Raport Badawczy

Research Report

RB/74/2008

Pozycyjne oceny grupowe dla obiektów równoważnych

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POZYCYJNE OCENY GRUPOWE DLA OBIEKTÓW RÓWNOWAŻNYCH

Hanna Bury, Dariusz Wagner
Instytut Badań Systemowych PAN, ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

W praktyce wyznaczania oceny grupowej często zdarza się, że eksperci nie są w stanie jednoznacznie określić czy – w sensie przyjętego kryterium lub zbioru kryteriów - dany obiekt jest lepszy, czy też gorszy od drugiego. W takich sytuacjach należy dopuścić możliwość występowania obiektów równoważnych. Uwzględnienie możliwości występowania obiektów równoważnych w ocenie grupowej jest znacznie trudniejszym zagadnieniem i w wielu metodach wyklucza się taką ewentualność nawet wtedy, gdy w ocenach podanych przez ekspertów występują obiekty równoważne. W pracy omówiono zaproponowany przez Cooka i Seiforda system numerowania pozycji obiektów w uporządkowaniach oraz jego zastosowanie w pozycyjnych metodach wyznaczania oceny grupowej.

1. Wprowadzenie

W rozważaniach dotyczących wyznaczania oceny grupowej zazwyczaj przyjmuje się, że zarówno w ocenach ekspertów, jak i w ocenie grupowej nie występują obiekty równoważne. W praktyce często zdarza się, że eksperci nie są w stanie jednoznacznie określić czy – w sensie przyjętego kryterium lub zbioru kryteriów - dany obiekt jest lepszy, czy też gorszy od drugiego. W takich sytuacjach należy dopuścić możliwość występowania obiektów równoważnych.

Wiele metod wyznaczania oceny grupowej można - po pewnych modyfikacjach - stosować również wtedy, kiedy w ocenach ekspertów występują obiekty równoważne. Uwzględnienie możliwości występowania obiektów równoważnych w ocenie grupowej jest już znacznie trudniejszym zagadnieniem i w wielu metodach wyklucza się taką ewentualność nawet wtedy, gdy w ocenach podanych przez ekspertów występują obiekty równoważne. Odrzucenie założenia o możliwości występowania obiektów równoważnych w istotny sposób ogranicza klasę zadań, jakie mogą być rozwiązywane za pomocą tych metod.

Zaproponowany przez Cooka i Seiforda system numerowania pozycji obiektów pozwala – przynajmniej częściowo - rozwiązać ten problem (Cook i Seiford, 1978, 1982; Bury i Wagner, 2008).

W zagadnieniach związanych z podejmowaniem decyzji grupowych oceny ekspertów mogą mieć różną postać. Niniejsze rozważania zostaną ograniczone do przypadku, gdy oceny ekspertów są podane w postaci uporządkowań.

W pracy zostanie omówione zastosowanie podejścia Cooka i Seiforda w pozycyjnych metodach wyznaczania oceny grupowej. Podstawę tych metod stanowi analiza pozycji obiektów w uporządkowaniach.

2. Zapis pozycji obiektów w uporządkowaniu

Załóżmy, że mamy zbiór n obiektów $\mathcal{O} = \{O_1, \ldots, O_n\}$ oraz grupę K ekspertów, których zadaniem jest uporządkowanie tego zbioru zgodnie z przyjętym kryterium (zbiorem kryteriów). Zazwyczaj przyjmuje się, że obiekt uważany za najlepszy (w sensie przyjętego kryterium lub zbioru kryteriów) jest umieszczony na pierwszej pozycji, zaś obiekt uważany za najgorszy zajmuje ostatnią pozycję.
Najczęściej stosowany zapis uporządkowań, w których dopuszcza się możliwość występowania obiektów równoważnych ma postać $O_{i_1},\ldots,(O_{i_p},\ldots,O_{i_{p+r}}),\ldots,O_{i_n}$, gdzie w nawiasie jest ujęta grupa obiektów równoważnych. Zapis ten będziemy nazywać tradycyjnym. W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że numer pozycji w uporządkowaniu (w zapisie tradycyjnym) jest oznaczony literą j, liczność grupy obiektów równoważnych wynosi r. Armstrong i in. (1982) zaproponowali, aby grupie r obiektów równoważnych $O_{i_p},\ldots,O_{i_{p+r}}$ przypisać pozycję t określoną jako średnia

$$t=\frac{p+(p+1)+\ldots+(p+r-1)}{r}=\frac{2p+(r-1)}{2r}r=p+\frac{r-1}{2}. \tag{1}$$

Jeżeli liczność grupy obiektów równoważnych jest liczbą parzystą, to grupie tej będzie przyporządkowana pozycja $t = (p+r/2)-1/2$ i jest to liczba ułamkowa. Jeżeli zaś r jest liczbą nieparzystą, to $t = p+(r-1)/2$ i jest to liczba całkowita. Zapis ten – w odróżnieniu od tradycyjnego – będzie nazywany połówkowym.

