POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Franciszek GRABSKI

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Wprowadzenie

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Przykłady zastosowań procesów semi-markowskich w teorii niezawodności można znaleźć w wielu publikacjach, np. w pracach [7], [9], [11], [17], [22], [23], [27],[30], [34], [38], [43], [50]. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności. Celem tej książki jest przedstawienie wybranych elementów teorii procesów semi-markowskich, oraz przedstawianie przykładów semi-markowskich modeli niezawodności i eksploatacji.

Praca składa się z 11 rozdziałów.

Wstępny rozdział 1 zawiera elementy teorii jednorodnych łańcuchów Markowa o dyskretnym zbiorze stanów. W rozdziale tym zostały przedstawione najistotniejsze pojęcia i twierdzenia, które były niezbędne do przedstawienia elementów teorii procesów semi-Markowa (SM).

W rozdziale 2 została przedstawiona definicja i podstawowe własności procesu semi-markowskiego o co najwyżej przeliczalnym zbiorze stanów. Podane zostały różne sposoby konstrukcyjnego określania procesu semi-markowskiego. Przedstawiony związek procesu semi-Markowa z procesem Markowa. Zostały podane przykłady procesów semi-markowskich.

W rozdziale 3 zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

W rozdziale 4 został podany sposób komputerowej symulacji procesu SM o skończonym zbiorze stanów.

W rozdziale 5 przedstawiono SM model odnawialnego systemu o strukturze szeregowej przyjmując założenie, że czasy zdatności są zmiennymi losowymi o rozkładach wykładniczych, natomiast czasy obsług maja rozkład dowolny. W oparciu o zbudowany model wyznaczono kilka charakterystyk niezawodnościowe systemu.

Rozdział 6 zawiera SM model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania. Do obliczenia przybliżonej funkcji niezawodności systemu wykorzystano pojęcie i własności zaburzonego procesu SM.

W rozdziale 7 przedstawiono 3-stanowy SM model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne. Sformułowano zagadnienie optymalizacji czasu użytkowania do chwili rozpoczęcia obsługi profilaktycznej. Podano i udowodniono twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania tego zadania.

W rozdziale 8 przedstawiono SM model odnawialnego systemu z zimną rezerwą i wyznaczono pewne charakterystyki i parametry niezawodności tego systemu.

Rozdział 9 zawiera SM model intensywności użytkowania. Omówiono sposób estymacji parametrów modelu oraz sposób matematycznej analizy intensywności użytkowania.

W rozdziale 10 została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywność uszkodzeń. Otrzymano interesujący wynik dla procesu Poissona jako intensywności uszkodzeń. Badano również przypadek losowej intensywności uszkodzeń jako liniowej funkcji procesu obciążeń.

W rozdziale 11 przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie. Rozpatrzono niezawodność wielostanowego systemu nieodnawialnego oraz systemu odnawialnego.

Rozdział 4

Symulacja procesu SM o skończonym zbiorze stanów

Metoda Monte Carlo (MC) to przybliżona metoda rozwiązywania zagadnień matematycznych wykorzystująca symulowane (zazwyczaj komputerowo) eksperymenty losowe, których wyniki są opracowywane i badane metodami statystyki matematycznej.

Jako twórcę metody MC uznano Johna von Neumanna, który w związku z pracami nad bombą atomową (1944) wykorzystał ideę losowych eksperymentów do rozwiązywania konkretnych zadań matematycznych. Metodę MC początkowo wykorzystywano do rozwiązywania zadań fizyki neutronowej, później metodę stosowano w fizyce statystycznej, ekonomii matematycznej, teorii przesyłania sygnałów, teorii obsługi masowej. Metoda ta znalazła również szerokie zastosowanie w teorii niezawodności. Wyznaczanie parametrów i charakterystyk niezawodnościowych projektowanych lub eksploatowanych obiektów technicznych metodami analitycznymi w wielu przypadkach jest trudne, praktycznie niemożliwe. Metoda Monte Carlo te trudności omija. Na metodę MC składają się trzy rodzaje zagadnień:

1. Budowanie generatorów elementów losowych (zmiennych losowych, wektorów losowych, procesów losowych) o określonych charakterystykach probabilistycznych, umożliwiających symulację komputerową realizacji tych elementów losowych.

