7.77 — termodynamika, przewodzenie ciepła, wpływ temperatury na materiały, naprężenia cieplne

Jan Woźniak

ZASADY WARIACYJNE WYMIANY CIEPŁA I ICH ZASTOSOWANIA W FIZYCE BUDOWLI

41/1990

WARSZAWA 1990

ISSN 0208-5658

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 6 czerwca 1990 r.

Na prawach rękopisu

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN
Nakład 100 egz. Ark.wyd.1,35 Ark.druk. 1,5
Oddano do druku w listopadzie 1990 r.
Nr zamówienia 372/90

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul.Śniadeckich 8

Jan Woźniak
Katedra Fizyki Budowli
Politechnika Łódzka

ZASADY WARIACYJNE WYMIANY CIEPŁA I ICH ZASTOSOWANIA W FIZYCE BUDOWLI

Część 1

Podstawy teoretyczne i sformułowanie lagranżowskie.

Streszczenie.

W niniejszej pracy wyprowadzono ogólną postać relacji wariacyjnej przewodnictwa cieplnego z uwzględnieniem sterowania polem temperatury. Przedstawiono także lagranżowskie ujęcie tej relacji wraz z prostym przykładem.

Oznaczenia

Ω obszar zajmowany przez ciało,

Δ podobszar Ω,

$\rho(x)$ gęstość masy,

$\varepsilon(x,t)$ energia wewnętrzna,

Ξ powierzchnia w Ω na której są rozłożone powierzchniowe źródła ciepła,

$h_i(x,t)$ i-ta składowa strumienia ciepła,

$n_i(x)$ i-ta składowa wektora jednostkowego i zewnętrznie normalnego do brzegu obszaru,

$\alpha(x,t)$ wydajność objętościowych źródeł ciepła,

$\sigma(x,t)$ gęstość powierzchniowych źródeł ciepła,

$[\![h_i(x,t)]\!]$ i-ta składowa skoku strumienia ciepła,

$\Gamma(\Delta,t)$ produkcja entropii w obszarze Δ,

$T(x,t)$ temperatura bezwzględna,

θ_o stała temperatura odniesienia,

$\eta(x,t)$ entropia właściwa,

$\theta(x,t)$ temperatura względna (mierzona od θ_o),

$K_{ij}(x,\theta)$ składowe tensora przewodnictwa cieplnego,

$\lambda(x,\theta)$ współczynnik przewodnictwa cieplnego,

$c(x)$ pojemność cieplna,

$\sigma^L(x,t)$ powierzchniowe, fizyczne źródła ciepła,

$\alpha^L(x,t)$ objętościowe, fizyczne źródła ciepła,

$\mathbb{T}$ zbiór dopuszczalnych pól temperatury,

$\mathbb{T}'(\theta)$ zbiór dopuszczalnych pól prędkości temperatury,

$\sigma^R(x,t)$ powierzchniowe źródła ciepła realizujące sterowanie modelowe,

$\alpha^R(x,t)$ objętościowe źródła ciepła realizujące sterowanie modelowe,

$\sigma^O(x,t)$ powierzchniowe, ograniczone źródła cipła,

$\alpha^O(x,t)$ objętościowe, ograniczone źródła cipła,

$\mathbb{A}_x(\theta)$ zbiór dopuszczalnych, objętościowych ograniczonych źródeł ciepła,

$\mathbb{S}_x(\theta)$ zbiór dopuszczalnych, powierzchniowych ograniczonych źródeł ciepła,

$\Gamma_R(\Omega,t)$ produkcja entropii ze źródeł realizujących sterowanie modelowe,

$\delta\nu(x)$ wirtualny przyrost temperatury,

$\mathbb{V}(\theta,\dot{\theta})$ zbiór dopuszczalnych, wirtualnych przyrostów temperatury,

$\Phi(x,q(t))$ lagranżowska klasa temperatur,

$q(t)=(q_1(t),q_2(t),\ldots q_n(t))$ uogólnione (lagranżowskie) współrzędne temperatury,

$\mathbb{U}$ dany, domknięty zbiór parametrów $q(t)$,

$\mathbb{U}'(q(t))$ zbiór dopuszczalnych lagranżowskich prędkości współrzędnych temperatury,

δq_a uogólniony (lagranżowski) wirtualny przyrost temperatury,

$\mathbb{W}(q,\dot{q})$ zbiór dopuszczalnych, uogólnionych wirtualnych przyrostów temperatury,

$V(q)$ potencjał termiczny,

$D(q,\dot{q})$ potencjał dyssypatywny,

$Q_a^L(t)$ uogólnione (lagranżowskie) fizyczne źródła ciepła,

$Q_a^O(t)$ uogólnione (lagranżowskie) sterujące źródła ciepła,

$R_a(t)$ uogólnione (lagranżowskie) źródła ciepła, realizujące sterowanie doskonałe,

$S(q(t))$ zbiór wszystkich dopuszczalnych, uogólnionych sterujących źródeł ciepła.

1 Wstęp.

Zagadnienia przewodnictwa cieplnego w ciele stałym były tematami wielu prac. Przykładem może być monografia [1]. Na szczególną uwagę zasługuje opracowanie [2], gdzie przedstawiono opis procesów nieodwracalnych w ujęciu lagranżowskim. W ujęciu takim podstawowymi niewiadomymi są uogólnione współrzędne temperaturowe, opisujące w sposób jednoznaczny pole temperatury w czasie i przestrzeni. Jest to opis analogiczny do lagranżowskiego ujęcia mechaniki analitycznej.

W niniejszej pracy koncepcję Biota [2] rozszerzono w dwóch kierunkach. Po pierwsze, współrzędne temperaturowe nie są niezależne, lecz są elementami danego, domkniętego i wypukłego zbioru w $\mathbb{R}^N$, przy czym zbiór ten nie musi sprowadzać się do przestrzeni liniowej. W skutek tego zamiast równania wariacyjnego otrzymuje się bardziej ogólną relację (nierówność) wariacyjną. Po drugie wprowadzono do rozważań źródła ciepła o ograniczonej wydajności, spełniające rolę źródeł sterujących.

W pracy wskaźniki i,j przebiegają ciąg 1,2,3 a wskaźniki a,b ciąg 1,2,...n gdzie n jest liczbą uogólnionych (lagranżowskich) współrzędnych temperaturowych. Obowiązuje konwencja sumacyjna.

