

BULLETIN INTERNATIONAL
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE.

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES.

N° 2.

Février.

1909.

- Sommaire:** 7. S. ZAREMBA. Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le Problème de Dirichlet et le Problème hydrodynamique.
8. ST. LORIA. Untersuchungen über die Dispersion des Lichtes in Gasen. II. Die Dispersion des Äthylens und Äthans.
9. J. MOROZEWICZ. Gewinnung von seltenen Erden aus dem Mariupolit.
10. BR. RADZISZEWSKI. Sur les glyoxalines.
11. ZYG. JAKUBOWSKI und ST. NIEMENTOWSKI. Über Säuren des 88'-Dichinolyls.
12. L. BRUNER und J. VORBKODT. Einfluß der Lösungsmittel auf die Verteilung der Isomere.
13. K. KOSTANECKI. Einleitung der künstlichen Parthenogenese bei *Aricia*.
14. W. FRIEDBERG. Beschreibung der Gattung *Turritella* im Miozän von Polen.
15. M. RACIBORSKI. Über einige javanische Uredineae.
16. M. RACIBORSKI. Über eine fossile Pangiumart aus dem Miozän Java's.
17. J. HIRSCHLER. Über die Entwicklung der Keimblätter und des Darmes bei *Gastroidea viridula* Deg. (Coleoptera).

Séance du lundi 1 Février 1909.

PRÉSIDENCE DE M. ED. JANCZEWSKI.

7. *Liczbowe rozwiązanie zagadnienia Dirichleta i zagadnienia hydrodynamicznego.* — *Sur le calcul numérique des fonctions demandées dans le Problème de Dirichlet et le Problème hydrodynamique.* Mémoire de M. S. ZAREMBA m. c.

I. Introduction.

§ 1. Le terme de *Problème de Dirichlet* est classique, mais il n'en est pas de même de celui de *Problème hydrodynamique*. J'appellerai *Problème hydrodynamique* le problème qui consiste à déterminer une fonction harmonique (c'est à dire vérifiant l'équation de Laplace) dans un certain domaine, étant données les valeurs de la dérivée normale.

Il va sans dire qu'en envisageant les Problèmes précédents pour le domaine extérieur à un système de courbes (ou de surfaces) fermées, nous préciserons de la façon classique la manière dont les fonctions harmoniques que nous aurons à considérer devront se comporter à l'infini: dans l'espace, elles devront tendre uniformément vers zéro; dans le plan, elles devront rester régulières.



§ 2. On connaît diverses méthodes générales pour résoudre chacun des deux problèmes fondamentaux dont nous venons de parler mais, si l'on voulait appliquer l'une de ces méthodes au calcul de la valeur numérique de la fonction demandée en un point donné, on serait conduit à des calculs inextricables.

Je me propose de faire connaître une méthode nouvelle qui n'offre pas cet inconvénient, puisque l'application de cette méthode, même dans les cas généraux, n'exige pas des opérations plus compliquées que celles que l'on a à effectuer en se servant des méthodes classiques pour un domaine dont la frontière se réduirait à un cercle ou à une sphère.

La méthode que j'ai en vue consiste à former pour le domaine donné (D) une certaine suite infinie de fonctions harmoniques dans ce domaine

$$(1) \quad v_1, v_2, v_3, \dots$$

La détermination d'un nombre limité de termes de cette suite n'exige que le calcul des valeurs numériques d'un nombre limité d'intégrales définies, simples ou doubles suivant que le domaine (D) est à deux ou à trois dimensions.

Les fonctions v_k sont continues dans le domaine (D) ainsi que sur sa frontière (S). chacune de ces fonctions admet une dérivée normale, variant continuellement avec la position de la normale correspondante, et chacune d'elles, lorsque le domaine (D) s'étend à l'infini, est, à l'infini, régulière ou nulle selon que le domaine considéré est à deux ou à trois dimensions.

En outre les fonctions v_k jouissent des propriétés suivantes:

Sauf une restriction qui sera indiquée au § suivant, toute fonction u , continue à l'intérieur du domaine (D) et sur la frontière (S) de ce domaine, harmonique à l'intérieur du domaine considéré et, dans le cas où ce domaine ne serait pas borné, se comportant à l'infini de la façon spécifiée plus haut, peut être représentée par une série à coefficients constants de la forme suivante:

$$(2) \quad u = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k,$$

où, lorsque le domaine (D) est à trois dimensions et s'étend à l'infini, la constante c_0 est toujours nulle. La série précédente, comme il est de règle pour les séries de ce genre, ne sera pas en

général uniformément convergente dans tout le domaine (D) et pourra même être divergente sur la frontière (S) de ce domaine, mais elle sera uniformément convergente dans tout domaine intérieur¹⁾ au domaine (D) et de plus, elle se comportera sous certains rapports (que nous précisons dans le corps du mémoire) comme si elle était uniformément convergente dans (D) et même sur (S). La série (2) sera, comme cela résulte de théorèmes bien connus, dérivable terme à terme; il va sans dire que les séries déduites par voie de dérivation de la série (2), uniformément convergentes dans tout domaine intérieur au domaine (D), ne jouiront pas en général de cette propriété dans le domaine (D) lui-même, toutefois celles de ces séries qui se rapportent aux dérivées du premier ordre se rapprocheront des séries uniformément convergentes dans le domaine (D) au même titre que la série (2) elle-même.

2° L'inégalité

$$j \neq k$$

entraîne la relation

$$\int_{(S)} v_k \frac{dv_j}{dN} ds = 0,$$

en désignant par ds l'élément de la frontière (S) du domaine (D) et par $\frac{d}{dN}$ le symbole de la dérivation suivant la normale.

3° Pour toutes les valeurs entières et positives de l'indice k , on a:

$$\int_{(S)} v_k \frac{dv_k}{dN} ds = -1,$$

en dirigeant la normale, comme nous le ferons dans tout ce travail, vers l'intérieur du domaine (D).

4° Lorsque le domaine (D) n'est pas à trois dimensions et ne s'étend pas en outre à l'infini, les fonctions v_k satisfont encore aux conditions suivantes:

$$\int_{(S)} v_k ds = 0. \quad (3)$$

¹⁾ Nous dirons qu'un domaine (D_1) est intérieur au domaine (D), lorsqu'il lui correspond une longueur non nulle ρ telle que tout point intérieur à un cercle (ou à une sphère s'il s'agissait de l'espace) ayant pour centre n'importe quel point, du domaine (D_1), est intérieur au domaine (D).

5° On a dans tous les cas:

$$(4) \quad c_k = - \int_{(S)} u \frac{dv_k}{dN} ds \quad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

en outre, lorsque le domaine (D) est à deux dimensions ou, étant à trois dimensions, lorsqu'il ne s'étend pas à l'infini, lorsqu'en un mot on ne considère pas le cas où la constante c_0 est nécessairement nulle, on a:

$$(5) \quad c_0 = \frac{1}{S} \int_{(S)} u ds,$$

en désignant par S , la longueur totale ou l'aire totale de la frontière, selon le nombre de dimensions du domaine considéré.

La suite (1) étant formée, les formules (4), auxquelles on ajoutera, s'il y a lieu, la formule (5), permettront de déterminer les coefficients de la série (2) de façon que la somme u de cette série admette des valeurs périphériques ¹⁾ données. Donc, la résolution du Problème de Dirichlet au moyen des fonctions v_k n'exigera, comme la formation des fonctions v_k elles-mêmes, que la détermination des valeurs numériques de certaines intégrales définies, pourvu que les valeurs périphériques de la fonction demandée soient définies numériquement.

Pour reconnaître que les mêmes circonstances se présentent dans le Problème hydrodynamique, il suffit de remarquer que les formules (4) sont équivalentes aux suivantes

$$c_k = - \int_{(S)} \frac{du}{dN} v_k ds,$$

lorsque la fonction u admet une dérivée normale déterminée, variant continuellement sur (S). Il est presque superflu d'ajouter que,

¹⁾ Nous dirons qu'une fonction F définie à l'intérieur d'un certain domaine (Ω), admet en un point M , situé sur la frontière, une valeur périphérique déterminée F_M , lorsque la valeur $F(A)$ de la fonction F en un point A , intérieur au domaine (Ω), tend uniformément vers F_M lorsque la longueur MA tend vers zéro, de quelque façon que varie la direction du rayon MA , sans que, bien entendu, le point A cesse de rester à l'intérieur du domaine considéré. D'après cela, lorsque la fonction F admet une valeur périphérique déterminée en chacun des points de la frontière (Σ) du domaine (Ω), les valeurs périphériques de la fonction F sont, on le démontre très facilement, continuellement distribuées sur (Σ).

dans le cas du Problème hydrodynamique, la constante c_0 restera arbitraire, à moins que le domaine (D) ne soit à trois dimensions et ne s'étende en outre à l'infini, puisqu'alors la constante c_0 est nécessairement nulle.

D'après ce qui précède, la résolution du Problème de Dirichlet et celle du Problème hydrodynamique par la méthode que je vais développer dans ce travail, n'exige, dans le cas des données numériques, que le calcul des valeurs numériques de certaines intégrales (simples ou doubles suivant le nombre de dimensions du domaine (D)), formant un ensemble dénombrable. Donc, dans le cas général, les opérations à effectuer sont bien du même degré de complication que pour un domaine dont la frontière se réduirait à un cercle ou à une sphère.

§ 3. Je vais indiquer maintenant les conditions de validité des résultats précédents.

La frontière (S) du domaine (D), que nous supposons être d'un seul tenant, pourra se composer de plusieurs parties entièrement séparées, mais elle ne s'étendra pas à l'infini, elle devra admettre une normale déterminée en chacun de ses points, l'angle aigu α formé par deux normales élevées l'une en M et l'autre en M' , devra vérifier l'inégalité

$$\alpha < C \cdot \overline{MM'}$$

en désignant par C une constante; si enfin, l'on désigne par (S_0) la portion de la frontière (S), intérieure à une sphère de rayon au plus égal à une certaine longueur fixe, ayant pour centre un point quelconque O de (S), aucune parallèle à la normale en O à (S) ne pourra rencontrer (S_0) en plus d'un seul point.

Pour qu'une fonction u , harmonique à l'intérieur du domaine (D) et, au cas où ce domaine ne serait pas borné, se comportant à l'infini de la façon spécifiée précédemment, puisse être représentée par la série (2) dans les conditions indiquées au paragraphe précédent, il suffit qu'il existe une fonction Φ_0 , de la nature suivante:

1° La fonction Φ_0 est continue à l'intérieur et sur la frontière d'un domaine (D_0), qui est une portion bornée du domaine (D), limitée d'une part par la frontière (S) du domaine (D) lui-même et d'autre part, suivant le nombre de dimensions de ce domaine, par une circonférence de cercle ou une surface sphérique (C_0) dont chaque point est intérieur au domaine (D).

2° Les valeurs de la fonction Φ_0 sur (S) coïncident avec les valeurs périphériques de la fonction u .

3° A l'intérieur du domaine (D_0) , les dérivées du premier ordre de la fonction Φ_0 par rapport aux coordonnées rectangulaires existent, sont continues et telles en outre que, suivant le nombre de dimensions du domaine (D_0) , l'intégrale

$$(6) \quad \int \int_{(D_0)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

où l'intégrale

$$(7) \quad \int \int \int_{(D_0)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait une valeur finie.

Il est évident que la condition précédente est une condition relative à la nature des valeurs périphériques de la fonction harmonique u . Cette condition sera évidemment remplie dans le cas où la fonction u , admettant des valeurs périphériques distribuées continuellement sur (S) , est telle que, suivant le nombre de dimensions du domaine (D) , l'intégrale

$$(8) \quad \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

ou l'intégrale

$$(9) \quad \int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait une valeur finie. On verra dans le corps du mémoire que réciproquement, lorsque la fonction Φ_0 existe, celle des deux intégrales précédentes qui correspond au nombre de dimensions du domaine considéré est toujours finie. Par conséquent la condition relative à l'existence de la fonction Φ_0 équivaut à la suivante: la fonction harmonique u , continue sur (S) et dans (D) , doit être telle que celle des intégrales (8) ou (9) qu'il y a lieu de considérer, ait une valeur finie.

Il résulte de là que notre méthode sera sûrement applicable au Problème hydrodynamique pourvu que la fonction h , représentant les valeurs données de la dérivée normale de la fonction demandée u ,

soit continue et vérifie, bien entendu, en outre la condition bien connue

$$\int_{(S)} h \, ds = 0,$$

dans tous les cas, sauf dans celui où le domaine (D) est à trois dimensions et s'étend à l'infini, cas où la fonction h pourra être une fonction continue quelconque.

En effet, on sait que, dans ces conditions, la fonction u existe, que ses valeurs périphériques définissent une fonction continue sur (S) et que celle des intégrales (8) et (9) qui se rapporte au domaine considéré est finie; la fonction u pourra donc être représentée par la série (2), où l'on calculera les c_k au moyen des formules données au paragraphe précédent.

Dans le cas du Problème de Dirichlet, la simple continuité des valeurs périphériques de la fonction demandée ne serait évidemment pas suffisante pour légitimer l'application de la série (2), mais la restriction qui résulte de là n'est pas gênante au point de vue du calcul numérique. En effet: d'abord, théoriquement, elle ne l'est sûrement pas, puisque les valeurs périphériques données de la fonction demandée pourront toujours être représentées avec un degré d'approximation donné au moyen des valeurs que prendrait sur (S), un polynôme entier par rapport aux coordonnées; en second lieu, pour les applications en Physique, la restriction en question n'est pas gênante non plus, puisque le plus souvent l'existence de la fonction Φ_0 est évidente *a priori* ou très facile à constater.

II. Le cas du plan.

§ 4. Nous supposerons d'abord que le domaine (D) est borné et nous ramènerons ensuite à ce cas, au moyen d'une inversion, celui où le domaine considéré s'étendrait à l'infini.

§ 5. Reprenons le domaine (D_0) et la fonction Φ_0 envisagés dans l'introduction. Je dis qu'il existera une fonction Φ , continue dans tout le domaine (D) ainsi que sur la frontière (S) de ce domaine, prenant sur (S) les mêmes valeurs que la fonction Φ_0 et telle que l'intégrale

$$\int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx \, dy$$

ait une valeur finie, les dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

étant continues en tout point intérieur au domaine (D).

Pour établir ce point, plaçons l'origine des coordonnées au centre O du cercle (C_0), dont la circonférence fait partie de la frontière du domaine (D_0) et considérons deux nouveaux cercles (C_1) et (C_2) de rayons r_1 et r_2 ($r_1 < r_2$), concentriques au cercle (C_0). Nous admettrons que les rayons r_1 et r_2 des cercles (C_1) et (C_2) soient choisis de façon que tout point de la circonférence de chacun d'eux soit intérieur au domaine (D_0).

Cela posé, définissons dans le domaine (D) une fonction Φ de la façon suivante:

Dans la portion du domaine (D) définie par l'inégalité

$$x^2 + y^2 > r_2^2,$$

on aura:

$$\Phi = \Phi_0;$$

pour:

$$r_1^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_2^2;$$

on posera:

$$\Phi = \left(1 - \frac{r_2^2 - x^2 - y^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)^2 \left(1 + \frac{r_2^2 - x^2 - y^2}{r_2^2 - r_1^2}\right)^2 \Phi_0$$

enfin, pour

$$x^2 + y^2 < r_1^2,$$

on prendra

$$\Phi = 0.$$

Il est évident que la fonction Φ , définie de cette façon, satisfera à toutes les conditions indiquées plus haut. La proposition que nous voulions démontrer est donc justifiée.

