SULLE ALGEBRE COMPLESSE LEGATE AI GRUPPI DI ORDINE FINITO (*)

Sia G un gruppo di ordine n, con gli elementi $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, A un'algebra complessa legata a G [1], e Γ una rappresentazione irriducibile di G sopra un gruppo di matrici, di ordine p, a elementi complessi. Inoltre si supponga che $u_1, \dots, u_n$ sia un aggregato di unità di A, per le quali, conformemente alle ipotesi fatte, si abbia $u_r u_s = u_t$ ogni qual volta sia $\gamma_r \gamma_s = \gamma_t$, e che per Γ all'elemento corrente γ_r di G corrisponda la matrice

$$\wedge_r = \| \lambda_{i,j}^{(r)} \| \qquad (i, j = 1, \dots, p).$$

Allora risulta dalla Memoria già citata del sig. FICHERA che fra le sotto-algebre invarianti regolari di A (il cui numero eguaglia quello dei sistemi di elementi coniugati di G) ne esiste una, ed una sola, Z, di ordine p^2 — che diremo *corrispondente* a Γ — tale che, se z_r è la *componente* [2] di u_r in Z, è possibile fissare in Z un aggregato *normale* di p^2 unità $z_{i,j}$ $(i, j = 1, \dots, p)$ [3], rispetto a cui risulti

$$z_r = \sum_{i,j}^{1\dots p} \lambda_{i,j}^{(r)} z_{i,j} \text{ [4]}.$$

(*) *Rend. Reale Accad. dei Lincei,* (6) 1 (1925), pp. 652-658.

[1] Per le proprietà fondamentali delle algebre legate ai gruppi di ordine finito vedi: *a*) G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), p. 437 e seg.; G. FICHERA, *I caratteri di un gruppo e le sue rappresentazioni sopra un gruppo di sostituzioni lineari* (« Atti dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania », serie 5ª, vol. XIII).

[2] Per questa denominazione vedi loc. cit. [3], *b*), n. 5.

[3] Diciamo che l'aggregato delle unità $z_{i,j}$ di Z è *normale*, per significare che il prodotto $z_{i,j}\, z_{l,m}$ è nullo per $l \neq j$, è $z_{i,m}$ per $l = j$.

[4] Dopo di che è ben chiaro che di aggregati normali così fatti non ne esiste che uno, perchè fra le z_r se ne possono scegliere p^2 che siano indipendenti.

Ora si può domandare:

Date le unità $u_1, \dots, u_n$ *e le matrici* $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$, *come determinare effettivamente la sotto-algebra* Z *corrispondente a* Γ?

La risposta a questa domanda potrebbe esser dedotta con grande rapidità ponendo a raffronto le ricerche del sig. FICHERA con altre, notevolissime, dello SCHUR (5) e dello SPEISER (6); ma qui vogliamo far vedere come, senza allungar di troppo le cose, si possa procedere in modo da trovare insieme e la risposta voluta e nuove dimostrazioni di quattro bei teoremi dello SCHUR e dello SPEISER, dimostrazioni che, inquadrandoli nella teoria delle algebre legate ai gruppi, ne fanno trasparir chiara l'intima essenza.

* * *

1. Si indichi con $\overline{\lambda}_{i,j}^{(r)}$ il reciproco di $\lambda_{i,j}^{(r)}$ in Λ_r e si ponga

$$\overline{\Lambda}_r = \| \overline{\lambda}_{i,j}^{(r)} \| \qquad (i, j = 1, \dots, p),$$

di guisa che le matrici Λ_r e $\overline{\Lambda}_r$ saranno reciproche e ciascuna sarà la trasposta dell'inversa dell'altra.

Dico allora che:

L'algebra richiesta Z *è il sistema* V *generato dagli elementi*

$$v_{i,j} = \sum_r^{1\dots n} \overline{\lambda}_{i,j}^{(r)} u_r \qquad (i, j = 1, \dots, p) \tag{1}$$

e che:

In essa le unità $z_{i,j}$ *si ottengono prendendo*

$$z_{i,j} = \frac{p}{n} v_{i,j} \tag{2}$$

È chiaro intanto che, facendo corrispondere all'elemento γ_r di G la matrice $\overline{\Lambda}_r$ $(r = 1, \dots, n)$, si ottiene una rappresentazione $\overline{\Gamma}$ di

(5) J. SCHUR, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere* («Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften», 1902, pp. 406-432).

