$

Dalej kończy się rachunek jak wyżej.

70. *Zagad.* 5. **Wyznaczyć na ziemi punkt C, fig. 15, którego odległości** a **i** b**, od punktów A i B są wiadome.**

Gdy odległości a i b są niewielkie, wtedy zakreśliwszy z punktów A i B, jak środków, promieniami tymże odległościom równemi, łuki, punkt ich przecięcia się będzie punktem szukanym. Lecz jeżeli te odległości są wielkie, potrzeba najprzód wymierzyć odległość AB, i z trzech boków trójkąta ABC, wyrachować kąt A, przez co wyznaczy się kierunek linii AC, na któréj wziąwszy $AC=b$, otrzymamy punkt szukany.

Niech będzie $a=9459{,}3$, $b=8032{,}29$, $c=8242{,}58$, będzie $2s=25734{,}18$, $s=12867{,}09$, $s-b=4834{,}80$, $s-c=4624{,}51$,

$$\operatorname{wst} \tfrac{1}{2} A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

log $(s-b)$ . . . 3,6843785,
log $(s-c)$ . . . 3,6650657,
dop log b . . . 6,0951606,
dop log c . . . 6,0839368,

2log wst$\frac{1}{2}$A. . . 19,5285416,
log wst $\frac{1}{2}$A. . . 9,7642708,
$\frac{1}{2}$ A=35°31'47"; A=71°3'34".

71. *Zagad.* 6. Mając dane na ziemi trzy punkta A, B, C, fig. 24, znaleźć punkt czwarty M, z któregoby odległości AB, AC były widziane pod kątami danemi.

Rozw. Podług wysłowienia kąty AMB i AMC są dane; zakreśliwszy więc na liniach AB i AC odcinki kół, w którychby się też kąty mieściły, łuki do nich należące przetną się w punktach A i M, i punkt M będzie punktem szukanym. Bo ze wszystkich punktów łuku AMDB, można widzieć odległość AB pod kątem równym danemu AMB, i ze wszystkich punktów łuku AMC, można widzieć AC, pod kątem równym kątowi AMC; punkt więc M, w którym się te łuki przecinają, jest taki, że z niego można razem widzieć odległości AB i AC, pod kątami AMB i AMC. Lecz że to wykreślenie jest niepodobne do wykonania na gruncie, wyznaczyć zatém należy rachunkiem kąt BAM i odległość AM.

Naznaczmy AB$=a$, AC$=b$, ABC$=$A, AMB$=\alpha$; AMC$=\beta$, MAB$=x$, ACM$=y$.

W czworokącie AMBC, $x+y=360^\circ-(A+\alpha+\beta)$; więc równanie to da summę kątów niewiadomych; potrzeba tylko znaleźć ich różnicę.

W trójkątach AMB, AMC, jest:

$$\left.\begin{array}{l}\text{wst}\,\alpha : \text{wst}\,x = a : \text{AM}\ldots.\\ \text{wst}\,\beta : \text{wst}\,y = b : \text{AM}\ldots.\end{array}\right\}(1);$$

ztąd

$$1^{\underline{o}},\ \text{AM}=\frac{a\,\text{wst}\,x}{\text{wst}\,\alpha};\quad 2^{\underline{o}},\ \text{AM}=\frac{b\,\text{wst}\,y}{\text{wst}\,\beta};$$

a zatém

$$\frac{a\,\text{wst}\,x}{\text{wst}\,\alpha}=\frac{b\,\text{wst}\,y}{\text{wst}\,\beta}\ \text{czyli}\ \frac{b\,\text{wst}\,\alpha}{a\,\text{wst}\,\beta}=\frac{\text{wst}\,x}{\text{wst}\,y}.$$

Naznaczywszy $\frac{a\,\text{wst}\,\beta}{\text{wst}\,\alpha}=a'$,

będzie $\frac{b}{a'}=\frac{\text{wst}\,x}{\text{wst}\,y}$,

a tém samém:

$$\frac{b+a'}{b-a'}=\frac{\text{wst}\,x+\text{wst}\,y}{\text{wst}\,x-\text{wst}\,y},$$

czyli

$$\frac{b+a'}{b-a'}=\frac{\text{sty}\,\frac{1}{2}(x+y)}{\text{sty}\,\frac{1}{2}(x-y)}.$$

Ponieważ summa $x+y$ jest wiadoma, wyrachujemy zatém za pomocą tego równania, różnicę $x-y$, i znajdziemy kąty x i y; a że kąt BAM$=180^{\circ}-(\alpha+x)$, więc odległość AM otrzymamy z którejkolwiek z proporcyj (I).

72. *Zagad.* 7. Przez punkt dany na ziemi poprowadzić linią równo-odległą od linii niedostępnej.

Niech będzie CD fig. 25, linia niedostępna, A punkt dany, przez który ma przechodzić równo-odległa AK. Rozwiązanie danego zagadnienia przywodzi się do wykreślenia kąta DAK, równego CAD; lecz że ten ostatni jest niewiadomy, wyznaczyć go zatém wypada.

Pierwsze rozwiązanie. Wyznaczywszy za pomocą kątomiaru kąt CAD, pod którym daje się widzieć linia niedostępna CD; obiera się punkt B w pewnej odległości od A, z któregoby można widzieć linią CD, pod kątem równym kątowi CAD. Natenczas cztery punkta A, B, C, D, leżące na jednej płaszczyznie będą się znajdowały na okręgu jednego koła, a tém samém będzie CBA=CDA; wymierzywszy zatém kąt CBA, i wykreśliwszy DAK=CBA, rozwiążemy zagadnienie

Drugie rozwiązanie. Kiedy rozwiązanie poprzedzające nie ma miejsca, co się zdarza gdy punkt A jest niedogodny, obrać należy podstawę AB, wymierzyć przy A kąty CAB, DAB, a przy B kąty DBA, CBA. Tym sposobem w trójkątach BCA, ADB, będzie wiadomy bok AB i dwa kąty jemu przyległe; te więc rozwiązawszy, otrzymamy boki AC i AD; nakoniec przez rozwiązanie trójkąta ACD, znajdziemy ACD, CDA i bok CD, a tém samem kierunek linii AK, równoodległej od CD.

ROZDZIAŁ III.

ZWIĄZEK MIĘDZY KĄTAMI I BOKAMI TRÓJKĄTA KULISTEGO.

73. Formuła zasadnicza. Części trójkąta kulistego, wykreślonego na danej kuli, są wiadome, gdy jest wiadoma liczba stopni, którą każda z nich zamyka. Rozwiązanie więc zadań o trójkątach kulistych zależy od stosunków między temiż liczbami stopni zachodzących, to jest: między liczbami trygonometrycznemi, odpowiadającemi wstawom, dostawom i t. d. Podamy zatém naprzód formułę okazującą związek między którymkolwiek kątem, a trzema bokami trójkąta kulistego, a potém okażemy, jak się z niej wyprowadza rozwiązanie trójkąta kulistego, w każdym przypadku.

Kąty oznaczać będziemy zawsze przez A, B, C, a boki im przeciwne przez a, b, c.

74. Niech będzie O fig. 26, środek kuli, na któréj znajduje się trojkąt ABC; poprowadziwszy promienie OA, OB, OC, wyprowadźmy do OA prostopadłe AD i AE, jednę na płaszczyznie OAB, drugą na płaszczyznie OAC, i dajmy że przecinają w punktach D i E, przedłużone promienie OB i OC. Kąt DAE, jest równy kątowi A trójkąta kulistego, wziąwszy zatém promień OA za jedność, będzie: (4).

$AD = \text{sty}\, c$, $OD = \text{siec}\, c$, $AE = \text{sty}\, b$.
$OE = \text{siecz}\, b$.

W trójkątach prostokreślnych DAE i DOE jest: (62),

$$\overline{AD}^2+\overline{AE}^2-2AD\times AE.\text{dost}A=\overline{DE}^2,$$
$$\overline{OD}^2+\overline{OE}^2-2OD\times OE.\text{dost}\,a=\overline{DE}^2.$$

Odjąwszy równanie pierwsze od drugiego, wypadnie:

$$\overline{OD}^2-\overline{AD}^2+\overline{OE}^2-\overline{AE}^2+2AD\times AE.\text{dost}A-2OD\times OE\ \text{dost}\,a=0,$$

aże $\overline{OD}^2-\overline{AD}^2=\overline{OE}^2-\overline{AE}^2=\overline{OA}^2=1$,

więc $2+2AD\times AE.\text{dost}A-2OD\times OE.\text{dost}\,a=0$,

czyli $1+AD\times AE.\text{dost}A-OD\times OE.\text{dost}\,a=0$.

Zamiast linij wstawiwszy ich nazwiska trygonometryczne, będzie:

$1 - \text{siecz}\, b.\ \text{siecz}\, c.\ \text{dost}\, a$
$+ \text{sty}\, b.\ \text{stycz}\, c.\ \text{dost}\, A = 0.$

Lecz $\text{siecz}\, b = \frac{1}{\text{dost}\, b}$, $\text{siecz}\, c = \frac{1}{\text{dost}\, c}$,

$\text{stycz}\, b = \frac{\text{wst}\, b}{\text{dost}\, b}$;

wstawiwszy zatém te ważności, wypadnie:

$$1 - \frac{\text{dost}\, a}{\text{dost}\, b.\text{dost}\, c} + \frac{\text{wst}\, b.\text{wst}\, c.\ \text{dost} A}{\text{dost}\, b.\text{dost}\, c} = o,$$

a ztąd: $\text{dost}\, a = \text{dost}\, b.\text{dost}\, c + \text{wst}\, b.\text{wst}\, c.$ $\text{dost}\, A$ (1).