Przy liczbie obiektów równej n, obiektom mogą być przyporządkowane następujące pozycje w uporządkowaniu:

$$\mathcal{T} = \{1, 1½, 2, 2½, 3, 3½, \ldots, n-1, n-½, n\}. \tag{2}$$

Liczba możliwych pozycji wynosi 2n-1.

Przykład 1.

Rozważmy następujące uporządkowania dziesięciu obiektów (w nawiasach okrągłych ujęto obiekty równoważne):

$$\begin{array}{ll} P^1: & \{O_4, O_2, O_9, O_6, O_7, O_{10}, O_8, O_5, O_3, O_1\} \\ P^2: & \{O_6, (O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_7, O_8, O_{10}), O_9\} \\ P^3: & \{(O_3, O_7), O_5, O_4, O_9, (O_2, O_6), (O_1, O_8, O_{10})\} \end{array} \tag{3}$$

Zapis pozycji zajmowanych przez obiekty w uporządkowaniach (w ostatniej kolumnie podano sumę numerów pozycji, na których umieszczone są obiekty):

- tradycyjny

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}	suma
P^1:	10	2	9	1	8	4	5	7	3	6	55
P^2:	2	2	2	2	2	1	2	2	3	2	20
P^3:	6	5	1	3	2	5	1	6	4	6	39

(4)

• połówkowy

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8	O_9	O_{10}	suma	
P^1:	10	2	9	1	8	4	5	7	3	6	55	
P^2:	5,5	5,5	5,5	5,5	5,5	1	5,5	5,5	10	5,5	55	(5)
P^3:	9	6,5	1,5	4	3	6,5	1,5	9	5	9	55	

W zapisie tradycyjnym suma numerów pozycji zajmowanych przez obiekty jest różna w zależności od liczby i rozmieszczenia grup obiektów równoważnych i zmienia się od n (wszystkie obiekty zostały umieszczone na pierwszej pozycji) do n(n+1)/2 (nie ma obiektów równoważnych). Pozycje są numerowane kolejno; w przypadku równoważności obiektów nie wszystkie pozycje są obsadzone.

W zapisie połówkowym suma numerów pozycji zajmowanych przez obiekty jest stała i wynosi n(n+1)/2. Nie wszystkie pozycje ze zbioru $\mathscr{T}$ są obsadzone.

Problem występowania luk w rankingu dotyczy obu systemów zapisu pozycji obiektów. Wagi pozycji obiektów (wyrażone przez numery pozycji) są bardziej zróżnicowane dla zapisu połówkowego. Z tego względu – zdaniem autorów – zapis połówkowy lepiej opisuje rzeczywiste preferencje ekspertów.

Przyjęcie połówkowego zapisu pozycji obiektów umożliwia sformułowanie tabeli struktur oraz modelu optymalizacyjnego wyznaczania oceny grupowej (Bury i Wagner, 2007a, b, 2008). Dla zapisu tradycyjnego pozostaje – poza szczególnymi przypadkami – przeszukiwanie zbioru wszystkich możliwych uporządkowań, co przy większych n może być kłopotliwe. Liczba uporządkowań s_n, jakie należy przeszukać jest dana przybliżoną zależnością $s_n \approx \frac{n!}{2(\log 2)^{n+1}}$ (Bailey, 1998) i dla n=10 wynosi 102 247 563.

Zauważmy, że jeśli nie ma obiektów równoważnych zapisy pozycji – tradycyjny i połówkowy – są jednakowe. Więcej szczegółów dotyczących tego zapisu podano w pracach: Cook i Seiford (1978), Cook (2006), Bury i Wagner (2007a, b).

Podane sposoby zapisu pozycji obiektów mają zarówno zalety, jak i wady; wybór pozostaje w gestii osoby odpowiedzialnej za przeprowadzenie ekspertyzy.

