Mariusz Nieniewski
Zakład Badań Podstawowych
Elektrotechniki przy MHiPM i PAN

APROKSYMACJA FUNKCJI OBRAZU ZA POMOCĄ SZEREGU WALSHA

1. Wprowadzenie

Funkcja obrazu reprezentuje intensywność oświetlenia w danym punkcie obrazu. Funkcja ta jest oznaczona poniżej przez f(x,y), przy czym x, y są to współrzędne rozpatrywanego punktu. Ze względu na dyskretyzację zmiennych, jaka ma miejsce w obliczeniach komputerowych, współrzędne punktu obrazu mogą przyjmować jedynie wartości dyskretne, a dokładniej są to liczby naturalne. Typowy zakres zmienności tych współrzędnych może być od 0 do 63, 127 lub 255. Również intensywność oświetlenia wyrażana jest liczbą naturalną, np. w zakresie od 0 do 31 lub do 63. Podane zakresy zmienności są przyjmowane ze względu na to, że zakresy wyrażające się liczbą 2 do pewnej potęgi naturalnej dają dobre wykorzystanie pamięci komputera.

W ogólnym przypadku funkcja f(x,y) nie daje się ująć w postaci analitycznej, jednakże zachodzi potrzeba uproszczenia przedstawienia zbioru wartości tej funkcji. W takim przypadku funkcja ta jest aproksymowana za pomocą szeregu, którego wyrazami mogą być funkcje Walsha. Aproksymacja taka może być zastosowana do obrazu w całości (aproksymacja globalna) lub też do aktualnie przetwarzanych fragmentów obrazu (aproksymacja lokalna). Poniżej będzie omówiona aproksymacja lokalna. Taki wybór został częściowo podyktowany prostotą wzorów, a przede wszystkim tym, że lokalna aproksymacja przedstawia dużą wartość użytkową, ponieważ

http://rcin.org.pl

umożliwia wykrywanie krawędzi obiektów, a także ich przemieszczenia.

2. Zasady teoretyczne

Rozpatrzmy funkcję obrazu, która jest dana tablicą o wymiarach N * N

$$f(x,y) \cong \begin{bmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \dots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \dots & f(1,N-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(N-1,0) & f(N-1,1) & \dots & f(N-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Liczba N jest pewną potęgą liczby 2, to jest

$$N = 2^r, \quad \text{przy czym } r \text{ - liczba naturalna.} \quad (2)$$

Podobnie, liczba poziomów jasności G jest również pewną potęgą liczby 2, to jest

$$G = 2^s, \quad \text{przy czym } s \text{ - liczba naturalna.} \quad (3)$$

Rozpatrzymy obecnie aproksymację liniową dowolnej funkcji, przyjmując początkowo, że zależy ona tylko od jednej zmiennej x, tzn. ma postać f(x). W takim przypadku funkcję tę zastępujemy przez

$$f^*(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_{n-1}\varphi_{n-1}(x) \quad (4)$$

W powyższym wyrażeniu $\varphi_0(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ są pewnymi funkcjami wybranyni z góry i zagadnienie sprowadza się do znalezienia współczynników $c_0, \dots, c_{n-1}$. W typowym przypadku funkcja f jest określona przez tablicę swych wartości

$$f(x_0), \quad f(x_1), \quad \dots, \quad f(x_{p-1}) \quad (5)$$

przy czym p - liczba danych punktów. Współczynniki $c_0, \dots, c_{n-1}$ znajduje się z założenia, że równanie

$$f(x) = f^*(x) \quad (6)$$

jest spełnione dokładnie lub z największą możliwą dokładnością we wszystkich p zadanych punktach, co prowadzi do układu równań

http://rcin.org.pl

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0(x_0)\,c_0 + \varphi_1(x_0)\,c_1 + \ldots + \varphi_{n-1}(x_0)\,c_{n-1} = f(x_0)\\
&\varphi_0(x_1)\,c_0 + \varphi_1(x_1)\,c_1 + \ldots + \varphi_{n-1}(x_1)\,c_{n-1} = f(x_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_0(x_{p-1})\,c_0 + \varphi_1(x_{p-1})\,c_1 + \ldots + \varphi_{n-1}(x_{p-1})\,c_{n-1} = f(x_{p-1})
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Zakładamy, że liczba równań p przekracza liczbę niewiadomych n, i znajdujemy rozwiązanie układu równań (7) metodą najmniejszych kwadratów, tzn. przyjmując, że kwadrat normy Euklidesowej

$$
\| f^* - f \|^2 = \sum_{i=0}^{p-1} \left[f^*(x_i) - f(x_i) \right]^2 \tag{8}
$$

osiąga minimum. W dalszym ciągu przyjmiemy bardziej szczególną postać funkcji $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$. W tym celu zdefiniujemy iloczyn wewnętrzny funkcji φ_k oraz φ_l (przy czym k, l - liczby naturalne) jako

$$
(\varphi_k, \varphi_l) = \sum_{i=0}^{p-1} \varphi_k(x_i)\,\varphi_l(x_i) \tag{9}
$$