Taka jest zasadnicza formuła trygonometryi kulistej.

Lubo na figurze boki b i c są mniejsze od 90°, łatwo jednak spostrzedz że formuła (1) jest ogólna. Iakoż przypuściwszy, że jeden z tych boków *np.* b czyli AC fig. 27, jest większy od 90°; dokończmy pół-okręgów CAC' i CBC', i wykreślmy trójkąt ABC', którego boki a' i b', czyli BC' i AC' są spełnieniem boków a i b, a kąt BAC' spełnieniem kąta A. Ponieważ boki

b' i c są mniejsze od 90°; więc formuła (1) stosuje się do trójkąta ABC', i daje:

$$\text{dost}\, a' = \text{dost}\, b'.\text{dost}\, c + \text{wst}\, b'.\text{wst}\, c.\ \text{dost BAC}'.$$

Aże $a' = 180° - a, b' = 180° - b,$

$$\text{BAC}' = 180° - \text{A}:$$

te więc ważności wstawiwszy i odmieniwszy znaki z obu stron równania, otrzymamy formułę (1); formuła zatém ta stosuje się i na ten przypadek gdy $b > 90°$.

Dajmy teraz że boki b i c są większe od 90°, fig. 28. Boki AB i AC przedłużmy aż do wspólnego przecięcia się w punkcie A', i wykreślmy trójkąt BCA', w którym kąt A' jest równy kątowi A, a boki b' i c' równe spełnieniom boków b i c. Formuła (1) musi się stosować i do tego trójkąta, wstawiając w nię $180° - b$ i $180° - c$ za b i c, bo to wstawienie w niczém jej nie zmieni.

Wreszcie możnaby jeszcze sprawdzić tę formułę na przypadek gdy razem $b = 90°$ i $c = 90°$. Lecz że się stosuje do ważności tak blizkich 90°

jak tylko żądamy, więc stosować się musi i do tego przypadku.

75. Formułę (1) zastosowawszy do każdego boku trójkąta, otzymamy trzy równania, za pomocą których można będzie zawsze wyznaczyć trzy którekolwiek jego części, gdy trzy inne będą dane; lecz w zastosowaniu trzeba mieć osobno wyrażone rózne związki zachodzące między czterema któremikolwiek częściami trójkąta, w czém cztery tylko mogą bydź różne kombinacye, a te następnie wskażemy.

76. 1º. *Związek między trzema bokami i kątem.* Związek ten wskazuje równanie (1), które przez zmianę głosek daje trzy następujące:

$$\text{dost}\, a = \text{dost}\, b.\ \text{dost}\, c + \text{wst}\, b.\ \text{wst}\, c.\ \text{dost}\, \text{A} \ldots (1),$$

$$\text{dost}\, b = \text{dost}\, a.\ \text{dost}\, c + \text{wst}\, a.\ \text{wst}\, c.\ \text{dost}\, \text{B} \ldots (2),$$

$$\text{dost}\, c = \text{dost}\, a.\ \text{dost}\, b + \text{wst}\, a.\ \text{wst}\, b.\ \text{dost}\, \text{C} \ldots (3).$$

77. *Związek między dwoma bokami i dwoma kątami im przeciwnemi.* Aby otrzymać związek między bokami *a* i *b*, i kątami im przeciwnemi A i B,

zniesiemy c w równaniu (1) i (2), co się uskuteczni, biorąc z tychże równań ważność na wst c i dost c, i wstawiając je w równanie wst^2c+dost^2c=1; sposób przecież następujący jest daleko prostszy:

Z równania (1) wypada:

$$\text{dost A} = \frac{\text{dost } a - \text{dost } b.\ \text{dost } c}{\text{wst } b.\ \text{wst } c}:$$

ztąd $\text{wst}^2\text{A} = 1 - \text{dost}^2\text{A} =$

$$1 - \frac{(\text{dost}a - \text{dost}b.\text{dost}c)^2}{\text{wst}^2 b.\ \text{wst}^2 c}$$

$$= \frac{(1 - \text{dost}^2 b)(1 - \text{dost}^2 c)}{\text{wst}^2 b.\text{wst}^2 c}$$

$$- \frac{(\text{dost}a - \text{dost}b.\text{dost}c)^2}{\text{wst}^2 b.\text{wst}^2 c},$$

czyli

$$\text{wst}^2\text{A} = \frac{1 - \text{dost}^2 a - \text{dost}^2 b - \text{dost}^2 c}{\text{wst}^2 b.\text{wst}^2 c}$$

$$+ \frac{2\text{dost}a.\ \text{dost}b.\text{dost } c}{\text{wst}^2 b.\text{wst}^2 c},$$

$$\text{więc } \frac{\text{wst A}}{\text{wst } a}$$

$$= \frac{1}{\text{wst}a.\text{wst}b.\text{wst}c} \sqrt{(\text{I} - \text{dost}^2 x - \text{dost}^2 b}$$

$$\overline{- \text{dost}^2 c + 2\text{dost}a.\text{dost}b.\text{dost}c)}.$$

Tu niemasz już żadnej niepewności względem znaku przed pierwiastkiem, zważając iż gdy kąty i boki są mniejsze od 180° ich wstawy są dodatne.

Ponieważ druga strona tego równania nie zmieniają się, zamieniając A i a, na B i b i odwrotnie, lub na C i c i odwrotnie, wypada ztąd, że:

$$\frac{\text{wtt}A}{\text{wst}a}=\frac{\text{wst}B}{\text{wst}b}=\frac{\text{wst}C}{\text{wst}\,c} \dots (4),$$

a zatém w trójkącie kulistym wstawy kątów są proporcyonalne do wstaw boków im przeciwnych.

78. 3º. *Związek między dwoma bokami, kątem między niemi zawartym i kątem jednemu z nich przeciwnym.* Uwazajmy *np.* związek między bokami a i b, kątem C między niemi zawartym i kątem A, jednemu z tychże boków przeciwnym.

Ważność dost c wziętą z równania (3) wstawmy w równanie (1), będzie:

$$\begin{aligned}\text{dost}\,a=&\text{dost}\,a.\,\text{dost}^2\,b\\ &+\text{dost}\,b.\,\text{wst}\,a.\,\text{wst}\,b.\,\text{dost}\,C\\ &+\text{wst}\,b.\,\text{wst}\,c.\,\text{dost}\,A.\end{aligned}$$

Przeniosłszy dost a. dost$^2 b$ na pierwszą stronę, i uważając że:

$$\text{dost}\,a - \text{dost}\,a.\text{dost}^2 b = \text{dost}\,a.\text{wst}^2 b,$$

a na koniec podzieliwszy ztąd wynikłe równanie przez wst b. wst a, otrzymamy:

$$\frac{\text{dost}\,a.\text{wst}\,b}{\text{wst}\,a} = \text{dost}\,b.\ \text{dost}\,C + \frac{\text{wst}\,c.\ \text{dost}\,A}{\text{wst}\,a};$$

lecz na mocy równań (4)

$$\frac{\text{wst}\,c}{\text{wst}\,a} = \frac{\text{wst}\,C}{\text{wst}\,A'},\ \text{więc:}$$

$$\text{dot}\,a.\ \text{wst}\,b = \text{dost}\,b.\ \text{dost}\,C + \text{wst}\,C.\ \text{dot}\,A.\ (5);$$

w równaniu tém przemieniając głoski otrzymamy sześć równań następujących:

$$\text{dot}\,a.\ \text{wst}\,b = \text{dost}\,b.\ \text{dost}\,C + \text{wst}\,C.\ \text{dot}\,A.\dots\ (5),$$

$$\text{dot}\,b.\ \text{wst}\,a = \text{dost}\,a.\ \text{dost}\,C + \text{wst}\,C.\ \text{dot}\,B.\dots\ (6),$$

$$\text{dot}\,a.\ \text{wst}\,c = \text{dost}\,c.\ \text{dost}\,B + \text{wst}\,B.\ \text{dot}\,A.\dots\ (7),$$

$$\text{dot}\,c.\ \text{wst}\,a = \text{dost}\,a.\ \text{dost}\,B + \text{wst}\,B.\ \text{dot}\,C.\dots\ (8),$$

$$\text{dot}\, b.\, \text{wst}\, c = \text{dost}\, c.\, \text{dost}\, A + \text{wst}\, A.\, \text{dot}\, B \ldots\ (9),$$

$$\text{dot}\, c.\, \text{wst}\, b = \text{dost}\, b.\, \text{dost}\, A + \text{wst}\, A.\, \text{dot}\, C \ldots\ (10).$$

79. 4[a]. *Związek między jednym bokiem a trzema kątami.* Z równań (1), (2), (3) wyrugujmy b i c; w tym celu wstawmy w równanie (1) ważność dost c wziętą z równania (3), będzie jak wyżej:

$$\frac{\text{dost}\, a.\, \text{wst}\, b}{\text{wst}\, a} = \text{dost} b.\text{dost} C + \frac{\text{wst} c.\text{dost} A}{\text{wst}\, a};$$

równanie to na mocy równań:

$$\frac{\text{wst}\, b}{\text{wst}\, a} = \frac{\text{wst}\, B}{\text{wst}\, A} \text{ i } \frac{\text{wst}\, c}{\text{wst}\, a} = \frac{\text{wst}\, C}{\text{wst}\, A},$$

zamieni się w następujące:

$$\text{dost}\, a.\, \text{wst}\, B = \text{dost}\, b.\, \text{wst} A.\, \text{dost} C + \text{dost}\, A.\, \text{wst}\, C.$$