2. Konstruowanie modeli probabilistycznych opisujących procesy losowe w realnych systemach i ich symulacja komputerowa.

3. Estymacja statystyczna.

Metodą Monte Carlo można symulować procesy semi-markowskie, uzyskując ich realizacje. Mając realizacje można otrzymać empiryczne rozkłady żądanych charakterystyk tego procesu. Najpierw należy jednak skonstruować algorytm generowania realizacji procesu SM.

4.1. Generowanie realizacji procesu semi-markowskiego

Niech $\{X(t) : t \geqslant 0\}$ będzie procesem semi-markowskim o skończonym zbiorze stanów S i o jądrze $\boldsymbol{Q}(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S]$ typu ciągłego i rozkładzie początkowym $\boldsymbol{p}^{(0)} = [\ p_i^{(0)} :\ i \in S\ ]$. W rozdziale 2 zwróciliśmy uwagę na fakt, że proces SM można określić również za pomocą trójki $\left(\boldsymbol{p}^{(0)}, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{F}(t)\right)$, która pozwala zbudować algorytm umożliwiający otrzymanie realizacji procesu SM. Omówimy ogólny algorytm otrzymywania realizacji procesu SM.

Zgodnie z rozkładem początkowym $p^{(0)} = [\, p_i^{(0)} : i \in S \,]$ losowany jest stan początkowy (startowy) procesu. Załóżmy, że wylosowanym stanem okazał się stan $i \in S$. Następnie, zgodnie z rozkładem $[p_{ij} : j \in S]$ określonym przez i-ty wiersz macierzy $\boldsymbol{P}$ wylosowany zostaje stan, do którego następuje najbliższe przejście procesu. Przyjmijmy, że tym stanem jest $j \in S$. Zmiana stanu procesu z $i \in S$ na $j \in S$ następuje po czasie, który jest realizacją zmiennej losowej T_{ij} o rozkładzie określonym przez dystrybuantę $F_{ij}(t)$. Kolejny stan procesu losowany jest zgodnie z rozkładem $[\, p_{jk} : k \in S \,]$ określonym przez j-ty wiersz macierzy $\boldsymbol{P}$, itd.

4.1.1. Algorytm generowania stanu początkowego

Niech U będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie równomiernym $\mathcal{U}(0,1)$ określonym przez dystrybuantę

$$F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0] \\ x & \text{dla} \quad x \in (0,1) \\ 1 & \text{dla} \quad x \in [0, \infty) \end{cases} . \tag{4.1}$$

Niech

$$x_i = \sum_{k=0}^{i} p_k^{(0)}, \quad \text{gdzie} \quad p_0^{(0)} = 0.$$

Zauważmy, że

$$P\{\xi_0 = i\} = p_i^{(0)} = x_i - x_{i-1} = F_U(x_i) - F_U(x_{i-1}) = P\{U \in (x_{i-1}, x_i]\}.$$

Chcąc więc otrzymać realizację stanu początkowego korzystamy z P równości zdarzeń

$$\{\xi_0 = i\} = \{U \in (x_{i-1}, x_i]\}.$$

Stąd

$$i = \min\{l : u > x_{l-1}\}, \tag{4.2}$$

gdzie u jest realizacją zmiennej losowej U.

4.1.2. Algorytm generowania stanów procesu

Jeżeli $i \in S$ jest stanem początkowym procesu SM $\{X(t) : t \geqslant 0\}$, to następny stan procesu otrzymamy przez losowanie zgodnie z rozkładem określonym przez i-ty wiersz macierzy $\boldsymbol{P}$. Niech

$$y_{ij} = \sum_{k=0}^{j} p_{ik}, \quad \text{gdzie} \quad p_{i0} = 0 .$$

Ponieważ

$$P\{\xi_1 = j \mid \xi_0 = i\} = p_{ij} = y_{ij} - y_{ij-1} = F_U(y_{ij}) - F_U(y_{ij-1}) = P\{U \in (y_{ij-1}, y_{ij}]\},$$

więc realizację j zmiennej losowej ξ_1, gdy $\xi_0 = i$ otrzymujemy w oparciu o realizację u niezależnej kopii zmiennej losowej U w oparciu o wzór

$$j = \min\{r : u > y_{ir-1}\}. \tag{4.3}$$

Kolejna realizacja zmiennej losowej U o rozkładzie równomiernym pozwala uzyskać kolejny stan procesu. Wartość zmiennej losowej ξ_2, gdy $\xi_1 = j$ otrzymujemy powtarzając powyższą procedurę zastępując i przez j, itd.