3. Algorytm Bordy wyznaczania oceny grupowej

Jest to jedna z dwóch - obok metody Condorceta - podstawowych metod wyznaczania oceny grupowej. Niektórzy autorzy uważają wręcz, że jest to metoda o stosunkowo małej – w porównaniu z innymi – liczbie wad (Saari, 2000a, b, 2006). Inni, np. Risse (2005), nie podzielają opinii o wyższości tej metody nad innymi, ale uznają, że metoda Condorceta nie jest od niej lepsza. Metoda Bordy dała początek całej rodzinie metod pozycyjnych. Opis różnych metod pozycyjnych oraz przykłady ich stosowania podali Bury i Wagner (2005). Dlatego też możliwość uwzględnienia zapisu połówkowego w algorytmie Bordy wydaje się godna zainteresowania.

Dla usystematyzowania rozważań zostanie przypomniana definicja tzw. wskaźnika Bordy sformułowana dla przypadku, gdy w ocenach ekspertów nie występują obiekty równoważne.

Wskaźnik Bordy jest określony, jak następuje:

$$WB_i = \sum_{j=1}^{n} (n-j)\vartheta_i^j \ , i, j = 1...n, \ \sum_{j=1}^{n} \vartheta_i^j = K \tag{6}$$

gdzie i – numer obiektu, j – numer pozycji,

ϑ_i^j – liczba ekspertów, którzy umieścili obiekt O_i na pozycji j,

$(n–j)$ – waga przyporządkowana obiektom stojącym na pozycji j.

Niech l_{ih} oznacza liczbę ekspertów, którzy uznali, że obiekt O_i jest lepszy od obiektu O_h. Dla uproszczenia, będziemy stosować oznaczenie $O_i \succ O_h$. Współczynniki l_{ih} wyznaczają tzw. macierz rozkładu głosów ekspertów (Nurmi, 1987)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & O_1 & O_2 & \cdots & O_n \\ \hline O_1 & - & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ \hline O_2 & l_{21} & - & \cdots & l_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O_n & l_{n1} & l_{n2} & \cdots & - \end{array} \ , \text{ gdzie } l_{ih} + l_{hi} = K; i, h = 1,\dots,n. \tag{7}$$

Wskaźnik Bordy można również wyznaczyć na podstawie sumy elementów danego wiersza macierzy rozkładu głosów ekspertów (Nurmi, 1987)

$$WB_i = \sum_{h=1}^{n} l_{ih} \ . \tag{8}$$

Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt O_i, dla którego $WB_i = WB_{max} = \max_i WB_i$.

Mamy $WB_{max} \le (n-1)K$. Równość zachodzi w przypadku, gdy wszyscy eksperci uznają, że dany obiekt jest lepszy od pozostałych.

Bezpośrednie zastosowanie podanych definicji wskaźnika Bordy oraz macierzy rozkładu głosów ekspertów w przypadku, gdy w uporządkowaniach ekspertów występują obiekty równoważne może prowadzić do różnicy wyników uzyskanych za pomocą wzorów (6) oraz (8).

Przykład 2.

Załóżmy, że dany jest zbiór 6 obiektów oraz ich uporządkowania podane przez siedmiu ekspertów. Obiekty równoważne ujęto w nawiasach okrągłych, po prawej stronie podano pozycje zajmowane przez obiekty (w zapisie tradycyjnym).

Zwycięzcą w sensie (6) jest obiekt O_3, zaś uporządkowanie obiektów według malejących wartości wskaźników Bordy ma postać $\{O_3, O_1, O_5, (O_2, O_6), O_4\}$.

P^1: $\{O_2, O_1, (O_3, O_4, O_5, O_6)\}$
P^2: $\{O_3, O_5, O_6, O_4, O_1, O_2\}$
P^3: $\{(O_1, O_5, O_6), (O_3, O_4), O_2\}$
P^4: $\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$
P^5: $\{(O_2, O_3), O_5, O_4, (O_1, O_6)\}$
P^6: $\{O_1, O_5, O_6, O_3, O_4, O_2\}$
P^7: $\{O_6, (O_2, O_3), (O_1, O_4), O_5\}$

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
P^1:	2	1	3	3	3	3
P^2:	5	6	1	4	2	3
P^3:	1	3	2	2	1	1
P^4:	1	2	3	4	5	6
P^5:	4	1	1	3	2	4
P^6:	1	6	4	5	2	3
P^7:	3	2	2	3	4	1

(9)

$$\begin{aligned}
WB_1 &= 3\cdot5+1\cdot4+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 &&=25\\
WB_2 &= 2\cdot5+2\cdot4+1\cdot3+0\cdot2+0\cdot1 &&=21\\
WB_3 &= 2\cdot5+2\cdot4+2\cdot3+1\cdot2+0\cdot1 &&=26\\
WB_4 &= 0\cdot5+1\cdot4+3\cdot3+2\cdot2+1\cdot1 &&=18\\
WB_5 &= 1\cdot5+3\cdot4+1\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 &&=23\\
WB_6 &= 2\cdot5+0\cdot4+3\cdot3+1\cdot2+0\cdot1 &&=21
\end{aligned} \tag{10}$$

