SOPRA UNA CLASSE DI ALGEBRE PSEUDONULLE (*)

Un classico teorema dello WEDDERBURN, di cui recentemente ho avuto occasione di ampliare la portata (1), mostra di quanta importanza sia per la teoria generale delle algebre l'approfondire lo studio delle algebre che o sono primitive o sono pseudonulle.

Da ciò la serie di Note (2), che su quest'ultime vengo pubblicando, e che non credo del tutto inutile proseguire con la presente determinazione di una notevole classe di algebre pseudonulle.

Come è ben risaputo, l'indice di un'algebra pseudonulla di ordine n è, al più, $n + 1$, e, secondo un bel teorema del FROBENIUS, quelle d'ordine n, per le quali l'indice è $n + 1$, sono nient'altro che le algebre (pseudonulle) potenziali.

Ebbene, oggetto di quanto segue è la netta caratterizzazione delle algebre pseudonulle d'ordine e indice n, definite in un corpo numerico qualsiasi: e, come può vedersi da ciò che è detto nei n^i 4, 9, 10, i risultati che così si incontrano non sembrano sprovvisti nè d'interesse, nè di eleganza.

(*) *Atti Reale Accad. di Scienze di Torino,* 70 (1934-35), pp. 195-211.

(1) G. SCORZA, *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, agosto 1934].

(2) G. SCORZA, *a) Sulla struttura delle algebre pseudonulle* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, settembre 1934]; *b) Le algebre per ciascuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale* [Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, novembre 1934]; *c) Sulle algebre pseudonulle di ordine massimo* (Nota accolta per il volume degli *Annali di matematica* che uscirà nel 1935).

1. Sia A un'algebra pseudonulla d'ordine e indice n (≥ 2) in un qualsiasi corpo numerico Γ. Sarà

$$A > A^2 > A^3 \ldots > A^{n-1} > A^n = 0 ;$$

e poichè, da una parte lo *scarto* di A (cioè la differenza degli ordini di A ed A^2) non può essere 1 — chè altrimenti A sarebbe potenziale e d'indice $n + 1$ (³) —, dall'altra, l'ordine di A^{n-1} è ≥ 1, gli ordini delle algebre

$$A^2 , A^3 , \ldots , A^{n-2} , A^{n-1}$$

saranno necessariamente

$$n - 2 , \qquad n - 3 , \ldots 2 , 1 .$$

Ciò posto, dico che:

Se $n > 3$, A possiede certo degli elementi di rango n, cioè degli elementi con la potenza di esponente $n - 1$ non nulla.

Supponiamo, se è possibile, che ciò non sia e indichiamo con $u_1 , u_2 , \ldots , u_{n-1} , u_n$ un aggregato di unità di A, tali che u_1 ed u_2 siano esterne ad A^2 e

A^2	sia il sistema generato da	$u_3 , u_4 , \ldots , u_{n-1} , u_n ;$
A^3	» » » » »	$u_4 , \ldots , u_{n-1} , u_n ;$
. . . . .	. . . .	. . . .
A^{n-2}	» » » » »	$u_{n-1} , u_n ;$
A^{n-1}	» » » » »	$u_n .$

Essendo

$$A^{n-1} = A \cdot A^{n-2} ,$$

il sistema generato dagli elementi del tipo

$$u_i \, u_{n-1} \qquad \text{o} \qquad u_i \, u_n$$

è A^{n-1}.

(³) Loc. cit. (²) *a*), n⁰ 2.

Ora i prodotti del tipo $u_i u_n$ sono tutti nulli, e tali sono pure i prodotti del tipo $u_i u_{n-1}$ con $i > 2$, riuscendo sì quelli che questi elementi di potenze di A con esponenti non inferiori ad n, dunque il sistema generato da

$$(1) \qquad u_1 u_{n-1} \quad \text{e} \quad u_2 u_{n-1}$$

è A^{n-1}.

D'altronde A^{n-1} è l'insieme dei multipli scalari di u_n, dunque per almeno uno dei prodotti (1), poniamo per $u_1 u_{n-1}$, si ha

$$u_1 u_{n-1} = \alpha u_n ,$$

con $\alpha \neq 0$.

Ciò posto, facciamo vedere che ogni prodotto di potenze di u_1 e u_2, pel quale la somma degli esponenti sia uguale ad $n-2$, è un multiplo scalare di u_n.