Jeżeli funkcje $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ są liniowo niezależne, to problem aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów ma rozwiązanie, które można przedstawić w postaci

$$
f^* = \sum_{i=0}^{n-1} c_i\,\varphi_i \tag{10}
$$

przy czym współczynniki c_i spełniają następujący układ równań normalnych

$$
\begin{aligned}
&(\varphi_0,\varphi_0)\,c_0 + (\varphi_0,\varphi_1)\,c_1 + \ldots + (\varphi_0,\varphi_{n-1})\,c_{n-1} = (\varphi_0,f)\\
&(\varphi_1,\varphi_0)\,c_0 + (\varphi_1,\varphi_1)\,c_1 + \ldots + (\varphi_1,\varphi_{n-1})\,c_{n-1} = (\varphi_1,f)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(\varphi_{n-1},\varphi_0)\,c_0 + (\varphi_{n-1},\varphi_1)\,c_1 + \ldots + (\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})\,c_{n-1} = (\varphi_{n-1},f)
\end{aligned}
\tag{11}
$$

lub zwięźlej

$$
\sum_{i=0}^{n-1} (\varphi_i, \varphi_k)\,c_i = (f, \varphi_k) \quad \text{dla } k = 0, \ldots, n-1. \tag{12}
$$

Zakładamy następnie, że funkcje $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ tworzą system ortogonalny, tzn.

$$
(\varphi_k, \varphi_l) = 0 \text{ dla } k \neq l \quad \text{oraz } (\varphi_k, \varphi_k) \neq 0 \text{ dla dowolnego } k. \tag{13}
$$

http://rcin.org.pl

W tym przypadku (11) upraszcza się i współczynniki c_0, ..., c_{n-1} znajdujemy ze wzorów prostszych

$$c_i = \frac{(f,\varphi_i)}{(\varphi_i,\varphi_i)}, \quad \text{przy czym } i = 0, \ldots, n-1. \tag{14}$$

Zakładając ponadto, że funkcje φ_0, ..., φ_{n-1} tworzą system ortonormalny zastępujemy warunek (13) przez warunek

$$(\varphi_k,\varphi_l) = 0 \text{ dla } k \neq l \text{ oraz } (\varphi_k,\varphi_l) = 1 \text{ dla dowolnego } k. \tag{15}$$

W tym przypadku redukujemy (14) do postaci

$$c_i = (f,\varphi_i), \text{ przy czym } i = 0, \ldots, n-1 . \tag{16}$$

Przyjmiemy obecnie szczególną postać funkcji φ_i, a mianowicie funkcje Walsha jednej zmiennej. Definicja funkcji Walsha $g(x,u)$ rzędu u i zależnej od zmiennej x jest następująca

$$g(x,u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{m-1} (-1)^{b_i(x)\, b_{m-1-i}(u)} \tag{17}$$

przy czym m - liczba bitów używana w reprezentacji dwójkowej zmiennej x (oraz y). Funkcja $b_i(x)$ w podanym wyrażeniu, dla danej wartości zmiennej x (oraz podobnie $b_i(y)$), otrzymuje wartość bitu na pozycji o numerze i, przy przedstawieniu liczby x w systemie dwójkowym. Np. przyjmując, że przedstawiamy liczbę x przy użyciu m = 3 bitów i zakładając, że liczba x = 6 w systemie dziesiętnym, co odpowiada liczbie x = 110 w systemie dwójkowym, otrzymujemy następujące wartości dla b_i:

$$b_0(110) = 0, \quad b_1(110) = 1, \quad b_2(110) = 1.$$

Przyjmując, tytułem przykładu, N = 4 oraz m = 2 znajdujemy, że funkcje Walsha mają w tym przypadku zgodnie z (17) wartość wynoszącą 1/4 ze znakiem dodatnim lub ujemnym według Tablicy 1.