Niniejsza praca stanowi punkt wyjścia do rozpatrywania przy pomocy metody elementów skończonych zagadnień sterowania polem temperatury. Przewiduje się także, wykorzystanie przedstawionego tutaj ujęcia lagranżowskiego do zagadnień sterowania polem temperatury w układach wielokomorowych.

2 Podstawy fizyczne przewodnictwa cieplnego.

W niniejszej pracy rozróżniam i traktuję niezależnie podstwy fizyczne przewodnictwa cieplnego oraz własnosci materiałowe przewodnika. Podstawy fizyczne, w przeciwieństwie do własności materiałowych, są takie same dla każdego materiału. Jako podstawy fizyczne przewodnictwa cieplnego wprowadziłem zasadę zachowania energii i nierówność dyssypatywną.

2.2 Zasada zachowania energii.

Jednym z podstawowych praw fizyki, które zastosowałem w niniejszej pracy jest zasada zachowania energii. Zakładam, że rozpatrywane ciało jest ciałem sztywnym, to znaczy, że obszar przez nie zajmowany nie zależy od czasu. Przez $O x_1 x_2 x_3$ oznaczono kartezjański układ współrzędnych w przestrzeni fizycznej, w której znajduje się ciało, a przez t oznaczono współrzędną czasową. Dla skrócenia zapisu oznaczono $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$.

Niech Ω oznacza obszar zajmowany przez ciało i niech Δ będzie dowolnym podobszarem Ω. Przez Ξ oznaczono powierzchnię wewnątrz Ω, na której występują powierzchniowe źródła ciepła.

Globalną zasadę zachowania energii opisuje wzór:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta} \rho(x) \varepsilon(x,t) dx = \oint_{\partial\Delta} h_i(x,t) n_i(x) da + \int_{\Delta} \rho(x) \dot{\alpha}(x,t) dx + \int_{\Delta \cap \Xi} \sigma(x,t) da \qquad \forall\, \Delta \subset \Omega \tag{2.1}$$

gdzie:

$\rho(x)$ oznacza gęstość masy,

$\varepsilon(x,t)$ oznacza energię wewnetrzną jednostki masy,

$h_i(x,t)$ oznacza i-tą składową strumienia ciepła,

$n_i(x)$ oznacza i-tą składową wektora jednostkowego i zewnętrznie normalnego do brzegu obszaru Δ,

$\dot{\alpha}(x,t)$ oznacza wydajność objętościowych źródeł ciepła,

$\sigma(x,t)$ oznacza gęstość powierzchniowych źródeł ciepła.

Aby znaleść lokalną postać zasady zachowania energii należy zastosować twierdzenie o dywergencji do całki po $\partial\Delta$ w (2.1). Otrzymuje się wtedy:

$$\int_{\Delta}(\rho(x)\dot{\varepsilon}(x,t) - h_{i,i}(x,t) - \rho(x)\alpha(x,t))dx =$$

$$= \oint_{\Xi\cap\Delta} \sigma(x,t)da \qquad \forall\, \Delta \subset \Omega . \qquad (2.2)$$

Przyjmując za Δ kulę o środku w punkcie x leżącym poza powierzchnią Ξ, dążąc z jej promieniem do zera i korzystając z twierdzenia o wartości średniej dla całki otrzymuje się:

$$\rho(x)\dot{\varepsilon}(x,t) - h_{i,i}(x,t) - \rho(x)\alpha(x,t) = 0 \qquad (2.3)$$

Stosując podobną procedurę dla kuli o środku leżącym na Ξ otrzymuje się:

$$[\![h_i(x,t)]\!] n_i(x) = \sigma(x,t) \qquad x \in \Xi \qquad (2.4)$$

gdzie $[\![h_i]\!]$ oznacza i-tą składową skoku strumienia ciepła. Analogicznie dla punktów leżących na brzegu obszaru Ω otrzymuje się:

$$h_i(x,t)n_i(x) = \sigma(x,t) \qquad x \in \delta\Omega. \qquad (2.5)$$

2.2 Nierówność dyssypatywna.

Produkcję entropii dla każdego $\Delta \subset \Omega$ definiuje się wzorem:

$$\Gamma(\Delta,t) = \frac{d}{dt}\int_{\Delta\setminus\Xi}\eta(x,t)dx - \int_{\delta\Delta\cup\Xi}\frac{h_i(x,t)n_i(x)}{T(x,t)}da +$$

$$- \int_{\partial\Delta\cup\Xi}\frac{\sigma(x,t)}{T(x,t)}da - \int_{\Delta\setminus\Xi}\frac{\alpha(x,t)\rho(x)}{T(x,t)}dx \qquad (2.6)$$

gdzie przez T oznaczono temperaturę bezwzględną a przez η oznaczono entropię właściwą. Niech θ_o oznacza stałą temperaturę odniesienia, oraz :

$$T(x,t) = \theta_o + \theta(x,t). \qquad (2.7)$$

W dalszym ciągu pole temperatury będzie określane przy pomocy $\theta(x,t)$.

Nierówność dyssypatywna wyraża się wzorem :

$$\forall\ \Delta \subset \Omega \qquad \Gamma(\Delta,t) \geq 0 \qquad (2.8)$$

Nierówność ta jest także nazywana nierównością Clausiusa - Duhema.

3. Własności materiałowe przewodnika i warunki brzegowe.

3.1 Prawo Fouriera.

Przewodność cieplna materiałów zależy od własności fizycznych przewodnika. Własności te będę określać znanym związkiem między strumieniem ciepła gradientem temperatury i temperaturą. I-ta składowa wektora strumienia ciepła określona jest wzorem :

$$h_i(x,t) = K_{ij}(x,\theta(x,t))\theta_{,j}(x,t). \qquad (3.1)$$

gdzie K_{ij} są składowymi tensora przewodnictwa cieplnego. Zakładam symetrię tego tensora czyli $K_{ij} = K_{ji}$. Dla ciała izotropowego zachodzi:

$$K_{ij}(x,\theta(x,t)) = -\lambda(x,\theta(x,t))\delta_{ij}. \qquad (3.2)$$

gdzie δ_{ij} jest deltą Kroneckera, a λ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Równanie (3.1) w przypadku izotropii można więc napisać w postaci:

$$h_i(x,t) = -\lambda(x,\theta(x,t))\theta,_i(x,t) \qquad (3.3)$$

która znana jest w literaturze pod nazwą prawa Fouriera.