Sia, infatti, v un prodotto di tal natura: esso sarà evidentemente un elemento di A^{n-2}, quindi si potrà porre intanto

$$(2) \qquad v = \lambda u_{n-1} + \mu u_n ,$$

con λ e μ numeri di Γ [4].

Badando che $u_1 u_n = 0$ dalla (2) si deduce

$$u_1 v = \lambda u_1 u_{n-1} = \alpha\lambda u_n ,$$

quindi, essendo $\alpha \neq 0$, sarà dimostrato che nella (2) è $\lambda = 0$ quando sia stabilito che $u_1 v$ è nullo.

Al pari di v, $u_1 v$ è un prodotto di potenze di u_1 e u_2, dove la somma degli esponenti è però $n-1$; inoltre in $u_1 v$ il primo fattore, o è una potenza di u_1 con esponente superiore di una unità a quello della potenza di u_1 con la quale si inizia il prodotto v, o è u_1, mentre quello di v era una potenza di u_2.

[4] È qui che gioca l'ipotesi $n > 3$; se fosse $n = 3$ sarebbe $A^{n-2} = A$ ed A^{n-2} non sarebbe di ordine 2. Aggiungasi che quando $n = 3$ il teorema che qui si dimostra per $n > 3$ può cadere realmente in difetto [cfr. G. Scorza, *Le algebre del 3⁰ ordine*, « Atti della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli », vol. XX, serie 2ª, nº 13].

Per $n = 2$ A riesce una zero-algebra e il teorema è ancora valido, ma diventa, com'è naturale, ben poco significativo.

Ora si indichi con w il prodotto che si ottiene da $u_1 v$ sopprimendovi a destra un fattore u_1 o u_2, secondo che il prodotto v termina con una potenza di u_1 o di u_2; in w la somma degli esponenti delle potenze di u_1 e u_2 che vi compariscono sarà, come in v, $n-2$. Intanto, se si suppone che w sia un multiplo scalare di u_n il prodotto $u_1 v$, eguale a wu_1 o wu_2, riesce veramente nullo, dunque l'asserzione fatta sarà dimostrata vera per v, quando sia dimostrata tale per w.

Si ripeta su w il ragionamento fatto per v e così si prosegua; si finirà per riconoscere che la proprietà enunciata sarà stabilita per tutti i prodotti presi in esame quando sia stabilita per u_1^{n-2}.

Ora ciò è una conseguenza immediata dell'ipotesi fatta, che A non contenga elementi di rango n; giacchè per tale ipotesi è $u_1^{n-1} = 0$, e dunque, se si pone

$$u_1^{n-2} = \lambda' u_{n-1} + \mu' u_n ,$$

con λ' e μ' numeri di Γ, dovendo risultare

$$0 = u_1^{n-1} = u_1 \cdot u_1^{n-2} = \lambda' u_1 \, u_{n-1} = \alpha \lambda' u_n$$

ed essendo $\alpha \neq 0$, sarà $\lambda' = 0$.

Ciò posto, si badi che A^{n-2} è il sistema generato dai prodotti del tipo

$$u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_{n-2}} , \tag{3}$$

dove $(i_1, i_2, \dots, i_{n-2})$ è una qualsiasi disposizione con eventuali ripetizioni degli indici $1, 2, \dots, n$. Ma il prodotto (3) è in A^{n-1}, per quanto or ora è stato stabilito, se gli indici $i_1, i_2, \dots, i_{n-2}$ sono tutti eguali ad 1 o 2; ed è in A^{n-1} anche se uno solo degli indici i, per es. i_1, è maggiore di 2, perchè allora u_i appartiene ad A^{i_1-1} e quindi il prodotto (3) appartiene ad una potenza di A con esponenti non inferiori ad

$$n - 3 + (i_1 - 1) = n + i_1 - 4 \geq n - 1 ;$$

dunque è $A^{n-2} = A^{n-1}$, mentre A^{n-2} è di ordine 2 e A^{n-1} di ordine 1.

L'assurdo cui siamo pervenuti mostra che A, come volevasi, ammette necessariamente degli elementi di rango n.

2. In conformità del teorema ora dimostrato, si indichi con v un elemento di A col rango n, di guisa che

$$(4) \qquad v\,,\, v^2\,,\, v^3\,,\, \dots\,,\, v^{n-1}$$

saranno $n-1$ elementi indipendenti di A.