Przedstawimy procedurę generowania stanów włożonego łańcucha Markowa $\{\xi_n : \in \mathbb{N}_0\}$ napisaną w języku TURBO-PASCAL.

Procedura GENERATORST

Występujące tutaj parametry oznaczają odpowiednio:

A – tablica zawierająca parametry rozkładu początkowego generowanego łańcucha semi-markowskiego,

P – macierz prawdopodobieństw przejścia dla łańcucha włożonego,

I – parametr techniczny pozwalający odróżnić sytuację, gdy generujemy stan początkowy łańcucha od sytuacji, gdy stan początkowy jest ustalony,

C – parametr, który na wejściu jest wartością n-tego wyrazu łańcucha, zaś na wyjściu wartością wyrazu o numerze $n + 1$.

```
PROCEDURE GENERATORST (VAR A:ROZ;P:PRZEJ;VAR I,C:INTEGER);
VAR J:INTEGER;S,D:REAL;
BEGIN
   IF I=0 THEN BEGIN
      IF A[2] <> -1 THEN BEGIN
         S:=0;
         U:=RANDOM;
         J:=1;
         WHILE S < U DO BEGIN
            S:=S+A[J];J:=J+1;
            END;
         C:=J-1;
         END ELSE C:=TRUNC(A[1]);
         A[1]:=C;
         END ELSE BEGIN
         S:=0;
         U:=RANDOM;
         J:=1;
         WHILE S < U DO BEGIN
            S:=S+P[C,J];J:=J+1;
            END;
         C:=J-1;
         END;
END;{GENERATORST}
```

4.1.3. Generowanie czasów przejścia między stanami procesu SM

W rozdziale 2 wykazaliśmy, że zmienne losowe $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ są warunkowo niezależne przy ustalonej realizacji łańcucha Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$:

$$P\{\vartheta_1 \leqslant t_1, \vartheta_2 \leqslant t_2 \ldots, \vartheta_n \leqslant t_n \,|\, \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \ldots, \xi_n = i_n\} = \tag{4.4}$$
$$= \prod_{k=1}^{n} P\{\vartheta_k \leqslant t_k \,|\, \xi_k = i_k, \xi_{k-1} = i_{k-1}\}$$

Przypomnijmy, że zmienna losowa o niezależnym od n rozkładzie

$$F_{ij}(t) = P\{\vartheta_{n+1} \leqslant t \,|\, \xi_{n+1} = j, \xi_n = i\}$$

została oznaczona T_{ij}. Wartość tej zmiennej losowej jest realizacją czasu przejścia pomiędzy zmianą stanu z i na j.

Jeżeli ciąg liczbowy $\{i_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ jest realizacją łańcucha Markowa $\{\xi_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, to $\{T_{i_n, i_{n+1}} : n \in \mathbb{N}_0\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych.

Możemy, więc korzystać ze znanych metod generowania realizacji niezależnych zmiennych losowych. Jedną z tych metod opiera się na przekształcaniu realizacji niezależnych kopii zmiennej losowej o standardowym rozkładzie równomiernym.

LEMAT 2. *Niech U, jak poprzednio będzie zmienną losową o standardowym rozkładzie równomiernym $\mathcal{U}(0,1)$. Jeżeli dystrybuanta $F_{ij}(\cdot)$ jest ciągła i monotoniczna w przedziale $[0, \infty)$, to zmienna losowa Y która jest rozwiązaniem równania*

$$F_{ij}(Y) = U \tag{4.5}$$

ma rozkład o dystrybuancie $F_{ij}(\cdot)$.

Dowód:

$$P\{Y \leqslant t\} = P\{F_{ij}(Y) \leqslant F_{ij}(t)\} = P\{U \leqslant F_{ij}(t)\} = F_{ij}(t). \qquad \square$$

Ten znany lemat pozwala generować realizacje zmiennej losowe T_{ij} w oparciu o realizacje zmiennej losowej o rozkładzie $\mathcal{U}(0,1)$.

Dla rozkładu wykładniczego

$$P\{Y \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x > 0,\ \lambda > 0$$

równanie (4.5) przyjmuje postać

$$1 - e^{-\lambda Y} = U\,.$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy związek

$$Y = -\frac{1}{\lambda}\log(1 - U)\,, \tag{4.6}$$

który pozwala otrzymywać realizacje zmiennej losowej $Y = T_{ij}$ o rozkładzie $F_{ij}(\cdot)$ w oparciu o realizacje zmiennej losowej U o rozkładzie równomiernym $\mathcal{U}(0,1)$.