3.2 Równanie energii wewnętrznej.

W niniejszej pracy przyjmuję, że energia wewnętrzna zależy liniowo od temperatury $\theta(x,t)$ i wyraża się wzorem:

$$\varepsilon(x,t) = -\beta(x)\theta_o\theta(x,t). \qquad (3.4)$$

Wprowadźmy za Biotem, [2] str 3 , pojemność cieplną na jednostkę objętości zdefiniowaną wzorem :

$$c(x) = -\beta(x)\theta_o \qquad (3.5)$$

Korzystając z (3.5) wyrażenie na energię wewnętrzną można przedstawić w postaci:

$$\varepsilon(x,t) = c(x)\theta(x,t). \qquad (3.6)$$

3.3 Fizyczne źródła ciepła.

W niniejszej pracy dopuszczam możliwość istnienia objętościowych i powierzchniowych, fizycznych źródeł ciepła. Oznaczam je odpowiednio przez $\alpha^L(x,t)$ gdzie $x \in \Omega\setminus\Xi$ i $\sigma^L(x,t)$ gdzie $x \in \partial\Omega\cup\Xi$. Przykładem objętościowego, fizycznego źródła ciepła może być źródło ciepła generowane przez pręt paliwowy w reaktorze atomowym.

3.4 Warunki brzegowe.

Przestrzenne warunki brzegowe otrzymuje się przez podanie oddziaływania ośrodka, w którym ciało się znajduje, na powierzchnię rozpatrywanego ciała. Mogą one przyjąć jedną z trzech niżej podanych postaci:

1. Dana jest temperatura w każdym punkcie powierzchni ograniczającej ciało (za wyjątkiem skończonej liczby krawedzi i wierzchołków) i w każdej chwili.
2. Dana jest składowa normalna do brzegu gradientu temperatury w każdym punkcie powierzchni ograniczającej ciało (za wyjątkiem jak wyżej) i w każdej chwili.
3. Dana jest funkcja $\theta_{,i} n_i + a\theta = b$ na powierzchni ciała (za wyjątkiem jak wyżej) i w każdej chwili. Wielkości a i b są stałymi.

4. Sterowanie polem temperatury.

Zagadnienia sterowania polem temperatury były rozpatrywane przez wielu autorów, porównaj np. [3]. W wielu zagadnieniach technicznych i problemach modelowania wprowadza się pewne ograniczenia na pola temperatury. Pola temperatury spełniające te ograniczenia nazywam dalej dopuszczalnymi polami temperatury. Aby szukane pola temperatury były polami dopuszczalnymi, oprócz fizycznych źródeł ciepła muszą istnieć pewne dodatkowe źródła ciepła. Źródła te będę nazywać źródłami doskonałymi. Aby sprecyzować te źródła wprowadzam pewną zasadę, którą będę nazywać pierwszą zasadą minimum prędkości produkcji entropii.

Oprócz fizycznych i doskonałych źródeł ciepła wprowadzę także źródła ciepła (nazywane ograniczonymi), wydajnością których można sterować. Przykładem takiego źródła może być źródło ciepła generowane przez grzałkę o regulowanej mocy. Aby sprecyzować te źródła wprowadzam alternatywną zasadę, którą będę nazywać drugą zasadą minimum prędkości produkcji entropii.

4.1 Sterowanie modelowe.

W niniejszej pracy wprowadzam ograniczenia na pola temperatury i prędkości temperatury. Przez $\mathbb{T}$ oznaczam zbiór dopuszczalnych pól temperatury i zakładam, że nie zależy on od czasu. Tym samym

$$\theta(\cdot,t) \in \mathbb{T} \qquad \text{dla } t \in [t_o, t_f], \tag{4.1}$$

gdzie $[t_o, t_f]$ oznacza przedział czasu w jakim rozpatruje się pole temperatury.

Dla każdego $\theta \in \mathbb{T}$ przez $\mathbb{T}'(\theta)$ oznaczam zbiór dopuszczalnych pól prędkości temperatury. Zachodzi oczywiście zależność opisana wzorem.

$$\dot{\theta}(\cdot,t) \in \mathbb{T}'(\theta(\cdot,t)) \quad \text{i} \quad \theta(\cdot,t) \in \mathbb{T} \qquad \forall t \in [t_o, t_f] \tag{4.2}$$

Aby były spełnione podane ograniczenia muszą istnieć źródła ciepła wymuszające te ograniczenia. Źródła te nazywam źródłami doskonałymi a realizowane przez nie sterowanie nazywam sterowaniem doskonałym lub modelowym. W pracy wprowadzam dwa rodzaje źródeł realizujących sterowanie modelowe - źródła powierzchniowe oznaczone przez σ^R i źródła objętościowe oznaczone przez α^R. Aby sprecyzować te źródła przyjmuję wspomniany powyżej postulat nazwany pierwszą zasadą minimum prędkości produkcji entropii.

4.2 Sterowanie ograniczone.

W praktyce często można wpływać na pole temperatury poprzez źródła ciepła o możliwej do regulacji wydajności. Wydajność ta jest ograniczona możliwościami technicznymi i stąd wprowadziłem nazwę - źródła ograniczone. Realizowane przez te źródła sterowanie nazwałem sterowaniem ograniczonym. Wprowadziłem dwa rodzaje źródeł ograniczonych - źródła powierzchniowe oznaczone przez σ^O i źródła objętościowe oznaczone przez α^O.