§ 6. Soit Φ une fonction quelconque continue dans le domaine (D) et sur la frontière (S) de ce domaine, telle que l'intégrale

$$(1) \quad \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

ait un sens, les dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

étant continues en tout point intérieur au domaine (D). Considérons en outre une fonction u harmonique à l'intérieur du domaine (D) et telle que l'intégrale

$$\mathcal{J} = \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (2)$$

ait une valeur finie. Cela posé changeons, dans les expressions des fonctions Φ et u , x en x' et y en y' , puis, envisageons l'expression suivante:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial x'} \frac{\partial \log r}{\partial x'} + \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial y'} \frac{\partial \log r}{\partial y'} \right\} dx' dy' \quad (3)$$

où r représente la distance d'un point (x, y) du plan au point (x', y') .

Il est évident que l'expression précédente serait nulle identiquement pour l'ensemble (D') des positions du point (x, y) à l'extérieur du domaine (D), dans le cas où l'on aurait:

$$(u)_s = (\Phi)_s + \text{Const.}, \quad (4)$$

en désignant par $(u)_s$ et $(\Phi)_s$ les valeurs périphériques des fonctions u et Φ en un même point de la frontière (S) du domaine (D).

Réciproquement, et c'est ce qui constitue le théorème fondamental de la théorie que nous allons exposer, lorsque l'expression (3) est nulle pour l'ensemble (D') des positions du point (x, y) à l'extérieur du domaine (D), il suffit de savoir que l'intégrale (2) est finie pour être certain que la fonction u vérifie la relation (4).

Pour la démonstration de ce théorème, il est nécessaire d'établir diverses autres propositions que nous allons exposer successivement.

§ 7. Posons:

$$f(x, y) = \int_{(D)} \int \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{\partial \log r}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{\partial \log r}{\partial y'} \right\} dx' dy', \quad (5)$$

$$\psi(x, y) = \int_{(D)} \int \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \log r}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \log r}{\partial y'} \right\} dx' dy' \quad (6)$$

et considérons un point A situé à l'extérieur du domaine (D) sur la normale à (S) en un point quelconque M . Soient $f(A)$ et $\psi(A)$ les valeurs des fonctions $f(x, y)$ et $\psi(x, y)$ en A . L'intégrale (3) étant nulle par hypothèse lorsque le point (x, y) est situé à l'extérieur du domaine (D), nous aurons:

$$\psi(A) = f(A).$$

D'autre part, la formule (5) donne:

$$f(A) = - \int_{(S)} (\Phi)_s \frac{d \log r}{dN} ds$$

en désignant par $(\Phi)_s$ la fonction à laquelle se réduit la fonction Φ sur (S) . Par conséquent, il correspondra au point M un nombre parfaitement déterminé $\varphi(M)$ tel que l'on ait:

$$\lim_{AM=0} f(A) = \varphi(M),$$

la convergence de $f(A)$ vers $\varphi(M)$ étant uniforme pour l'ensemble des positions du point M sur (S) . Nous aurons donc:

$$(7) \quad \lim_{AM=0} \psi(A) = \varphi(M)$$

avec la même propriété de convergence uniforme.

§ 8. Il résulte des hypothèses adoptées au sujet du domaine (D) (Introduction, § 3) qu'il sera possible de mener deux cercles (Σ) et (Σ') tangents en M à (S) , ayant pour rayons une même longueur R , indépendante de la position du point M sur (S) , tels que tout point intérieur au cercle (Σ) soit intérieur au domaine (D) et tout point intérieur au cercle (Σ') — extérieur à ce domaine. Désignons par (Ω) le domaine intérieur au cercle (Σ) , par $(D-\Omega)$ le reste du domaine (D) et posons:

$$(8) \quad \psi_1(A) = \iint_{(\Omega)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \log r}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \log r}{\partial y'} \right\} dx' dy'$$

$$(9) \quad \psi_2(A) = \iint_{(D-\Omega)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \log r}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \log r}{\partial y'} \right\} dx' dy'$$

en désignant par r la distance du point (x', y') au point A considéré au paragraphe précédent. Les équations (6), (8) et (9) donneront:

$$(10) \quad \psi(A) = \psi_1(A) + \psi_2(A).$$

Je vais démontrer qu'il correspond au point M un nombre parfaitement déterminé $\varphi_2(M)$ tel que l'on ait:

$$(11) \quad \lim_{AM=0} \psi_2(A) = \varphi_2(M),$$

la convergence de $\psi_2(A)$ vers $\varphi_2(M)$ étant uniforme pour l'ensemble des positions du point M sur (S) .

A cet effet, décrivons du point M comme centre un cercle (Σ_0) de rayon R_0 ($R_0 < R$), désignons par (Ω_0) la portion du domaine $(D-\Omega)$ formée par l'ensemble de ceux des points de ce domaine qui sont intérieurs au cercle (Σ_0) et représentons par $(D-\Omega-\Omega_0)$ le reste du domaine $(D-\Omega)$. Posons ensuite:

$$\psi_2'(A) = \iint_{(\Omega_0)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \log r}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \log r}{\partial y'} \right\} dx' dy' \quad (12)$$

$$\psi_2''(A) = \iint_{(D-\Omega-\Omega_0)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \log r}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \log r}{\partial y'} \right\} dx' dy'. \quad (13)$$

Eu égard à (9), nous aurons:

$$\psi_2(A) = \psi_2'(A) + \psi_2''(A). \quad (14)$$

Appliquons l'inégalité de M. Schwarz à l'expression (12) de la quantité $\psi_2'(A)$ et reportons-nous ensuite à l'équation (2). Nous trouverons facilement:

$$\left\{ \psi_2'(A) \right\}^2 < \mathcal{J} \iint_{(\Omega_0)} \frac{dx' dy'}{r^2}.$$

Observons maintenant que tous les points du domaine (Ω_0) appartiennent au domaine (T_0) formé par l'ensemble des points extérieurs aux cercles (Σ) et (Σ') tangents en M à (S) , mais intérieurs au cercle (Σ_0) . Nous aurons donc:

$$\iint_{(\Omega_0)} \frac{dx' dy'}{r^2} \leq \iint_{(T_0)} \frac{dx' dy'}{r^2} < \frac{16}{3} \frac{R_0}{R}.$$

Par conséquent nous pourrons faire correspondre à un nombre non nul et positif μ , si petit qu'il soit, une valeur de R_0 , indépendante de la position du point M sur (S) et de celle du point (A) sur la normale en M à (S) , telle que l'on ait:

$$|\psi_2'(A)| < \mu. \quad (15)$$

La longueur R_0 étant fixée de façon que l'inégalité (15) soit vérifiée dans les conditions qui viennent d'être dites, on pourra, comme on le vérifiera aisément en se reportant à l'expression (13) de la fonction $\psi_2''(A)$, faire correspondre au nombre μ une longueur δ , indépendante de la position du point M sur (S) , telle que l'inégalité:

$$\overline{A'A''} \leq \delta \quad (16)$$

entraîne la suivante:

$$(17) \quad |\psi''(A') - \psi''(A'')| < \mu$$

en désignant par A' et A'' deux positions du point A sur la normale en M à (S) , à l'extérieur du domaine (D) , et en supposant que les longueurs $\overline{MA'}$ et $\overline{MA''}$ soient assez petites, qu'elles vérifient par exemple les inégalités suivantes:

$$(18) \quad \begin{cases} \overline{MA'} \leq R \\ \overline{MA''} \leq R, \end{cases}$$

où R représente, comme précédemment, la longueur commune des rayons des cercles (Σ) et (Σ') .

Il résulte des relations (14) et (15) et de ce que les inégalités (16) et (18) entraînent l'inégalité (17), que les inégalités (16) et (18) entraînent la suivante:

$$|\psi_2(A') - \psi_2(A'')| < 3\mu$$

indépendamment de la position du point M sur (S) . Donc lorsque la longueur \overline{AM} tend vers zéro, le point A restant extérieur au domaine (D) , la fonction $\psi_2(A)$ tend vers une limite déterminée $\varphi_2(M)$ et cela uniformément pour l'ensemble des positions du point M sur (S) . C'est ce que nous voulions établir.

§ 9. Considérons la fonction $\psi_1(A)$ définie par l'équation (8) et désignons par O le centre du cercle (Σ) qui limite le domaine (Q) ; désignons encore par A_0 le conjugué harmonique du point A par rapport au cercle (Σ) et soient $u(A_0)$ et $u(O)$ les valeurs de la fonction u en A_0 et O . Je vais démontrer que l'on a:

$$(19) \quad \psi_1(A) = -\pi(u(A_0) - u(O)).$$

Pour établir ce point, plaçons le pôle d'un système de coordonnées polaires (ρ, θ) au centre O du cercle (Σ) et choisissons l'axe OM pour origine de l'angle θ . Dans ces conditions, on aura $\theta = 0$ pour chacun des points A et A_0 . Les rayons-vecteurs des points A et A_0 étant représentés par ρ et ρ_0 , nous aurons:

$$(20) \quad \rho\rho_0 = R^2$$

puisque, on se le rappelle, R représente le rayon du cercle (Σ) . D'ailleurs, à l'intérieur du cercle (Σ) , nous avons pour $\log r$ et pour la fonction harmonique u , les développements en série suivants:

$$\log r = \log \varrho - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\theta'}{k} \left(\frac{\varrho'}{\varrho}\right)^k$$

$$u(x', y') = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta' + b_k \sin k\theta') \varrho'^k$$

en désignant par ϱ' et θ' les coordonnées polaires du point (x', y') et par les a et les b des coefficients constants.

Il suffit de porter ces valeurs de $\log r$ et de la fonction u dans l'expression (8) de la fonction $\psi_1(A)$ et de tenir compte de la relation (20), pour s'assurer que la relation (19) est bien vérifiée.

§ 10. Nous voici en mesure d'achever la démonstration du théorème fondamental énoncé au § 6.

Il résulte des équations (7), (10), (11), (19) et (20) et de l'uniformité de la convergence, pour l'ensemble des positions du point M sur (S) , des quantités $\psi(A)$ et $\psi_2(A)$ vers leurs limites respectives $\varphi(M)$ et $\varphi_2(M)$ pour $\overline{AM} = 0$, que l'on a :

$$\lim_{\overline{AM}=0} u(A_0) = u(O) + \frac{1}{\pi} \left\{ \varphi_2(M) - \varphi(M) \right\},$$

la convergence étant uniforme pour l'ensemble des positions du point M sur (S) . Un raisonnement bien connu permettra de tirer de là la conclusion suivante: la fonction u admet, en chaque point de la frontière (S) du domaine (D) , une valeur périphérique déterminée et l'ensemble des valeurs périphériques de la fonction u définit une fonction continue $(u)_s$ sur (S) . Par conséquent, lorsque le point (x, y) se trouve à l'extérieur du domaine (D) , l'intégrale (3) est égale au potentiel de double couche suivant:

$$- \int_{(S)} \left\{ (\Phi)_s - (u)_s \right\} \frac{d \log r}{dN} ds. \quad (21)$$

Or, lorsque le point (x, y) est extérieur au domaine (D) , l'intégrale (3) est nulle identiquement par hypothèse. Par conséquent, à l'extérieur du domaine (D) , le potentiel (21) est nul; il admet donc d'un côté de la frontière (S) du domaine (D) , une dérivée normale déterminée égale à zéro; par conséquent¹⁾, du côté opposé de (S) , il admet aussi une dérivée normale déterminée égale à la

¹⁾ Voir la note de M. Liapounoff dans les C. R., 8 novembre 1897.

Je vais établir le théorème suivant: pour que l'expression (3) soit nulle identiquement, lorsque le point (x, y) varie, à l'extérieur du domaine (D) , il est nécessaire et suffisant que l'on ait:

$$\iint_{(D)} \left\{ \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial x} \frac{\partial u_{k,j}}{\partial x} + \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial y} \frac{\partial u_{k,j}}{\partial y} \right\} dx dy = 0 \quad (24)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, p.$$

$$j = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ ad inf.}$$

J'observe, à cet effet, que l'ensemble (D') des points du plan extérieurs au domaine (D) se compose de $p + 1$ régions:

$$(R_0), (R_1) \dots (R_p)$$

dont l'une (R_0) s'étend à l'infini et a la courbe (S_0) pour frontière, les autres représentant les portions du plan limitées respectivement par les courbes $(S_1), (S_2) \dots (S_p)$.

Posons:

$$x - x_0 = \rho \cos \theta, \quad x' - x_0 = \rho' \cos \theta'$$

$$y - y_0 = \rho \sin \theta, \quad y' - y_0 = \rho' \sin \theta'$$

et bornons-nous à considérer les valeurs de ρ vérifiant l'inégalité:

$$\rho \geq \rho_0$$

en désignant par ρ_0 une longueur supérieure au maximum de distance du point (x_0, y_0) à un point situé à l'intérieur du domaine (D) ou sur la frontière. Nous pourrions alors porter dans l'expression (3) la valeur suivante de $\log r$:

$$\log r = \log \rho - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos j\theta \cos j\theta' + \sin j\theta \sin j\theta'}{j} \left(\frac{\rho'}{\rho} \right)^j.$$

Voici alors le résultat que nous établirons avec la plus grande facilité: Pour que l'expression (3) soit nulle à l'extérieur du cercle (Σ_0) de centre (x_0, y_0) et de rayon ρ_0 , il faut et il suffit que celles des égalités (24) qui correspondent à la valeur zéro de k soient vérifiées. D'ailleurs, puisque l'expression (3) représente une fonction régulièrement harmonique des variables x, y dans la région (R_0) , elle sera nulle dans toute cette région, si elle est nulle à l'extérieur du cercle (Σ_0) . Donc, pour que l'expression (3) soit nulle dans (R_0) , il faut et il suffit que la fonction u vérifie celles des relations (24) qui correspondent à la valeur zéro de l'indice k . On établirait d'une façon analogue ceci: pour que l'expression (3) soit nulle dans la

région (R_q), il faut et il suffit que la fonction u vérifie celles des relations (24) qui correspondent à la valeur q de l'indice k . Le théorème que nous voulions établir est donc démontré.

§ 12. D'après un théorème élémentaire de la théorie des ensembles dénombrables, nous pourrions mettre l'ensemble des fonctions (23) sous la forme d'une suite infinie:

$$(25) \quad u_1, u_2, u_3 \dots$$

en posant par exemple:

$$u_{(p+1)j+k} = u_{k,j}$$

La suite (25) étant formée, définissons une nouvelle suite:

$$(26) \quad v_1, v_2, v_3, \dots$$

de fonctions harmoniques dans (D), en posant:

$$(27) \quad \begin{cases} v_1 = c_{1,0} + c_{1,1} u_1 \\ v_k = c_{k,0} + \sum_{t=1}^{k-1} c_{k,t} v_t + c_{k,k} u_k \quad (k=2, 3, \dots) \end{cases}$$

où les c représentent des constantes qui devront satisfaire aux équations suivantes:

$$(28) \quad \begin{cases} \int_{(S)} v_k ds = 0 \\ - \int_{(S)} v_k \frac{dv_k}{dN} ds = 1 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

ainsi que:

$$\int_{(S)} v_t \frac{dv_k}{dN} ds = 0. \quad (k=2, 3, 4, \dots, t=1, 2, 3, \dots, k-1)$$

On reconnaît immédiatement que les équations précédentes sont compatibles et que, pour achever de déterminer complètement les c il suffit de fixer, au moyen d'une règle, quelconque d'ailleurs, les signes des constantes $c_{k,k}$, dont chacune sera sûrement différente de zéro.