Essendo $vA \leq A^2$ l'ordine del sistema vA è, al più, $n-2$; quindi gli elementi di A aventi in v un nullifico sinistro costituiscono una sotto-algebra B di ordine ≥ 2. Naturalmente A^{n-1} è contenuta in B, giacchè $vA^{n-1} \leq A^n = 0$; ma A^{n-1} è del 1^0 ordine, dunque esiste in B un elemento, e sia v', esterno ad A^{n-1}.

Dico che:

Gli n *elementi*

$$(5) \qquad v',\, v\,,\, v^2\,,\, \dots\,,\, v^{n-1}$$

sono indipendenti.

E, infatti, si supponga che sia

$$(6) \qquad \lambda_1 v' + \lambda_2 v + \lambda_3 v^2 + \dots + \lambda_n v^{n-1} = 0\,,$$

con le λ numeri di Γ. Sarà, moltiplicando a sinistra per v e badando che vv' e v^n sono nulli,

$$(7) \qquad \lambda_2 v^2 + \lambda_3 v^3 + \dots + \lambda_{n-1}\, v^{n-1} = 0.$$

Attesa l'indipendenza degli elementi (4), il sussistere della (7) esige che sia

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{n-1} = 0\,,$$

ma allora la (6) diventa

$$\lambda_1 v' + \lambda_n v^{n-1} = 0,$$

e qui λ_1 e λ_n non possono non essere entrambi nulli, giacchè v^{n-1} è in A^{n-1}, mentre v', per ipotesi, ne è fuori.

3. Il sistema generato dagli elementi (5), è, per quanto si è stabilito, l'algebra A; quelli generati dagli $n-2$ gruppi di elementi

$$\begin{array}{r} v^2\,,\, v^3\,,\, \dots\,,\, v^{n-1}\,, \\ v^3\,,\, \dots\,,\, v^{n-1}\,, \\ \cdots\cdots \\ v^{n-2}\,,\, v^{n-1}\,, \\ v^{n-1}\,, \end{array}$$

sono le algebre $A^2, A^3, \ldots, A^{n-2}, A^{n-1}$, dunque v' e v sono esterni ad A^2.

Ebbene, fissiamo in A un aggregato di unità $u_1, u_2, \ldots u_n$, ponendo

$$u_1 = v', u_2 = v, u_3 = v^2, \ldots, u_n = v^{n-1}.$$

Poichè v è per v' un nullifico sinistro, i prodotti

$$u_i u_1 \tag{8}$$

per $i > 1$ sono tutti nulli.

Quanto ai prodotti

$$u_1^2 \quad \text{e} \quad u_1 u_2$$

si vede subito che essi sono dei multipli scalari di u_n.

E, infatti, essi appartengono intanto ad A^2; quindi deve essere

$$u_1^2 = \varrho_3 u_3 + \varrho_4 u_4 + \ldots + \varrho_n u_n = \varrho_3 v^2 + \varrho_4 v^3 + \ldots + \varrho_n v^{n-1}, \tag{9}$$

$$u_1 u_2 = \sigma_3 u_3 + \sigma_4 u_4 + \ldots + \sigma_n u_n = \sigma_3 v^2 + \sigma_4 v^3 + \ldots + \sigma_n v^{n-1}, \tag{10}$$

con le ϱ e σ numeri di Γ.

Dalle (9) e (10), moltiplicando a sinistra per $u_2 = v$, si trae

$$0 = \varrho_3 v^3 + \varrho_4 v^4 + \ldots + \varrho_{n-1} v^{n-1},$$

$$0 = \sigma_3 v^3 + \sigma_4 v^4 + \ldots + \sigma_{n-1} v^{n-1};$$

dunque, attesa l'indipendenza degli elementi (4), le ϱ e σ con indici diversi da n sono tutte nulle e resta, come volevasi

$$u_1^2 = \varrho_n u_n \quad \text{e} \quad u_1 u_2 = \sigma_n u_n. \tag{11}$$

Da

$$u_1 u_2 = \sigma_n u_n = \sigma_n v^{n-1}$$

segue, per $i > 2$,

$$u_1 u_i = u_1 u_2^{i-1} = u_1 u_2 \cdot u_2^{i-2} = \sigma_n v^{n-1} \cdot v^{i-2} = \sigma_n v^{n+i-3};$$

quindi per $i > 2$ è

$$u_1 u_i = 0. \tag{12}$$

Se nelle (11) è $\sigma_n \neq 0$ si può supporre $\sigma_n = 1$, perchè ciò equivale a sostituire la considerazione di $\frac{u_1}{\sigma_n}$ a quella di u_1, con che nulla muta di quanto è stato detto per i prodotti del tipo

$$u_j u_1 \quad \text{e} \quad u_1 u_j \qquad (j = 1, \ldots, n);$$

dunque, riassumendo e ponendo α per ϱ_n, la tavola di moltiplicazione di A rispetto alle unità $u_1, \ldots, u_n$ si può supporre data da