Źródła sterowania ograniczonego α^{o} i σ^{o} są elementami domkniętych, niepustych i ograniczonych zbiorów $\mathbb{A}_x$ i $\mathbb{S}_x$. Tym samym :

$$\begin{aligned}
&\alpha^{o}(x,t) \in \mathbb{A}_x(\theta(x,t)) \qquad x \in \Omega\setminus\Xi \;, \\
&\sigma^{o}(x,t) \in \mathbb{S}_x(\theta(x,t)) \qquad x \in \partial\Omega\cup\Xi \;.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

4.3 Zasady minimum.

Zakładam , że źródła ciepła są sumą źródeł fizycznych, źródeł realizujących sterowanie doskonałe i źródeł realizujących sterowanie ograniczone

$$\begin{aligned}
&\alpha = \alpha^{L} + \alpha^{R} + \alpha^{o} \\
&\sigma = \sigma^{L} + \sigma^{R} + \sigma^{o} \;.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Wykorzystując (4.3) i (4.4) można przedstawić nierówność (2.8) dla $\Delta=\Omega$ w postaci:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega\setminus\Xi}\eta(x,t)dx - \int_{\partial\Omega\cup\Xi}\frac{h_i(x,t)n_i(x)}{T(x,t)}da -$$

$$- \left[\int_{\partial\Omega\cup\Xi}\frac{\sigma^{L}+\sigma^{o}}{T(x,t)}da + \int_{\Omega\setminus\Xi}\frac{(\alpha^{o}+\alpha^{L})\rho(x)}{T(x,t)}dx\right] -$$

$$- \left[\int_{\partial\Omega\cup\Xi}\frac{\sigma^{R}}{T(x,t)}da + \int_{\Omega\setminus\Xi}\frac{\alpha^{R}\rho(x)}{T(x,t)}dx\right] \geq 0 \tag{4.5}$$

Wprowadzam oznaczenie

$$\Gamma_R(\Omega,t) = -\left[\oint_{\partial\Omega\cup\Xi} \frac{\sigma^R(x,t)}{T(x,t)}\, da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \frac{\alpha^R(x,t)\rho(x)}{T(x,t)}\, dx \right] \tag{4.6}$$

gdzie Γ_R oznacza produkcję entropii ze źródeł ciepła realizujących sterowanie doskonałe.

Wykorzystując (2.7) i zakładając, że

$$\frac{1}{1+\dfrac{\theta}{\theta_o}} \simeq 1 - \frac{\theta}{\theta_o} \tag{4.7}$$

otrzymuję :

$$-\Gamma_R(\Omega,t) = \int_{\partial\Omega\cup\Xi} \frac{\sigma^R(x,t)}{\theta_o}\, da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \frac{\alpha^R(x,t)\rho(x)}{\theta_o}\, dx -$$

$$- \left[\int_{\partial\Omega\cup\Xi} \frac{\sigma^R(x,t)}{\theta_o^2}\, \theta\, da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \frac{\alpha^R(x,t)\rho(x)}{\theta_o^2}\, \theta\, dx \right]. \tag{4.8}$$

Pierwszą zasadą minumum prędkości produkcji entropii. którą wprowadzonę w niniejszej pracy jest postulat, że spośród wszystkich przyrostów produkcji entropii wywołanych źródłami ciepła realizującymi sterowanie doskonałe ten jest najmniejszy, który odpowiada zachodzącemu polu prędkości temperatury. Postulat ten opisuje wzór :

$$\int_{\partial\Omega\cup\Xi} \frac{\sigma^R}{\theta_o^2}\, \dot\theta\, da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \frac{\alpha^R\rho(x)}{\theta_o^2}\, \dot\theta\, dx \le$$

$$\int_{\partial\Omega\cup\Xi} \frac{\sigma^R}{\theta_o^2}\, \nu\, da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \frac{\alpha^R\rho(x)}{\theta_o^2}\, \nu\, dx \quad \forall\, \nu \in \mathbb{T}'(\theta(\cdot,t)) \tag{4.9}$$

gdzie $\mathbb{T}'(\theta(\cdot,t))$ jest zbiorem wszystkich dopuszczalnych pól prędkości temperatury.
Przekształcając

$$\int_{\partial\Omega\setminus\Xi} \sigma^{R}(\nu - \dot{\theta})da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho\alpha^{R}(\nu - \dot{\theta})dx \geq 0 \qquad \forall\ \nu \in \mathbb{T}'(\theta(\cdot,t))$$
$$\dot{\theta} \in \mathbb{T}'(\theta(\cdot,t)) \tag{4.10}$$

i wprowadzając wirtualny przyrost temperatury, zdefiniowany następująco

$$\delta\nu = a(\nu - \dot{\theta}) \qquad \text{gdzie} \quad a > 0\ , \tag{4.11}$$

otrzymałem :

$$\int_{\partial\Omega\setminus\Xi} \sigma^{R}\delta\nu da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho\alpha^{R}\delta\nu dx \geq 0 \qquad \forall\ \delta\nu \in \mathbb{V}(\theta,\dot{\theta}), \tag{4.13}$$

gdzie elementy zbioru $\mathbb{V}(\dot{\theta},\theta)$ tworzy się odejmując od dowolnego elementu $\mathbb{T}'(\theta)$ realizowane pole prędkości temperatury $\dot{\theta}$.

Pierwsza zasada minimum prędkości produkcji entropii prowadzi do wzoru (4.13). Wzór ten stanowi odpowiednik zasady prac wirtualnych w mechanice klasycznej, która postuluje, że suma sił reakcji więzów na wszystkich przemieszczeniach wirtualnych jest zawsze nieujemna. Analogia ta tłumaczy sens fizyczny przyjętego tu postulatu.

Drugą zasadą minimum prędkości produkcji entropii, którą wprowadziłem w niniejszej pracy jest postulat, że w procesie występują te źródła ciepła realizujące sterowanie ograniczone, dla których prędkość produkcji entropii jest najmniejsza.