On aura évidemment:

$$(29) \quad \int_{(S)} v_j \frac{dv_k}{dN} ds = 0$$

sous l'unique condition:

$$j \neq k.$$

Après avoir établi quelques lemmes, nous démontrerons le théorème suivant:

Avec la restriction indiquée au § 3, toute fonction u , continue sur (S) et dans (D) , harmonique à l'intérieur de ce domaine, est développable en une série procédant suivant les fonctions (26) et jouissant de toutes les propriétés énoncées au § 2.

§ 13. Il résulte des équations (27) et de ce que les constantes $c_{k, k}$ sont toutes différentes de zéro, qu'il existe entre les suites (25) et (26) la relation suivante: le terme d'un rang quelconque k de l'une quelconque de ces deux suites est une fonction linéaire à coefficients constants des k premiers termes de l'autre. Par conséquent l'ensemble des équations (24) est équivalent à l'ensemble des suivantes:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \frac{\partial(\Phi - u)}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi - u)}{\partial y} \frac{\partial v_k}{\partial y} \right\} dx dy = 0. \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (30)$$

Donc, les équations précédentes constituent un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression (3) soit nulle identiquement lorsque le point (x, y) est situé à l'extérieur du domaine (D) .

La proposition précédente va nous permettre de démontrer la suivante:

Si l'on pose:

$$\left. \begin{aligned} c_k &= - \int_{(S)} \Phi \frac{dv_k}{dN} ds, & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ c_0 &= \frac{1}{S} \int_{(S)} \Phi ds, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

en désignant par S la longueur totale de la frontière du domaine (D) , la série:

$$u = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \quad (32)$$

sera uniformément convergente dans tout domaine intérieur (voir la note p. 127) au domaine (D) et la somme u de cette série sera une fonction harmonique à l'intérieur du domaine (D) , admettant les mêmes valeurs périphériques que la fonction Φ .

§ 14. Pour étudier la série (32), nous aurons à nous appuyer sur les deux lemmes suivants:

Lemme I. Lorsqu'une fonction $f(x, y)$, admettant des dérivées premières continues à l'intérieur du domaine (D) et restant elle-même continue même sur la frontière (S) de ce domaine, vérifie la condition:

$$(33) \quad \int_{(S)} f ds = 0,$$

on a:

$$(34) \quad \int_{(D)} f^2 dx dy \leq L_1^2 \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

en désignant par L_1 une longueur dépendant uniquement de la nature géométrique du domaine (D) et en supposant évidemment que l'intégrale du second membre ait un sens.

Lemme II. Les hypothèses du lemme précédent étant conservées, on a encore:

$$(35) \quad \int_{(S)} f^2 ds \leq L_2 \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy,$$

où L_2 représente une longueur qui, comme la longueur L_1 , dépend uniquement de la nature géométrique du domaine (D) .

Démontrons d'abord le lemme I.

On sait qu'il existera ¹⁾ toujours une fonction h parfaitement déterminée à une constante additive près, harmonique à l'intérieur du domaine (D) , continue, même sur la frontière (S) de ce domaine et telle que l'on ait:

$$\frac{dh}{dN} = \sigma,$$

en désignant par σ une fonction continue donnée, définie sur (S) , pourvu que l'on ait:

$$\int_{(S)} \sigma ds = 0.$$

¹⁾ On trouvera les résultats les plus généraux actuellement connus sur cette question dans mon mémoire: Les fonctions fondamentales de M. Poincaré et la méthode de Neumann pour une frontière composée de polygones curvilignes. (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1904)

Il existera donc une fonction ψ , parfaitement déterminée à une constante additive près, continue dans le domaine (D) et sur la frontière, vérifiant à l'intérieur de ce domaine l'équation:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 1 = 0$$

et satisfaisant à la frontière à l'équation:

$$\frac{d\psi}{dN} = \frac{T}{S}$$

en désignant par T l'aire du domaine (D) et par (S) la longueur totale de la frontière de ce domaine.

Cela posé, l'une des formes du théorème de Green donne:

$$\iint_{(D)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx dy = A \quad (36)$$

en posant:

$$A = \iint_{(D)} f \cdot dx dy \quad (37)$$

et en tenant compte de la condition (33), ainsi que de la définition de la fonction ψ .

L'inégalité de M. Schwarz, appliquée à l'expression (36) de A donne:

$$A^2 \leq \iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

ce qui peut s'écrire:

$$A^2 \leq L_3^4 \iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (38)$$

en désignant par L_3 une longueur ne dépendant que de la nature géométrique du domaine (D).

Posons pour un moment:

$$f_1(x, y) = f(x, y) - \frac{A}{T} \quad (39)$$

en désignant par T l'aire totale du domaine (D). Nous aurons:

$$\iint_{(D)} f_1(x, y) dx dy = 0,$$

par conséquent:

$$\int_{(D)} \int_{(D)} f_1^2 dx dy \leq L^2_4 \int_{(D)} \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

en vertu d'un théorème dû à M. Stekloff¹⁾. Portons dans l'inégalité précédente la valeur (39) de la fonction $f_1(x, y)$; il viendra:

$$\int_{(D)} \int_{(D)} f^2 dx dy - \frac{A^2}{T} \leq L^2_4 \int_{(D)} \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy;$$

il ne reste plus qu'à se reporter à l'inégalité (38) et à poser:

$$L^2_1 = L^2_4 + \frac{L^2_3}{T}$$

pour déduire de l'inégalité obtenue, l'inégalité (34) qu'il s'agissait précisément de démontrer.

Pour établir le second lemme, observons qu'il existe une longueur L_5 et un nombre n qui dépendent uniquement de la nature du domaine (D) , tels que l'on ait:

$$\int f^2 ds < n L \left\{ \int_{(D)} \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \frac{1}{L^2} \int_{(D)} \int_{(D)} f^2 dx dy \right\}$$

pourvu que la longueur L vérifie l'inégalité²⁾:

$$L \geq L_5.$$

Posons en particulier:

$$L = L_5$$

et reportons-nous à l'inégalité (34); nous trouverons sans peine que l'inégalité (35) sera sûrement vérifiée en définissant la longueur L_2 au moyen de la formule suivante:

$$L_2 = n L_5 \left\{ 1 + \frac{L^2_1}{L^2_5} \right\}.$$

¹⁾ Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 2-e série, T. II, p. 294. A la vérité M. Stekloff considère le cas de 3 variables indépendantes, mais il est évident que la même méthode est applicable aux fonctions de deux variables.

²⁾ On trouvera la démonstration de cette proposition pour les fonctions de trois variables indépendantes dans mon mémoire: „Sur les fonctions dites fondamentales dans la théorie des équations de la Physique“ (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Février 1901); voir en particulier l'inégalité (16) p. 116 de ce mémoire. On reconnaîtra de suite que la même méthode est applicable aux fonctions de deux variables.

Nos deux lemmes sont donc établis.

§ 15. En entreprenant l'étude de la série (32), nous commencerons par faire usage d'un raisonnement dont la première idée semble être due à M. de la Vallée Poussin et dont divers auteurs, en particulier M. Liapounoff et surtout M. Stekloff, se sont servi dans de nombreuses questions avec le plus grand succès.

Les constantes c étant définies au moyen des formules (31), posons:

$$\psi_n = \Phi - \sum_{k=1}^n c_k v_k.$$

Une application facile du théorème de Green nous donnera:

$$\begin{aligned} \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_k}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy &= \\ &= \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \sum_{k=1}^n c_k^2, \end{aligned}$$

en tenant compte des relations (28) et (29). Donc, quelque valeur positive qu'ait l'entier n , on aura:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \geq \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

Par conséquent la série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \quad (40)$$

est convergente et l'on a:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \geq \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2. \quad (41)$$

Posons:

$$w_{n,p} = \sum_{k=n}^{n+p} c_k v_k. \quad (42)$$

A cause des relations (28) et (29), nous aurons:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \sum_{k=n}^{n+p} c_k^2. \quad (43)$$

Par conséquent, puisque la série (40) est convergente, l'intégrale

précédente tendra vers zéro, lorsque l'entier n croîtra indéfiniment et cela uniformément de quelque façon que varie l'entier positif p . Il résulte de là immédiatement qu'il en sera de même de chacune des deux intégrales suivantes:

$$(44) \quad \int\int_{(D)} \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial x}\right)^2 dx dy \quad \text{et} \quad \int\int_{(D)} \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial y}\right)^2 dx dy;$$

en outre, puisque l'on a:

$$\int_{(S)} w_{n,p} ds = 0,$$

comme cela résulte des relations (28) et (42), et puisque pour cette raison, le Lemme I du § précédent est applicable à la fonction $w_{n,p}$, il est clair que l'intégrale:

$$(45) \quad \int\int_{(D)} w_{n,p}^2 dx dy$$

tendra aussi uniformément vers zéro lorsque l'entier n croîtra indéfiniment, de quelque façon que varie en même temps l'entier positif p .

§ 16. Le théorème que j'ai démontré au § 5 de mon mémoire: „Sur l'intégration de l'équation biharmonique“ (*Bulletin de l'Académie de Cracovie*, Janvier 1908) permet de tirer de la propriété précédente de l'intégrale (45) la conclusion suivante:

La série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$$

et par conséquent la série (32) sont uniformément convergentes dans tout domaine intérieur au domaine (D) . Donc, en vertu de théorèmes classiques, la fonction u , somme de la série (32), vérifie l'équation de Laplace à l'intérieur du domaine (D) et, à l'intérieur de ce domaine, la série considérée est dérivable terme à terme; on a donc en particulier:

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \end{array} \right.$$

les séries des seconds membres étant uniformément convergentes dans tout domaine intérieur au domaine (D) .

Envisageons de nouveau ce fait que l'intégrale (45) converge vers zéro dans les conditions dites plus haut et considérons en outre les propriétés analogues des intégrales (44).

En se reportant au § 6 du mémoire cité au début du paragraphe actuel, on arrivera immédiatement aux conclusions suivantes: Les intégrales:

$$\int_{(D)} u^2 dx dy, \int_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx dy, \int_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dx dy \quad (47)$$

ont des valeurs finies et, si l'on pose:

$$u_n = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k v_k, \quad (48)$$

on a:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D)} (u - u_n)^2 dx dy &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 dx dy &= 0 \\ \lim_{\infty=n} \int_{(D)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^2 dx dy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Par conséquent si l'on désigne par F une fonction quelconque à cela près que l'intégrale:

$$\int_{(D)} F^2 dx dy$$

ait un sens, on aura:

$$\int_{(D)} u F dx dy = c_0 \int_{(D)} F dx dy + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(D)} v_k F dx dy \quad (50)$$

ainsi que:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(D)} \frac{\partial u}{\partial x} F dx dy &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(D)} \frac{\partial v_k}{\partial x} F dx dy \\ \int_{(D)} \frac{\partial u}{\partial y} F dx dy &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(D)} \frac{\partial v_k}{\partial y} F dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Si chacune des intégrales:

$$\int\int_{(D)} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 dx dy \text{ et } \int\int_{(D)} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 dx dy$$

avait un sens, on aurait évidemment:

$$(52) \quad \int\int_{(D)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} \right\} dx dy = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int\int_{(D)} \left\{ \frac{\partial v_k}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} \right\} dx dy.$$

§ 17. Il est très aisé maintenant de démontrer le théorème énoncé à la fin du § 13.

En effet, il est évidemment permis de poser:

$$F = v_k$$

dans l'identité (52); on trouve de cette façon:

$$(53) \quad \int\int_{(D)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v_k}{\partial y} \right\} dx dy = c_k,$$

en tenant compte des relations (28) et (29). D'autre part, en vertu des équations (31), on a:

$$\int\int_{(D)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial v_k}{\partial y} \right\} dx dy = c_k.$$

Par conséquent la fonction u , somme de la série (32), satisfait à l'ensemble des équations (30). D'ailleurs, puisque les intégrales (47) sont finies, il en sera de même de l'intégrale:

$$\int\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right\} dx dy.$$

Donc, en vertu du théorème énoncé au § 6 (p. 132), la fonction u vérifie l'équation (4). Il nous reste seulement à établir que la constante qui entre dans cette relation est nulle dans le cas actuel. A cet effet, considérons la fonction ψ introduite au § 14; elle est définie, on se le rappelle, de la façon suivante: à l'intérieur du domaine (D) on a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 1 = 0;$$

et sur la frontière:

$$\frac{d\psi}{dN} = \frac{T}{S}$$

où T et S représentent l'aire du domaine (D) et la longueur totale de la frontière.

Posons:

$$F = \psi$$

dans l'identité (52); une application facile du théorème de Green et les premières des relations (28) nous donneront:

$$\iint_{(D)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \iint_{(D)} v_k dx dy.$$

D'ailleurs nous nous sommes assurés tout à l'heure que la fonction u satisfait à l'équation (4); elle admet donc des valeurs périphériques déterminées définissant sur (S) une fonction continue. Par conséquent nous pouvons, au moyen du théorème de Green, mettre le premier membre de l'équation précédente sous la forme suivante:

$$\iint_{(D)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right\} dx dy = -\frac{T}{S} \int_{(S)} u ds + \iint_{(D)} u dx dy.$$

Nous avons donc:

$$-\frac{T}{S} \int_{(S)} u ds + \iint_{(D)} u dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \iint_{(D)} v_k dx dy.$$

Or, en posant $F=1$ dans l'égalité (50), on trouve:

$$\iint_{(D)} u dx dy = c_0 T + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \iint_{(D)} v_k dx dy.$$

Nous avons donc:

$$\int_{(S)} u ds = c_0 \cdot S. \quad (54)$$

Portons dans cette égalité la valeur (31) de c_0 ; il viendra:

$$\int_{(S)} u ds = \int_{(S)} \Phi ds$$

ce qui prouve que la différence constante des valeurs périphériques des fonctions u et Φ est nulle. Le théorème énoncé à la fin du § 13 est donc démontré.

§ 18. Dans ce paragraphe, nous nous écarterons du sujet propre de ce travail pour mettre en évidence une conséquence intéressante des résultats obtenus précédemment.

Les intégrales (47) étant finies, il est permis de remplacer la fonction F dans l'égalité (52) par la fonction u ; nous trouverons:

$$(55) \quad \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2,$$

en vertu de (53).

Rapprochons cette relation, déjà intéressante en elle-même, de l'inégalité (41). Nous reconnaitrons que l'on a:

$$(56) \quad \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \geq \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy.$$

Cette relation exprime le théorème suivant: désignons par (E) l'ensemble des fonctions, continues dans (D) et sur (S) , dont les valeurs sur (S) coïncident avec celles d'une fonction continue déterminée, définie sur (S) ; s'il existe dans l'ensemble (E) des fonctions P admettant des dérivées premières continues à l'intérieur du domaine (D) et telles que l'intégrale:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

reste finie, il existera dans l'ensemble E une fonction u (nécessairement harmonique à l'intérieur du domaine (D)) telle que, pour $P = u$, l'intégrale précédente atteigne exactement sa borne inférieure.

Ce théorème constitue le Principe de Dirichlet, il est donc connu depuis longtemps mais, comme l'a justement fait observer M. Lebesgue¹⁾, qui paraît être le premier à en avoir donné une démonstration rigoureuse, la démonstration classique n'est nullement probante même si l'on considère la possibilité du Problème de Dirichlet comme préalablement démontrée. Il n'était donc

¹⁾ Sur le Problème de Dirichlet. Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1907.

pas sans intérêt de faire remarquer que le théorème précédent est une conséquence immédiate des considérations développées plus haut.