Wykonawszy tenże sam rachunek na równaniu (2), albo, co jest lepiej, zamieniwszy w ostatniém a i A na b i B i odwrotnie, otrzymamy:

$$\text{dost}\, b.\, \text{wst}\, A = \text{dost}\, a.\, \text{wst} B.\, \text{dost}\, C + \text{dost}\, B.\, \text{wst}\, C.$$

Pozostaje więc tylko znieść dost b w dwóch ostatnich równaniach, co uskuteczniwszy, otrzymamy związek szukany między A, B, C i a, który zastosowawszy następnie do każdego z trzech kątów trójkąta, dojdziemy do trzech następujących równań:

$$\text{dost } A = -\text{dost } B.\ \text{dost } C + \text{wst } B.\ \text{wst } C.\ \text{dost } a \ldots \quad (11),$$

$$\text{dost } B = -\text{dost } A.\ \text{dost } C + \text{wst } A.\ \text{wst } C.\ \text{dost } b \ldots \quad (12),$$

$$\text{dost } C = -\text{dost } A.\ \text{dost } B + \text{wst } A.\ \text{wst } B.\ \text{dost } c \ldots \quad (13).$$

80. Podobieństwo tych równań z formułą zasadniczą (1), prowadzi do ważnego wniosku. I tak wystawmy sobie trójkąt kulisty A'B'C', któregoby boki a', b', c', były spełnieniem kątów A, B, C; na mocy formuły (1), będzie:

$$\text{dost } a' = \text{dost } b'.\ \text{dost } c' + \text{wst } b'.\ \text{wst } c'.\ \text{dost } A';$$

a że $\text{wst } a' = \text{wst } A$, $\text{dost } a' = -\text{dost } A$, $\text{wst } b' = \text{wst } B$, $\text{wst } c' = \text{wst } C$;

więc $-\text{dost } A = \text{dost } B.\ \text{dost } C + \text{wst } B.\ \text{wst } C.\ \text{dost } A'$.

Wyprowadzilibyśmy ztąd na dost A' ważność równą, lecz z przeciwnym znakiem, tej, którą daje równanie (11) na dost$a$; a ztąd wypada, że $a=180°-A'$, $b=180°-B'$, $c=180°-C'$; mając zatém dany trójkąt kulisty, gdy wykreślimy na tejże samej kuli drugi, któregoby boki były spełnieniem kątów pierwszego; odwrotnie boki pierwszego będą spełnieniem kątów drugiego trójkąta. Z tej przyczyny takie dwa trójkąty nazywają się spełniające, i wiadomo z geometryi, że każdy z nich może bydź wykreślony, biorąc za bieguny jednego trzy wierzchołki drugiego, i dla tego to trójkąty te mają nazwisko trójkątów polarnych.

81. *Analogie Nepera.* Okażemy teraz proporcye, znane pod nazwiskiem *Analogij Nepera*, używane dla ułatwienia rozwiązania trójkątów kulistych, w niektórych przypadkach.

Z równań (1) i (2) wypada:

$$\text{dost}a-\text{dost}b.\text{dost}c=\text{wst}b.\text{wst}c.\text{dost}A,$$
$$\text{dost}b-\text{dost}a.\text{dost}c=\text{wst}a.\text{wst}c.\text{dost}B.$$

Podzieliwszy drugie z tych równań przez pierwsze, i mając wzgląd na to, że $\frac{\text{wst}\,a}{\text{wst}\,b}=\frac{\text{wst}\,A}{\text{wst}\,B}$, wypadnie:

$$\frac{\text{dost}b-\text{dost}a.\ \text{dost}c}{\text{dost}a-\text{dost}b.\ \text{dost}c}=\frac{\text{wst}A.\ \text{dost}B}{\text{wst}B.\ \text{dost}A}.$$

Z równania tego ułożywszy proporcyą i porównawszy różnicę wyrazów każdego stosunku z ich summą, będzie:

$$\frac{\text{dost}b-\text{dost}a.\text{dost}c-\text{dost}a+\text{dost}b.\text{dost}c}{\text{dost}b-\text{dost}a.\text{dost}c+\text{dost}a-\text{dost}b.\text{dost}c}$$

$$=\frac{\text{wst A. dost B}-\text{wst B. dost A}}{\text{wst A. dost B}+\text{wst B.dost A}}.$$

czyli

$$\frac{\text{dost}\ b-\text{dost}\ a}{\text{dost}\ b+\text{dost}\ a}\times\frac{1+\text{dost}\ c}{1-\text{dost}\ c}$$

$$=\frac{\text{wst (A}-\text{B)}}{\text{wst (A}+\text{B)}}.$$

A że na mocy formuł (29), (37), (40),

$$\frac{\text{dost}\ b-\text{dost}\ a}{\text{dost}\ b+\text{dost}\ a}=\text{sty}\tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{sty}\tfrac{1}{2}(a+b)$$

$$\frac{1+\text{dost}\ c}{1-\text{dost}\ c}=\frac{1}{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}\text{C}}.$$

$$\text{wst(A}+\text{B)}=2\text{wst}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})\ \text{dost}\tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B}),$$

$$\text{wst(A}-\text{B)}=2\text{wst}\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})\ \text{dost}\tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B}),$$

wstawiwszy zatem te uważności, otrzymamy:

$$\text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a-b)\frac{1}{\text{sty}^2\tfrac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\text{wst}\ \tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{dost}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{dost}\ \tfrac{1}{2}(A+B)},$$

czyli:

$$\text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a+b)\ \text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a-b)=$$

$$\text{sty}^2\tfrac{1}{2}c\,\frac{\text{wst}\tfrac{1}{2}(A-B)\ \text{dost}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{dost}\ \tfrac{1}{2}(A+B)}\ (\alpha).$$

Z drugiéj strony, z równania:

$$\frac{\text{wst}\ a}{\text{wst}\ b}=\frac{\text{wst}\ A}{\text{wst}\ B},\ \text{wypada że:}$$

$$\frac{\text{wst}\ a+\text{wst}\ b}{\text{wst}\ a-\text{wst}\ b}=\frac{\text{wst}\ A+\text{wst}\ B}{\text{wst}\ A-\text{wst}\ B}.$$

czyli (37):

$$\frac{\text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a+b)}{\text{sty}\ \tfrac{1}{2}(a-b)}$$

$$=\frac{\text{wst}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{dost}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{dost}\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ \text{wst}\ \tfrac{1}{2}(A-B)}.$$

Rozmnożywszy więc najprzód równanie (α) przez to ostatnie, a potém podzieliwszy jedno przez drugie, otrzymamy równania zamykaiące tylko kwadraty; z obu stron których wyciągnąwszy pierwiastki kwadratowe, mając przy-tem wzgląd na to, że na mocy równania (α) sty $\frac{1}{2}(a+b)$ i dost $\frac{1}{2}$ (A+B) powinny mieć znak jednakowy, otrzymamy:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a+b)=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c.\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}(A+B)}\ (14).$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(a-b)=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}c.\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(A-B)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(A+B)}\ (15).$$

82. Formuły te można zastosować do trojkąta polarnego, bo wstawiwszy za a, b, c, A i B, 180°—A, 180°—B, 180°—C, $180^\circ-a$, $180^\circ-b$, wypadnie:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{dot}\,\tfrac{1}{2}C.\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}(a+b)}\ldots(16).$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{dot}\,\tfrac{1}{2}C.\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+b)}\ldots(17).$$

Cztery powyższe formuły (14), (15), (16), (17), są to w postaci równań wyrażone, proporcye albo analogie Nepera. Dwie pierwsze biorą się do rozwiązania trojkąta, gdy dany jest bok i dwa kąty iemu przyległe; a dwie drugie gdy dane są dwa boki i kąt między niemi zawarty.

88. *Związek między bokami i kątami trojkąta kulistego prostokątnego.* Aby otrzymać formuły, któreby służyć mogły, do rozwiązania trojkąta prostokątnego, dosyć uczynić kąt $A=90°$ w równaniach poprzednio wyprowadzonych, do których tenże kąt wchodzi. Tak postąpiwszy, otrzymamy:

$$\text{dost}\,a=\text{dost}\,b.\,\text{dost}\,c,\ (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{wst}\,b=\text{wst}\,a.\,\text{wst}\,B,\\ \text{wst}\,c=\text{wst}\,a.\,\text{wst}\,C,\end{array}\right\}\ldots.(b).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sty}\,b=\text{sty}\,a.\,\text{dost}\,C,\\ \text{sty}\,c=\text{sty}\,a.\,\text{dost}\,B,\end{array}\right\}\ldots.(c).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sty}\,b=\text{wst}\,c.\,\text{sty}\,B,\\ \text{sty}\,c=\text{wst}\,b.\,\text{sty}\,C,\end{array}\right\}\ldots.(d).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{dost}\,B=\text{wst}\,C.\,\text{dost}\,b,\\ \text{dost}\,C=\text{wst}\,B.\,\text{dost}\,c,\end{array}\right\}\ldots(e).$$

$$\text{dost}\,a=\text{dot}\,B.\,\text{dot}\,C\ldots(f)$$

W ogólności sześć formuł, za-równo dogodnych do rachunku za pomocą logarytmów. Pierwsza z nich daje związek między przeciwprostokątną i dwoma bokami przyległemi kątowi prostemu; druga między przeciwprostokątną, bokiem i kątem jemu przeciwnym; trzecia między przeciwprostokątną, bokiem i kątem przyległym; czwarta między dwoma bokami i kątem jednemu z nich przeciwnym; piąta między bokiem i dwoma kątami ostrémi lub roztwartémi; nakoniec szósta między przeciwprostokątną i dwoma ostremi lub roztwartémi. A tak maiąc dane dwie z pięciu części, znajdziemi za pomocą jednéj z tych formuł, każdą z części szukanych.