Postulat ten opisuje wzór:

$$\int\limits_{\partial\Omega\cup\Xi}\sigma^{R}(x,t)\dot{\theta}da + \int\limits_{\Omega\setminus\Xi}\rho\alpha^{R}(x,t)\dot{\theta}dx \le \int\limits_{\partial\Omega\cup\Xi}\bar{\sigma}\dot{\theta}da + \int\limits_{\Omega\setminus\Xi}\rho\bar{\alpha}\dot{\theta}dx$$

$$\forall\ \bar{\sigma}(x,t) \in \mathbb{S}_{x}(\theta(x,t))$$

$$\forall\ \bar{\alpha}(x,t) \in \mathbb{A}_{x}(\theta(x,t)) \qquad (4.14)$$

gdzie $\bar{\sigma}$ i $\bar{\alpha}$ oznaczają dowolne elementy zbiorów $\mathbb{S}_{x}(\theta(x,t))$ i $\mathbb{A}_{x}(\theta(x,t))$. (4.14) można przedstawić w innej postaci:

$$\alpha^{o}(x,t)\ \dot{\theta}(x,t) \le \bar{\alpha}\ \dot{\theta}(x,t) \quad \forall\ \bar{\alpha} \in \mathbb{A}_{x}(\theta(x,t)) \quad x \in \Omega\setminus\Xi\ ,$$

$$\sigma^{o}(x,t)\ \dot{\theta}(x,t) \le \bar{\sigma}\ \dot{\theta}(x,t) \quad \forall\ \bar{\sigma} \in \mathbb{S}_{x}(\theta(x,t)) \quad x \in \partial\Omega\cup\Xi\ . \qquad (4.15)$$

Postulat ten ma charakter komplementarny względem pierwszej zasady minimum prędkości produkcji entropii co tłumaczy jego sens fizyczny

5. Ogólna postać relacji wariacyjnej.

Wykorzystując do równania (4.13) zależności (4.4), (2.3) i (2.4) otrzymuję :

$$\oint\limits_{\partial\Omega} h_{i}n_{i}\delta\nu da - \int\limits_{\Omega\setminus\Xi} h_{i},_{i}\delta\nu dx - \int\limits_{\partial\Omega\cup\Xi}(\sigma^{L}+\sigma^{o})\delta\nu da + \int\limits_{\Xi}[\![h_{i}]\!]n_{i}\delta\nu da -$$

$$- \int\limits_{\Omega\setminus\Xi}\rho(\alpha^{L}+\alpha^{o})\delta\nu dx + \int\limits_{\Omega\setminus\Xi}\rho\dot{\varepsilon}\delta\nu dx \ge 0 \quad \forall\ \delta\nu \in \mathbb{V}(\theta,\dot{\theta}) \qquad (5.1)$$

a po przekształceniu:

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Xi} h_{i}\delta\nu,_{i}dx \ \ge\ \int\limits_{\partial\Omega\cup\Xi}(\sigma^{L}+\sigma^{o})\delta\nu da + \int\limits_{\Omega\setminus\Xi}\rho(\alpha^{L}+\alpha^{o})\delta\nu dx - \int\limits_{\Omega\setminus\Xi}\rho\dot{\varepsilon}\delta\nu dx$$

$$\forall\ \delta\nu \in \mathbb{V}(\theta,\dot{\theta}) \qquad (5.2)$$

gdzie α^0 i σ^0 spełniają zależność (4.15). Nierówność (5.2) przedstawia ogólną postać relacji wariacyjnej przewodnictwa cieplnego.

Jeżeli $\mathbb{V}(\theta,\dot{\theta})$ jest przestrzenią liniową (to znaczy gdy $\mathbb{T}'$ jest przestrzenią liniową) to nierówność wariacyjna (5.2) spełniona dla $\forall\ \delta\nu \in \mathbb{V}(\theta,\dot{\theta})$ musi być spełniona dla $-\delta\nu$ i otrzymuje się równanie wariacyjne przewodnictwa cieplnego

$$\int\limits_{\Omega\setminus\Xi} h_i \delta\nu,_i dx = \int\limits_{\partial\Omega\cup\Xi} (\sigma^L+\sigma^0)\delta\nu da + \int\limits_{\Omega\setminus\Xi} \rho(\alpha^L+\alpha^0)\delta\nu dx - \int\limits_{\Omega\setminus\Xi} \rho\dot{\varepsilon}\delta\nu dx$$

$$\forall\ \delta\nu \in \mathbb{V}(\theta,\dot{\theta}) \tag{5.3}$$

gdzie α^0 i σ^0 spełniają zależność (4.15).

6. Podstawy lagranżowskiej teorii przewodnictwa cieplnego.

Zakładam, że pole temperatury jest poszukiwane w klasie funkcji postaci:

$$\theta(\cdot,t) \in \mathbb{T} \quad \leftrightarrow \quad \theta(x,t) = \Phi(x,q(t)) \qquad x \in \Omega \tag{6.1}$$

gdzie $q(t)=(q_1(t),q_2(t),\dots q_n(t))$ nazywam za [2] uogólnionymi (lagranżowskimi) współrzędnymi temperaturowymi, a $\Phi(\cdot,\cdot)$ jest znaną, różniczkowalną funkcją współrzędnych $x=(x_1,x_2,x_3)$ i zmiennych parametrów q. Założenie to umożliwia przejście do dyskretyzowanego (lagranżowskiego [2]) opisu przewodnictwa cieplnego, w którym pole temperatury jest jednoznacznie wyznaczone przez parametry $q(t)$. Zakładam, że parametry te spełniają warunek:

$$q(t) \in \mathbb{U} \qquad , \qquad \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^N \tag{6.2}$$

gdzie $\mathbb{U}$ jest danym, domkniętym i wypukłym zbiorem.

Dla każdej n-tki lagranżowskich współrzędnych należących do $\mathbb{U}$ przez $\mathbb{U}'(q)$ oznaczam zbiór dopuszczalnych n-tek prędkości lagranżowskich współrzędnych. W każdym danym zagadnieniu Φ i $\mathbb{U}$ dobiera się zgodnie z fizycznym charakterem zagadnienia.