I)

	u_1	u_2	u_3	. . . .	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u_1	αu_n	u_n	0	. . . .	0	0	0
u_2	0	u_3	u_4	. . . .	u_{n-1}	u_n	0
u_3	0	u_4	u_5	. . . .	u_n	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮
u_{n-2}	0	u_{n-1}	u_n	. . . .	0	0	0
u_{n-1}	0	u_n	0	. . . .	0	0	0
u_n	0	0	0	. . . .	0	0	0

,

o da

II)

	u_1	u_2	u_3	. . . .	u_{n-2}	u_{n-1}	u_n
u_1	αu_n	0	0	. . . .	0	0	0
u_2	0	u_3	u_4	. . . .	u_{n-1}	u_n	0
u_3	0	u_4	u_5	. . . .	u_n	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮	⋮	⋮
u_{n-2}	0	u_{n-1}	u_n	. . . .	0	0	0
u_{n-1}	0	u_n	0	. . . .	0	0	0
u_n	0	0	0	. . . .	0	0	0

,

4. Tutto quanto precede è retto dall'ipotesi che sia $n > 3$; ipotesi che ha servito a poter garantire in A l'esistenza di elementi di rango n.

Ma, come è stato già ricordato in ([4]), il teorema del n⁰ 1 non cade in difetto che per $n = 3$, nel qual caso, a norma di quanto abbiamo dimostrato altrove, un'algebra pseudonulla di indice 3 sprovvista di elementi a rango 3 può sempre pensarsi come definita da una tavola di moltiplicazione del tipo

III)

	u_1	u_2	u_3
u_1	0	u_3	0
u_2	$-u_3$	0	0
u_3	0	0	0

;

dunque:

Le algebre pseudonulle di ordine e indice n non possono essere che di tre tipi, questi essendo caratterizzati dalle tavole di moltiplicazione I), II) *e* III).

Notisi che per $n = 2$ le algebre qui considerate sono le zero-algebre. Esse rientrano nel tipo II) per $\alpha = 0$; quindi per le algebre del tipo I) è necessariamente $n \geq 3$.

Che i tre tipi in discorso siano veramente realizzabili potrebbe esser messo fuori dubbio ricorrendo ai teoremi generali di esistenza; ma preferiamo dimostrarlo indicando senz'altro tre esempi concreti di algebre del tipo I), II) o III).

Si indichi con $c_{i,j}$ la matrice di Γ d'ordine $n+1$ per la quale l'elemento che trovasi all'incrocio della riga i^{ma} con la colonna j^{ma} è eguale ad 1 e tutti gli altri sono nulli, e si ponga

$$v = c_{1,2} + c_{2,3} + \dots + c_{n-1,n}\,,$$

$$v' = c_{1,n-1} + c_{1,n+1} + \alpha c_{n+1,n}$$

$$v'_1 = c_{1,n+1} + \alpha c_{n+1,n}\,.$$

Allora un'algebra del tipo I) si otterrà supponendo $n > 2$ e considerando il sistema generato da v' e dalle potenze di v, perchè per

$n > 2$ è appunto

$$v^{n-1} = c_{1,n}, \quad v^n = 0,$$

$$vv' = 0, \quad v' v = c_{1,n}, \quad v'^2 = \alpha c_{1,n};$$

e un'algebra del tipo II) si otterrà supponendo $n \geq 2$ e considerando il sistema generato da v_1' e dalle potenze di v, perchè per $n \geq 2$, insieme con le eguaglianze

$$v^{n-1} = c_{1,n}, \quad v^n = 0,$$

si hanno le altre

$$vv_1' = 0, \quad v_1' v = 0, \quad v_1'^2 = \alpha c_{1,n}.$$

Per avere infine un'algebra del tipo III) basta considerare il sistema generato dalle tre matrici di quart'ordine

$$\begin{Vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

5. Le algebre corrispondenti a tavole del tipo I) sono certo non equivalenti ad algebre che corrispondano a tavole del tipo II), in quanto le prime non sono, e le seconde sono commutative; ma si domanda:

Che cosa può dirsi di due algebre nello stesso corpo corrispondenti entrambe a tavole del tipo I) *o del tipo* II), *ma con valori diversi del parametro* α?