34. Przytoczymy tu niektóre własności trójkątów kulistych prostokątnych, na które zawsze wzgląd mieć nalaży:

1° Na mocy formuły (*a*), dost *a*, powinna mieć ten sam znak co iloczyn dost *b*. dost *c*; co aby miało miejsce, albo wszystkie trzy dostawy powinny być dodatne, albo też tylko jedna z nich. W trojkącie więc kulistym prostokątnym, albo każdy z trzech boków jest mniejszy od 90°, albo, gdy dwa są większe od 90°, trzeci jest mniejszy.

2° Fołmuły (*d*) pokazują, że sty *b* ma taki znak, jak sty B, a sty *c* taki, iak sty C; więc każdy z boków przyległych kątowi prostemu, jest tego samego gatunku co kąt mu przeciwny; to jest że albo obadwa są mniejsze od 90°, albo też większe.

Rozwiązanie trojkątów kulistych prostokątnych.

85. Trojkąt kulisty może mieć dwa, a nawet trzy kąty proste; w ostatnim przypadku każdy z jego boków jest $\frac{1}{4}$ okręgu, w pierwszym każdy z boków przeciwnych dwóm kątom prostym, jest $\frac{1}{4}$ okręgu, kąt zaś trzeci, jako mający za miarę trzeci bok trojkąta, zamyka tę samę liczbę stopni, co tenże bok. Ponieważ w tych dwóch przypadkach zagadnienie nie ma miejsca, mówić więc tylko będziemi o trójkącie, zawierającym jeden kąt prosty; do rozwiązania zaś takiego trojkąta dosyć mieć dane dwie z pięciu części, w czem sześć przypadków zachodzić może.

86. *Przypadek* 1. Maiąc daną przeciwprostokątną a i bok b wyznaczyć bok c i kąty B i C.

Za pomocą formuł (a), (b), (c) znajdziemy:

$$\text{dost } c = \frac{\text{dost } a}{\text{dost } b}, \quad \text{wst B} = \frac{\text{wst } b}{\text{wst } a},$$

$$\text{dost C} = \frac{\text{sty } b}{\text{sty } a}.$$

Ponieważ tu łuki i kąty nie mogą być większe od 180°, a w téj granicy jeden tylko łuk odpowiada danéj dostawie, więc boki i kąt C, są wyznaczone bez żadnéj wątpliwości. Co do kąta B, ten jest wyznaczony przez swoję wstawę, zdaje się przeto, że można go uważać za ostry lub roztwarty, lecz, podług dopiero przytoczonych uwag, powinien być tego samego gatunku co i bok dany b.

87. *Przypadek* 2. Mając dane dwa boki b i c, kątowi prostemu przyległe, znaleźć przeciwprostokątną a, i kąty B i C.

Z równań (a) i (d) wypada:

$$\text{dost } a = \text{dost } b.\ \text{dost } c; \quad \text{sty B} = \frac{\text{wst } b}{\text{sty } c};$$

$$\text{sty C} = \frac{\text{sty } c}{\text{wst } b},$$

w tym przypadku, jak łatwo widzieć, żadna wątpliwość nie zachodzi.

88. *Przypadek* 3. Mając daną przeciwprostokątną a i kąt B, znaleźć boki b, c, i kąt C.

Z równań (b), (c) i (f) wypada:

$$\text{wst}\, b = \text{wst}\, a . \text{wst B}; \text{sty}\, c = \text{sty}\, a \text{ dost B};$$
$$\text{dot C} = \text{dost}\, a . \text{sty B}.$$

c i C, będą wyznaczone bez żadnéj wątpliwości, a bok b powinien być tego samego gatunku co kąt B.

89. *Przypadek* 4. Mając dany bok b i kąt jemu przeciwny B, wyznaczyć boki a, c, i kąt C.

Równania (b), (d) i (c) dają:

$$\text{wst}\, a = \frac{\text{wst}\, b}{\text{wst B}}; \text{ wst}\, c = \frac{\text{sty}\, b}{\text{sty B}};$$
$$\text{wst C} = \frac{\text{dost B}}{\text{dost}\, b}.$$

Tu zachodzi niepewność z przyczyny wstaw i łatwo przewidzieć, że rzeczywiście zachodzić musi. Bo jeżeli trojkąt BAC fig. 29 prostokątny przy A, zadosyć czyni zagadnieniu, przedłużywszy boki AB i BC do przecięcia się w D i wziąwszy DA′=AB, i DC′

BC, trojkąty BAC i DA'C' będą złożone z części różnych; więc kąt A' jest prosty i C'A'=CA=b. Trojkąt zatem BA'C' jest prostokątny i zamyka także dwie części dane B i b. Można przeto wziąć od upodobania $a<$lub$>90°$; lecz skoro ten wybór nastąpi, gatunek boku c, dany będzie przez równanie dost a =dost b. dost c; który razem wskaże gatunek kąta C. Gdy b=B w tenczas jeden tylko jest trojkąt o dwóch kątach prostych; gdy zaś wst $b>$ wst B, w tenczas nie ma żadnego trójkąta.

90. *Przypadek* 5. Maiąc dany bok b przyległy kątowi prostemu, i kąt jemu przyległy C, znaleźć boki a, c, i kąt B.

Z równań (c), (d) i (e) wypada:

$$\text{sty } a = \frac{\text{sty } b}{\text{dost C}};\ \text{sty } c = \text{wst } b.\ \text{sty C};$$

$$\text{dost B} = \text{dost } b.\ \text{wst C}.$$

91. *Przypadek* 6. Mając dane kąty B i C, wyznaczyć boki a, b, c.

Równania (e) i (f) dają:

$$\text{dost } a = \text{dot B. dot C};$$

$$\text{dost } b = \frac{\text{dost B}}{\text{wst C}};\ \text{dost } c = \frac{\text{dost C}}{\text{wst B}}.$$

92. *Uwaga.* W wielu przypadkach rozwiązanie jakiegokolwiek trójkąta kulistego, przywodzi się do rozwiązania trójkąta prostokątnego.

I tak, 1º. Gdy w trójkącie kulistym między danemi trzema częściami jeden bok ma 90°, kąt odpowiadający temu bokowi w trójkącie polarnym, będzie prosty. Nadto ponieważ wiadome będą dwie z pięciu innych części tego trójkąta, można go przeto będzie rozwiązać podług tego, co się wyżéj powiedziało, a z rozwiązania jego znajdziemy rozwiązanie pierwszego trójkąta.

2º. Gdy trójkąt dany jest równoramienny, dwa boki równe uważają się tylko za jednę część, kąty im przeciwne także za jednę i wtenczas dwie części wystarczają do rozwiązania trójkąta. Lecz z wierzchołka trójkąta spuściwszy łuk koła wielkiego do środka podstawy, ten podzieli trójkąt dany na dwa równe trójkąty prostokątne, z których w każdym, oprócz kąta prostego, wiadome będą dwie części. Rozwiązanie przeto trójkąta równoramiennego przywodzi się do rozwiązania trójkąta prostokątnego.

3º. Niech będzie trójkąt kulisty ABC fig. 30. w którym $a+b=180°$. Przedłużywszy boki a i c do wspólnego przecięcia się w D, będzie także $a+CD=180°$, więc $CD=b$. A że każda część wiadoma trójkąta ABC, da poznać część ACD i odwrotnie, więc rozwiązanie trójkąta, w którym summa dwóch boków jest 180°, przywodzi się tylko do rozwiązania trójkąta równoramiennego, a tem samem do rozwiązania trójkąta prostokątnego.

4º. Toż samo powiedzieć można o trójkącie kulistym, w którym się dwa kąty nawzajem spełniają; bo nie może być $a+b=180°$, aby zarazem nie było $A+B=180°$, i odwrotnie. Jakoż w trójkącie równoramiennym ACD fig. 30 kąt $CAD=D=B$; a że $CAD+CAB=180°$, więc i w trójkącie ACB, musi być $A+B=180°$.

Rozwiązywanie trójkątów kulistych ostro lub roztwartokątnych.

93. *Przypadek* 1. Mając dane trzy boki a, b, c, wyznaczyć kąty A, B, C.