Macierz rozkładu głosów ekspertów wyznaczona według (8) ma postać

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	WB_i
O_1	0	4	4	4	4	3	19
O_2	3	0	2	4	4	3	16
O_3	3	3	0	5	4	3	18
O_4	2	3	0	0	2	2	9
O_5	2	3	2	4	0	4	15
O_6	2	4	3	4	1	0	14

(11)

Zwycięzcą w sensie (8) jest obiekt O_1, a uporządkowanie obiektów według malejących wartości WB_i ma postać $\{O_1, O_3, O_2, O_5, O_6, O_4\}$. Ponadto wartości wskaźników Bordy wyznaczone na podstawie (6) i (8) różnią się.

Aby zlikwidować tę rozbieżność wprowadzono modyfikację macierzy rozkładu głosów ekspertów oraz wykorzystano pozycje połówkowe do obliczania wskaźnika Bordy.

Zgodnie z metodą Bordy wagi przyporządkowane obiektom stojącym na poszczególnych pozycjach są, jak następuje

t	1	1½	2	2½	…..	n-1	n-½	n
w_t	n-1	n-1½	n-2	n-2½	…..	1	½	0

(12)

Ogólnie dla pozycji połówkowej t mamy wagę w_t = n-t.

Niech ϑ_i^t oznacza liczbę ekspertów, którzy umieścili obiekt O_i na pozycji t.

Wskaźnik Bordy dla obiektu O_i wynosi

$$WB_i = \sum_{t\in\mathcal{T}} w_t \vartheta_i^t = \sum_{t\in\mathcal{T}} (n-t)\vartheta_i^t = \sum_{t\in\mathcal{T}} n\vartheta_i^t - \sum_{t\in\mathcal{T}} t\vartheta_i^t \,, \qquad i, = 1...n,\ t \in \mathcal{T}. \tag{13}$$

Mamy $\sum_{t\in\mathcal{T}} \vartheta_i^t = K$ (14)

czyli $WB_i = nK - \sum_{t\in\mathcal{T}} t\vartheta_i^t$. (15)

Niech m_{ih} oznacza liczbę ekspertów, których zdaniem obiekty O_i i O_h są równoważne, tzn. $O_i \approx O_h$ oraz

$$\overline{l_{ih}} = l_{ih} + 0{,}5m_{ih} \,. \tag{16}$$

Zależność (8) musi ulec następującej modyfikacji:

$$\overline{WB_i} = \sum_{h=1}^{n} \overline{l_{ih}} = \sum_{h=1}^{n} (l_{ih} + 0{,}5m_{ih}) \,. \tag{17}$$

Mamy również $\overline{l_{ih}} + \overline{l_{hi}} = l_{ih} + 0{,}5m_{ih} + l_{hi} + 0{,}5m_{ih} = l_{ih} + l_{hi} + m_{ih} = K$.

Z porównania wzorów (15) i (17) wynika, że $\overline{WB_i} = WB_i$.

Przykład 3.

Ponownie rozpatrzymy uporządkowania podane w przykładzie 2. Po prawej stronie podano zapis połówkowy pozycji zajmowanych przez obiekty.

P^1: $\{O_2, O_1, (O_3, O_4, O_5, O_6)\}$
P^2: $\{O_3, O_5, O_6, O_4, O_1, O_2\}$
P^3: $\{(O_1, O_5, O_6), (O_3, O_4), O_2\}$
P^4: $\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6\}$
P^5: $\{(O_2, O_3), O_5, O_4, (O_1, O_6)\}$
P^6: $\{O_1, O_5, O_6, O_3, O_4, O_2\}$
P^7: $\{O_6, (O_2, O_3), (O_1, O_4), O_5\}$

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
P^1:	2	1	4,5	4,5	4,5	4,5
P^2:	5	6	1	4	2	3
P^3:	2	6	4,5	4,5	2	2
P^4:	1	2	3	4	5	6
P^5:	5,5	1,5	1,5	4	3	5,5
P^6:	1	6	4	5	2	3
P^7:	4,5	2,5	2,5	4,5	6	1

(18)

Macierz rozkładu ekspertów wyznaczona na podstawie zależności (16) ma postać:

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	WB_i
O_1	0	4	4	4,5	4,5	4	21
O_2	3	0	3	4	4	3	17
O_3	3	4	0	6	4,5	3,5	21
O_4	2,5	3	1	0	2,5	2,5	11,5
O_5	2,5	3	2,5	4,5	0	5	17,5
O_6	3	4	3,5	4,5	2	0	17

(19)

Wskaźniki Bordy wyznaczone na podstawie (15) mają następujące wartości:

obiekt	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
WB_i	21	17	21	11,5	17,5	17

(20)

Wyniki otrzymane za pomocą zależności (15) i (17) są zgodne. Zwycięzcami w sensie Bordy są obiekty O_1 i O_3, zaś uporządkowanie obiektów według malejących wartości wskaźników Bordy ma postać $\{(O_1, O_3), O_5, (O_2, O_6), O_4\}$.

W pewnych przypadkach algorytm Bordy daje niejednoznaczne wyniki, to znaczy kilka obiektów ma tę samą wartość WB_i. Poniższy przykład pokazuje, że nawet w przypadku, gdy w ocenach ekspertów nie ma obiektów równoważnych, w ocenie grupowej mogą wystąpić grupy obiektów równoważnych.

Przykład 4.

Załóżmy, że dany jest zbiór 5 obiektów oraz ich uporządkowania podane przez pięciu ekspertów. W uporządkowaniach nie ma obiektów równoważnych, po prawej stronie podano pozycje zajmowane przez obiekty (w zapisie tradycyjnym, w tym przypadku równoważnym zapisowi połówkowemu):

P^1: $\{O_3, O_1, O_5, O_4, O_2\}$
P^2: $\{O_3, O_4, O_1, O_5, O_2\}$
P^3: $\{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5\}$
P^4: $\{O_3, O_4, O_1, O_2, O_5\}$
P^5: $\{O_4, O_1, O_5, O_2, O_3\}$

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P^1:	2	5	1	4	3
P^2:	3	5	1	2	4
P^3:	1	2	3	4	5
P^4:	3	4	1	2	5
P^5:	2	4	5	1	3

(21)

Wskaźniki Bordy mają wartości

obiekt	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
WB_i	14	5	14	12	5

(22)

Zwycięzcami w sensie Bordy są obiekty O_1 oraz O_3, zaś uporządkowanie obiektów według malejących wartości wskaźników Bordy ma postać $\{(O_1, O_3), O_4, (O_2, O_5)\}$.

4. Wyznaczanie oceny grupowej metodą minimalizacji odległości

Ocena grupowa może być wyznaczana jako uporządkowanie $\hat{P}$ najmniej odległe – w sensie przyjętej odległości d – od danego zbioru uporządkowań $\{P^k\}$ podanych przez ekspertów. Problem ten może być sformułowany następująco:

$$\min_P \sum_{k=1}^{K} d(P^k, P) \rightarrow \hat{P}\,. \tag{23}$$

Zadanie to może być rozwiązywane np. metodą przeglądu zupełnego. Stosowanie tego podejścia ogranicza, jak wspomniano, rosnąca liczba uporządkowań, jakie należy przeszukać. Alternatywą jest rozwiązanie odpowiednio sformułowanego zadania optymalizacji.

Odległość między uporządkowaniami może być definiowana w różny sposób. Do celów niniejszej pracy ograniczamy się do definicji wykorzystujących pozycje obiektów w uporządkowaniach. Zazwyczaj przyjmuje się, że

$$d(P,P^{(k)}) = \sum_{k=1}^{K} d(P,P^k) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{n} f(q_i^k - q_i)\,, \tag{24}$$

gdzie

q_i^k oznacza pozycję zajmowaną przez obiekt i w uporządkowaniu podanym przez k-tego eksperta,

q_i oznacza pozycję zajmowaną przez obiekt i w uporządkowaniu P.

Przyjmując $f(q_i^k - q_i) = \left|q_i^k - q_i\right|$, otrzymuje się odległość zdefiniowaną przez Cooka i Seiforda (1978).

W przypadku braku obiektów równoważnych zadanie (23) może być sformułowane jako liniowe zagadnienie przydziału (Hwang i Lin, 1987).