Zgodnie ze wzorem (4.1) wirtualny przyrost wielkości temperatury wynosi :

$$\delta\nu(x) = a(\nu(x) - \dot{\theta}(x,t)) \quad \text{gdzie } a>0 \text{ i } \nu(\cdot) \in \mathbb{T}'(\theta). \qquad (6.3)$$

Korzystając z (6.1) otrzymuję :

$$\dot{\theta}(x,t) = \frac{\partial\Phi}{\partial q_a}\dot{q}_a(t) \quad \text{gdzie} \quad \dot{q}(t) \in \mathbb{U}'(q(t))$$

$$\nu(x) = \frac{\partial\Phi}{\partial q_a}\bar{q}_a \quad \text{gdzie} \quad \bar{q} \in \mathbb{U}'(q(t)). \qquad (6.4)$$

Podstawiając (6.4) do (6.3) otrzymuje się:

$$\delta\nu(x) = a\frac{\partial\Phi}{\partial q_a}(\bar{q}_a - \dot{q}_a(t)) = \frac{\partial\Phi}{\partial q_a}\delta q_a \qquad (6.5)$$

gdzie wprowadziłem oznaczenie:

$$\delta q_a = a(\bar{q}_a - \dot{q}_a(t)) \qquad (6.6)$$

Zbiór wszystkich dopuszczalnych δq_a oznaczam przez $\mathbb{W}(q(t),\dot{q}(t))$. Tym samym

$$\delta q_a \in \mathbb{W}(q(t),\dot{q}(t)). \qquad (6.7)$$

Zbiór $\mathbb{W}(q(t),\dot{q}(t))$ jest zbiorem wszystkich dopuszczalnych elementów powstałych przez odjęcie od dowolnego elementu z $\mathbb{U}'(q)$ prędkości $\dot{q}$ i pomnożenie różnicy przez dowolne $a>0$.

Podstawiając wyrażenie po prawej stronie wzoru (6.6) na lagranżowski wirtualny przyrost temperatury do równania (5.2) otrzymuje się:

$$
\delta q_a \int_{\Omega\setminus\Xi} h_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_a \partial x_i} dx \geq \Big(\int_{\partial\Omega\cup\Xi} (\sigma^L + \sigma^0) \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho(\alpha^L + \alpha^0) \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} dx \; -
$$

$$
- \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho \dot{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} dx \Big) \delta q_a \qquad \forall\ \delta q_a \in \mathbb{K}(q(t), \dot{q}(t)). \tag{6.8}
$$

Aby przejść do postaci dyskretyzowanej (w której jedyną zmienną niezależną jest czas) wprowadzam oznaczenia :

$$
H_a(t) = \int_{\Omega\setminus\Xi} h_i \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_a \partial x_i} dx ,
$$

$$
E_a(t) = \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho \dot{\varepsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} dx ,
$$

$$
Q_a^L(t) = \int_{\partial\Omega\cup\Xi} \sigma^L \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho \alpha^L \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} dx , \tag{6.9}
$$

$$
Q_a^0(t) = \int_{\partial\Omega\cup\Xi} \sigma^0 \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho \alpha^0 \frac{\partial \Phi}{\partial q_a} dx ,
$$

$$
R_a(t) = H_a(t) - Q_a^L(t) - Q_a^0(t) + E_a(t).
$$

Używając wielkości zdefiniowanych wzorami (6.9), zasadę wariacyjną (6.8) można przedstawić w postaci:

$$
R_a(t)\delta q_a \geq 0 \qquad \forall\ \delta q_a \in \mathbb{K}(q(t), \dot{q}(t)).
$$

$$
\text{gdzie} \quad q(t) \in \mathbb{U} \quad \text{i} \quad \dot{q}(t) \in \mathbb{U}'(q) . \tag{6.10}
$$

Wykorzystując zależność (3.1) i zakładając, że $K_{ij} = K_{ji}$ otrzymuje się:

$$H_a(t) = \frac{\partial V(q(t))}{\partial q_a} - L_a(q(t)) \tag{6.11}$$

gdzie wprowadziłem oznaczenia:

$$V(q(t)) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Xi} K_{ij}(x,\Phi(x,q(t)))\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}dx \quad ,$$

$$L_a(q(t)) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Xi}\frac{\partial K_{ij}}{\partial q_a}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}dx \; . \tag{6.12}$$

Wyrażanie na E_a we wzorze (6.9) można przedstawić w postaci:

$$E_a(t) = \frac{\partial D(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_a} \tag{6.13}$$

gdzie wprowadziłem oznaczenie:

$$D(q(t),\dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Xi}\rho(x)c(x)\frac{\partial\Phi}{\partial q_b}\frac{\partial\Phi}{\partial q_a}dx\dot{q}_a(t)\dot{q}_b(t). \tag{6.14}$$

Wykorzystując (6.11) i (6.13) otrzymuje się

$$\frac{\partial V(q(t))}{\partial q_a} + \frac{\partial D(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_a} = L_a(q(t)) + Q^L_a(t) +$$
$$+ Q^o_a(t) + R_a(t) \quad \text{gdzie} \quad t \in \langle t_o, t_F \rangle. \tag{6.15}$$

Równanie powyższe nazwałem lagranżowskim równaniem przewodnictwa cieplnego. Za Biotem [2] V nazwałem potencjałem termicznym natomiast D funkcją dyssypatywną. L_a jest członem, który uwzględnia nieliniowe termiczne własności materiału - gdy K_{ij} nie zależy od temperatury to $L_a=0$. Wielkości Q_a^L opisują fizyczne źródła ciepła i nazwałem je uogólnionymi, fizycznymi źródłami ciepła. Wielkości Q_a^o opisują ograniczone, sterujące źródła ciepła - nazwałem je uogólnionymi (lagranżowskimi), sterującymi źródłami ciepła. Wielkości $R_a(t)$ nazwałem uogólnionymi (lagranżowskimi) doskonałymi źródłami ciepła.

Uogólnione (lagranżowskie) współrzędne temperaturowe $q_a(t)$ muszą spełniać warunki:

$$q(t) \in \mathbb{U} \quad \text{i} \quad \dot{q}(t) \in \mathbb{U}'(q(t)) \tag{6.16}$$

gdzie zbiory $\mathbb{U}$ i $\mathbb{U}'(q(t))$ wprowadzone poprzednio, w każdym zagadnieniu należy traktować jako dane.

Wielkości $R_a(t)$ muszą spełniać warunek:

$$R_a(t)\delta q_a \geq 0 \qquad \forall \delta q_a \in \mathbb{W}(q(t),\dot{q}(t)) \tag{6.17}$$

gdzie $\mathbb{W}(\cdot,\cdot)$ jest zbiorem uogólnionych wirtualnych współrzędnych temperaturowych.

Druga zasada minimum prędkości produkcji entropii w ujęciu lagranżowskim przyjmuje postać:

$$Q_a^o(t)\dot{q}_a(t) \leq \bar{Q}_a\dot{q}_a(t) \quad ,$$
$$\forall\, \bar{Q}_a \in \mathbb{S}(q(t)) \quad ,$$
$$Q_a^o \in \mathbb{S}(q(t)) \quad , \tag{6.18}$$

gdzie $\mathbb{S}$ jest zbiorem wszystkich dopuszczalnych uogólnionych źródeł ciepła.