§ 19. Revenons à la série (32) (p. 141). Par la propriété qu'exprime l'égalité (50), cette série se rapproche d'une série uniformément convergente dans le domaine (D) . Je vais démontrer que la série considérée, bien qu'elle puisse même être divergente sur (S) , jouit cependant, par rapport à (S) , d'une propriété analogue à la précédente.

Posons:

$$u = c_0 + \sum_{k=1}^n c_k v_k + R_n. \quad (57)$$

Nous savons (§ 17) que la fonction u admet des valeurs périphériques (égales à celle de la fonction Φ) définissant une fonction continue sur (S) . Convenons de définir les valeurs de u sur (S) comme égales à ses valeurs périphériques. Dans ce cas la fonction u sera une fonction continue dans (D) et même sur (S) . Par conséquent il en sera de même de la fonction R_n . Nous pouvons donc sûrement écrire:

$$\int_{(S)} u ds = c_0 \int_{(S)} ds + \sum_{k=1}^n c_k \int_{(S)} v_k ds + \int_{(S)} R_n ds$$

d'où:

$$\int_{(S)} u ds = c_0 \cdot S + \int_{(S)} R_n ds$$

en vertu des équations (28) et de la définition du symbole S . L'équation précédente, combinée avec (54), donne:

$$\int_{(S)} R_n ds = 0.$$

Cela nous permet d'appliquer à la fonction R_n le Lemme II du § 14. Nous aurons donc:

$$\int_{(S)} R_n^2 ds \leq L_2 \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy.$$

Or, les relations (48), (49) et (57) donnent:

$$\lim_{n=\infty} \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0.$$

Par conséquent:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(S)} R_n^2 ds = 0.$$

On conclura immédiatement de cette relation et de la relation (57) que l'on a:

$$(58) \quad \int_{(S)} u \sigma ds = c_0 \int_{(S)} \sigma ds + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(S)} v_k \sigma ds$$

en désignant par σ une fonction arbitraire à cela près que l'intégrale:

$$\int \sigma^2 ds$$

ait une valeur finie et bien déterminée. L'égalité (58) exprime précisément, par rapport à la série (32), la propriété que nous avons en vue.

§ 20. Il suffit de rapprocher le théorème énoncé à la fin du § 13 (p. 141) et démontré au § 17, de ce qui a été établi au § 5 (p. 131) pour reconnaître que, comme nous l'avons énoncé à la fin du § 12, toute fonction u harmonique à l'intérieur du domaine (D) et dont les valeurs périphériques satisfont à la condition énoncée au § 3 est développable de la façon indiquée au § 2 en une série procédant suivant les fonctions (26) définies par les équations (27). La série précédente peut n'être pas uniformément convergente à l'intérieur du domaine (D) et, sur la frontière (S) de ce domaine, elle pourrait même être divergente, mais comme cela résulte des égalités (50) et (58), elle se comporte, sous certains rapports, comme si elle était uniformément convergente dans (D) et sur (S). En outre, ainsi que cela résulte des égalités (51), les séries, déduites de la série considérée au moyen d'une simple dérivation par rapport à l'une des variables x ou y , se rapprochent, au même titre que la série primitive elle-même, des séries uniformément convergentes dans le domaine (D).

Enfin, puisque, comme cela résulte de tout ce qui précède, l'intégrale:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

est finie pour une fonction harmonique dans (D) , telle que ses valeurs périphériques satisfassent à la condition du § 3 et telle par conséquent qu'en vertu de la théorie que nous avons exposée, elle puisse être représentée par une série de la forme:

$$c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k,$$

on voit que la condition du § 3 équivaut à la suivante:

La fonction u continue dans (D) et sur (S) doit être telle que l'intégrale:

$$\iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

soit finie.

En résumé, pour ce qui concerne le cas d'un domaine borné défini dans le plan, tous les résultats annoncés dans l'Introduction sont établis.

§ 21. Il nous reste à examiner le cas où le domaine (D) ne serait pas borné. Ce cas peut, comme nous l'avons dit déjà, se ramener au moyen d'une inversion, à celui qui a été étudié dans les paragraphes précédents. La réduction dont nous venons de parler deviendra intuitive après avoir pris connaissance de quelques remarques qui concernent, d'une façon générale, le groupe des transformations conformes dans le plan.

Tout d'abord on vérifie immédiatement que les intégrales doubles telles que les suivantes:

$$\iint \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} \right\} dx dy \text{ et } \int P \left\{ \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \right\} dx dy \quad (59)$$

ainsi que les intégrales curvilignes de la forme:

$$\int P \frac{dQ}{dN} ds \quad (60)$$

représentent, par rapport au groupe des transformations conformes, des invariants intégraux¹⁾.

¹⁾ C'est M. Żorawski le premier qui, dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Cracovie, le 1-er avril 1895, a développé la théorie générale des invariants intégraux au point de vue de la théorie des groupes de trans-

Cela posé, supposons que les équations:

$$(61) \quad \begin{cases} x' = \varphi(x, y) \\ y' = \psi(x, y) \end{cases}$$

définissent une représentation conforme de deux domaines (D) et (D') l'un sur l'autre. Nous admettrons bien entendu que la correspondance entre les points (x, y) du domaine (D) et les points (x', y') du domaine (D') soit univoque et réciproque et nous supposerons en outre que le déterminant fonctionnel:

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$$

ne devienne ni nul ni infini en aucun point de la frontière, enfin nous admettrons encore que chacun des domaines (D) et (D') satisfasse aux conditions générales du § 3. Nous désignerons par (S) la frontière du domaine (D) et par (S') celle du domaine (D') .

Cela posé supposons que l'on connaisse une suite infinie:

$$(62) \quad v_1', v_2', v_3', \dots$$

de fonctions des variables x' et y' , continues à l'intérieur du domaine (D') et sur la frontière (S') de ce domaine, harmoniques à l'intérieur du domaine considéré et, si ce domaine n'était pas borné, régulières à l'infini. Supposons de plus que les quantités:

$$\frac{dv'_k}{dN'}$$

où $\frac{d}{dN'}$ représente le symbole de la dérivation suivant la normale à (S') , existent et varient continuellement avec la position du pied de la normale à laquelle elles se rapportent. Enfin supposons que les fonctions (62) jouissent des propriétés suivantes:

1° On a:

$$(62) \quad - \int_{(S')} v'_k \frac{dv'_k}{dN'} ds' = \int \int_{(D')} \left\{ \left(\frac{dv'_k}{dx'} \right)^2 + \left(\frac{dv'_k}{dy'} \right)^2 \right\} dx' dy' = 1.$$

2° L'inégalité:

$$j \neq k$$

formations. La notion de ces invariants est, on le sait, due à M. Poincaré qui en a donné de belles applications au problème de trois corps.

entraîne la suivante:

$$\int_{(S')} v'_k \frac{dv'_j}{dN'} ds' = 0. \quad (63)$$

3° Toute fonction u' des variables x' et y' , continue dans (D') et sur (S') , harmonique à l'intérieur du domaine (D') , régulière à l'infini au cas où le domaine (D') ne serait pas borné, vérifiant en outre quelque condition (C) d'ordre général, invariante par rapport au groupe des transformations conformes et pouvant par conséquent consister en ce que l'intégrale:

$$\iint_{(D')} \left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y'} \right)^2 \right\} dx' dy' \quad (64)$$

soit finie, peut être représentée par une série à coefficients constants de la forme:

$$u' = c'_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c'_k v'_k, \quad (65)$$

série convergente uniformément à l'intérieur de tout domaine intérieur au domaine (D') , pouvant être divergente sur la frontière (S') de ce domaine, mais telle cependant que l'on ait:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(S')} \left\{ u' - \left(c'_0 + \sum_{k=1}^n c'_k v'_k \right) \right\}^2 ds' = 0. \quad (66)$$

Connaissant les valeurs périphériques de la fonction u' , il serait évidemment aisé de calculer les coefficients de la série (65).

En effet les relations (62) et (63), eu égard à (66), donneront:

$$c'_k = - \int_{(S')} u' \frac{dv'_k}{dN'} ds'; \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (67)$$

en outre, on aurait, pour calculer c'_0 , l'équation suivante:

$$\int_{(S')} u' ds' = c'_0 \cdot S' + \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \int_{(S')} v'_k ds' \quad (68)$$

où S' représente la longueur totale de la frontière du domaine (D') .

Si l'on changeait chacune des fonctions v'_k en:

$$v'_k - \frac{1}{S'} \int_{(S')} v'_k ds',$$

les nouvelles expressions des fonctions v'_k jouiraient évidemment de toutes les propriétés précédentes, les formules (67) subsisteraient évidemment sans aucun changement, mais l'équation (68) prendrait la forme plus simple que voici:

$$\int_{(S)} u' ds' = c_0 \cdot S'$$

puisqu'on aurait alors:

$$(69) \quad \int_{(S')} v'_k ds' = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Considérons maintenant une fonction u des variables (x, y) continue dans le domaine (D) et sur la frontière (S) de ce domaine, harmonique à l'intérieur du domaine en question, régulière à l'infini au cas où le domaine (D) ne serait pas borné, vérifiant en outre la condition invariante (C) que nous supposons, pour fixer les idées, se réduire à ce que l'intégrale:

$$(70) \quad \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

ait un sens.

Désignons par u' la fonction des variables x' et y' obtenue en substituant dans l'expression de la fonction u les variables x' et y' aux variables x et y au moyen des équations (61). La fonction u' sera évidemment continue à l'intérieur du domaine (D') et sur la frontière (S') de ce domaine, elle sera harmonique à l'intérieur de (D') et, si ce domaine n'était pas borné, régulière à l'infini; enfin, à cause de l'invariance des intégrales (59) par rapport aux groupes des transformations conformes, l'intégrale (64) aura une valeur finie égale à celle de l'intégrale (70). Par conséquent la fonction u' pourra être représentée par la série (66). Revenons aux variables (x, y) . Les fonctions v'_k se transformeront en des fonctions v_k des variables x et y . Les fonctions v_k seront évidemment continues dans (D) et sur (S) , elles seront harmoniques à l'intérieur du domaine (D) et, si ce domaine n'était pas borné, régulières à l'infini; de plus les quantités $\frac{dv_k}{dN}$ existeront et varieront continuellement avec la position du pied de la normale correspondante. En outre, à cause de

l'invariance des intégrales (59) et (60), on aura, comme pour les fonctions v'_k :

$$-\int_{(S)} v_k \frac{dv_k}{dN} ds = \int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_k}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 1$$

ainsi que:

$$\int_{(S)} v_k \frac{dv_j}{dN} ds = 0; \quad \text{pour } j \neq k;$$

enfin on aura:

$$u = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \quad (71)$$

avec:

$$c_k = c'_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

la série étant uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine (D) . Toutefois il n'est pas évident que l'on ait:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(S)} \left\{ u - \left(c_0 + \sum_{k=1}^n c_k v_k \right) \right\}^2 ds = 0 \quad (72)$$

puisque, par rapport à la transformation considérée, les intégrales de la forme:

$$\int_{(S')} F ds'$$

ne sont pas invariantes. Il est aisé cependant de s'assurer que l'équation (72) sera sûrement vérifiée. En effet, nous avons:

$$\int_{(S')} \left\{ u' - \left(c'_0 + \sum_{k=1}^n c'_k v'_k \right) \right\}^2 ds' = \int_{(S)} \lambda \left\{ u - \left(c_0 + \sum_{k=1}^n c_k v_k \right) \right\}^2 ds$$

en désignant par λ une fonction continue, différente de zéro et évidemment positive. Désignons par λ_0 le minimum absolu de λ . L'égalité précédente nous donnera:

$$\int_{(S)} \left\{ u - \left(c_0 + \sum_{k=1}^n c_k v_k \right) \right\}^2 ds \leq \frac{1}{\lambda_0} \int_{(S')} \left\{ u' - \left(c'_0 + \sum_{k=1}^n c'_k v'_k \right) \right\}^2 ds'.$$

Donc l'équation (66) entraîne (72), laquelle par conséquent sera bien vérifiée.

Il résulte de ce qui précède que les v_k jouiront, par rapport au

domaine (D), du même ensemble de propriétés dont jouissent par hypothèse les v'_k par rapport au domaine (D'). On aura en particulier:

$$c_k = - \int_{(S)} u \frac{dv_k}{dN} ds \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

et si, en se reportant à une remarque faite plus haut au sujet des v'_k , on modifie les v_k en leur ajoutant des constantes telles que les fonctions modifiées vérifient les équations:

$$(73) \quad \int_{(S)} v_k ds = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots),$$

on aura encore:

$$c_0 = \frac{1}{S} \int_{(S)} u ds$$

en désignant par S la longueur totale de la frontière du domaine (D).

§ 22. Passons à l'application des considérations générales précédentes.

Le domaine (D) n'étant pas borné, la frontière se composera de $p + 1$ courbes fermées:

$$(S_0), (S_1), \dots, (S_p),$$

n'ayant pas de points communs et le domaine (D) lui-même sera formé par l'ensemble des points extérieurs aux portions de plan limitées par ces courbes.

Transformons le domaine (D) par rayons-vecteurs réciproques en plaçant le pôle d'inversion O en un point situé à l'intérieur de la portion de plan limitée par l'une des courbes précédentes, soit (S_0).

Désignons par (D') le transformé du domaine (D). A cause du choix du pôle d'inversion, le domaine (D') sera borné et pour ce domaine, nous pourrons former des fonctions v'_k de la nature considérée au paragraphe précédent suivant la règle du § 12.

Cela posé envisageons le domaine (D_0) et la fonction Φ_0 considérés dans l'Introduction au § 3. Les transformés (D'_0) et (Φ'_0) du domaine (D_0) et de la fonction Φ_0 seront évidemment des éléments qui, par rapport au domaine (D') seront ce que sont (D_0) et (Φ_0) par rapport au domaine donné (D) lui-même.

D'ailleurs si les valeurs périphériques d'une fonction u , harmonique dans (D) et régulière à l'infini, coïncident avec celles de Φ_0 ,

les valeurs périphériques de la transformée u' de la fonction u coïncideront avec celles de la fonction Φ'_0 . Par conséquent la fonction u' sera développable en une série de la forme (65) et cette série jouira des propriétés énoncées au paragraphe précédent. Si donc les v_k représentent les transformées des v'_k , la fonction u sera développable en une série de la forme (71), dans les conditions exposées au paragraphe précédent. On pourra d'ailleurs, comme nous l'avons expliqué, modifier les v_k de façon que les équations (73) soient vérifiées.

Il est aisé de voir comment on pourra former les v_k directement sans former d'abord les v'_k . On reconnaît sans peine que la règle correspondante peut être énoncée de la façon suivante:

On choisira à l'intérieur de chacune des courbes (S_k) , et par conséquent à l'extérieur du domaine (D) , arbitrairement un point (x_k, y_k) et l'on envisagera les polynômes définis par les équations:

$$f_{2i-1}(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ (x + iy)^i + (x - iy)^i \right\}$$

$$f_{2i}(x, y) = \frac{1}{2i} \left\{ (x + iy)^i - (x - iy)^i \right\}$$

où i représente l'unité imaginaire. On définira ensuite les fonctions $u_{k,j}$ au moyen des formules suivantes:

$$u_{0, 2i-2} = \frac{f_{2i-1}(x - x_0, y - y_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}^i},$$

$$u_{0, 2i-1} = \frac{f_{2i}(x - x_0, y - y_0)}{\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\}^i},$$

$$u_{k, 0} = \log \frac{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

$$u_{k, 2i-1} = \frac{f_{2i-1}(x - x_k, y - y_k)}{\{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2\}^i},$$

$$u_{k, 2i} = \frac{f_{2i}(x - x_k, y - y_k)}{\{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2\}^i},$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \dots \text{ad inf.} \\ k = 1, 2, 3 \dots p \end{pmatrix}$$

puis, on rangera les $u_{k,j}$ dans un certain ordre (d'ailleurs quelconque) de façon à former avec ces fonctions une suite infinie:

$$u_1, u_2, u_3 \dots$$

enfin on combinera les termes de cette suite, exactement comme au § 12 (p. 140), pour former les v_k .