http://rcin.org.pl

Tablica 1

Znak wartości funkcji Walsha wg (17)				
x \ u	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	+	+	-	-
2	+	-	+	-
3	+	-	-	+

Aproksymacja liniowa dowolnej funkcji $f(x,y)$ zależnej od dwóch zmiennych x oraz y jest podobna do aproksymacji funkcji jednej zmiennej. Funkcję $f(x,y)$ zastępujemy przez:

$$
\begin{aligned}
f^{*}(x,y) &= \\
&= c_{0,0}\varphi_{0,0}(x,y) + c_{0,1}\varphi_{0,1}(x,y) + \ldots + c_{0,n}\varphi_{0,n-1}(x,y) + \\
&+ c_{1,0}\varphi_{1,0}(x,y) + c_{1,1}\varphi_{1,1}(x,y) + \ldots + c_{1,n}\varphi_{1,n-1}(x,y) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ c_{n-1,0}\varphi_{n-1,0}(x,y) + \ldots + c_{n-1,n-1}\varphi_{n-1,n-1}(x,y)
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

Równanie (6) zastępujemy obecnie równaniem

$$f(x,y) = f^{*}(x,y) \qquad (19)$$

Stosując metodę najmniejszych kwadratów znajdujemy, że w przypadku gdy funkcje $\varphi_{0,0}, \ldots, \varphi_{n-1,n-1}$ tworzą system ortogonalny, współczynniki $c_{0,0}, \ldots, c_{n-1,n-1}$ są określone wzorem analogicznym do (14), a mianowicie

$$c_{i,j} = \frac{(f,\varphi_{i,j})}{(\varphi_{i,j},\varphi_{i,j})}, \quad \text{przy czym } i,j = 0, \ldots, n-1. \qquad (20)$$

Zakładając ponadto, że funkcje $\varphi_{i,j}$ tworzą system ortonormalny zastępujemy warunek (20) przez warunek

$$c_{i,j} = (f,\varphi_{i,j}) \qquad (21)$$

Przyjmiemy obecnie szczególną postać funkcji $\varphi_{i,j}$, tj. funkcje Walsha dwóch zmiennych. Definicja funkcji Walsha

http://rcin.org.pl

$g(x,u;y,v)$ rzędu u, v oraz zależnej od zmiennych x, y jest następująca

$$g(x,u;y,v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{m-1} (-1)^{[b_i(x)\, b_{m-1-i}(u) + b_i(y)\, b_{m-1-i}(v)} \tag{22}$$

Obliczenie wartości liczbowej funkcji Walsha w przypadku dwóch zmiennych można przeprowadzić dokonując rozkładu tej funkcji na iloczyn dwóch funkcji jednej zmiennej, tj.

$$g(x,u;y,v) = g_1(x,u)\, g_2(y,v) \tag{23}$$

przy czym

$$g_1(x,u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \prod_{i=0}^{m-1} (-1)^{b_i(x)\, b_{m-1-i}(u)} \tag{24}$$

$$g_2(y,v) = \frac{1}{\sqrt{N}} \prod_{i=0}^{m-1} (-1)^{b_i(y)\, b_{m-1-i}(v)} \tag{25}$$

Przyjmując N =4, a stąd m=2, znajdujemy, że funkcje Walsha mają w tym przypadku zgodnie z (22) wartość równą 1/4 i znak według Tablicy 2.

3. Przykład numeryczny

Napisano program w języku TurboPascal dla IBM PC/AT, który oblicza współczynniki $c_{i,j}$ aproksymacji funkcji obrazu za pomocą szeregu Walsha w oknie o wielkości 4 * 4. Współczynniki te są znajdowane dla kolejnych położeń okna, które razem pokrywają cały obraz.

http://rcin.org.pl

Tablica 2

Znak wartości funkcji Walsha wg (22)

(u,v)=(0,0)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	+	+	+	+
2	+	+	+	+
3	+	+	+	+

(0,1)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	-	-
1	+	+	-	-
2	+	+	-	-
3	+	+	-	-

(0,2)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	+	-
1	+	-	+	-
2	+	-	+	-
3	+	-	+	-

(0,3)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	-	+
1	+	-	-	+
2	+	-	-	+
3	+	-	-	+

(1,0)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	+	+	+	+
2	-	-	-	-
3	-	-	-	-

(1,1)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	-	-
1	+	+	-	-
2	-	-	+	+
3	-	-	+	+