Lagranżowskie ujęcie pierwszej zasady minimum prędkości produkcji entropii otrzymuje się ze wzoru (6.17) wykorzystując wyrażenie na δq_a.

Tym samym :

$$R_a(t)\dot{q}_a(t) \le R_a(t)\bar{q}_a(t) \quad ,$$
$$\forall\ \bar{q}_a \in \mathbb{U}'(q(t)) \quad ,$$
$$\dot{q}_a \in \mathbb{U}'(q(t)) \quad . \tag{6.19}$$

Lagranżowskie równanie przewodnictwa cieplnego (6.15) wraz z warunkami (6.16) ograniczającymi lagranżowskie współrzędne temperaturowe q(t) oraz warunkami (6.17) doskonałej realizacji tych ograniczeń (równoważne pierwszej lagranżowskiej zasadzie minimum prędkości produkcji entropii), a ponadto wraz z drugą lagranżowską zasadą minimum reprezentują lagranżowskie sformułowanie teorii przewodnictwa cieplnego.

W typowym zagadnieniu teorii niewiadomymi są: $q_a(t)$, $Q^L_a(t)$, $R_a(t)$; gdzie $t \in \langle t_o, t_F\rangle$.

Danymi są: potencjały V i D, funkcje L i Q^L_a, zbiory $\mathbb{U}$, $\mathbb{U}'$ i $\mathbb{S}$, i warunki początkowe $q_a(t_o)$.

W szczególnym przypadku, gdy $\mathbb{W}$ jest przestrzenią liniową zawierającą wszystkie $\delta q_a \in \mathbb{R}$ to warunek (6.17) jest postaci:

$$\frac{\partial V(q(t))}{\partial q_a} + \frac{\partial D(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_a} = Q^L_a(t) + Q^o_a(t) + L_a(q(t)) \ . \tag{6.20}$$

Gdy nie ma sterowania ograniczonego, to jest gdy $\mathbb{S} = \{0\}$ i gdy K_{ij} nie zależy od temperatury, to jest $L_a = 0$ wzór (6.20) przyjmuje postać

$$\frac{\partial V(q(t))}{\partial q_a} + \frac{\partial D(q(t),\dot{q}(t))}{\partial \dot{q}_a} = Q^L_a(t) \tag{6.21}$$

analogiczną jak w pracy Biota [2].

7. Przykład.

Zakładam, że temperatura w obszarze Ω zależy od czasu a nie zależy od współrzędnych przestrzennych. Tym samym przyjmuje się tą temperaturę wprost jako uogólnioną współrzędną lagranżowską

$$q(t) = q_1(t) \tag{7.1}$$

Funkcja Φ ze wzoru (6.1) przyjmuje postać:

$$\Phi(x,q(t)) = q(t) \tag{7.2}$$

Dla tej funkcji wyznaczam wszystkie relacje lagranżowskiego sformułowania przewodnictwa cieplnego:

$$
\begin{aligned}
&H_a(t) = 0,\\
&E_a(t) = \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho\dot{\varepsilon} dx,\\
&Q_a^L(t) = \int_{\partial\Omega\cup\Xi} \sigma^L da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho\alpha^L dx,\\
&Q_a^o(t) = \int_{\partial\Omega\cup\Xi} \sigma^o da + \int_{\Omega\setminus\Xi} \rho\alpha^o dx,\\
&V(q(t)) = 0,\\
&L(q(t)) = 0,\\
&D(q(t),\dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Xi} \rho(x)c(x)dx(\dot{q}(t))^2.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Wprowadzam oznaczenie :

$$c = \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\Xi} \rho(x)c(x)dx(q(t))^2. \tag{7.4}$$

Równanie (6.15) ma postać:

$$c\dot{q}(t) = Q^L(t) + Q^o(t) + R_a(t) \tag{7.5}$$

Zakładam, że temperatura może się zmieniać w przedziale $\langle\theta_1,\theta_2\rangle$. Zbiór $\mho$ jest następujący:

$$\mho = \langle\theta_1,\theta_2\rangle$$

$$U'(q) = \langle 0,\infty) \quad \text{dla } q = \theta_1$$
$$U'(q) = (-\infty,0\rangle \quad \text{dla } q = \theta_2 \tag{7.6}$$
$$U'(q) = (-\infty,\infty) \quad \text{dla } q \in (\theta_1,\theta_2).$$

Zbiór W jest następujący:

$$W(q,\dot{q}) = \langle 0,\infty) \quad \text{dla } q = \theta_1 \text{ i } \dot{q} = 0$$
$$W(q,\dot{q}) = (-\infty,0\rangle \quad \text{dla } q = \theta_2 \text{ i } \dot{q} = 0 \tag{7.7}$$
$$W(q,\dot{q}) = (-\infty,\infty) \quad \text{dla } q = \theta_1 \text{ i } \dot{q} > 0 \text{ lub}$$
$$\text{dla } q = \theta_2 \text{ i } \dot{q} < 0 \text{ lub}$$
$$\text{dla } q \in (\theta_1,\theta_2) \text{ i } \dot{q} \in (-\infty,\infty)$$

Z (6.17) wynika, że:

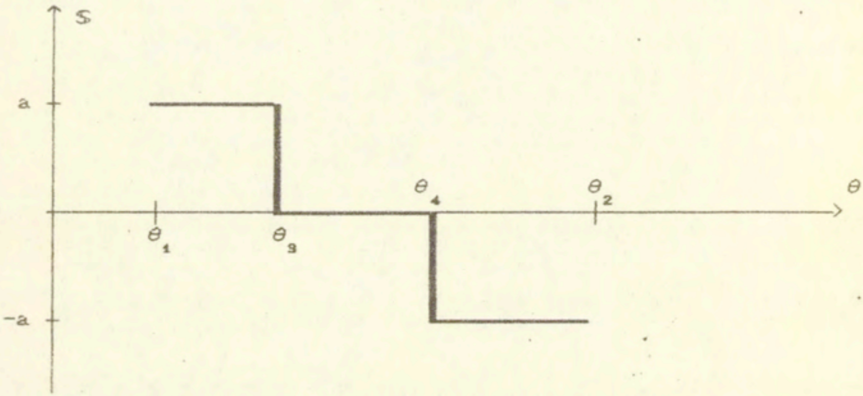
$$R_a(t) = 0 \quad \text{dla } q = \theta_1 \text{ i } \dot{q} > 0 \text{ lub}$$
$$\text{dla } q = \theta_2 \text{ i } \dot{q} < 0 \text{ lub}$$
$$\text{dla } q \in (\theta_1,\theta_2) \text{ i } \dot{q} \in (-\infty,\infty)$$
$$R_a(t) \geq 0 \quad \text{dla } q = \theta_1 \text{ i } \dot{q} = 0$$
$$R_a(t) \leq 0 \quad \text{dla } q = \theta_2 \text{ i } \dot{q} = 0 \tag{7.8}$$