Zakładając, że obiekt O_i zajmuje j-tą pozycję w uporządkowaniu P, odległość (24) można zapisać w postaci

$$d(P,P^{(k)}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_{ij}\,, \tag{25}$$

gdzie: $d_{ij} = \sum_{k=1}^{K} f(q_i^k - j)$, (26)

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } O_i \text{ zajmuje pozycję j w uporządkowaniu P} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{27}$$

oraz $\underset{i=1,\ldots,n}{\forall} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = 1$, (28)

$$\underset{j=1,\ldots,n}{\forall} \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1\,. \tag{29}$$

W przypadku występowania obiektów równoważnych - w ocenach ekspertów i/ lub w ocenie grupowej - zadanie (23) może być, po wprowadzeniu dodatkowych ograniczeń, rozwiązywane jako liniowe zadanie optymalizacji całkowitoliczbowej (Bury i Wagner, 2008). Cook i Seiford (1982) – wykorzystując pomysł Kendalla – zaproponowali, aby jako funkcję f przyjąć kwadrat różnicy $(q_i^k - q_i)$. Zadanie (23) przyjmie wtedy postać

$$\min_B M(B) = \sum_{i=1}\sum_{k=1}^{K} (q_i^k - q_i)^2 \to \hat{B}\quad , \tag{30}$$

Kendall (1962) udowodnił, że w przypadku braku obiektów równoważnych uporządkowanie $\hat{B}$ i uporządkowanie wyznaczone metodą Bordy są takie same.

Przykład 5

Załóżmy, że dany jest zbiór 6 obiektów oraz ich uporządkowania podane przez jedenastu ekspertów. W uporządkowaniach nie ma obiektów równoważnych, po prawej stronie podano pozycje zajmowane przez obiekty (w zapisie tradycyjnym, w tym przypadku równoważnym zapisowi połówkowemu):

			O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	
P^1:	$\{O_1, O_4, O_3, O_2, O_5, O_6\}$	P^1:	1	4	3	2	5	6	
P^2:	$\{O_1, O_3, O_5, O_2, O_4, O_6\}$	P^2:	1	4	2	5	3	6	
P^3:	$\{O_5, O_1, O_2, O_6, O_3, O_4\}$	P^3:	2	3	5	6	1	4	
P^4:	$\{O_1, O_2, O_5, O_3, O_6, O_4\}$	P^4:	1	2	4	6	3	5	
P^5:	$\{O_1, O_3, O_5, O_6, O_2, O_4\}$	P^5:	1	5	2	6	3	4	
P^6:	$\{O_1, O_3, O_5, O_2, O_6, O_4\}$	P^6:	1	4	2	6	3	5	(31)
P^7:	$\{O_1, O_3, O_2, O_5, O_6, O_4\}$	P^7:	1	3	2	6	4	5	
P^8:	$\{O_1, O_3, O_5, O_6, O_2, O_4\}$	P^8:	1	5	2	6	3	4	
P^9:	$\{O_3, O_5, O_2, O_1, O_6, O_4\}$	P^9:	4	3	1	6	2	5	
P^{10}:	$\{O_1, O_2, O_3, O_5, O_4, O_6\}$	P^{10}:	1	2	3	5	4	6	
P^{11}:	$\{O_3, O_1, O_5, O_6, O_2, O_4\}$	P^{11}:	2	5	1	6	3	4	

Wskaźniki Bordy mają wartości

obiekt	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
WB_i	50	26	39	6	32	12

(32)

Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt O_1, zaś uporządkowanie obiektów według malejących wartości wskaźników Bordy ma postać $\{O_1, O_3, O_5, O_2, O_6, O_4\}$.

Zadanie (30) ma w tym przypadku jednoznaczne rozwiązanie; jest nim uporządkowanie $\{O_1, O_3, O_5, O_2, O_6, O_4\}$, dla którego odległość $M(\hat{B}) = 78$. Zadanie to zostało rozwiązane jako uogólnione zadanie przydziału sformułowane z wykorzystaniem tzw. tabeli struktur (Bury i Wagner, 2007a,b, 2008); do obliczeń zastosowano pakiet CPLEX.

Następny przykład ilustruje przypadek, gdy przy braku równoważności w ocenach ekspertów ocena grupowa zawiera obiekty równoważne.

Przykład 6.