Dla rozkładu Weibulla o dystrybuancie

$$P\{T_{ij} \leqslant x\} = 1 - e^{-\lambda x^a} \quad \text{dla} \quad x > 0,\ \lambda > 0, a > 0$$

generator realizacji zmiennej losowej T_{ij} przyjmuje postać

$$T_{ij} = (\ -\frac{1}{\lambda} log(1 - U)\ )^{\frac{1}{a}}. \tag{4.7}$$

W przypadku rozkładu Erlanga

$$P\{T_{ij} \leq x\} = 1 - (1 + \lambda x + \ldots + \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!})e^{-\lambda x} \quad \text{dla} \quad x > 0, \lambda > 0, k \geq 1$$

znajdujemy przybliżone rozwiązanie równania metodą siecznych. Generator realizacji zmiennej losowej o rozkładzie Erlanga można również znaleźć, korzystając z faktu, że rozkład ten jest rozkładem sumy niezależnych zmiennych losowych o identycznym rozkładzie wykładniczym.

Procedura `GENERATORCZAS` napisana w języku TURBO-PASCAL służy do generowania czasów przejścia między dwoma zadanymi stanami. W procedurze tej przyjęto założenie, że rozkład zmiennej losowej T_{ij} może być rozkładem wykładniczym, Weibulla lub Erlanga.

Parametry procedury `GENERATORCZAS` oznaczają odpowiednio:

$\boldsymbol{B}$ – tablica zawierająca parametry przyjętego rozkładu (dokładnie wartość parametru λ występującą we wszystkich trzech testowanych rozkładach czasów przejścia pomiędzy stanami).

$\boldsymbol{C}$ – tablica zawierająca uzupełniające parametry przyjętych rozkładów czasu przejścia pomiędzy stanami (np. parametr a w rozkładzie Weibulla oraz rząd rozkładu w przypadku rozkładu Erlanga).

$\boldsymbol{L}$ – określa typ rozkładu wybrany indywidualnie dla określonych $i, j \in S$.

$\boldsymbol{I}, J$ – numery stanów pomiędzy, którymi następuje przejście.

$\boldsymbol{T}$ – wygenerowana wartość czasu przejścia pomiędzy stanami i oraz j.

```
PROCEDURE GENERATORCZAS (B,C,L:PRZEJ;I,J:INTEGER;VAR T:INTEGER);
VAR D,R:REAL;
BEGIN
   U:=RANDOM;
     CASE L[I,J] OF
       1:
         T:=-1/B[I,J] * LN(1-U);
       2:
         T:=SIECZNE(B[I,J],U,0,0.1,TRUNC(L[I,J]));
```

```
        3: BEGIN
          R:=1/B[I,J] * LN(1-U);
          T:=EXP (1/C[I,J] * LN(R);
      END;
END;
END;{GENERATORCZAS}
```

Bibliografia

[1] Анисимов В.В.: Предельные теоремы для полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 3, с. 3-15.

[2] Анисимов В.В.: Многомерные предельные теоремы для полумарковских процессов со счетным числом состояний. *Теория вероятностей и математическая статистика,* Изд-во Киевского Университета, Киев 1970, вып. 2, с. 3-21.

[3] Asmussen, S.: *Applied Probability and Queues.* Wiley, Chichester 1987.

[4] Aven T.: Relibility evaluation of multistate systems with multistate components. *IEEE Transac tions on Reliability*, 34(2), 1985, p. 463-472.

[5] Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability.* Wiley, New York, London, Sydney 1965.

[6] Billingsley P.: *Prawdopodobobieństwo i miara.* PWN, Warszawa 1987.

[7] Броди С.М., Погосян И.А.: *Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания.* Наукова Думка, Киев 1977.

[8] Bobrowski D.: *Modele i metody matematyczne teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1985.

[9] Cinlar E.: Markov renewal theory. *Adv. Appl. Probab.* 1969, 1, No 2, p. 123-187.

[10] Cinlar E.: Markov renewal theory: a survey.