La risposta sarà fornita nel modo più semplice dalle seguenti considerazioni.

6. Sia x un elemento dell'algebra A con la tavola di moltiplicazione I), e si torni a supporre $n > 3$.

Sarà

$$x = \sum_{i}^{1\ldots n} \lambda_i u_i, \tag{13}$$

con le λ numeri di Γ, indi

$$x^{n-1} = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}}^{1\ldots n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_{n-1}} u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_{n-1}}. \tag{14}$$

Ora, se $j > 1$, si ha $u_j = u_2^{j-1}$; dunque, se $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$ sono tutti diversi da 1, è

$$u_{i_1} u_{i_2} \dots u_{i_{n-1}} = u_2^{(i_1-1)+(i_2-1)+\dots+(i_{n-1}-1)}.$$

Ma quando ciascuna delle i_j è ≥ 2 si ha

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 1) + \dots + (i_{n-1} - 1) \geq n - 1,$$

e qui vale il segno inferiore quando, e solo quando, le i_j sono tutte eguali a 2, dunque nella somma a secondo membro della (14) sono nulli tutti i termini per i quali gli indici i_j sono tutti diversi da 1, ma non tutti eguali a 2. Quanto ai termini, per i quali qualcuno dei detti indici sia eguale ad 1, essi sono certo tutti nulli perchè, essendosi supposto $n > 3$ ed essendo multiplo scalare di u_n (o addirittura nullo) ogni prodotto di due fattori dei quali uno sia u_1, riesce nullo ogni prodotto di $n - 1 > 2$ fattori di cui uno sia eguale ad u_1. Segue che è

$$x^{n-1} = \lambda_2^{n-1} u_2^{n-1} = \lambda_2^{n-1} u_n,$$

e che quindi:

L'elemento x è di rango n quando, e solo quando, nella (13) *è* $\lambda_2 \neq 0$.

7. Ebbene, supponiamo che nella (13) sia $\lambda_2 \neq 0$, cioè che x sia un elemento di A a rango n, e sia

(15) $$y = \sum_i^{1\dots n} \varrho_i u_i,$$

con le ϱ numeri di Γ, un elemento per il quale x sia un nullifico sinistro.

Dovrà essere

(16) $$xy = \sum_{i,j}^{1\dots n} \lambda_i \varrho_j u_i u_j = 0;$$

ora:

$$u_1^2 = \alpha u_n, \quad u_i u_1 = 0 \quad \text{per } i > 1,$$

$$u_1 u_2 = u_n, \quad u_1 u_j = 0 \quad \text{per } j > 2,$$

mentre per $i > 1$ e $j > 1$

$$u_i u_j = u_{i+j-1},$$

dove s'intende che è da porre

$$u_{i+j-1} = 0, \quad \text{se} \quad i + j - 1 > n;$$

dunque la (16) diventa

$$\lambda_1 (\alpha \varrho_1 + \varrho_2) u_n + \sum_{i,j}^{2\ldots n} \lambda_i \varrho_j u_{i+j-1} = 0.$$

Di qua, attesa l'indipendenza delle u, si trae

(17)
$$\begin{gathered} \lambda_2 \varrho_2 = 0, \quad \lambda_2 \varrho_3 + \lambda_3 \varrho_2 = 0, \quad \lambda_2 \varrho_4 + \lambda_3 \varrho_3 + \lambda_4 \varrho_2 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_2 \varrho_{n-2} + \lambda_3 \varrho_{n-3} + \ldots + \lambda_{n-3} \varrho_3 + \lambda_{n-2} \varrho_2 = 0, \\ \lambda_1 (\alpha \varrho_1 + \varrho_2) + \lambda_2 \varrho_{n-1} + \lambda_3 \varrho_{n-2} + \ldots + \lambda_{n-2} \varrho_3 + \lambda_{n-1} \varrho_2 = 0; \end{gathered}$$

ma $\lambda_2 \neq 0$, quindi le (17) dànno

$$\varrho_2 = \varrho_3 = \ldots = \varrho_{n-2} = 0,$$

e

$$\alpha \lambda_1 \varrho_1 + \lambda_2 \varrho_{n-1} = 0, \quad \text{ossia} \quad \varrho_{n-1} = -\alpha \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \varrho_1.$$

Si conclude:

Perchè y abbia un nullifico sinistro nel considerato elemento x di rango n, occorre e basta che per esso si abbia un'eguaglianza del tipo

$$y = \varrho_1 \left(u_1 - \alpha \frac{\lambda_1}{\lambda_2} u_{n-1} \right) + \varrho_n u_n,$$

con ϱ_1 e ϱ_n numeri di Γ.