Nous avons démontré que toute fonction u , harmonique à l'intérieur du domaine (D) et vérifiant la condition énoncée au § 3, est développable en une série de la forme (71), les v_k étant formés suivant la règle qui vient d'être donnée. Cela posé, il suffit de raisonner comme nous l'avons fait à la fin du § 20, pour reconnaître que dans le cas actuel la condition du § 3 équivaut à la suivante: la fonction u continue dans (D) et sur (S) , harmonique à l'intérieur du domaine (D) et régulière à l'infini doit être telle que l'intégrale:

$$\int_{(D)} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

ait une valeur finie.

§ 23. Montrons que, lorsque la fonction u vérifie la condition précédente, la série (71) ainsi que les séries:

$$(74) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \end{cases}$$

se rapprochent, comme dans le cas d'un domaine borné, de séries uniformément convergentes dans le domaine (D) , en outre, la série (71), bien qu'elle puisse ne pas converger sur (S) , est cependant, encore comme dans le cas d'un domaine borné, analogue à une série convergente et même convergente uniformément sur (S) .

La justification de la dernière partie de l'assertion précédente est immédiate: en effet, à cause de l'équation (72), on aura, comme si la série (71) convergeait uniformément sur (S) , la relation suivante:

$$\int_{(S)} u \sigma ds = c_0 \int_{(S)} \sigma ds + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(S)} v \sigma ds$$

en désignant par σ une fonction définie sur (S) et quelconque à cela près que l'intégrale:

$$\int_{(S)} \sigma^2 ds$$

ait un sens.

Posons:

$$R_n = u - \left(c_0 + \sum_{k=1}^n c_k v_k \right). \quad (75)$$

Il suffit de se reporter à la façon dont nous avons établi la possibilité du développement (71) de la fonction u pour reconnaître que l'on a:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = 0. \quad (76)$$

Donc, si l'on désigne par F une fonction quelconque à cela près que l'intégrale:

$$\iint_{(D)} F^2 dx dy \quad (77)$$

ait un sens, on aura:

$$\iint_{(D)} \frac{\partial u}{\partial x} F dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \iint_{(D)} \frac{\partial v_k}{\partial x} F dx dy \quad (77)$$

ainsi qu'une équation analogue relative à la seconde des séries (74): cela rapproche ces séries des séries uniformément convergentes dans le domaine (D) . Il résulte des relations précédentes, remarquons le en passant, que l'on a:

$$\iint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Il me reste à démontrer que l'on aura:

$$\iint_{(\Omega)} u F dx dy = c_0 \iint_{(\Omega)} F dx dy + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \iint_{(\Omega)} v_k F dx dy \quad (78)$$

en désignant par (Ω) une portion bornée et quarrable quelconque du domaine (D) , pourvu que l'intégrale:

$$\iint_{(\Omega)} F^2 dx dy$$

ait un sens.

Pour démontrer la relation (78), décrivons d'un point quelconque comme centre un cercle (Σ) de rayon assez grand pour que tout le domaine (Ω) ainsi que la frontière (S) du domaine (D) soient intérieurs à ce cercle. Tous les points de la circonférence du cercle

(Σ) seront intérieurs au domaine (D). Par conséquent, sur cette circonférence la série (71) sera uniformément convergente. En tenant compte de cela et en se reportant aux équations (72) et (75), on reconnaît immédiatement que l'on a :

$$(79) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(S+\Sigma)} R_n^2 ds = 0,$$

en désignant par ($S + \Sigma$) la frontière du domaine (D_1) formé par l'ensemble de ceux des points du domaine (D) qui sont intérieurs au cercle (Σ).

Posons :

$$W_n = R_n + B_n$$

en désignant par B_n une constante telle que l'on ait :

$$(81) \quad \int_{(S+\Sigma)} W_n ds = 0$$

et reportons-nous au Lemme I du § 14. Nous aurons :

$$(82) \quad \int_{(D_1)} W_n^2 dx dy \leq l^2 \int_{(D_1)} \left\{ \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_n}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy$$

en désignant par l une longueur dépendant uniquement de la nature géométrique du domaine (D_1). Donc, à cause de (76) et parce que le domaine (D_1) n'est qu'une partie du domaine (D), on a :

$$(82) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D_1)} W_n^2 dx dy = 0.$$

Or, il résulte de (79) que la valeur de B_n tirée de (81) vérifie la condition :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0.$$

Par conséquent l'équation (82) nous donnera :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D_1)} R_n^2 dx dy = 0$$

en tenant compte de ce que le domaine (D_1) est borné. Mais le domaine (Ω) n'est qu'une partie du domaine (D_1).

Donc, a fortiori, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(\Omega)} R_n^2 dx dy = 0,$$

relation qui entraîne évidemment la relation (78) que nous voulions établir.

En résumé les résultats annoncés dans l'introduction, précédemment justifiés dans le cas d'un domaine borné à deux dimensions, le sont actuellement aussi pour un domaine à deux dimensions, non borné.

III. Le cas de l'espace.

§ 24. En principe, la méthode du chapitre précédent est applicable au cas où le domaine (D) est à trois dimensions, mais les intégrales de la forme:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial Q}{\partial z} \right\} dx dy dz$$

n'étant pas, comme les intégrales doubles analogues, invariantes dans l'inversion, il n'y a plus avantage à ramener le cas d'un domaine non borné au cas d'un domaine borné au moyen de cette transformation. Il est au contraire préférable de traiter chacun de ces cas directement.

§ 25. On reconnaît avec la plus grande facilité que la remarque présentée au § 5 (p. 131) s'étend immédiatement à l'espace. En effectuant cette extension, de manière à ne pas écarter le cas d'un domaine non borné, on arrive aisément à l'énoncé suivant:

Etant donné une fonction Φ_0 , de la nature considérée dans l'Introduction, au § 3, il est toujours possible de définir une fonction Φ , continue dans tout le domaine (D) et sur la frontière (S) de ce domaine, admettant sur (S) les mêmes valeurs que la fonction Φ_0 , possédant dans le voisinage de tout point intérieur au domaine (D) des dérivées premières continues, telle que l'intégrale:

$$\iiint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz \quad (1)$$

ait une valeur finie et bien déterminée, vérifiant enfin, au cas où le domaine (D) ne serait pas borné, la condition additionnelle que les produits:

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \Phi, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ & (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

restent bornés pour:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq l^2$$

en désignant par l une longueur finie assez grande¹⁾.

§ 26. Le théorème du § 6, étendu à l'espace et énoncé de façon à être applicable aussi bien au cas où le domaine (D) serait borné qu'à celui où il ne le serait pas, peut être présenté de la façon suivante:

La lettre Φ désignant une fonction qui vérifie les conditions du paragraphe précédent, considérons une fonction u , harmonique à l'intérieur du domaine (D) et, lorsque ce domaine n'est pas borné, tendant uniformément vers zéro lorsque le point (x, y, z) s'éloigne suivant une loi quelconque à l'infini. Supposons que l'intégrale:

$$(3) \quad \mathcal{I} = \int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait une valeur finie et envisageons l'expression suivante:

$$(4) \quad \int \int \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x'} + \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'} + \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz'$$

où r représente la distance d'un point (x, y, z) au point (x', y', z') .

Lorsque l'expression précédente est nulle pour l'ensemble (D') des positions du point (x, y, z) à l'extérieur du domaine (D), la fonction u admet sur (S) des valeurs périphériques déterminées $(u)_s$, liées aux valeurs périphériques $(\Phi)_s$ de la fonction Φ par une équation de la forme:

$$(5) \quad (u)_s = (\Phi)_s + \text{Const.}$$

J'ajoute que, dans le cas où le domaine (D) n'est pas borné, la différence constante des valeurs périphériques des fonctions u et Φ se réduit à zéro.

La démonstration de ce théorème sera moins simple que celle du théorème du § 6, mais il ne sera pas nécessaire d'examiner sé-

¹⁾ Si, pour former la fonction Φ , on fait usage du procédé indiqué au § 5, les quantités (2) seront toutes nulles pour des valeurs assez grandes de $x^2 + y^2 + z^2$

parément le cas où le domaine (D) serait borné et celui où il ne le serait pas.

§ 27. Pour faciliter l'intelligence de ce qui va suivre, nous réunirons dans ce paragraphe quelques théorèmes empruntés à la théorie des polynômes sphériques.

Désignons par $\Pi_n(x, y, z)$ un polynôme sphérique de degré n et considérons une sphère (Σ) de rayon R ayant l'origine des coordonnées pour centre. Proposons-nous d'évaluer l'intégrale suivante:

$$\varphi_n = \int \int \int_{(\Omega)} \Pi_n' \frac{dx' dy' dz'}{r} \quad (6)$$

où l'on désigne par r la distance des points (x, y, z) et $(x' y' z')$, par (Ω) le domaine intérieur à la sphère (Σ) et par Π_n' l'expression $\Pi_n(x' y' z')$.

Nous avons à l'intérieur de (Σ):

$$\Delta \varphi_n + 4 \pi \Pi_n = 0 \quad (7)$$

en désignant par Δ l'opérateur de Laplace. A l'extérieur de (Σ) on a évidemment:

$$\Delta \varphi_n = 0$$

et de plus la fonction φ_n et ses dérivées premières, continues à la traversée de (Σ), sont nulles à l'infini. Il est naturel de chercher à représenter la fonction φ_n au moyen des formules suivantes:

$$\begin{aligned} \varphi_n &= (A \varrho^2 + B) \Pi_n, \text{ à l'intérieur de } (\Sigma), \\ \varphi_n &= C \frac{\Pi_n}{\varrho^{2n+1}}, \text{ à l'extérieur de } (\Sigma), \end{aligned}$$

en désignant par A, B et C des constantes et en posant:

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

où l'on doit prendre la détermination positive du radical. On reconnaît immédiatement que la chose est possible et l'on trouve aisément:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n &= 2\pi \left\{ \frac{R^2}{2n+1} - \frac{\varrho^2}{2n+3} \right\} \Pi_n, \text{ pour } \varrho \leq R, \\ \varphi_n &= \frac{4\pi R^2}{(2n+1)(2n+3)} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1} \Pi_n, \text{ pour } \varrho \geq R. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Une méthode du même genre permet de calculer le potentiel de double couche suivant:

$$\int_{(\Sigma)} \int \Pi_n \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma$$

en désignant par $d\sigma$ l'élément de surface de la sphère (Σ) . On trouve:

$$(9) \quad \begin{cases} \int_{(\Sigma)} \int \Pi_n \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = 4\pi \frac{n+1}{2n+1} \Pi_n \text{ pour } \varrho < R, \\ \int_{(\Sigma)} \int \Pi_n \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r} \right) d\sigma = -4\pi \frac{n}{2n+1} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1} \Pi_n \text{ pour } \varrho > R, \end{cases}$$

la normale étant dirigée vers l'intérieur de la sphère. En vertu des formules (9), on a:

$$(10) \quad \begin{cases} \int \int \int_{(\Omega)} \left\{ \frac{\partial \Pi'_n}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x'} + \frac{\partial \Pi'_n}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Pi'_n}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz' = \frac{4\pi n}{2n+1} \Pi_n, \text{ pour } \varrho \leq R, \\ \int \int \int_{(\Omega)} \left\{ \frac{\partial \Pi'_n}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x'} + \frac{\partial \Pi'_n}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Pi'_n}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz' = \frac{4\pi n}{2n+1} \left(\frac{R}{\varrho} \right)^{2n+1} \Pi_n, \text{ pour } \varrho \geq R. \end{cases}$$

Si l'on porte la valeur de φ_n tirée de la première des équations (8) dans la relation:

$$\int \int \int_{(\Omega)} \Pi_j \Delta \varphi_n dx dy dz + \int_{(\Omega)} \Pi_j \frac{d\varphi_n}{dN} d\sigma = \int_{(\Sigma)} \int \varphi_n \frac{d\Pi_j}{dN} d\sigma,$$

on trouve:

$$(10a) \quad \frac{(n+j+1)R}{(2n+1)(2n+3)} \int \int_{(\Sigma)} \Pi_j \Pi_n d\sigma = \int \int \int_{(\Omega)} \Pi_j \Pi_n dx dy dz.$$

En identifiant dans cette relation, Π_j avec Π_n , on trouve:

$$\frac{R}{2n+3} \int_{(\Sigma)} \int \Pi_n^2 d\sigma = \int \int \int_{(\Omega)} \Pi_n^2 dx dy dz, \quad (11)$$

et en la combinant avec celle qui en résulte quand on permute n et j , il vient:

$$\int_{(\Sigma)} \int \Pi_j \Pi_n d\sigma = \int \int \int_{(\Omega)} \Pi_j \Pi_n dx dy dz = 0, \text{ pour } j \neq n. \quad (12)$$

On a d'ailleurs:

$$\int \int \int_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial \Pi_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi_n}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = \frac{n}{R} \int_{(\Sigma)} \int \Pi_n^2 d\sigma. \quad (13)$$

Parmi les polynômes sphériques de degré n il est possible, comme on sait, d'en trouver $2n+1$ et pas davantage de linéairement indépendants; soit:

$$\Pi_{n,k} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2n+1) \quad (14)$$

un tel système de polynômes sphériques de degré n , formés, comme cela est évidemment possible, de façon que l'on ait:

$$\int \int \int_{(\Omega)} \Pi_{n,k}^2 dx dy dz = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2n+1) \quad (15)$$

ainsi que:

$$\int \int \int_{(\Omega)} \Pi_{n,k} \Pi_{n,t} dx dy dz = 0, \text{ pour } k \neq t.$$

A cause de la relation qui résulte de (10 a) en y identifiant Π_n avec $\Pi_{n,k}$ et Π_j avec $\Pi_{n,t}$, la relation précédente entraîne la suivante:

$$\int_{(\Sigma)} \int \Pi_{n,k} \Pi_{n,t} d\sigma = 0, \text{ pour } k \neq t,$$

donc, en vertu de (12), on aura:

$$\int_{(\Sigma)} \int \Pi_{n,k} \Pi_{j,t} d\sigma = \int \int \int_{(\Omega)} \Pi_{n,k} \Pi_{j,t} dx dy dz = 0, \quad (16)$$

pourvu que l'une au moins des inégalités:

$$n \neq j \text{ et } k \neq t$$

soit vérifiée.

On sait que toute fonction u , harmonique à l'intérieur de la sphère (Σ) est développable en une série à coefficients constants de la forme suivante:

$$(17) \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t} \Pi_{n,t}.$$

Il suffira de raisonner comme je l'ai fait au § 10, p. 161 de mon mémoire sur: „L'équation biharmonique et une classe remarquable de fonctions fondamentales harmoniques“ (Bulletin de l'Académie de Cracovie, Mars 1907), pour établir, en tenant compte de (15) et (16), les résultats suivants: lorsque l'intégrale:

$$\int \int \int_{(\Omega)} u^2 dx dy dz$$

a un sens, on a:

$$(18) \quad c_{n,t} = \int \int \int_{(\Omega)} u \Pi_{n,t} dx dy dz$$

ainsi que:

$$(19) \quad \int \int \int_{(\Omega)} u^2 dx dy dz = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{2n-1} c_{n,t}^2.$$

Supposons que l'intégrale:

$$\int \int \int_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait un sens. Dans ce cas, un passage à la limite n'offrant aucune difficulté permettra de démontrer que l'on a:

$$(20) \quad \int \int \int_{(\Omega)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2n+3)}{R^2} \sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}^2$$

en s'appuyant sur (13) et (16).