[11] Csenki, A.(1994). *Dependability for Systems with a Partitioned State Space Markov and Semi-Markov Theory and Computatinal Implemantation.* Springer-Verlang, New York, Inc. 1994.

[12] Domsta J., Grabski F.: Rozkład losowej chwili pierwszego opuszczenia podzbioru stanów jednorodnego procesu semimarkowskiego. *Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej*, Gdynia, nr. 1/104, 1990, s. 113-125.

[13] DOMSTA J., GRABSKI F.: The first exit of almost strongly recurrent semi-Markov processes. *Applicationes Mathematicae*, 23, No 3 (1995), p. 285-304.

[14] DOMSTA J., GRABSKI F.: Semimarkowskie modele i algorytmy niezawodności odnawialnych systemów z rezerwą. *Preprint*, Uniwersytet Gdański, Instytut Matematyki, 1996, 23 str.

[15] FELLER W.: On semi-Markov prcesses. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA*, 1964, 51, No 4, p. 653-659.

[16] FELLER W.: *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Tom I. PWN, Warszawa 1980.

[17] ГЕРЦБАХ И.Б.: Модели профилактики. Советское Радио, Москва 1969.

[18] GERTSBAKH I.B.: Asymptotic methods in reliability theory: a review. *Adv. Appl. Prob.*, 16, 1984, p. 147-175.

[19] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W.: *Wstęp do teorii procesów stochastycznych.* PWN, Warszawa 1968.

[20] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D.: *Metody matematyczne w teorii niezawodności.* WN-T, Warszawa 1968.

[21] GRABSKI F.: Analiza losowej intensywności użytkowania w oparciu o procesy semi-Markowa. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 3-4 (47-48), 1981, s. 294-305.

[22] GRABSKI F.: Teoria semi-markowskich procesów eksploatacji obiektów technicznych. *Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Marynarki Wojennej*, 75A, Gdynia 1982, 253 str.

[23] GRABSKI F.: O pewnym zagadnieniu optymalizacji obsług profilaktycznych. *Zagadnienia Eksplostacji Maszyn*, Zeszyt 2 (62), 1985, s. 397-407.

[24] GRABSKI F.: Czas pierwszego przejścia procesu semimarkowskiego o dyskretnym zbiorze stanów. *Preprint Katedry Matematyki nr 1*, Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia 1988, 19 str.

[25] GRABSKI F, KOŁOWROCKI K.: Asymptotic reliability of multistate systems with semi-Markov states of components. *Safety and Reliability*, A.A. Balakema, Roterdam 1999, p. 317-322.

[26] GRABSKI F., ZAŁĘSKA-FORNAL A.: Wielostanowe systemy niezawodnościowe z niezależnymi elementami. *KONBiN'2002, ITWL*, Warszawa 2001, s. 143-151.

[27] GRABSKI F.: The reliability of the object with semi-Markov failure rate. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier 2001 (praca w druku).

[28] HOWARD R.: *Dynamic propabilistic system. Vol. II: Semi-Markow and decision processes.* Wiley, New York, London, Sydney, Toronto 1971.

[29] IOSIFESCU M.: *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania.* PWN, Warszawa 1988.

[30] JAŹWIŃSKI J., BORGOŃ J.: *Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów.* WKŁ, Warszawa 1989.

[31] KEILSON, J.: A limit theorem for passage times in ergodic regenerative processes. *Ann. Math. Statist.*, 37 (1966), p. 866–870.

[32] KOŁOWROCKI K.: Asymptotyczne podejście do analizy niezawodnosci stystemów. *Instytut Badań Systemowych PAN*, Seria: Badania Systemowe, tom 27, Warszawa 2001.

[33] KOPOCIŃSKI B.: *Zarys teorii odnowy i niezawodności.* PWN, Warszawa 1973.

[34] KOPOCIŃKA I., KOPOCIŃSKI B.: On system reliability under random load of elements. *Zastosowania Matematyki* (*Aplicationes Mathematicae*), XVI, 1 (1980), p. 5-14.

[35] KOPOCIŃSKA I. The reliability of an element with alternating failure rate. *Zastosowania Matematki*(*Aplicationes Mathematicae*), XVIII, 2 (1984), p. 187-194.

[36] KOPOCIŃSKI B.: List do F.Grabskiego, 1987.

[37] KORCZAK E.: Reliability analysis of non-repaired multistate systems. *Advances in Safety and Reliability*, Lisbon, Portugal 1997, p. 2213-2220.