Wprowadzam temperatury θ_3 i θ_4 takie że:

$$\theta_3 < \theta_4$$
$$\text{i } \theta_3 \in (\theta_1,\theta_2) \quad \text{i} \quad \theta_4 \in (\theta_1,\theta_2) \tag{7.9}$$

Niech S jest następujące - por. rys. 1

$$
\begin{aligned}
&S(q(t)) = \{a\} && \text{dla} \quad q \in (\theta_1,\theta_3) \\
&S(q(t)) \in \langle 0,a\rangle && \text{dla} \quad q = \theta_3 \\
&S(q(t)) = \{0\} && \text{dla} \quad q \in (\theta_3,\theta_4) \qquad\qquad (7.10) \\
&S(q(t)) \in \langle -a,0\rangle && \text{dla} \quad q = \theta_4 \\
&S(q(t)) = \{-a\} && \text{dla} \quad q \in (\theta_4,\theta_2)
\end{aligned}
$$



Rys.1.

Zakładam , że fizyczne źródła ciepła są stałe i dodatnie.

Warunki początkowe przyjmuję w postaci :

$$q(t_o) = q_o \quad \text{i niech} \quad q_o \in (\theta_3,\theta_4) \qquad (7.11)$$

Rozwiązaniem w otoczeniu punktu (t_o,q_o) jest :

$$c\dot{q}(t) = Q^L \quad \text{to} \quad q(t) = \frac{Q^L}{c}\, t - \frac{Q^L}{c}\, t_o + q_o \qquad (7.12)$$

gdzie $t \in \langle t_o,t_1)$ i gdzie t_1 jest chwilą w której temperatura $q(t)$ osiągnie wartość θ_4:

$$t_1 = \frac{(\theta_4 + (Q^L t_o/c) - q_o)}{Q^L}\, c \qquad (7.13)$$

Od tej chwili równanie jest postaci:

$$c\dot{q}(t) = Q^L - a \; ; \tag{7.14}$$

przyjmując, że:

$$a > 0 \quad \text{i} \quad a < Q^L \; , \tag{7.15}$$

otrzymuję :

$$q(t) = \frac{Q^L - a}{c} t - \frac{Q^L - a}{c} t_1 + \theta_1 \tag{7.16}$$

gdzie $t \in \langle t_1, t_2)$ i gdzie t_2 jest chwilą w której temperatura $q(t)$ osiągnie wartość θ_2 :

$$t_2 = \frac{(\theta_2 + ((Q^L - a)t_1/c) - \theta_1)}{Q^L} \; . \tag{7.17}$$

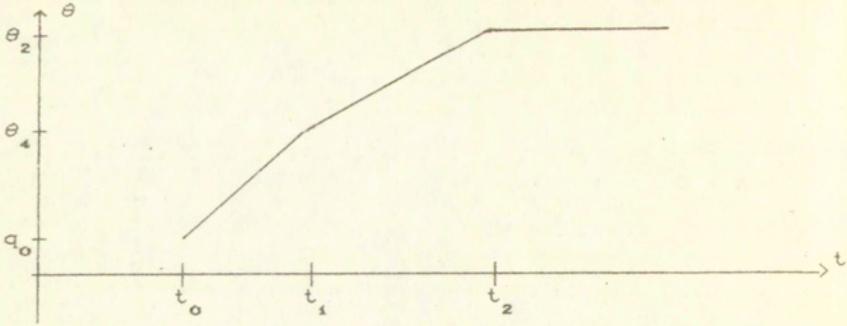
W temperaturze θ_2 należy rozpatrzyć dwa przypadki. Po pierwsze:

$$\text{jeśli } \dot{q} = 0 \text{ to } R_a(t) \le 0 \quad \text{i} \quad a - Q^L = R_a(t). \tag{7.18}$$

Po drugie:

$$\text{jeśli } \dot{q} < 0 \text{ to } R_a(t) = 0 \quad \text{i} \quad c\dot{q}(t) = Q^L - a. \tag{7.19}$$

Z obu powyższych przypadków spełniony jest pierwszy; dla $\forall t > t_2$ zachodzi $q(t) = \theta_2$. Tym samym otrzymałem rozwiązanie $q(t)$ dla $t \in \langle t_0, \infty)$, przedstawione na rys. 2.



Rys. 2.

Cytowana literatura

1. Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C. Conduction of Heat in Solids, Oxford 1947.
2. Biot, M.A. Variational Principles in Heat Transfer, Oxford 1970.
3. Duvaut, G., Lions, J.L. Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod Paris 1972.

SPIS TREŚCI

Oznaczenia..3
1 Wstęp..5
2 Podstawy fizyczne przewodnictwa cieplnego......................5
2.1 Zasada zachowania energii....................................6
2.2 Nierówność dyssypatywna......................................7
3 Własności materiałowe przewodnika i warunki brzegowe...........8
3.1 Prawo Fouriera...8
3.2 Równanie energii wewnętrznej.................................9
3.3 Fizyczne źródła ciepła.......................................9
3.4 Warunki brzegowe..10
4 Sterowanie polem temperatury..................................10
4.1 Sterowanie modelowe...11
4.2 Sterowanie ograniczone......................................11
4.3 Zasady minimum 12
5 Ogólna postać relacji wariacyjnej.............................15
6 Podstawy lagranżowskiej teorii przewodnictwa cieplnego........16
7 Przykład..21
Cytowana literatura...26