La série formant le second membre de cette relation étant convergente, il en sera a fortiori de même de celle qui forme le second membre de (19). On en conclura la légitimité des relations (18) et (19).

Considérons la distance r des points (x, y, z) et (x', y', z') et, en désignant par ϱ et ϱ' les distances de ces points au centre de la

sphère (Σ), appliquons la formule (17) au développement de $\frac{1}{r}$ considérée comme fonction des variables x', y', z' , en supposant que l'on ait:

$$\varrho > R \text{ et } \varrho' < R.$$

En se reportant aux relations (18), (6) et (8), on trouvera sans peine:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi R^2}{(2n+3)(2n+1)} \left(\frac{R}{\varrho}\right)^{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+2} \Pi_{n,k} \Pi'_{n,k} \quad (21)$$

où $\Pi'_{n,k}$ représente, comme plus haut, le résultat du changement de x, y, z en x', y', z' dans $\Pi_{n,k}$.

Supposons que les points (x, y, z) et (x', y', z') soient situés sur une même demi-droite issue du centre de la sphère (Σ). On aura alors:

$$r = \varrho - \varrho' \text{ et } \frac{\Pi_{n,k}}{\Pi'_{n,k}} = \frac{\varrho^n}{\varrho'^n}.$$

Ces remarques faites, l'équation (21) nous donnera:

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \Pi_{n,k} = \frac{(2n+3)(2n+1)}{4\pi R^3} \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{2n}, \quad (22)$$

égalité qui subsistera évidemment pour toutes les valeurs de ϱ .

§ 28. Pour préparer les voies à la démonstration du théorème énoncé au § 26, nous allons développer des considérations analogues à celles des §§ 7, 8 et 9. Actuellement elles seront insuffisantes pour démontrer que la fonction harmonique u admet des valeurs périphériques déterminées, mais elles nous permettront de faire un premier pas dans ce sens en nous conduisant au résultat suivant:

Lorsque, pour toute position du point (x, y, z) à l'intérieur du domaine (D') formé par l'ensemble des points extérieurs au domaine (D), l'intégrale (4) est nulle, la valeur $u(A)$ de la fonction u en tout point A , intérieur au domaine (D) et tel que sa plus courte distance a à la frontière satisfasse à la condition:

$$a \leq R,$$

où R représente une longueur dépendant uniquement de la nature du domaine (D), vérifie l'inégalité:

$$(22a) \quad \left\{ u(A) \right\}^2 < C \log \frac{2R}{a}$$

où C représente une quantité positive finie et indépendante de la position du point A .

Posons:

$$(23) \quad f(x, y, z) = \int \int \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x'} + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz',$$

$$(24) \quad \psi(x, y, z) = \int \int \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y'} + \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz'.$$

Lorsque le point (x, y, z) est extérieur au domaine (D) , on a:

$$(25) \quad \psi(x, y, z) = f(x, y, z)$$

puisque, dans ce cas, l'intégrale (4) est nulle par hypothèse. Il suffira donc de raisonner comme au § 7 pour reconnaître que la fonction $\psi(x, y, z)$ tend uniformément vers une fonction continue, définie sur la frontière (S) du domaine (D) , lorsque la plus courte distance du point (x, y, z) à (S) tend vers zéro, le point (x, y, z) restant bien entendu à l'extérieur du domaine (D) .

Il résulte en particulier de la propriété précédente de la fonction $\psi(x, y, z)$ et de l'expression (24) de cette fonction que, pour toute position du point (x, y, z) à l'extérieur du domaine (D) , on aura:

$$(26) \quad |\psi(x, y, z)| < C_1$$

en désignant par C_1 une constante positive finie.

Pour aller plus loin, observons qu'en vertu des hypothèses adoptées au sujet du domaine (D) , il existera une longueur constante R , ne dépendant que de la nature du domaine considéré, telle que par tout point M , pris arbitrairement sur (S) , il soit possible de mener deux sphères (Σ) et (Σ') , tangentes en M à (S) et telles que tout point intérieur à la sphère (Σ) soit intérieur au domaine (D) et tout point intérieur à la sphère (Σ') , extérieur à ce domaine.

Ayant fixé d'une façon quelconque la position du point M sur (S) , désignons par (Ω) le domaine intérieur à la sphère (Σ) et par $(D-\Omega)$ le reste du domaine (D) .

Posons ensuite:

$$\psi_1(x, y, z) = \int \int \int_{(\Omega)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz'. \quad (27)$$

$$\psi_2(x, y, z) = \int \int \int_{(D-\Omega)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz'. \quad (28)$$

et désignons par $\psi_1(A)$, $\psi_2(A)$ et $\psi(A)$ les valeurs des fonctions $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$ et $\psi(x, y, z)$ en un point A , situé à l'extérieur du domaine (D) sur la normale à (S) en M . Nous aurons:

$$\psi(A) = \psi_1(A) + \psi_2(A). \quad (29)$$

D'autre part, l'inégalité de M. Schwarz et les équations (28) et (3) nous donneront:

$$\left\{ \psi_2(A) \right\}^2 < \mathcal{E} \int \int \int_{(D-\Omega)} \frac{dx' dy' dz'}{r^4}.$$

Eu égard à la forme particulière du domaine $(D-\Omega)$ dans le voisinage du point M , on conclura facilement de cette inégalité, en tenant compte en outre des relations (26) et (29) que l'on aura:

$$\left\{ \psi_1(A) \right\}^2 < C_2 \log \frac{2R}{AM}, \text{ pour } \overline{AM} \leq R, \quad (30)$$

en désignant par C_2 une quantité positive finie, indépendante de la position du point M sur (S) et de la valeur du segment \overline{AM} .

Plaçons maintenant l'origine des coordonnées (x, y, z) au centre O de la sphère (Σ) . L'équation (17), p. 168, pourra être regardée comme faisant connaître la fonction u , considérée actuellement, à l'intérieur de la sphère (Σ) et, dans ce cas, en vertu de la seconde

des formules (10), nous aurons, pour la fonction ψ_1 , définie par l'équation (20), le développement en série suivant:

$$\psi_1(x, y, z) = 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} \left(\frac{R}{\rho}\right)^{2n+1} \sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t} \Pi_{n,t},$$

valable, pourvu que le point (x, y, z) soit extérieur à la sphère (Σ) .

Désignons par (x_1, y_1, z_1) le conjugué harmonique du point (x, y, z) par rapport à la sphère (Σ) . Eu égard à l'expression (17) de la fonction u , la valeur trouvée de la fonction ψ_1 peut être mise sous la forme suivante:

$$(31) \quad \psi_1(x, y, z) = 2\pi \frac{R}{\rho} u(x_1, y_1, z_1) - 2\pi \frac{R}{\rho} v(x_1, y_1, z_1),$$

en posant:

$$(32) \quad v(x_1, y_1, z_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t} \Pi_{n,t}(x_1, y_1, z_1).$$

A cause de la convergence de la série (20), nous avons, pour le reste \mathcal{R}_p de la série précédente arrêtée au $p^{\text{ième}}$ terme, l'inégalité suivante:

$$\mathcal{R}_p^2 < \left\{ \sum_{n=p+1}^{\infty} n(2n+3) \sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}^2 \right\} \left\{ \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\sum_{t=1}^{2n+1} (\Pi_{n,t}(x_1, y_1, z_1))^2}{(2n+1)^2 n(2n+3)} \right\}$$

ce qui, en vertu de (22), peut s'écrire ainsi:

$$\mathcal{R}_p^2 < \left\{ \sum_{n=p+1}^{\infty} n(2n+3) \sum_{t=1}^{2n+1} c_{n,t}^2 \right\} \left\{ \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{4\pi R^3 (2n+1)n} \left(\frac{\rho_1}{R}\right)^{2n} \right\},$$

en désignant par ρ_1 la distance du point (x_1, y_1, z_1) au centre O de la sphère (Σ) ; on a donc a fortiori:

$$(33) \quad \mathcal{R}_p^2 < \frac{\mathcal{I}}{4\pi R} \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2n+1)n}, \text{ pour } \rho_1 \leq R,$$

comme on le reconnaît immédiatement en remarquant que le premier membre de l'égalité (20) est inférieur à la quantité \mathcal{I} définie par l'équation (3).

Il résulte de l'inégalité (33) que la série (32) est uniformément convergente dans tout le domaine (Ω) intérieur à la sphère (Σ) ainsi que sur cette sphère elle-même; il est même évident que la convergence de la série considérée dans (Ω) et sur (Σ) est ab-

solue, puisque l'inégalité (33) subsisterait si l'on regardait \mathcal{N}_p comme le reste de la série que l'on obtiendrait en remplaçant chaque terme de la série (32) par sa valeur absolue.

Il est très aisé de voir que l'inégalité (33) donne:

$$\left\{ v(x_1, y_1, z_1) \right\}^2 < \frac{\mathcal{J}}{4\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)n}, \text{ pour } (\varrho_1 \leq R). \quad (34)$$

En s'appuyant sur cette inégalité, on conclura immédiatement des relations (30) et (31) que la fonction u jouira, comme nous l'avions annoncé, de la propriété exprimée par l'inégalité (22 a).

§ 29. Il nous faudra envisager la fonction $\psi(x, y, z)$, définie par l'équation (24), non seulement dans le cas où le point (x, y, z) est extérieur au domaine (D) , mais aussi dans celui où ce point est intérieur au domaine précédent. La fonction ψ satisfait à l'équation de Laplace, on le vérifie avec la plus grande facilité, aussi bien à l'intérieur du domaine (D) qu'à l'extérieur de ce domaine. Il importe de démontrer que cette fonction reste continue à la traversée de la frontière (S) du domaine considéré.

Conservons toutes les notations du paragraphe précédent et envisageons sur la normale en M à (S) deux points A et A_1 conjugués harmoniques par rapport à la sphère (Σ) .

Supposons que le point A soit extérieur à la sphère (Σ) et le point A_1 intérieur; désignons en outre par ϱ et ϱ_1 les distances respectives de ces points au centre O de (Σ) . Je vais démontrer que la différence:

$$\psi_1(A) - \psi_1(A_1) \quad (35)$$

des valeurs de la fonction ψ_1 , définie par l'équation (27), en A et A_1 tend vers zéro avec $\varrho - R$, et cela uniformément pour l'ensemble des positions du point M sur (S) .

Portons dans la formule (27) l'expression (17) de u et remplaçons-y x, y, z par les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point A_1 . En s'appuyant sur la première des relations (10), on trouve:

$$\psi_1(x_1, y_1, z_1) = 2\pi u(x_1, y_1, z_1) - 2\pi v(x_1, y_1, z_1) \quad (36)$$

où v représente la fonction définie par l'équation (32). Les équations (31) et (36) donnent:

$$\psi_1(A) = \frac{R}{\varrho} \psi_1(A_1)$$

d'où:

$$\psi_1(A_1) - \psi_1(A) = \frac{\varrho - R}{R} \psi_1(A)$$

et il suffit de se reporter à l'inégalité (30) pour reconnaître que la différence (35) jouit bien de la propriété annoncée.

Conservons aux lettres A et A_1 la signification précédente, désignons par $\psi_2(A)$ et $\psi_2(A_1)$ les valeurs de la fonction ψ_2 , définie par l'équation (28), aux points A et A_1 et considérons la différence:

$$(37) \quad \psi_2(A) - \psi_2(A_1).$$

Je vais démontrer que cette différence tend uniformément vers zéro dans les mêmes conditions que la différence (35). A cet effet, envisageons une sphère (C) de rayon δ , ayant pour centre le point M . Désignons par (T) le domaine formé par ceux des points du domaine ($D - \Omega$) qui sont intérieurs à la sphère (C) et par ($D - \Omega - T$) le reste de ce domaine. Cela posé décomposons l'intégrale qui représente l'expression (37) en deux parties: l'une $F(\varrho)$ où l'intégration serait étendue au domaine (T) et l'autre, $F_1(\varrho)$, où elle serait étendue au domaine ($D - \Omega - T$). Nous aurons:

$$(38) \quad \psi_2(A) - \psi_2(A_1) = F(\varrho) + F_1(\varrho).$$

$$(39) \quad F(\varrho) = \int \int \int_{(T)} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz'$$

en désignant par r et r_1 les distances des points A et A_1 au point (x', y', z') .

Nous avons:

$$(40) \quad \{F(\varrho)\} < P \int \int \int_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z'} \right)^2 \right\} dx' dy' dz',$$

en posant:

$$(41) \quad P = \int \int \int_{(T)} \left\{ \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial z'} \right)^2 \right\} dx' dy' dz'$$

Pour estimer cette intégrale, conservons le centre O de la sphère (Σ) pour origine des coordonnées mais, en précisant la position de l'axe des z , dirigeons cet axe de O vers M .

Nous aurons pour les coordonnées des points A et A_1 les expressions suivantes:

$$\begin{cases} x = 0 & x_1 = 0 \\ y = 0 & \text{et } y_1 = 0 \\ z = \varrho & z = \varrho_1 \end{cases}$$

avec la relation:

$$\varrho\varrho_1 = R^2.$$

Par conséquent:

$$\begin{cases} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial x'} = \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) x' \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial y'} = \left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3} \right) y' \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial z'} = \frac{\varrho - z'}{r^3} - \frac{\varrho_1 - z'}{r_1^3} \end{cases}$$

La dernière formule peut s'écrire ainsi:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial z'} = \frac{\varrho - R}{r^3} + \frac{R - \varrho_1}{r_1^3} - (R - z') \left\{ \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3} \right\}$$

ou encore:

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial z'} = (\varrho - R) \left(\frac{R}{\varrho} \frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r^3} \right) - (R - z') \left\{ \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3} \right\}.$$

A cause de la forme particulière du domaine (T) , nous aurons, pour toute position du point (x', y', z') dans ce domaine, l'inégalité suivante:

$$|R - z'| < \frac{B(x'^2 + y'^2)}{R} \quad (42)$$

en désignant par B un nombre positif indépendant de la position du point M sur (S) et en supposant que le rayon δ de la sphère (C) vérifie une inégalité de la forme:

$$\delta \leq R_0 \quad (43)$$

où R_0 représente une longueur assez petite, indépendante de la position du point M sur (S) .

Posons:

$$r_0^2 = (\varrho - R)^2 + x'^2 + y'^2$$

et restreignons les valeurs de ϱ par la condition:

$$(44) \quad \varrho \leq 2R.$$

On s'assurera facilement qu'il existe deux constantes B_1 et B_2 , analogues à la constante B qui entre dans le second membre de (42), telles que l'on ait:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r^3} \right| &< B_1 \frac{\varrho - R}{R r_0^3} \\ \frac{1}{r^3} &< \frac{B_2}{r_0^3} \\ \frac{1}{r_1^3} &< \frac{B_2}{r_0^3}. \end{aligned}$$

En s'appuyant sur ces inégalités, on trouve aisément:

$$\left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial x'} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial y'} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right)}{\partial z'} \right\}^2 < B_4 \frac{(\varrho - R)^2}{r_0^6},$$

où B_4 représente une constante du même genre que les constantes B , B_1 , B_2 et B_3 .