8. Ciò premesso, sia A' un'algebra in Γ d'ordine n che rispetto ad n sue unità $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ abbia come tavola di moltiplicazione quella che si deduce dalla I) cambiando le u nelle u' e il numero α nel numero α'; inoltre si supponga che A' sia equivalente ad A.

Se $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sono gli elementi di A corrispondenti agli elementi $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ in una corrispondenza di isomorfismo tra A

ed A', le w dovranno combinarsi fra di loro per prodotti al modo delle u'; quindi, in particolare, w_2 dovrà essere di rango n e w_1 dovrà avere in w_2 un nullifico sinistro.

Ciò porta, che, se si pone

$$w_2 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \dots + \mu_n u_n \,, \tag{18}$$

con le μ numeri di Γ, sarà $\mu_2 \neq 0$ e per w_1 sussisterà un'eguaglianza del tipo

$$w_1 = \varrho \left(u_1 - \alpha \frac{\mu_1}{\mu_2} u_{n-1} \right) + \sigma u_n \,, \tag{19}$$

con ϱ e σ numeri di Γ.

Dalle (18) e (19) si trae, tenendo conto della I),

$$w_1^2 = \alpha \varrho^2 u_n \,, \qquad w_1 w_2 = \mu_2 \varrho u_n \,;$$

d'altronde, per quanto è detto nel n⁰ 5, si ha

$$w_2^{n-1} = \mu_2^{n-1} u_n \,,$$

e, per le ipotesi fatte sulle u', si vuole che riesca

$$w_n = w_2^{n-1} \,, \quad w_1^2 = \alpha' w_n \ \text{ e } \ w_1 . w_2 = w_n \,,$$

dunque bisogna che sia

$$\alpha \varrho^2 u_n = \alpha' \mu_2^{n-1} u_n \ \text{ e } \ \mu_2 \varrho u_n = \mu_2^{n-1} u_n \,,$$

ossia

$$\varrho = \mu_2^{n-2} \ \text{ ed } \ \alpha' = \alpha \mu_2^{n-3} \,.$$

Ciò significa che *perchè A ed A' siano equivalenti è necessario che sussista un'eguaglianza del tipo*

$$\alpha' = \alpha \lambda^{n-3} \,, \tag{20}$$

con λ numero di Γ diverso da zero.

Questa proposizione è invertibile, e cioè:

Se per i numeri α ed α' vale una relazione come la (20), *A ed A' riescono equivalenti.*

Per accorgersene basta osservare che, eseguendo in A la trasformazione di coordinate rappresentata dalle formule

$$u_1 = \frac{w_1}{\lambda^{n-2}}, \; u_2 = \frac{w_2}{\lambda}, \; u_3 = \frac{w_3}{\lambda^2}, \dots, \; u_n = \frac{w_n}{\lambda^{n-1}},$$

dove λ è il numero legato ad α ed α' dalla (20), la tavola di moltiplicazione di A rispetto alle unità w_i riesce del tipo I), ma con α' al posto di α.

9. Per giungere alle due proposizioni del n^0 precedente è stato necessario supporre $n > 3$, perchè solo a patto di tale ipotesi vale il teorema che chiude il n^0 6. Ma per $n = 3$ la (20) diviene $\alpha' = \alpha$ e per $n = 3$, come abbiamo già dimostrato altrove, A ed A' riescono appunto equivalenti solo a patto che sia $\alpha' = \alpha$, dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè si equivalgano due algebre in Γ, di ordine $n \geq 3$, le cui tavole di moltiplicazione si deducano dalla I) *ponendo per α i numeri α' ed α'', è che sussista un'eguaglianza del tipo*

$$\alpha'' = \alpha' \lambda^{n-3},$$

con λ numero di Γ diverso da zero (5).