Załóżmy, że dany jest zbiór 5 obiektów oraz ich uporządkowania podane przez jedenastu ekspertów. W uporządkowaniach nie ma obiektów równoważnych, po prawej stronie podano pozycje zajmowane przez obiekty (w zapisie tradycyjnym, w tym przypadku równoważnym zapisowi połówkowemu):

			O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
P^1:	$\{O_3, O_5, O_2, O_4, O_1\}$	P^1:	5	3	1	4	2

P^2:	$\{O_1, O_5, O_4, O_3, O_2\}$	P^2:	1	5	4	3	2	
P^3:	$\{O_3, O_1, O_5, O_2, O_4\}$	P^3:	2	4	1	5	3	
P^4:	$\{O_2, O_1, O_3, O_4, O_5\}$	P^4:	2	1	3	4	5	
P^5:	$\{O_5, O_2, O_3, O_4, O_1\}$	P^5:	5	2	3	4	1	
P^6:	$\{O_3, O_5, O_2, O_1, O_4\}$	P^6:	4	3	1	5	2	(33)
P^7:	$\{O_3, O_1, O_5, O_4, O_2\}$	P^7:	2	5	1	4	3	
P^8:	$\{O_5, O_3, O_4, O_1, O_2\}$	P^8:	4	5	2	3	1	
P^9:	$\{O_5, O_2, O_3, O_4, O_1\}$	P^9:	5	2	3	4	1	
P^{10}:	$\{O_3, O_5, O_1, O_4, O_2\}$	P^{10}:	3	5	1	4	2	
P^{11}:	$\{O_2, O_5, O_1, O_3, O_4\}$	P^{11}:	3	1	4	5	2	

Wskaźniki Bordy mają wartości

obiekt	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
WB_i	19	19	31	10	31

(34)

Zwycięzcami w sensie Bordy są obiekty O_3 i O_5, zaś uporządkowanie obiektów według malejących wartości wskaźników Bordy ma postać $\{(O_3, O_5), (O_1, O_2), O_4\}$. Rozwiązaniem zadania (30) jest uporządkowanie:

$\{(O_3, O_5), (O_1, O_2), O_4)\}$, dla którego odległość $M(\hat{B})$=25,25. (35)

Jeśli narzucimy ograniczenie, że w ocenie grupowej nie może być obiektów równoważnych, otrzymujemy cztery rozwiązania, dla których odległość $M(\hat{B})$=28:

$\{O_3, O_5, O_1, O_2, O_4\}$ (36)

$\{O_3, O_5, O_2, O_1, O_4\}$ (37)

$\{O_5, O_3, O_1, O_2, O_4\}$ (38)

$\{O_5, O_3, O_2, O_1, O_4\}$. (39)

Zadanie (30) - w przypadku występowania obiektów równoważnych w uporządkowaniach podanych przez ekspertów - może mieć rozwiązania niezgodne z otrzymanymi metodą Bordy, co ilustruje kolejny przykład. Pokazuje on, że w przypadku występowania obiektów równoważnych twierdzenie Kendalla może nie być spełnione.

Przykład 7.

Załóżmy, że dany jest zbiór 7 obiektów oraz ich uporządkowania podane przez jedenastu ekspertów. W uporządkowaniach występują obiekty równoważne, po prawej stronie podano pozycje zajmowane przez obiekty (w zapisie połówkowym):

			O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_4	O_5
P^1:	$\{O_1, (O_3, O_6), O_5, (O_2, O_4, O_7)\}$	P^1:	1	6	2,5	6	4	2,5	6
P^2:	$\{O_2, O_1, O_3, O_7, O_4, O_5, O_6\}$	P^2:	2	1	3	5	6	7	4

P^3: $\{O_5, O_1, O_3, (O_6, O_7), O_2, O_4\}$	P^3:	2	6	3	7	1	4,5	4,5	
P^4: $\{O_1, O_3, O_6, O_5, O_2, O_7, O_4\}$	P^4:	1	5	2	7	4	3	6	
P^5: $\{O_6, (O_3, O_4, O_5), O_1, O_7, O_2\}$	P^5:	5	7	3	3	3	1	6	
P^6: $\{O_5, O_1, O_3, O_6, O_7, O_2, O_4\}$	P^6:	2	6	3	7	1	4	5	(40)
P^7: $\{(O_1, O_6), (O_3, O_4, O_7), O_2, O_5\}$	P^7:	1,5	6	4	4	7	1,5	4	
P^8: $\{O_6, O_5, O_3, O_4, O_1, O_7, O_2\}$	P^8:	5	7	3	4	2	1	6	
P^9: $\{O_4, O_6, O_1, (O_3, O_7), (O_2, O_5)\}$	P^9:	3	6,5	4,5	1	6,5	2	4,5	
P^{10}: $\{O_6, O_1, O_5, O_4, O_7, O_2, O_3\}$	P^{10}:	2	6	7	4	3	1	5	
P^{11}: $\{O_2, O_6, O_5, O_4, O_1, O_7, O_3\}$	P^{11}:	5	1	7	4	3	2	6	

Wskaźniki Bordy mają wartości

obiekt	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7
WB_i	48	20	35	25	37	48	20

(41)