Cette inégalité et les relations (41) et (42) donnent:

$$(45) \quad P < \frac{B_5}{R},$$

en désignant par B_5 une constante analogue aux constantes B , B_1 , B_2 , B_3 et B_4 .

Soit ε un nombre positif donné, arbitrairement petit. Il existera pour δ une valeur assez petite mais indépendante de la position du point M sur (S) , telle que le second facteur du second membre de l'inégalité (40) soit inférieur à ε^2 . Les inégalités (40) et (45) donneront:

$$(46) \quad |F(\varrho)| < \varepsilon \sqrt{\frac{B_5}{R}}.$$

La longueur δ étant déterminée de façon que l'inégalité précé-

dente subsiste, on pourra évidemment trouver une longueur η , indépendante de la position du point M sur (S) , et telle que, sous la condition:

$$0 < \varrho - R \leq \eta \quad (47)$$

le second terme $F_1(\varrho)$ de (39) vérifie l'inégalité:

$$|F_1(\varrho)| < \varepsilon. \quad (48)$$

Les relations (38), (46) et (48) donnent:

$$|\psi_2(A) - \psi_2(A_1)| < \left(1 + \sqrt{\frac{B_5}{R}}\right) \varepsilon. \quad (49)$$

Done, indépendamment de la position du point M sur (S) les inégalités (47) entraînent l'inégalité (49). Cela prouve que l'expression (37) tend bien, comme l'expression (35), uniformément vers zéro avec $\varrho - R$ lorsque le point M varie d'une façon quelconque sur (S) . Par conséquent, à cause de l'équation (29), il en est de même de la différence:

$$\psi(A) - \psi(A_1).$$

Or, en vertu d'une remarque, faite dans la première partie du § 28, lorsque la distance du point A à la surface (S) tend vers zéro, la fonction $\psi(A)$ tend uniformément vers une fonction continue définie sur (S) . Par conséquent, il en est de même de la fonction $\psi(A_1)$.

Il résulte de tout cela que, comme nous l'avions annoncé au début du paragraphe actuel, la fonction $\psi(x, y, z)$, définie par l'équation (24), harmonique à l'intérieur et à l'extérieur du domaine (D) , est continue à la traversée de la frontière de ce domaine.

§ 30. Nous voici en mesure d'achever la démonstration du théorème énoncé au § 26.

Considérons de nouveau un point quelconque M situé sur (S) , prenons ce point pour origine des coordonnées et dirigeons l'axe des z suivant la normale en M à (S) vers l'intérieur du domaine (D) . Du point M comme centre, décrivons une sphère (\mathcal{S}) de rayon z et soit (S_0) la portion de (S) formée par l'ensemble de ceux des points de cette surface qui sont situés à l'intérieur ou sur la surface de la sphère (\mathcal{S}) . D'après les hypothèses adoptées au sujet du domaine (D) , il sera possible d'attribuer à la longueur z une valeur, indépendante de la position du point M sur (S) , telle que la

portion (S_0) de (S) soit une surface d'un seul tenant, limitée par un contour unique, qu'une parallèle à la normale en M à (S) ne puisse rencontrer la portion (S_0) de (S) qu'en un seul point au plus et que l'angle formé par la normale élevée en un point quelconque à (S_0) avec la normale en M soit au plus égal à 45° .

La longueur z ayant une valeur vérifiant les conditions précédentes, la portion (S_0) de (S) pourra être représentée par l'équation:

$$(50) \quad z = F(x, y),$$

en désignant par $F(x, y)$ une fonction parfaitement déterminée des variables x et y dans une aire (α), projection orthogonale de (S_0) sur le plan des (x, y). L'aire (α) sera évidemment limitée par un seul contour et la distance d'un point de ce contour au point M admettra une limite inférieure R' indépendante de la position du point M sur (S).

Il existera évidemment une longueur R_0 , indépendante de la position du point M sur (S), inférieure à la longueur R' et telle que le domaine (I) déterminé par les relations:

$$(51) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq z^2 \\ x^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ z \geq F(x, y) + (x^2 + y^2)^2 \end{cases}$$

jouisse des propriétés suivantes:

1° Une partie, (\mathcal{C}'), de la frontière (\mathcal{C}) de ce domaine sera formée par l'ensemble des points définis par les relations:

$$(52) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq R_0^2 \\ z = F(x, y) + (x^2 + y^2)^2. \end{cases}$$

2° Le reste (\mathcal{C}'') de la frontière (\mathcal{C}) du domaine considéré sera constitué par des points situés sur le cylindre:

$$x^2 + y^2 = R_0^2,$$

sur la sphère:

$$x^2 + y^2 + z^2 = z^2,$$

ou sur ces deux surfaces à la fois.

Il est évident qu'en dehors du point M , tout autre point situé à l'intérieur du domaine (I) ou sur la frontière (\mathcal{C}) de ce domaine sera intérieur au domaine (D).

En outre la plus courte distance d' à (S) d'un point situé sur

la portion (\mathcal{C}') , définie par les relations (52), de la frontière du domaine (I') , satisfera à l'inégalité:

$$d' \geq \nu \frac{(x^2 + y^2)^2}{z^4}, \quad (53)$$

en désignant par ν un nombre constant non nul, indépendant de la position du point M sur (S) .

Enfin, la plus courte distance d'' à (S) d'un point situé sur la portion (\mathcal{C}'') de (\mathcal{C}) vérifiera une inégalité de la forme:

$$d'' \geq d_0 \quad (54)$$

en désignant par d_0 une longueur constante non nulle et indépendante de la position du point M sur (S) .

Posons:

$$\varphi_1(x, y, z) = \int \int \int_{(I')} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + \right. \quad (55)$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz'$$

$$\varphi_2(x, y, z) = \int \int \int_{(D-I')} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y'} + \right. \quad (56)$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z'} \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z'} \right\} dx' dy' dz'.$$

En se reportant à l'équation (24), on reconnaîtra de suite que l'on a:

$$\psi(x, y, z) = \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z). \quad (57)$$

Eu égard à la nature du contact des frontières des domaines (D) et (I') en M , on établira aisément au moyen d'un raisonnement du même genre que celui dont nous avons eu à nous servir au § 8 (p. 134) que la fonction $\varphi_2(0, 0, z)$ tend vers une limite finie et déterminée lorsque z tend vers zéro d'une façon quelconque et cela uniformément pour l'ensemble des positions du point M sur (S) . Donc, en vertu de la continuité de la fonction ψ à la traversée de la surface (S) , (paragraphe précédent) et de la relation (57), il en

est de même de la fonction $\varphi_1(0, 0, z)$. Il en sera donc évidemment encore de même de l'expression suivante:

$$(58) \quad \varphi_1(0, 0, -z) + \varphi_1(0, 0, z).$$

Nous allons examiner cette expression de plus près en supposant que l'on ait:

$$0 < z \leq \frac{1}{2} z.$$

A cet effet, voyons comment se comporte la fonction u sur la frontière du domaine (Γ) et à l'intérieur de ce domaine. Puisqu'en dehors du point M tous les autres points du domaine (Γ) et de sa frontière ($\overline{\mathcal{C}}$) sont intérieurs au domaine (D), le seul point de (Γ) et de ($\overline{\mathcal{C}}$) où la fonction u pourrait cesser d'être continue est le point M . En se reportant aux inégalités (22), (53) et (54) ainsi qu'à l'équation (55), on reconnaîtra aisément que la somme (58) peut se mettre sous la forme suivante:

$$(59) \quad \varphi_1(0, 0, -z) + \varphi_1(0, 0, z) = \\ = 4\pi u(0, 0, z) - \int_{(\mathcal{C})} \int u \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} \right) ds$$

en désignant par r_1 et r les distances respectives des points $(0, 0, -z)$ et $(0, 0, z)$ à celui des points de la frontière $\overline{\mathcal{C}}$ du domaine (Γ) auquel se rapporte l'élément de surface ds .

On établira sans peine, en s'appuyant de nouveau sur les inégalités (22), (53) et (54) que l'intégrale qui entre au second membre de (59) tend vers une limite finie et déterminée lorsque z tend vers zéro et que la convergence est uniforme pour l'ensemble des positions du point M sur (S). Donc, puisqu'il en est de même de l'expression (57), il en sera encore de même de la fonction $u(0, 0, z)$ en vertu de (59). On conclura immédiatement de là que la fonction u admet des valeurs périphériques déterminées et que la fonction $(u)_s$ qui les représente est une fonction continue définie sur (S).

Considérons maintenant l'expression (4) (p. 164). Il résulte de ce qui vient d'être établi au sujet de la fonction u que, à l'extérieur du domaine (D), l'expression (4) est égale à la suivante:

$$(60) \quad \int_{(\mathcal{C})} \int \int (\Phi - u) \frac{d}{dN} \left(\frac{1}{r} \right) ds.$$

Or l'expression (4) est nulle à l'extérieur du domaine (D). Donc

il en est de même du potentiel de double couche que représente l'expression (60).

Par conséquent ce potentiel de double couche admet une dérivée normale extérieure et cette dérivée est nulle.

Il en sera donc de même¹⁾ de la dérivée normale intérieure. Donc le potentiel (60), nul par hypothèse à l'extérieur du domaine (D), sera constant à l'intérieur de ce domaine. Cela prouve que la relation (5) sera sûrement vérifiée. Donc, pour démontrer complètement le théorème fondamental du § 26, il ne reste qu'à faire voir que la différence constante des valeurs périphériques des fonctions Φ et u se réduit à zéro lorsque le domaine (D) n'est pas borné. Or cela est presque évident: en effet, un potentiel dérivant de masses situées dans le fini tend uniformément vers zéro à l'infini, il ne peut donc rester constant dans un domaine non borné sans y être nul, donc, lorsque le domaine (D) s'étend à l'infini, le potentiel (60), nul par hypothèse à l'extérieur du domaine (D) est aussi nul à l'intérieur de ce domaine. Par conséquent la différence $\Phi - u$ s'annule sur (S). C'est ce que nous avons encore à démontrer.

§ 31. En s'appuyant sur la formule (21) (p. 169) on développera avec la plus grande facilité, pour l'espace, des considérations analogues à celles du § 11, et cela aussi aisément dans le cas où le domaine (D) s'étendrait à l'infini que dans celui où le domaine considéré serait borné.

§ 32. L'extension à un domaine borné à trois dimensions de la théorie exposée dans les §§ de 11 à 20 est immédiate. Donc, en ce qui concerne le cas où le domaine (D) est borné, il nous suffira d'énoncer les résultats définitifs. Dans ce cas, l'ensemble des points extérieurs au domaine (D) se compose d'une région non bornée (R_0), formée par les points extérieurs à une surface formée (S_0) et de p régions:

$$(R_1), (R_2), \dots (R_p) \quad (61)$$

respectivement intérieures à des surfaces fermées:

$$(S_1), (S_2), \dots (S_p).$$

On choisira dans l'espace $p + 1$ points fixes:

$$(x_i, y_i, z_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots p). \quad (62)$$

¹⁾ Voir la note de M. Liapounoff dans les C. R., 8 novembre 1897.

Le point (x_0, y_0, z_0) pourra être pris arbitrairement dans l'espace; quant aux points:

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_p, y_p, z_p),$$

ils devront être situés respectivement à l'intérieur des régions $(R_1), (R_2) \dots (R_p)$ mais, à cela près, on pourra les choisir comme on voudra.

Le choix des points (62) étant arrêté, on envisagera un système de $2n + 1$ polynômes sphériques de degré n , linéairement indépendants, soit:

$$\Pi_{n,k}(x, y, z) \quad (k = 1, 2, 3, \dots, 2n+1)$$

et, en désignant par r_k la distance du point (x, y, z) au point x_k, y_k, z_k , on définira un ensemble de fonctions $u_{n,k,i}$ au moyen des équations suivantes:

$$(63) \quad \begin{cases} u_{n,k,0} = \Pi_{n,k}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \\ u_{0,1,i} = \frac{1}{r_i} \\ u_{n,k,i} = \frac{\Pi_{n,k}(x-x_i, y-y_i, z-z_i)}{r_i^{2n+1}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \dots \text{ ad inf.} \\ k &= 1, 2, 3, \dots (2n+1) \\ i &= 1, 2, 3, \dots p. \end{aligned}$$

Cela posé, on formera une suite infinie:

$$(64) \quad u_1, u_2, u_3, \dots$$

de façon que chacun des termes de cette suite coïncide avec l'une des fonctions (63) et que toutes ces fonctions soient comprises sans omission ni répétition parmi les termes de cette suite. Enfin on déduira de la suite (64) une nouvelle suite de fonctions harmoniques:

$$(65) \quad v_1, v_2, v_3, \dots$$

de la façon suivante: on posera:

$$(66) \quad \begin{cases} v_1 = c_{1,0} + c_{1,1} u_1, \\ v_k = c_{k,0} + \sum_{i=1}^{k-1} c_{k,i} v_i + c_{k,k} u_k, \\ k = 1, 2, 3, \dots \text{ ad inf.} \end{cases}$$

en désignant par les c des constantes que l'on déterminera de façon à avoir:

$$\left. \begin{aligned} \int_{(S)} \int v_k \frac{dv_k}{dN} ds &= -1 \\ \int_{(S)} \int v_k ds &= 0 \\ \int_{(S)} \int v_k \frac{dv_j}{dN} ds &= \int_{(S)} \int v_j \frac{dv_k}{dN} ds = 0, \text{ pour } j \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (67)$$

Cela posé, on reconnaîtra, en tenant compte de la remarque qui fait l'objet du § 25 (p. 163) que, avec la restriction indiquée dans l'Introduction, au § 3, toute fonction u , continue sur (S) et dans le domaine (D) , harmonique à l'intérieur du domaine (D) , est développable en une série de la forme:

$$u = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k \quad (68)$$

avec les valeurs suivantes des coefficients:

$$\left. \begin{aligned} c_k &= - \int_{(S)} u \frac{dv_k}{dN} ds \\ c_0 &= \frac{1}{S} \int_{(S)} u ds, \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (69)$$

en désignant par (S) l'aire totale de la frontière du domaine considéré.

La série (69) sera uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine (D) , mais elle pourra être divergente sur (S) et n'être pas uniformément convergente dans (D) . Toutefois la série (69) se rapprochera d'une série uniformément convergente dans (D) et sur (S) par les propriétés suivantes: si l'on désigne par F une fonction quelconque à cela près que l'intégrale:

$$\int_{(D)} \int \int F^2 dx dy dz$$

ait un sens, on aura:

$$\int_{(D)} \int \int u F dx dy dz = c_0 \int_{(D)} \int \int F dx dy dz + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(D)} \int \int u F dx dy dz; \quad (70)$$

en outre, lorsqu'une fonction quelconque σ , définie sur (S) est telle que l'intégrale:

$$\int_{(S)} \sigma^2 ds$$

ait un sens, on a:

$$(71) \quad \int_{(S)} u \sigma ds = c_0 \int_{(S)} \sigma ds + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(S)} v_k \sigma ds.$$

La série (68) sera, comme cela résulte de la théorie générale des séries procédant suivant des fonctions harmoniques, dérivable terme à terme et les séries déduites de la série considérée par voie de dérivation, seront uniformément convergentes dans tout domaine intérieur au domaine (D) ; celles de ces séries qui se rapportent aux dérivées du premier ordre, à savoir:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial x}$$

et les séries analogues relatives aux variables y et z , se rapprocheront en outre des séries uniformément convergentes dans le domaine (D) lui-même en ce qu'elles jouiront de la propriété qu'exprime, pour la série (68), l'égalité (70).