Z równania (1) wypada:

$$\text{dost } A = \frac{\text{dost } a - \text{dost } b . \text{ dost } c}{\text{wst } b . \text{ wst } c .}$$

Lecz dogodniejsze wyrażenie do rachunku za pomocą logarytmów otrzymamy, szukaiąc wst $\frac{1}{2}$ A, dost $\frac{1}{2}$ A lub sty $\frac{1}{2}$ A. Weźmy przeto formułę $2 \text{ wst}^2 \frac{1}{2} A = 1 - \text{dost } A$, i wstawmy w nię ważność dost A, będzie:

$$2 \text{ wst}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \frac{\text{dost } a - \text{dost } b . \text{ dost } c}{\text{wst } b . \text{ wst } c}$$

$$= \frac{\text{dost } b . \text{ dost } c + \text{wst } b . \text{ wst } c - \text{dost } a}{\text{wst } b . \text{ wst } c .}$$

czyli:

$$2 \text{ wst}^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\text{dost } (b-c) - \text{dost } a}{\text{wst } b . \text{ wst } c .}$$

Wformule:
$\text{dost} q - \text{dost} p = 2 \text{wst} \frac{1}{2}(p+q) \text{wst} \frac{1}{2}(p-q)$ uczyniwszy $p=a$, $q=b-c$, wypadnie:

$$\text{dost } (b-c) - \text{dost } a$$
$$= 2 \text{wst } \tfrac{1}{2} (a+b-c) \text{ wst } \tfrac{1}{2} (a+c-b),$$

więc:

$$\text{wst} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\text{wst } \frac{1}{2}(a+b-c) \text{ wst} \frac{1}{2} (a+c-b)}{\text{wst } b . \text{ wst } c .}}$$

Dla skrócenia naznaczmy $a+b+c = 2p$, a ztąd $a+b-c = 2(p-c)$; $a+c-b$

$=2(p-b)$; przez co formuła poprzedzająca zamieni się w następuiącą:

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{wst}(p-b)\,\text{wst}(p-c)}{\text{wst}\,b.\,\text{wst}\,c}}.$$

Podobnie działając znajdziemy:

$$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{wst}\,p.\,\text{wst}\,(p-a)}{\text{wst}\,b.\,\text{wst}\,c}}$$

a ztąd

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\text{wst}\,(p-b)\,\text{wst}\,(p-c)}{\text{wst}\,p.\,\text{wst}\,(p-a)}}.$$

94. *Przypadek* 2. Mając dane dwa boki a i b, i kąt A jednemu z nich przeciwny, znaleźć bok c, tudzież kąty B i C.

Kąt B, przeciwny bokowi b, otrzymamy z proporcyi:

$$\text{wst}\,a : \text{wst}\,b = \text{wst}\,A : \text{wst}\,B;$$

ztąd $\text{wst}\,B = \dfrac{\text{wst}\,A.\,\text{wst}\,B}{\text{wst}\,a}$.

Bok zaś c i kąt C, najlepiej będzie wyznaczyć za pomocą analogij Nepera z których wypada:

$$\text{sty}\tfrac{1}{2}c=\text{sty}\tfrac{1}{2}(a-b).\frac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A+B)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}(A-B)},$$

$$\text{dot}\tfrac{1}{2}C=\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B).\frac{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,(a+b)}{\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,(a-b)}.$$

Ponieważ kąt B jest wyznaczony przez wstawę, więc może być ostry lub roztwarty; jednakże pewnym ważnościom danych a, b, A, odpowiada tylko jeden trójkąt; nad czém później się zastanowimy.

Można także wyznaczyć kąt C, za pomocą równania (5), to jest:

$$\text{dot A. wst C} + \text{dost } b.\text{dost C} = \text{dot } a.\text{ wst } b$$

W tym celu wyznaczmy naprzód kąt posiłkowy x, czyniąc:

$$\text{dot A} = \text{dost } b.\text{ dot } x,$$

ztąd $\text{dot } x = \frac{\text{dot A}}{\text{dost } b}$;

dalej, w równaniu dot A. wst C +....., wstawmy ważność dot A = dost b.dost x

$= \frac{\text{dost } b.\text{ dost } x}{\text{wst } x}$, będzie:

$$\text{dost } b(\text{wst C. dost } x + \text{dost C. wst } x)$$
$$= \text{dot } a.\text{ wst } b.\text{ wst } x;$$

a ztąd

$$\text{wst}(\text{C} + x) = \frac{\text{sty } b.\text{ wst } x}{\text{sty } a},$$

wiadome zatém będzie C + x. Naznaczmy C + x = m, będzie C = $m - x$.

Po wyznaczeniu C, znajdziemy c z proporcyi:

$$\text{wst } A : \text{wst } C = \text{wst } a : \text{wst } c.$$

Lecz chcąc wprost wyrachować bok c, trzeba się udać do równania (1):

$$\text{dost}b.\text{dost}c + \text{dost}A.\text{wst}b\ \text{wst}c = \text{dost}a,$$

którego pierwsza strona przywodzi się jak wyżej, do jednego wyrazu, za pomocą kąta posiłkowego x, czyniąc dost A. wst b=dost b. dot x;

ztąd $\quad \text{dot } x = \text{dost } A.\ \text{sty } b.$

Przez co równanie powyższe zamieni się w następujące:

$$\text{dost } b(\text{wst } x.\ \text{dost } c + \text{dost } x.\ \text{wst } c)$$
$$= \text{dot } a.\ \text{wst } x,$$

czyli

$$\text{wst}(c+x) = \frac{\text{dost } a.\ \text{wst } x}{\text{dost } b},$$

teraz już łatwo będzie wyrachować c, mając wiadome x.

95. *Przypadek* 3. Mając dane boki a, b, i kąt C między niemi zawarty, znaleźć kąty A, B, i bok c.

Z formuł (5) i (6) wypada:

$$\text{dost}\,A=\frac{\text{dot}\,a.\,\text{wst}\,b-\text{dost}\,b.\,\text{dost}\,C}{\text{wst}\,C,}$$

$$\text{dot}\,B=\frac{\text{dot}\,b.\,\text{wst}\,a-\text{dost}\,a.\,\text{dost}\,C}{\text{wst}\,C.}$$

Używając kąta posiłkowego, łatwo przywieść każdy licznik do jednego wyrazu; lepiej przecież udać się do analogij Nepera:

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A+B)=\text{dot}\,\tfrac{1}{2}\,C.\frac{\text{dost}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{dost}\,\frac{1}{2}(a+b)}.$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}(A-B)=\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,C.\frac{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a-b)}{\text{wst}\,\frac{1}{2}(a+b)}.$$

które, dając ważności na $\frac{1}{2}(A+B)$ i $\frac{1}{2}(A-B)$ dają tem samém ważności na A i B. Po wyznaczeniu kątów A i B, bok c wyznaczy się przez proporcyą;

$$\text{wst}\,A:\text{wst}\,C=\text{wst}\,a:\text{wst}\,c.$$

Chcąc wyznaczyć od razu bok c, trzeba w formule $\text{dost}\,c=\text{dost}\,a.\,\text{dost}\,b+\text{wst}\,a.\,\text{wst}\,b.\,\text{dost}\,C.$

uczynić $\text{wst}\,b.\,\text{dost}\,C=\dfrac{\text{dost}\,b.\,\text{dost}\,x}{\text{wst}\,x}$

$=\text{dost}\,b.\,\text{dot}\,x$, a ztąd $\text{dot}\,x=\text{sty}\,b.\,\text{dost}\,C$;

$$\text{dost}\,c=\frac{\text{dost}\,b.\,\text{wst}\,(a+x)}{\text{wst}\,x.}$$

96. *Przypadek* 4. Mając dane dwa kąty A, B i bok c jednemu z nich przyległy, znaleźć boki a, b i kąt C. Boki a i b, wyznaczyć można za pomocą formuł (7) i (9) z których wypada:

$$\text{dot } a = \frac{\text{dot A wst B} + \text{dost B. dost } c}{\text{wst } c.}$$

$$\text{dot } b = \frac{\text{dot B. wst A} + \text{dost A. dost } c}{\text{wst } c.}$$

ale jeszcze lepiéj przez analogije Nepera:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2}(a+b) = \text{sty } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{dost } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{wst } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}.$$

$$\text{sty } \tfrac{1}{2}(a-b) = \text{sty } \tfrac{1}{2} c \frac{\text{wst } \tfrac{1}{2}(\text{A}-\text{B})}{\text{wst } \tfrac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}.$$

Nakoniec kąt C wyznaczy się przez proporcyą:

$$\text{wst A} : \text{wst C} = \text{wst } a : \text{wst } c.$$

Lecz chcąc wprost wyrachować kąt C, potrzeba w formule:

$$\text{dost C} = \text{wst A} . \text{wst B} . \text{dost } c - \text{dost A dost B}.$$

uczynić wst B. dost c = dost B. dot x, przez co będzie:

$$\text{dot } x = \text{sty B. dost } c; \text{ dost C}$$

$$= \frac{\text{dost B. wst } (\text{A}-x)}{\text{wst } x.}$$

97. *Przypadek* 5. Mając dane kąty A, B i bok a, jednemu z nich przeciwny, wyznaczyć boki b, c, i kąt C.

Przypadek ten zupełnie podobny drugiemu, rozwiązuje się tym samym sposobem, i ma podobnež niepewności.