[38] КОРОЛЮК В.С., ТУРБИН А.Ф.: *Полумарковские процессы и их приложения*, Наукова Думка, Киев 1976.

[39] KOŹNIEWSKA I., WŁODARCZYK M: *Modele odnowy, niezawodności i masowej obsługi.* PWN, Warszawa 1978.

[40] LEE T.C., JUDGE G.G., ZELLNER A.: *Estimating the parameters of the Markov Probability Model from Aggregate Time Series Data.* Amsterdam-London, NHPC 1970.

[41] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A unified approach for reliability and performability evaluation of semi-Markov systems. *Applied Stochastic Models in business and industry*, 15 (1999), p. 353-368.

[42] LIMNIOS N., OPRISAN G.: A The invariance principle for an additive functional of semi-Markov process. *Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics*, T. XLIV, No 1, 1999, p. 75-83.

[43] LIMNIOS N., OPRISAN G.: *Semi-Markov Processes and Reliability.* Boston, Birkhauser 2001.

[44] OLEARCZUK E: *Zarys teorii użytkowania urządzeń technicznych.* WN-T, Warszawa 1972.

[45] PIASECKI S.: *Optymalziacja systemów obsługi technicznej.* WN-T, Warszawa 1972.

[46] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji urządzeń.* WAT, Warszawa 1974.

[47] PIASECKI S.: *Elementy teorii miezawodności i eksploatacji obiektów o elementach wielostanowych.* IBS PAN, Warszawa 1995.

[48] SENETA, E.: Regularly Varying Functions. *Lecture Notes in Math.*, **508** (1976), Springer, Berlin-Heidelberg-New York.

[49] SHIRYAYEV A. N.: *Probability.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1984.

[50] СИЛЬВЕСТРОВ Д.С.: *Полумарковские процессы с дискретным множеством состояний.* Советское Радио, Москва 1969.

[51] SOLOVYEV A.D.: Asymptotic behavior of the time of the first occurence of a rare event. *Engineering Cybernetics*, **9**, 6 (1971), p. 1038–1048.

[52] SOLOVYEV, A.D.: *Analityczne Metody Teorii Niezawodności.* WN-T, Warszawa 1979.

[53] ШПАК В.Д.: Об одном предельном соотношении для расчета надежности сложных систем. *Кибернетика*, 10, 1971, с. 68-73.

Franciszek Grabski

SEMI-MARKOWSKIE MODELE NIEZAWODNOŚCI I EKSPLOATACJI

Procesy semi-markowskie, wprowadzone niezależnie i prawie jednocześnie w latach 1954-55 przez P. Levy'ego, W. L. Smitha, L. Takacsa, są istotnym uogólnieniem procesów Markowa, dzięki czemu dają możliwość konstruowania szerszej klasy losowych modeli, w tym modeli niezawodności. Teoria procesów semi-markowskich rozwija się nadal intensywnie, a jej aplikacje pozwalają rozwiązać niektóre problemy w teorii niezawodności.

W książce zostały przedstawione elementy teorii procesów semi-markowskich o co najwyżej przeliczalnych zbiorach stanów oraz zostały podane przykłady zastosowań tych procesów w problemach niezawodności i eksploatacji.

Zostały omówione charakterystyki procesu semi-markowskiego takie jak: chwila pierwszego osiągnięcia podzbioru stanów, prawdopodobieństwa przejścia, prawdopodobieństwa graniczne, sumaryczny czas przebywania w podzbiorach stanów, proces odnowy generowany przez czasy powrotu. Zostały przedstawione różnego rodzaju zaburzone procesy semi-markowskie oraz procesy kumulacji.

Przedstawiono model odnawialnego systemu o stukturze szeregowej, model funkcjonowania obiektu realizującego różne zadania, model procesu eksploatacji obiektu uwzględniający obsługi profilaktyczne, model odnawialnego systemu z zimną rezerwą oraz model intensywności użytkowania.

Została podana definicja funkcji niezawodności obiektu przy założeniu, że intensywność uszkodzeń jest procesem stochastycznym o określonych własnościach. Badano przypadek semi-markowskiej intensywności uszkodzeń.

Przedstawiono modele systemów wielostanowych, przyjmując założenie, że modelami niezawodnościowymi stanów elementów są szczególne procesy semi-markowskie.

ISSN 0208-8029
ISBN 83-85847-72-3