Zwycięzcą w sensie Bordy jest obiekt O_1, zaś uporządkowanie obiektów według malejących wartości wskaźników Bordy ma postać $\{(O_1, O_6), O_5, O_3, O_4, (O_2, O_7)\}$. Rozwiązaniem zadania (30) jest uporządkowanie:

$$\{(O_1, O_6), (O_3, O_5), (O_2, O_4, O_7)\},\ M(\hat{B})=286. \qquad (42)$$

Jeżeli ze względu na warunki ekspertyzy w ocenie grupowej nie mogą występować obiekty równoważne, wówczas rozwiązaniem zadania (30) jest uporządkowanie

$$\{O_6, O_1, O_5, O_3, O_4, O_7, O_2\},\ M(\hat{B})=306,5. \qquad (43)$$

Ułamkowa wartość odległości (43) wynika z faktu, że do opisu pozycji obiektów równoważnych w uporządkowaniach ekspertów zastosowano zapis połówkowy.

Żadne z rozwiązań nie jest zgodne z uporządkowaniem otrzymanym metodą Bordy.

5. Uwagi końcowe

Jeżeli warunki zadania wyznaczania oceny grupowej w przypadku możliwości występowania obiektów równoważnych uzasadniają przyjęcie definicji odległości między uporządkowaniami zgodnej z (30), wówczas można uznać, że zaproponowany przez Cooka i Seiforda (1982) sposób wyznaczania oceny grupowej jest akceptowalny. W zależności od liczności zbioru obiektów zadanie (30) może być – jak wspomniano - rozwiązywane za pomocą przeglądu zbioru dopuszczalnych rozwiązań, bądź można sformułować i rozwiązać uogólnione zadanie przydziału za pomocą pakietów optymalizacyjnych (Bury i Wagner, 2008). Cook i Seiford (1982) zastosowali do rozwiązania zadania (30) metodę podziału i ograniczeń.

Zapis połówkowy pozycji obiektów w uporządkowaniach pozwolił na rozwiązanie niektórych problemów związanych z wyznaczaniem pozycyjnej oceny grupowej.

Literatura

Armstrong R.D., Cook W.D., Seiford L.M. (1982) Priority ranking and consensus formation: The case of ties. *Management Science*, **28**, 6, 638-645.

Bailey R.W. (1998) The number of weak orderings of a finite set. *Social Choice and Welfare*, **15**, 559-562.

Bury H., Wagner D. (2005) Some positional methods of group judgement – a unified approach. *Proceedings of 11th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2005*, Międzyzdroje, Poland, 869-874.

Bury H., Wagner D. (2007a) Determining group judgement when ties can occur. *Proceedings of 13th IEEE IFAC International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics MMAR 2007*, Szczecin, Poland, 779-784.

Bury H., Wagner D. (2007b) Zastosowanie mediany Litvaka do wyznaczania oceny grupowej w przypadku występowania obiektów równoważnych. *Studia i Materiały Polskiego Stowarzyszenia Zarządzania Wiedzą*, **10**, Bydgoszcz, 19-34.

Bury H., Wagner D. (2008) Group Judgement With Ties. Distance-Based Methods, W: H. Aschemann, red, *New Approaches in Automation and Robotics*, I-Tech, 153-172.

Cook W.D. (2006) Distance-based and ad hoc consensus models in ordinal preference ranking. *European Journal of Operational Research*, **172**, 369-385.

Cook W.D., Seiford L.M. (1978) Priority ranking and consensus formation. *Management Science*, **24**, 16, 1721-1732.

Cook W.D., Seiford L.M. (1982) On the Borda-Kendall consensus method for priority ranking problem. *Management Science*, **28**, 6, 621-637.

Hwang C.-L., Lin M.J. (1987) *Group Decision Making under Multiple Criteria*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.

Kendall M. (1962) *Rank Correlation Methods*. Hafner, New York.

Nurmi H. (1987) *Comparing Voting Systems*. Kluwer, Dordrecht/ Boston/ Lancaster, Tokio.

Risse M. (2005) Why the Count de Borda cannot beat the Marquis de Condorcet. *Social Choice and Welfare*, **25**, 95-113.

Saari D.G. (2000a) Mathematical structure of voting paradoxes. I - Pairwise votes. *Economic Theory*, **15**, 1-53.

Saari D.G. (2000b) Mathematical structure of voting paradoxes. II - Positional vote, *Economic Theory*, **15**, 55-102.

Saari D.G. (2006) Which is better: the Condorcet or Borda winner. *Social Choice and Welfare*, **26**, 107-129.