(6) A. SPEISER, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (Berlin, Springer, 1923), § 48.

G irriducibile al pari di Γ; quindi, per un classico teorema del BURNSIDE ([7]), la caratteristica della matrice

$$\left\| \bar{\lambda}_{1,1}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{1,p}^{(r)}, \bar{\lambda}_{2,1}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{2,p}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{p,1}^{(r)}, \dots, \bar{\lambda}_{p,p}^{(r)} \right\| \qquad (r = 1, \dots, n)$$

è p^2. Ma allora è tale anche quella della matrice trasposta, cioè della matrice le cui righe sono costituite dalle coordinate delle $v_{i,j}$ rispetto alle u_r; quindi le $v_{i,j}$ sono indipendenti e il sistema V è dell'ordine p^2.

Dalla (1), moltiplicando a destra per u_s, si trae

$$v_{i,j}\, u_s = \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)}\, u_r\, u_s\,;$$

ma, se si pone

$$\gamma_r\, \gamma_s = \gamma_t \tag{3}$$

riesce $u_r\, u_s = u_t$ e $\overline{\Lambda}_r\, \overline{\Lambda}_s = \overline{\Lambda}_t$, indi $\overline{\Lambda}_r = \overline{\Lambda}_t\, \overline{\Lambda}_s^{-1}$ e

$$\bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = \sum_h^{1\dots p} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)}\, \lambda_{j,h}^{(s)}\,;$$

quindi è

$$v_{i,j}\, u_s = \sum_r^{1\dots n} \sum_h^{1\dots p} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)}\, \lambda_{j,h}^{(s)}\, u_t = \sum_h^{1\dots p} \lambda_{j,h}^{(s)} \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)}\, u_t\,.$$

D'altronde, per il legame posto fra gli indici r e t dalla (3), si ha

$$\sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)}\, u_t = \sum_t^{1\dots n} \bar{\lambda}_{i,h}^{(t)}\, u_t = v_{i,h}\,;$$

dunque resta

$$v_{i,j}\, u_s = \sum_h^{1\dots p} \lambda_{j,h}^{(s)}\, v_{i,h}\,. \tag{4}$$

In modo del tutto simile si vede che è

$$u_s\, v_{i,j} = \sum_h^{1\dots p} \lambda_{h,i}^{(s)}\, v_{h,j}\,. \tag{5}$$

([7]) Per una dimostrazione di questo teorema dal punto di vista della teoria delle algebre legate ai gruppi vedi loc. cit. ([2]), *b*), n. 16.

Dalla (4) e (5) segue che i prodotti VA e AV sono contenuti in V; ma è pure $V \neq 0$, quindi è dimostrato intanto che V è una sotto-algebra invariante di A.

Adesso poniamo per comodità di scrittura

$$\nu_{i,j\,;\,l,m} = \sum_r^{1\dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} \qquad (i, j, l, m = 1, \dots, p).$$

Tenendo conto delle (1) e (4), o delle (1) e (5) si deduce

$$(6) \qquad v_{i,j}\, v_{l,m} = v_{i,j} \cdot \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} u_r = \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} v_{i,j}\, u_r =$$
$$= \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{l,m}^{(r)} \sum_h^{1\dots p} \lambda_{j,h}^{(r)} v_{i,h} = \sum_h^{1\dots p} \nu_{j,h\,;\,l,m}\, v_{i,h},$$

oppure

$$(7) \qquad v_{i,j}\, v_{l,m} = \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} u_r \cdot v_{l,m} = \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} u_r\, v_{l,m} =$$
$$= \sum_r^{1\dots n} \bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} \sum_h^{1\dots p} \lambda_{h,l}^{(r)} v_{h,m} = \sum_h^{1\dots r} \nu_{h,l\,;\,i,j}\, v_{h,m};$$

quindi è

$$\sum_h^{1\dots p} \nu_{j,h\,;\,l,m}\, v_{i,h} = \sum_h^{1\dots p} \nu_{h,l\,;\,i,j}\, v_{h,m},$$

e, attesa l'indipendenza delle $v_{i,j}$, si ha

$$(8) \qquad \nu_{j,m\,;\,l,m} = \nu_{i,l\,;\,i,j},$$

$$(9) \qquad \nu_{j,h\,;\,l,m} = 0, \quad \text{per } h \neq m,$$

e

$$(10) \qquad \nu_{h,l\,;\,i,j} = 0, \quad \text{per } h \neq i.$$

Le (9) e (10) significano che il numero $\nu_{i,j\,;\,l,m}$ è zero, se è $l \neq i$, oppure $m \neq j$; la (8), che per $l = j$ diviene