Bok b wyznacza się za pomocą proporcyi:

$$\text{wst } A : \text{wst } B = \text{wst } a : \text{wst } b,$$

Bok zaś c i kąt C znajdują się za pomocą formuł:

$$\text{sty } \tfrac{1}{2} c = \text{sty } \tfrac{1}{2} (a-b) \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{wst } \frac{1}{2}(A-B)}.$$

$$\text{dot} \tfrac{1}{2} C = \text{sty} \tfrac{1}{2} (A-B). \frac{\text{wst } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{wst } \frac{1}{2}(a-b)}.$$

lecz bok c wyrachować także można za pomocą równania (7)

$$\text{dot } a . \text{wst } c - \text{dost } B . \text{dost } c = \text{dot} A . \text{wst} B.$$

w którem uczyniwszy dot $a =$ dost B. dot x, wypadnie:

$$\text{dot } x = \frac{\text{dot } a}{\text{dost} B}, \text{wst } (c-x) = \frac{\text{sty } B . \text{ wst } x}{\text{sty } A.}$$

Poczem kąt C można wyznaczyć albo z proporcyi:

$$\text{wst } a : \text{wst } c = \text{wst} A : \text{wst } C,$$

albo też z równania:

$$\text{dost}\,a.\text{wst}\,B.\text{wst}\,C - \text{dost}\,B.\,\text{dost}\,C = \text{dost}\,A,$$

którego pierwsza strona przywodzi się do jednego wyrazu czyniąc:

$$\text{dost}\,a.\ \text{wst}\,B = \text{dost}\,B.\ \text{dot}\,x.$$

ztąd

$$\text{dot}\,x = \text{dost}\,a.\ \text{sty}\,B;\ \text{wst}\,(C-x) = \frac{\text{dost}\,A.\ \text{wst}\,x}{\text{dost}\,B.}$$

98. *Przypadek* 6 i ostatni. Mając dane trzy kąty A, B, C, wyznaczyć trzy boki a, b, c.

Przypadek ten rozwiązuje się tym samym sposobem co pierwszy. Tak *np*: aby wyznaczyć bok a, bierze się się równanie (11), z którego wypada naprzód:

$$\text{dost}\,a = \frac{\text{dost}\,A + \text{dost}\,B.\ \text{dost}\,C}{\text{wst}\,B.\ \text{wst}\,C.}.$$

Daléj za pomocą przemian w wspomnionym przypadku użytych, znajdziemy wyrażenia wst $\frac{1}{2}\,a$, dost $\frac{1}{2}\,a$, sty $\frac{1}{2}\,a$, dogodniejsze do logarytmicznego rachunku. I tak, czyniąc $A+B+C=180^\circ+2\,p$. wyrażenia te będą następuiące:

11

$$\text{wst}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{wst P. wst (A—P)}}{\text{wst B. wst C.}}}$$

$$\text{dost}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{wst (B—P) wst(C—P)}}{\text{wst B. wst C.}}}$$

$$\text{sty}\,\tfrac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\text{wst P.wst (A—P)}}{\text{wst (B—P)wst(C—P)}}}$$

Uwaga. Jeżeli trzy ostatnie przypadki mają tak wielkie podobieństwo z trzema pierwszemi, pochodzi to ztąd, że mogą być do nich przywiedzione, na mocy własności trójkątów polarnych.

UWAGI.

99. Tylko w drugim i piątym przypadku zachodzi niepewność co do gatunku niewiadoméj; wybadać przeto należy, po jakich cechach poznać można, czy mają być dwa rozwiązania, czy też tylko jedno; w tym celu podamy pierwéj niektóre prawdy, na których się dalsze uwagi opierać będą.

Wystawmy sobie na kuli półkole DCD' fig. 31. prostopadłe do koła, weźmy CD $<90°$, i z punktu C poprowadźmy do różnych punktów okręgu DHD łuki kół wielkich CB, CB', CH,.....; nakoniec przedłużywszy CD do C', tak aby C'D było równe CD, złączmy punkt C, z punktem B. Trójkąty CDB i C'DB mają po kącie prostym zawartym między bokami równémi, więc CB=C'B; a a że CDC'<CB+C'B, więc CD<CB. A zatém, 1od łuk CD jest najmniejszy z łuków, które poprowadzić można z punktu C do okręgu DHD'; łuk zaś CD' jest największy.

Przypuściwszy że DB=DB'; trójkąty CDB, CDB', mają także po kącie prostym zawartym między bokami równémi, więc CB=CB'; a zatém 2º, łuki pochyłe równo oddalone od CD lub CD' są równe.

Nakoniec dajmy że DH>DB; poprowadziwszy C'H, przedłużmy CB, aż do przecięcia się w I z CH. Ponieważ łuk CC' jest mniejszy od półkola, więc przedłużenie CB przetnie go za C'; co wymaga, aby przecięcie nastąpiło między H i C'; a przeto C'I+IC <C'I+IB, a tem samém C'B+BC<C'I +IC. Lecz IC<IH+HC, więc C'I+IC

$<C'H+HC$, a tem bardziéj $C'B+BC<C'H+HC$. A że $C'B=BC$, a $C'H=HC$, więc $BC<HC$, a tém samém 3°, łuki pochyłe tém są większe, im bardziéj się oddalają od łuku CD, albo im bardziéj się zbliżają do łuku CD'.

100. Dajmy teraz iż chcemy wykreślić trójkąt kulisty, mając dane dwa boki *a*, *b* i kąt A przeciwny bokowi *a*.

Uważać tu najprzód wypada, że niektóre przypadki, w których nie można wykreślić trójkąta, wskazuje sam rachunek i aby to okazać, wykreślmy kąt $CAB=A$ i weźmy $AC=b$ fig. 32 i 33. Boki AC i AB przedłużmy do przecięcia się w E i spuśćmy łuk CD prostopadły do AE. Łuk CD powinien być tego samego gatunku co kąt A; gdy więc kąt A jest ostry, łuk CD jest najkrótszą odległością punktu C od pół-okręgu AE; gdy zaś kąt A jest roztwarty, łuk CD jest największą odległością tegoż punktu od pół-okręgu AE. W pierwszym przypadku nie będzie można wykreślić trójkąta, jeżeli $a<CD$, a ztąd wst $a<$wst CD, w drugim zaś także nie będzie można wykreślić trójkąta, jeżeli $a>$CD, a ztąd wst $a>$ wst CD. Lecz że w trójkącie prostokątnym ACD jest:

$1:\text{wst}\,b=\text{wst}\,A:\text{wst}\,ACD=\text{wst}\,b\times\text{wst}\,A.$ więc w obu przypadkach byłoby wst a $<$wst $b\times$wst A.

Szukając zaś kąta B, w trójkącie ACB, jest:

$$\text{wst}\,a:\text{wst}\,A=\text{wst}\,b:\text{wst}\,B=\frac{\text{wst}\,b.\ \text{wst}\,A}{\text{wst}\,a.}$$

więc ta ważność wstawy kąta B, byłaby większa od 1, co być nie może.

Gdyby było $a=$CD, byłby tylko jeden trójkąt prostokątny ACD, co też pokazuje ważność wstawy kąta, która w tym przypadku przywodzi się do jedności.

101. Pominąwszy te przypadki, zastanówmy się szczególniéj nad rozmaitemi stosunkami wielkości, jakie zachodzić mogą w danych a, b, A.

Dajmy że A$<90°$ i $b<90°$ fig. 33. Ponieważ A i b są mniejsze od $90°$, więc i AD jest także mniejsze od $90°$, a tem samem $AD<DE$; gdy zaś prócz tego $a<b$, natenczas można między łukami CA i CD, zakreślić łuk $CB=a$, i z drugiéj strony między CD i CE łuk $CB'=CB=a$; to jest: że są dwa trójkąty ACB i ACB' zamykające też same dane a, b, A. Gdy $a=b$ trójkąt ACB ginie, i zostaje tylko trójkąt ACB'. Gdy zaś $a+b=180^\circ$, albo $a+b>180^\circ$, punkt B' przypada w E, albo za punktem E, i wtedy niema żadnego trójkąta.

Tym sposobem rozbierają się wszystkie inne przypadki, którego to rozbioru wypadki wskazuje następująca tablica; gdzie znak $\lhd$ znaczy równe albo większe, a znak $\rhd$ równe albo mniejsze:

$$A<90^\circ.\left\{\begin{array}{l}
b<90^\circ\begin{cases} a<b \;\ldots & \text{dwa rozwiązania.}\\ a\rhd b \;\ldots & \text{jedno rozwiązanie.}\\ a+b\rhd 180^\circ & \text{żadnego nie masz rozwiązania.}\end{cases}\\
b>90^\circ\begin{cases} a+b<180^\circ & \text{dwa rozwiązania.}\\ a+b\rhd 180^\circ & \text{jedno rozwiązanie.}\\ a\rhd b \;\ldots & \text{żadnego rozwiązania.}\end{cases}\\
b=90^\circ\begin{cases} a<b \;\ldots & \text{dwa rozwiązania.}\\ a\rhd b \;\ldots & \text{żadnego niema rozwiąz.}\end{cases}
\end{array}\right.$$

$$A>90^\circ.\begin{cases} b<90^\circ\begin{cases} a+b>180^\circ & \text{dwa rozwiązania.}\\ a+b\lhd 180^\circ & \text{jedno rozwiązanie.}\\ a\lhd b\ \ldots & \text{żadnego niema rozwiąz.}\end{cases}\\ b>90^\circ\begin{cases} a>b\ \ldots & \text{dwa rozwiązania.}\\ a\lhd b\ \ldots & \text{jedno rozwiązanie.}\\ a+b\rhd 180^\circ & \text{żadnego rozwiązania,}\end{cases}\\ b=90^\circ\begin{cases} a>b\ \ldots & \text{dwa rozwiązania.}\\ a\lhd b\ \ldots & \text{żadnego.}\end{cases}\end{cases}$$

$$A=90^\circ.\begin{cases} b<90^\circ\begin{cases} a>b\ \ldots & \text{jedno rozwiązanie.}\\ a\lhd b\ \ldots & \text{żadnego.}\\ a+b\rhd 180^\circ & \text{żadnego.}\end{cases}\\ b>90^\circ\begin{cases} a<b\ \ldots & \text{jedno rozwiązanie.}\\ a\rhd b\ \ldots & \text{żadnego.}\\ a+b\rhd 180^\circ & \text{żadnego.}\end{cases}\\ b=90^\circ\begin{cases} a=90^\circ\ . & \text{nieograniczona liczba (rozwiązań.}\\ a\lessgtr 90^\circ\ . & \text{żadnego.}\end{cases}\end{cases}$$

102. Na mocy własności trójkąta polarnego, można wypadki te zastósować do trójkąta, w którym są dane A, B, *a*, co należy do piątego przypadku; potrzeba tylko wszędzie zamienić *a*, *b*, A, na A, B, *a*, znak > na < a < na >.