10. Come subito si riscontra, gli enunciati dei n^i 6 e 7 continuano a sussistere, se in essi si suppone che l'algebra cui si riferiscono risponda alla tavola di moltiplicazione II), anzi che alla I); e allora, se nel ragionamento del n^0 8 si fa l'ipotesi che A ed A' siano due algebre in Γ, le cui tavole di moltiplicazione, rispetto alle loro unità $u_1, \dots, u_n$ e $u'_1, \dots, u'_n$, siano la II) e quella che se ne deduce cambiando le u nelle u' e il numero α nel numero α', esso

(5) Notisi la singolarità che a norma di questo teorema presenta il caso $n = 4$. Allora dire che deve essere $\alpha'' = \alpha' \lambda$, con $\lambda \neq 0$, significa semplicemente che α' ed α'' debbono essere entrambi non nulli o entrambi nulli; quindi se $n = 4$ nella tabella I) si può supporre $\alpha = 1$ o $\alpha = 0$.

Per $n = 4$ la I) diventa quella denotata con (14 G) da K. S. Ghent nel suo lavoro: *A note on nilpotent algebras in four units* («Bulletin of the American mathematical Society», 1934, vol. XL); p. 332. Ivi però non è osservato che il parametro α può supporsi allora come suscettibile dei soli valori 1 e 0.

dà subito che, perchè A ed A' riescano equivalenti, è necessario che sia

$$\alpha' \mu_2^{n-1} = \alpha \varrho^2, \tag{21}$$

con μ_2 e ϱ numeri di Γ diversi da zero.

Poichè μ_2 e ϱ si possono supporre numeri non nulli di Γ legati soltanto dalla (21), ciò equivale a dire che α' deve essere il prodotto, se n è dispari, di α per un quadrato non nullo, se n è pari, di α per un numero non nullo di Γ.

Ma si riconosce subito che la condizione è anche sufficiente; inoltre le conclusioni, cui qui si è pervenuti per $n > 3$, valgono pure, come ho dimostrato altrove, per $n = 3$; dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè si equivalgano due algebre in Γ, di ordine $n \geq 3$, le cui tavole di moltiplicazione si deducano dalla II) *ponendo per α i numeri α' ed α'', se n è dispari, è che sussista un'eguaglianza del tipo*

$$\alpha'' = \alpha' \varrho^2,$$

con ϱ numero di Γ diverso da zero; se n è pari, che α' ed α'' siano insieme non nulli o insieme nulli (6).

11. L'algebra definita dalla II) è evidentemente riducibile per $\alpha = 0$, riuscendo somma diretta della zero-algebra generata da u_1 e dell'algebra potenziale generata da u_2 (che è anch'essa una zero-algebra, se $n = 2$); invece:

Le algebre di ordine $n \geq 3$ definite dalla I), *o dalla* II) *per $\alpha \neq 0$, sono irriducibili.*

E, infatti, se un'algebra A d'ordine e indice n è riducibile ed è

$$A = A_1 \dotplus A_2,$$

con A_1 e A_2 degli ordini n_1, n_2 e indici r_1, r_2, deve essere

$$n_1 + n_2 = n, \qquad r_1 \leq n_1 + 1, \qquad r_2 \leq n_2 + 1,$$

(6) Per $n = 4$ la tavola di moltiplicazione II) diventa quella denotata con (15 G) nel lavoro del GHENT citato in (5); ma ivi non si osserva che il parametro α può supporsi allora come suscettibile dei soli valori 1 o 0.

Infine, occorre appena avvertire che, tanto nella I) quanto nella II), se Γ è il corpo complesso, il parametro α può supporsi 1 o 0, e, se Γ è il corpo reale, può supporsi 1, 0 o -1.

ed

$$n \geq r_1, \qquad n \geq r_2,$$

in una di queste due ultime relazioni valendo certo il segno d'eguaglianza. Ma allora, supposto, ad es., $r_2 = n$, è necessariamente $n_2 = n - 1$, $n_1 = 1$, $r_1 = 2$ ed A_1 è una zero-algebra, A_2 un'algebra potenziale di ordine $n - 1$: il che significa, per quanto precede, che A risponde ad una tavola di moltiplicazione del tipo II) con $\alpha = 0$.

Quanto all'algebra del 3° ordine definita dalla III), essa è pure, come abbiamo dimostrato altrove, irriducibile.