$$\nu_{j,m\,;\,j,m} = \nu_{i,j\,;\,i,j},$$

mostra che il valore di $\nu_{j,m\,;\,j,m}$ è indipendente da m e quello, ad esso eguale, di $\nu_{i,j\,;\,i,j}$ è indipendente da i, ossia, in definitiva, che i p^2 simboli del tipo $\nu_{i,j\,;\,i,j}$ rappresentano numeri tutti eguali; quindi, indicato con ϱ un numero opportuno, che sarà subito calcolato, si avrà

$$\nu_{i,j\,;\,l,m} = \begin{cases} 0\,, \text{ se } l \neq i\,, \text{ oppure } m \neq j\,, \\ \varrho\,, \text{ se } l = i \text{ ed } m = j\,; \end{cases} \tag{11}$$

dopo di che le (6) e (7) si accorderanno nel dare

$$v_{i,j}\, v_{l,m} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } l \neq j\,, \\ \varrho v_{i,m}\,, & \text{se } l = j\,. \end{cases} \tag{12}$$

Giacchè il valore di $\nu_{i,j\,;\,i,j}$ al variare di i e j è costantemente ϱ, si ha

$$\sum_{i,j}^{1\ldots p} \nu_{i,j\,;\,i,j} = p^2\,\varrho\,;$$

ma è pure

$$\sum_{i,j}^{1\ldots p} \lambda_{i,j}^{(r)}\,\bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = p\,,$$

e quindi

$$\sum_{i,j}^{1\ldots p} \nu_{i,j\,;\,i,j} = \sum_{i,j}^{1\ldots p} \sum_{r}^{1\ldots n} \lambda_{i,j}^{(r)}\,\bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = \sum_{r}^{1\ldots n} \sum_{i,j}^{1\ldots p} \lambda_{i,j}^{(r)}\,\bar{\lambda}_{i,j}^{(r)} = np\,;$$

dunque resta

$$p^2\varrho = np\,, \quad \text{ossia } \varrho = \frac{n}{p}:$$

e le (11) e (12) diventano

$$\nu_{i,j\,;\,l,m} = \begin{cases} 0, \text{ se } l \neq i\,, \text{ oppure } m \neq j\,, \\ \dfrac{n}{p}\,, \text{ se } l = i \text{ ed } m = j\,; \end{cases} \tag{13}$$

e

$$v_{i,j}\, v_{l,m} = \begin{cases} 0, \text{ se } l \neq j\,, \\ \dfrac{n}{p}\, v_{i,m}\,, \text{ se } l = j\,. \end{cases} \tag{14}$$

Dalla (14), posto

$$v_{i,j}^{*} = \frac{p}{n}\, v_{i,j}\,, \tag{15}$$

si trae

$$v^*_{i,j}\, v^*_{l,m} = \begin{cases} 0, \text{ se } l \neq j\,, \\ v^*_{i,m}\,, \text{ se } l = j\,; \end{cases} \tag{16}$$

dunque V è regolare e per essa le $v^*_{i,j}$ costituiscono un aggregato normale di unitá.

Ora, conformemente alla circostanza che V è invariante in A, poniamo

$$A = V \dot{+} W\,,$$

dove $\dot{+}$ è segno di somma diretta, e

$$u_r = v_r + w_r\,,$$

con v_r in V e w_r in W.

Sarà, per la (4) e la (15),

$$v^*_{l,m}\,(v_r + w_r) = \sum_h^{1\ldots p} \lambda^{(r)}_{m,h}\, v^*_{l,h}$$

e quindi, essendo $VW = 0$,

$$v^*_{l,m}\, v_r = \sum_h^{1\ldots p} \lambda^{(r)}_{m,h}\, v^*_{l,h}\,.$$

Intanto, se rispetto alle unità $v^*_{i,j}$ si pone

$$v_r = \sum_{i,j}^{1\ldots p} \mu^{(r)}_{i,j}\, v^*_{i,j}\,,$$

si ha, per la (16),

$$v^*_{l,m}\, v_r = \sum_{i,j}^{1\ldots p} \mu^{(r)}_{i,j}\, v^*_{l,m}\, v^*_{i,j} = \sum_j^{1\ldots p} \mu^{(r)}_{m,j}\, v^*_{l,j} = \sum_h^{1\ldots p} \mu^{(r)}_{m,h}\, v^*_{l,h}\,,$$