Gdy dane odpowiadają jednemu z przypadków, w którym jedno tylko powinno bydź rozwiązanie, a rachunek daje dwa, wtenczas dla przekonania się, które rozwiązanie brać należy, dosyć uważać, że największe kąty powinny być przeciwne największym bokom, i odwrotnie.

I tak dajmy, że $A=112°$, $a=102°$, $b=106°$. W tablicy powyższéj między wypadkami odpowiadającémi $A>90°$, uważajmy te, w których $b>90°$, a między innémi miejmy wzgląg na ten, w którym $a>b$. Nadto zważając, że summa $a+b$ równa $208°$ nie odpowiada przypadkowi $a+b>180°$, wniesiemy, że jedno tylko jest rozwiązanie; lecz że $b>a$ więc i kąt B jest większy od kąta A.

Zastosowanie Trygonometryi kulistéj.

103. *Zagadn.* I. Przywieść kąt do poziomu.

Rozwiązanie. Niech będzie kąt BAC fig. 34. leżący na płaszczyznie pochyłéj, AD linija pionowa przez wierzchołek A przechodząca. — Poprowadźmy płaszczyznę poziomą MN przecinającą linije AB, AC, i AD w punktach E,F,G. Kąt EGF jest rzutem poziomym kąta BAC, czyli jest kątem do poziomu przywiedzionym; i ten to kąt EGF potrzeba obliczyć, przypuszczając, że wiadome są kąty BAC, BAD i CAD, które kątomiarem wymierzyć należy.

Zagadnienie to łatwo rozwiązać można, przez wykreślenie; ponieważ linija AG jest dowolna, będzie zatem dostateczna liczba danych do wykreślenia tak trojkątów prostokątnych EAG i FAG, iakoteż trójkątów EAF i EGF.

Łatwo także znaleźć ważność kąta EGF. Zakreśliwszy bowiem kulę z punktu A jako środka, promieniem jakimkolwiek, linije AB, AC, AD, wyznaczą trójkąt kulisty BCD, którego boki będą wiadome, jako miary kątów danych, a kąt BDC tego trójkąta jest kątem szukanym EGF.

Za pomocą więc pierwszego przypadku o trójkątach kulistych ostro lub roztwarto-kątnych, rozwiążemy zagadnienie; to jest weźmiemy formułę:

$$\text{wst}\ \tfrac{1}{2}\, A = \sqrt{\frac{\text{wst}\,(p-b)\ \text{wst}\,(p-c)}{\text{wst}\ b.\ \text{wst}\ c.}}$$

i w niéj uczynimy a=BAC, b=BCD, c=CAD; $p = \frac{1}{2}\,(a+b+c)$.

12

Dajmy *np.* że $a=47°45'39''$, $b=69°49'19''$, $c=80°17'36''$.
będzie: $2p=197°52'34''$; $p=98°56'17''$, $p-b=29°6'58''$, $p-c=18°38'41''$, i rachunek odbędzie się w następujący sposób:

log wst $(p-b)=9,6871552$.
log wst $(p-c)=9,5047412$.
dop log wst $b=0,0275078$.
dop log wst $c=0,0062623$.

2 log wst $\frac{1}{2}$ A$=19,2256665$.
log wst $\frac{1}{2}$ A$=9,6128332$.
ztąd $\frac{1}{2}$ A$=24°12'27'',9$.
A$=46°24'56''$.

104. *Zagadn.* 2. Mając daną szerokość i długość geograficzną dwóch punktów ziemskich, wyznaczyć ich odległość od siebie.

Rozwiąz. Niech będą A i B fig. 35. dane dwa punkta. Przypuśćmy że QR jest równik, C biegun północny, a CED i CFD południki punktów A i B; nakoniec, że długości uważają się od punku P w kierunku PEF.

Różnica długości PF—PE jest równa łukowi EF czyli kątowi C zawartemu między dwoma południkami; a łuki AC, BC są dopełnieniami danych szerokości AE i BF. W trójkącie więc kulistym ABC wiadome są dwa boki i kąt C między niemi zawarty, wyrachować zaś potrzeba bok trzeci AB, co się uskuteczni za pomocą formuł:

$$\text{dot}\ x = \text{sty}\ b.\ \text{dost}\ C;$$

$$\text{dost}c = \frac{\text{dost}\ b.\ \text{wst}\ (a + x)}{\text{wst}\ x.}$$

Dajmy że *np.* długość punktu B jest 6°,49', szerokość 46°23'14"; długość punku A, 54°35', szerokość 4°56'15"; obie te długości niech będą zachodnie i liczone od południka Paryzkiego, obie zaś szerokości północne.

Za pomocą tych danych znajdziemy naprzód:

C=54°35'—6°49'=47°46", a=90° —48°23'14"=41°36'46',b=90° - 4°56' 15"=85°3'45".

Rachunek kąta posiłkowego x.

log dost C= 9,8274671.
log sty b=11,0635386.

log dot x=10,8910057.

ztąd $x=7^{\circ}19'26''$

$a+x=48^{\circ}56'12''$.

Rachunek boku c.

log dost $b=8,9348468$,

log wst $(a+x)=9,8773621$,

dop log wst $x=0,8945642$.

log dost $c=9,7067731$.

ztąd $c=59^{\circ}23'54'',38$.

A zatem łuk mierzący odległość punktów A i B zamyka $59^{\circ}23'54'',38$; odległość tę wyznaczymy w milach geograficznych, uważając że jeden stopień południka zamyka mil geografiicznych 15; a zatem że $1 : 59^{\circ}23'54'',38 = 15 : x$; ztąd $x=59^{\circ}23'54'',38\times15$; czyli, zamieniwszy na sekundy:

$$x=\frac{213834,38\times15}{3600.}=890,9.$$

Koniec.

OMYŁKI DRUKU.

Stron.	Wier.	Zamiast.	Czytaj
6	21 od góry.	Liniach	O Liniach
15	23	AM	wst AM
25	14	r i r	r, i r
29	7	—2kH+α	2kH+α
30	11	X	x
41	4	ważność tę	ważności te
43	4	łuki	boki
48	18	dost $(a-b)$	dost $(a+b)$
—		dost:$^2 a=$	dost$^2 a-$
49	17	Przyjdźmy	Przejdźmy
52	24	dostawę	wstawę
55	11	$<a\ 90°$	$a<90°$
60	2	$\text{sty}\frac{1}{2}a=\dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{1+\text{dost}\,a}{2}}}{\pm\sqrt{1-\text{dost}\,a}}$	$\text{sty}\frac{1}{2}a=\dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{1-\text{dost}\,a}{2}}}{\pm\sqrt{\dfrac{1+\text{dost}\,a}{2}}}$
62	8	$\dfrac{\text{wst A}}{\text{dot A}}$	$\dfrac{\text{wst A}}{\text{dost A}}$
64	2	stron	strona
66	11	dost$^2 a=$wst$^2 a$	dost$^2 a-$wst$^2 a$
67	11	A=1	OA=1
73	12	mrżna	można
74	13	dost a	dot a
—	14	dost a	dos a
75	23	granicą	granicę
86	19	wstawie	wstawy
88	11	10,1215325	10,1215325—
92	2	z 72°	z 72° 20′
94	6	dopełnia	dopełnienia
137	23	$\sqrt{}(1-\text{dost}^2 x\ldots)$	$\sqrt{}(1-\text{dost}^2 a\ldots)$
138	6	zmieniają	zmienia
147	9	dwoma ostremi	dwoma kątami
149	8	boki	bok c
150	4	d	a
155	15	wst A . wst B	wst A . wst b
172	1	7.	7°