(1,2)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	+	-
1	+	-	+	-
2	-	+	-	+
3	-	+	-	+

(1,3)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	-	+
1	+	-	-	+
2	-	+	+	-
3	-	+	+	-

(2,0)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	-	-	-	-
2	+	+	+	+
3	-	-	-	-

(2,1)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	-	-
1	-	-	+	+
2	+	+	-	-
3	-	-	+	+

(2,2)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	+	-
1	-	+	-	+
2	+	-	+	-
3	-	+	-	+

(2,3)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	-	+
1	-	+	+	-
2	+	-	-	+
3	-	+	+	-

(3,0)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	+	+
1	-	-	-	-
2	-	-	-	-
3	+	+	+	+

(3,1)

x \ y	0	1	2	3
0	+	+	-	-
1	-	-	+	+
2	-	-	+	+
3	+	+	-	-

(3,2)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	+	-
1	-	+	-	+
2	-	+	-	+
3	+	-	+	-

(3,3)

x \ y	0	1	2	3
0	+	-	-	+
1	-	+	+	-
2	-	+	+	-
3	+	-	-	+

Przyjmując, że funkcja $f(x,y)$ ma wartości jak w Tablicy 3, otrzymujemy wartości współczynników $c_{i,j}$ podane w Tablicy 4.

http://rcin.org.pl

Tablica 3

Wartości funkcji f(x,y)				
x \ y	0	1	2	3
0	5	5	9	9
1	6	6	10	10
2	7	7	11	11
3	8	8	12	12

Tablica 4

Współczynniki $c_{i,j}$	
$c_{0,0} = 34$	$c_{0,1} = -8$
$c_{0,2} = 0$	$c_{0,3} = 0$
$c_{1,0} = -4$	$c_{1,1} = 0$
$c_{1,2} = 0$	$c_{1,3} = 0$
$c_{2,0} = -2$	$c_{2,1} = 0$
$c_{2,2} = 0$	$c_{2,3} = 0$
$c_{3,0} = 0$	$c_{3,1} = 0$
$c_{3,2} = 0$	$c_{3,3} = 0$

W przypadku zilustrowanym w Tablicy 4 równanie (19) jest spełnione dokładnie. Jednakże w przypadku ogólnym, jeżeli obciąć liczbę wyrazów szeregu Walsha (w wyniku czego np. zmienne u oraz v w Tablicy 4 mogą przyjmować tylko wartości 0, 1 lub 0, 1, 2), to równanie (19) będzie spełnione tylko w przybliżeniu, i szereg Walsha będzie aproksymował funkcję obrazu.

4. Zakończenie

Aproksymacja funkcji obrazu za pomocą szeregu Walsha może mieć różnorodne zastosowania. Jednym z takich zastosowań jest detekcja ruchu poprzez porównanie dwóch obrazów tej samej sceny. Załóżmy, że między wykonaniem dwóch zdjęć nie nastąpił ruch żadnego elementu sceny. W tym przypadku współczynniki szeregu Walsha otrzymane dla odpowiadających sobie okien w obu obrazach teoretycznie są takie same. Jeżeli ruch w jakiejś części obrazu nastąpił, to współczynniki dla odpowiednich okien są różne. Na tej zasadzie można by łatwo wykrywać ruch - pod warunkiem, że nie byłoby szumu w obrazach. Ze względu na zawsze występujący szum, współczynniki szeregu Walsha dla odpowiadających sobie okien nie są sobie równe nawet w przypadku, gdy nie nastąpił ruch w oknie. W tej sytuacji konieczna jest statystyczna ocena współczynników

http://rcin.org.pl

odpowiednio wybranych szeregów Walsha dla odpowiadających sobie okien w celu zdecydowania, czy istniejące różnice między współczynnikami są wynikiem obecności szumu, czy też są na tyle znaczące, że wskazują na zaistnienie ruchu. Zagadnienie to będzie przedmiotem osobnego artykułu.

LITERATURA

1. G.Beauchamp, *Walsh functions and their applications*, Academic Press, London, 1975.
2. G.Dahlquist, A.Björck, *Numerical methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1974.
3. R.C.Gonzales, P.Wintz, *Digital image processing*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.
4. H.Harmuth, *Sequency theory*, Academic Press, New York, NY, 1977.
5. Y.Z.Hsu, H.H.Nagel, G.Rekers, *New likelihood test methods for change detection in image sequences*, Comput. Vision, Graphics, & Image Processing, 26, 73-106, 1984.

http://rcin.org.pl