dunque è

$$\mu^{(r)}_{m,h} = \lambda^{(r)}_{m,h} \qquad (m, h = 1\,, \ldots\,, p)$$

e per conseguenza

$$v_r = \sum_{i,j}^{1\ldots p} \lambda^{(r)}_{i,j}\, v^*_{i,j}\,.$$

Si conclude che veramente V è la richiesta algebra Z, che le v_r sono le componenti z_r, di cui nelle dichiarazioni introduttive, e che in Z le unità $z_{i,j}$ sono date dalle $v^*_{i,j}$, cioè dalla (2).

Occorre appena avvertire che, come l'algebra Z corrispondente a Γ è generata dagli elementi $v_{i,j}$, così l'algebra $\overline{Z}$ corrispondente a $\overline{\Gamma}$ è quella generata dagli elementi

$$\overline{v}_{i,j} = \sum_r^{1\dots n} \lambda^{(r)}_{i,j}\, u_r$$

e che per questi è ancora

$$\overline{v}_{i,j}\,\overline{v}_{l,m} = \begin{cases} 0\,, & \text{se } l \neq j\,, \\ \dfrac{n}{p}\,\overline{v}_{i,m}\,, & \text{se } l = j\,. \end{cases} \tag{17}$$

2. Adesso sia Γ' una rappresentazione irriducibile di G la quale si ottenga facendo corrispondere all'elemento corrente γ_r di G la matrice a elementi complessi di ordine p'

$$\Lambda'_r = \| \lambda'^{(r)}_{i',j'} \| \qquad (i', j' = 1, \dots, p')\,;$$

e, indicata con $\overline{\Gamma'}$ la rappresentazione avente per Γ' il significato che $\overline{\Gamma}$ ha per Γ, siano Z' e $\overline{Z'}$ le sotto-algebre invarianti regolari di A corrispondenti a Γ' e $\overline{\Gamma'}$.

Supposto che le $z'_{i',j'}$ siano per Γ' e Z', ciò che le $z_{i,j}$ sono per Γ e Z, la componente di u_r in Z' è

$$z'_r = \sum_{i',j'}^{1\dots p'} \lambda'^{(r)}_{i',j'}\, z'_{i',j'}\,;$$

e per conseguenza quella di

$$\overline{v}_{i,j} = \sum_r^{1\dots n} \lambda^{(r)}_{i,j}\, u_r$$

è

$$\sum_r^{1\dots n} \lambda^{(r)}_{i,j} \sum_{i',j'}^{1\dots p'} \lambda'^{(r)}_{i',j'}\, z'_{i',j'}\,.$$

Ma, essendo $\overline{v}_{i,j}$ un elemento di $\overline{Z}$, quest'ultima componente è nulla quando $\overline{Z}$ e Z' sono diverse, cioè quando Γ' e $\overline{\Gamma}$ non sono equivalenti; dunque:

Se Γ' non è equivalente a $\overline{\Gamma}$, è

$$\sum_r^{1\dots n} \lambda_{i,j}^{(r)} \lambda_{i',j'}^{\prime(r)} = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, p; i', j' = 1, \dots, p'). \tag{18}$$

Quando $\overline{Z}$ e $\overline{Z'}$ sono distinte, ossia quando $\overline{\Gamma}$ e $\overline{\Gamma'}$, indi Γ e Γ' non sono equivalenti, è $\overline{Z}\,\overline{Z'} = 0$.

Ora $\overline{v}_{i,j}$ è un elemento di $\overline{Z}$, e

$$\overline{v}'_{i',j'} = \sum_r^{1\dots n} \lambda_{i',j'}^{\prime(r)} u_r$$

è un elemento di $\overline{Z'}$, dunque:

Se Γ' non é equivalente a Γ, è

$$\overline{v}_{i,j}\, \overline{v}'_{i',j'} = 0 \qquad (i, j = 1, \dots, p; i', j' = 1, \dots, p'). \tag{19}$$

Dei quattro teoremi cui è stato alluso più sopra quelli dovuti allo SCHUR sono espressi dalle (13) e (18), quelli dovuti allo **SPEISER**, dalle (14) e (19).