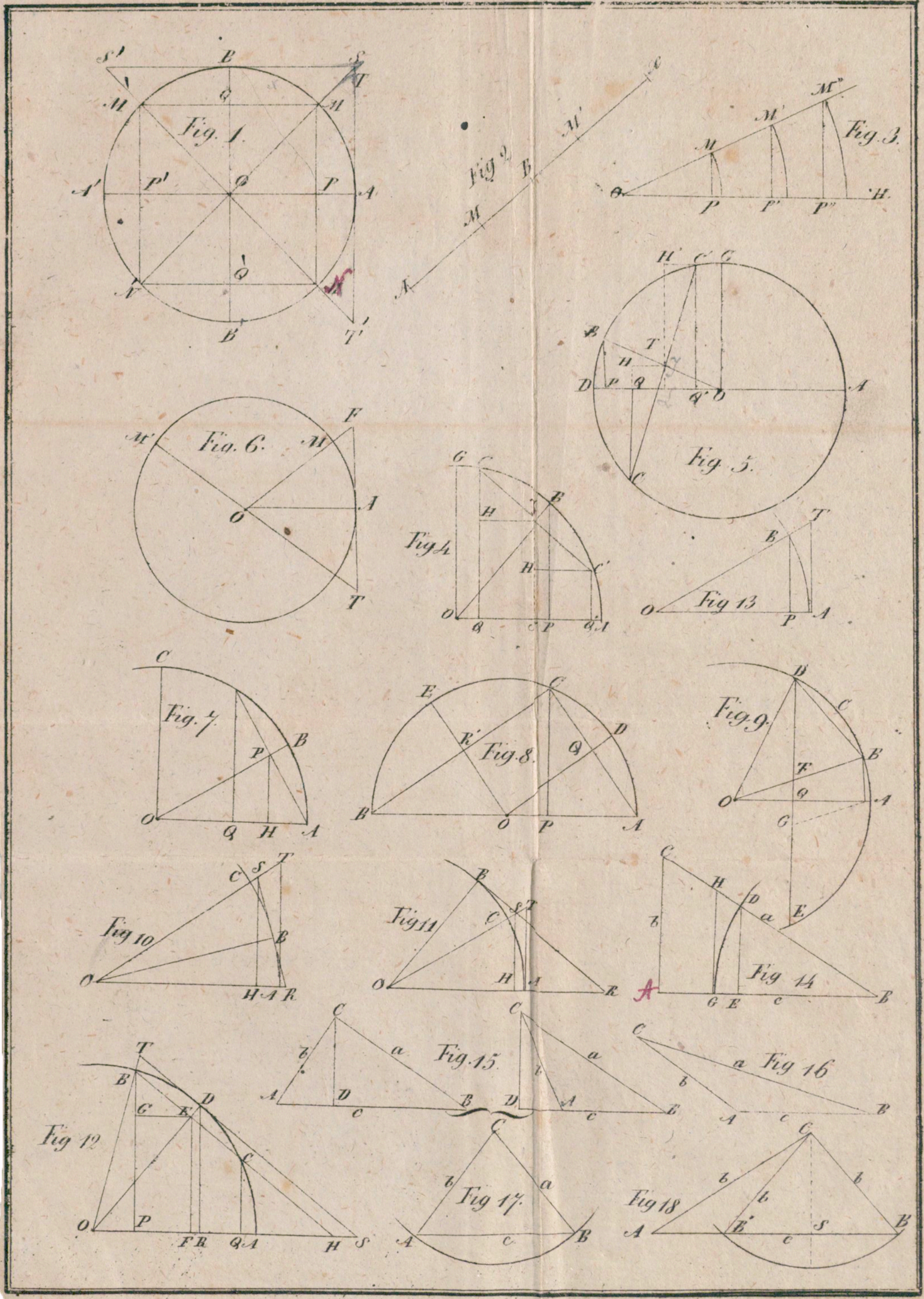
Fig. 1.
Fig 2
Fig. 3.
Fig 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig 10
Fig 11
Fig 12
Fig 13
Fig 14
Fig. 15.
Fig 16
Fig 17
Fig 18

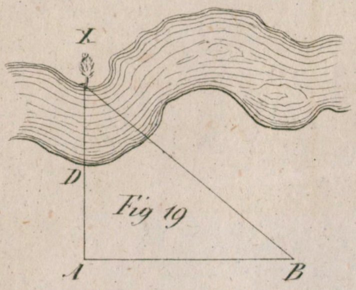

Fig 19

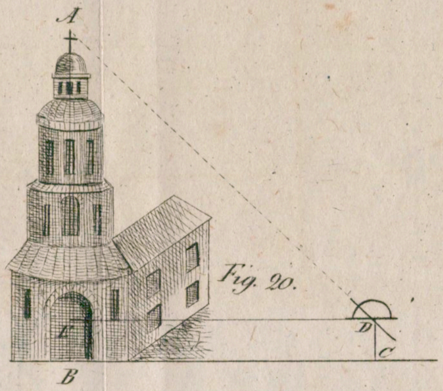

Fig. 20.

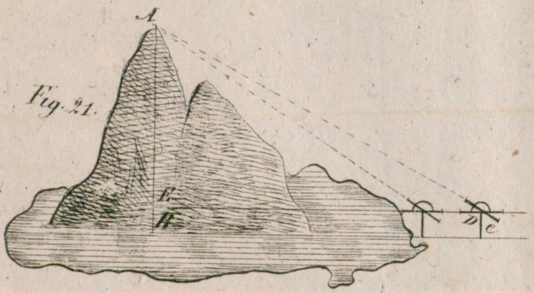

Fig. 21.

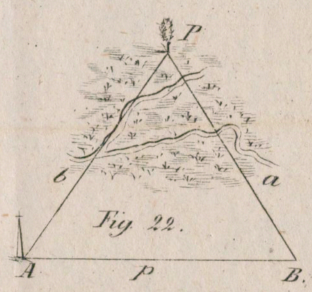

Fig. 22.

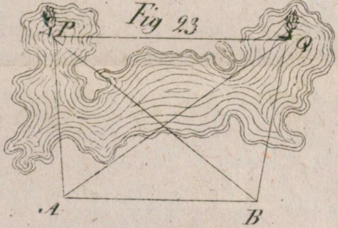

Fig 23

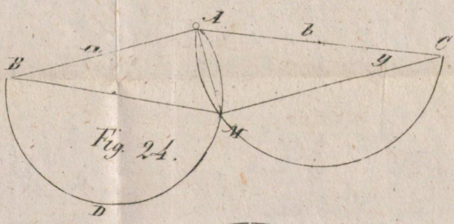

Fig. 24.

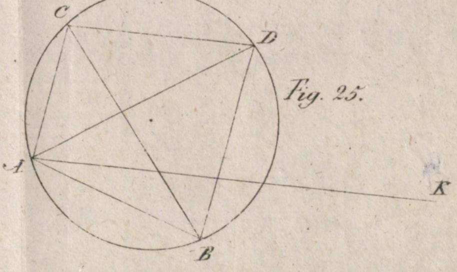

Fig. 25.

Fig. 26.

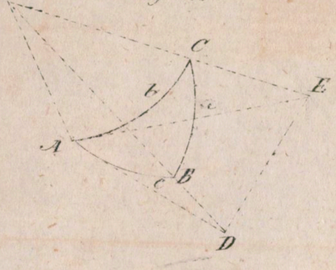

Fig. 27.

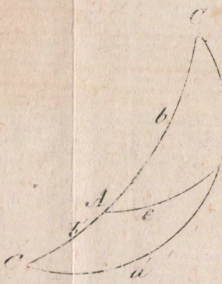

Fig. 28.

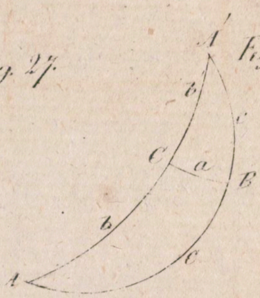

Fig. 29.

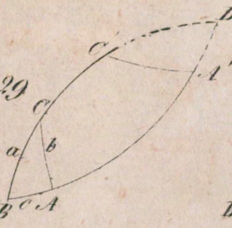

Fig. 30.

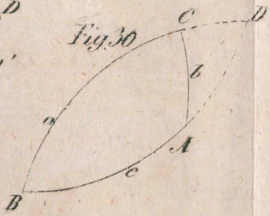

Fig. 31.

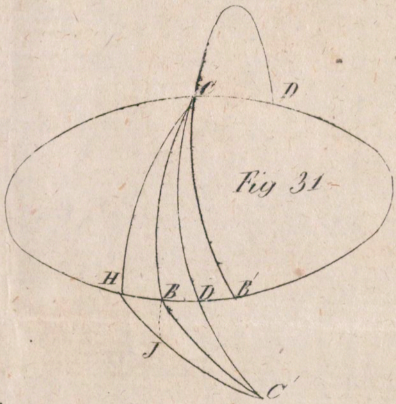

Fig. 32.

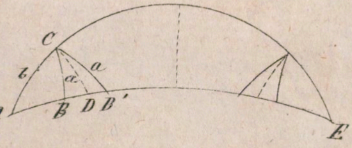

Fig. 33.

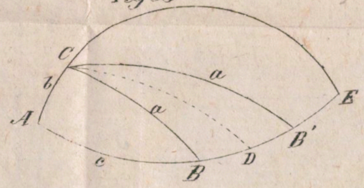

Fig. 34.

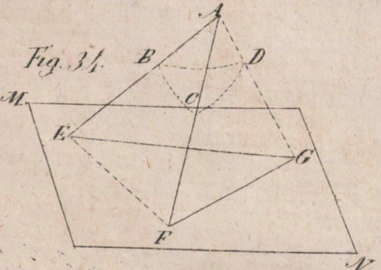

Fig. 35.