On aura:

$$(72) \quad \int_{(D)} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Enfin, on reconnaîtra que la condition du § 3 de validité des égalités (68) et (69), équivaut à la suivante: la fonction u , continue sur (S) et dans le domaine (D) harmonique à l'intérieur de ce domaine doit être telle que l'intégrale:

$$\int_{(D)} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait un sens.

§ 33. Passons au cas où le domaine (D) n'est pas borné. Le domaine (D) sera alors constitué par l'ensemble des points extérieurs à un système de $p+1$ surfaces fermées $(S_0), (S_1), \dots, (S_p)$. Désignons d'une façon générale par:

$$(x_i, y_i, z_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p)$$

un point fixe choisi arbitrairement à l'intérieur de la surface (S_i) et, en conservant aux symboles $\Pi_{n,k}(x, y, z)$ et r_k la signification du paragraphe précédent. définissons au moyen des équations:

$$u_{n,k,i} = \frac{\Pi_{n,k}(x-x_i, y-y_i, z-z_i)}{r_i^{2n+1}} \left. \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \text{ ad inf.} \\ k = 1, 2, \dots, 2n+1 \\ i = 0, 1, 2, \dots, p \end{array} \right\}$$

l'ensemble des fonctions $u_{n,k,i}$.

En vertu des considérations indiquées au § 31, la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (4) (p. 164) soit nulle identiquement à l'extérieur du domaine (D), peut être exprimée par l'ensemble des équations suivantes:

$$\int \int \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial(\Phi-u)}{\partial x} \frac{\partial u_{n,k,i}}{\partial x} + \frac{\partial(\Phi-u)}{\partial y} \frac{\partial u_{n,k,i}}{\partial y} + \frac{\partial(\Phi-u)}{\partial z} \frac{\partial u_{n,k,i}}{\partial z} \right\} dx dy dz = 0 \quad (73)$$

$$\left. \begin{array}{l} n = 0, 1, 2, \dots \text{ ad inf.} \\ k = 1, 2, \dots, 2n+1 \\ i = 0, 1, 2, \dots, p \end{array} \right\}$$

Rangeons les fonctions $u_{n,k,i}$ dans un certain ordre de façon que leur ensemble puisse être représenté par celui des termes d'une suite infinie:

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

puis, formons une nouvelle suite infinie:

$$v_1, v_2, v_3, \dots \quad (74)$$

de la façon suivante: posons:

$$v_1 = c_{11} u_1$$

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} v_i + c_{kk} u_k$$

en donnant aux constantes c des valeurs telles que l'on ait:

$$\left. \begin{array}{l} - \int_{(S)} v_k \frac{dv_k}{dN} ds = 1 \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \\ \int_{(S)} v_k \frac{dv_j}{dN} ds = 0, \text{ pour } j \neq k. \end{array} \right\} \quad (75)$$

L'ensemble des équations (73) est évidemment équivalent à l'ensemble des équations suivantes:

$$(76) \quad \int \int \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial y} \frac{\partial v_k}{\partial y} + \right. \\ \left. + \frac{\partial (\Phi - u)}{\partial z} \frac{\partial v_k}{\partial z} \right\} dx dy dz = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Donc ces équations constituent un ensemble de conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale (4) soit nulle, pourvu que le point (x, y, z) soit extérieur au domaine (D) .

§ 34. Je vais démontrer maintenant que la fonction u , harmonique à l'intérieur du domaine (D) , tendant uniformément vers zéro à l'infini et telle que ses valeurs périphériques coïncident avec celles de la fonction Φ , peut être représentée par la série suivante:

$$(77) \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes:

$$(78) \quad c_k = - \int \int_{(S)} \Phi \frac{dv_k}{dN} ds$$

la série précédente étant uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine (D) .

Bien que le domaine (D) s'étende à l'infini, la manière dont se comportent les fonctions Φ et v_k lorsque l'expression:

$$x^2 + y^2 + z^2$$

croît indéfiniment est telle que nous pourrons, en raisonnant comme au § 15 (p. 145), démontrer que la série:

$$(79) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

est convergente et que l'on a:

$$(80) \quad \int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz \cong \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Posons:

$$w_{n,p} = \sum_{k=n}^{n+p} c_k v_k. \quad (81)$$

A cause des relations (75), nous aurons:

$$\int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = \sum_{k=n}^{n+p} c_k^2.$$

Il résulte de cette équation et de la convergence de la série (79) que l'on a:

$$\lim_{n=\infty} \int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = 0, \quad (82)$$

la convergence vers zéro de l'intégrale du premier membre étant uniforme par rapport à l'ensemble des valeurs entières et positives de p .

On aura donc a fortiori:

$$\lim_{n=\infty} \int \int \int_{(D)} \left(\frac{\partial w_{n,p}}{\partial x} \right)^2 dx dy dz = 0 \quad (83)$$

ainsi que des équations analogues relatives aux dérivées de la fonction $w_{n,p}$ par rapport à y et par rapport à z , avec la même propriété d'uniformité de convergence que pour l'intégrale qui figure au premier membre de (82).

En se reportant aux §§ 5 et 6 du mémoire rappelé au commencement du § 16 (p. 146), on tirera de ce qui précède les conclusions suivantes:

1^o les séries:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial x} \\ U_2 &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial y} \\ U_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial v_k}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

sont uniformément convergentes dans tout domaine intérieur au domaine (D) .

2° Chacune des intégrales:

$$(18) \quad \int \int \int_{(D)} U_i^2 dx dy dz \quad (i = 1, 2, 3)$$

est finie.

3° Si l'on désigne par F une fonction arbitraire à cela près que l'intégrale:

$$\int \int \int_{(D)} F^2 dx dy dz$$

ait un sens, on a:

$$(85) \quad \int \int \int_{(D)} U_1 F dx dy dz = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int \int \int_{(D)} v_k F dx dy dz$$

ainsi que des relations analogues relatives à U_2 et U_3 .

4° On a:

$$(86) \quad \int \int \int_{(D)} (U_1^2 + U_2^2 + U_3^2) dx dy dz = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

Considérons une sphère (Σ), ayant pour centre l'origine des coordonnées, et pour rayon une longueur R assez grande pour que la frontière (S) du domaine (D) soit intérieure à cette sphère. Désignons par v une fonction harmonique dans (D), tendant uniformément vers zéro à l'infini et telle que l'intégrale:

$$\int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait une valeur finie. La fonction v pourra être représentée, à l'extérieur de la sphère (Σ), au moyen de la série suivante:

$$(87) \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{2n+1}} \sum_{k=1}^{2n+1} A_{n,k} \Pi_{n,k}$$

en posant:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

en représentant par les $A_{n,k}$ des constantes et en conservant aux symboles $\Pi_{n,k}$ la signification du § 27. On trouvera aisément en s'appuyant sur l'égalité (22):

$$v^2 < \frac{R^4}{2\pi(r^2 - R^2)} \int_{(\Omega)} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz, \text{ pour } r > R$$

où l'on a représenté par (Ω) le domaine formé par l'ensemble des points extérieurs à la sphère (Σ) . On aura donc à plus forte raison:

$$v^2 < \frac{R}{2\pi(r^2 - R^2)} \int_{(D)} \int \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz, \text{ pour } r > R.$$

Remplaçons dans cette inégalité la fonction v par la fonction $w_{n,p}$ définie par l'équation (81) et reportons-nous à l'égalité (82). Nous arriverons facilement à la conclusion suivante: la série (77) converge uniformément à l'extérieur et sur la surface de toute sphère (Σ') concentrique à la sphère (Σ) et de rayon plus grand que celui de celle-ci.

Choisissons maintenant à l'extérieur de la sphère (Σ) , un point quelconque A dont la position restera fixe dans ce qui va suivre.

D'après ce qui vient d'être établi, la série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(A) \quad (88)$$

où l'on a désigné d'une façon générale par $v_k(A)$ la valeur de v_k en A , sera convergente. Considérons maintenant un point quelconque B situé à l'intérieur du domaine D et joignons-le au point A

par une ligne \overline{AMB} (soit par exemple une ligne polygonale) telle que chacun des points de cette ligne soit intérieur au domaine (D) . Les séries (84) étant uniformément convergentes sur la ligne \overline{AMB} , on aura:

$$\int_{\overline{AMB}} (U_1 dx + U_2 dy + U_3 dz) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{\overline{AMB}} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} dx + \frac{\partial v_k}{\partial y} dy + \frac{\partial v_k}{\partial z} dz \right).$$

Or:

$$\int_{\overline{AMB}} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} dx + \frac{\partial v_k}{\partial y} dy + \frac{\partial v_k}{\partial z} dz \right) = v(B) - v(A),$$

en désignant par $v_k(B)$ la valeur de v_k en B . Par conséquent la série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \left\{ v_k(B) - v_k(A) \right\}$$

est convergente. Donc, puisqu'il en est de même de la série (88), il en sera encore de même de la série:

$$(89) \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(B).$$

Cela prouve que la série (76) est convergente en tout point intérieur au domaine (D).

Mais il y a plus: Supposons que le point B varie de façon que sa distance à l'origine des coordonnées O ne devienne pas supérieure à \overline{OA} et que sa plus courte distance à la frontière du domaine (D) ne descende pas au-dessous d'une limite non nulle δ , mais que l'on pourra d'ailleurs prendre arbitrairement petite. Soit (D_δ) le domaine formé par l'ensemble des positions précédentes du point B . Lorsque le point B varie dans (D_δ), la ligne \overline{AMB} variera nécessairement, mais on pourra évidemment toujours s'arranger de façon qu'aucun de ses points ne sorte du domaine (D_δ) et que de plus, la longueur totale de cette ligne reste inférieure à une longueur constante L assez grande. Il résulte de ces remarques et de l'uniformité de convergence des séries (84) dans (D_δ), que la série (89) sera aussi uniformément convergente dans le domaine (D_δ). Or cette série est, d'après ce que l'on a vu plus haut, uniformément convergente lorsque la distance du point B à l'origine des coordonnées ne descend pas au dessous de \overline{OA} . Nous arrivons donc à la conclusion suivante: la série (77) est uniformément convergente dans tout domaine intérieur au domaine (D) et elle définit par conséquent une fonction u harmonique dans (D) et tendant uniformément vers zéro à l'infini; on a de plus:

$$(90) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = U_1, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = U_2, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = U_3$$

et par conséquent:

$$(91) \quad \iiint_D \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dx dy dz = \sum_{k=1} c_k^2$$

en vertu de (86).

Rapprochons maintenant les faits suivants: en vertu de (91) l'intégrale:

$$\int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

a une valeur finie; à cause des relations (90), il est permis de remplacer U_1, U_2, U_3 dans la relation (85) et les relations analogues relatives à U_2 et U_3 par $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial u}{\partial z}$; enfin les coefficients de la série (77) sont déterminés par les formules (78), équivalentes aux suivantes:

$$c_k = \int \int \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial v_k}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial v_k}{\partial z} \right\} dx dy dz.$$

On conclura immédiatement de ces rapprochements, de la conclusion du § 33 et du théorème fondamental du § 26 (p. 164), que la fonction u définie par l'équation (77), admet des valeurs périphériques déterminées, lesquelles coïncident avec celles de la fonction Φ .

D'ailleurs la fonction u tend, nous l'avons vu, uniformément vers zéro à l'infini. Donc, le théorème énoncé au début de ce paragraphe est démontré.

On conclura immédiatement de ce théorème, en tenant compte de la remarque présentée au § 25, que, avec la restriction énoncée dans l'Introduction au § 3. toute fonction u continue sur (S) et dans (D) , harmonique à l'intérieur du domaine (D) et tendant uniformément vers zéro à l'infini, est développable en une série de la forme (77) avec les valeurs suivantes des coefficients:

$$c_k = \int \int_{(S)} u \frac{dv_k}{dN} ds; \quad (k = 1, 2, 3 \dots)$$

on voit en outre que la condition de validité des formules (77) et (78), telle qu'elle est donnée au § 3, équivaut à la suivante: la fonction u , continue sur (S) et dans le domaine (D) , harmonique dans ce domaine et tendant uniformément vers zéro à l'infini doit être telle que l'intégrale:

$$\int \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait une valeur finie.

§ 35. Pour établir d'une façon complète tous les résultats an-

noncés dans l'Introduction, il nous reste à faire voir que la série (77) jouit des propriétés analogues à celles qui, pour la série correspondante, relative à un domaine non borné, défini dans le plan, ont été établies au § 23.

Ainsi que nous avons eu déjà l'occasion de le faire remarquer, il résulte des équations (90) et (85) que l'on a:

$$\int\int\int_{(D)} \frac{\partial u}{\partial x} F dx dy dz = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int\int\int_{(D)} \frac{\partial v_k}{\partial x} F dx dy dz$$

ainsi que des égalités analogues relatives aux dérivées par rapport à chacune des variables y ou z . Cela rapproche les séries déduites de la série (74) par voie d'une dérivation par rapport à l'une des variables x, y, z , des séries uniformément convergentes dans le domaine (D) . Pour aller plus loin, nous allons démontrer le lemme suivant:

Désignons par w_0 une fonction continue sur (S) et dans le domaine (D) , admettant à l'intérieur de ce domaine des dérivées premières continues, telle que les produits:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} w_0, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial w_0}{\partial x}, \\ (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial w_0}{\partial y}, (x^2 + y^2 + z^2) \frac{\partial w_0}{\partial z}$$

restent bornés pour toutes les valeurs assez grandes de $x^2 + y^2 + z^2$, telle enfin que l'intégrale:

$$\int\int\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

ait un sens. Je dis que l'on aura:

$$(92) \int\int_{(S)} w_0^2 ds < l \int\int\int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz,$$

en désignant par l une longueur dépendant uniquement de la nature géométrique du domaine (D) .

La méthode de Robin¹⁾ permettra de déterminer un potentiel de simple couche w_1 vérifiant sur (S) la condition suivante:

¹⁾ Voir mon mémoire: „Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$ “ (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1902).

$$\frac{dw_1}{dN} + w_0 = 0,$$

la normale à (S) étant dirigée vers l'intérieur du domaine (D) .

Posons:

$$A_i = \int_{(S)} w_i^2 ds,$$

$$B_i = \int \int_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial w_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz, \quad (i = 0, 1)$$

nous aurons:

$$A_0 = \int \int \int_{(D)} \left\{ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial w_1}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z} \frac{\partial w_1}{\partial z} \right\} dx dy dz$$

$$B_1 = \int \int_{(S)} w_0 w_1 ds.$$

Les inégalités de M. Schwarz donnent:

$$A_0^2 < B_0 B_1; \quad B_1^2 < A_0 A_1,$$

d'où:

$$\frac{B_0}{A_0} > \frac{A_0}{B_1} > \frac{B_1}{A_1}. \quad (93)$$

Cela nous ramène à la démonstration de l'inégalité qui résulterait de (92) si l'on y substituait la fonction w_1 à la fonction w_0 . L'avantage de cette réduction consiste en ce que la fonction w_1 peut être regardée comme le potentiel dérivant d'une simple couche portée par (S) .

Une inégalité due à M. Stekloff¹⁾ nous donne:

$$A_1 < l_1 (B_1' + B_1) \quad (94)$$

en désignant par l_1 une longueur ne dépendant que de la nature du domaine (D) et en posant:

$$B_1' = \int \int \int_{(D')} \left\{ \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

¹⁾ Stekloff. Les méthodes générales pour résoudre les problèmes de la Physique mathématique (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. II). — Voir aussi la p. 77 et les suivantes de mon mémoire cité il y a un instant.

où (D') représente le domaine formé par l'ensemble de ceux des points de l'espace qui n'appartiennent pas à (D) .

D'après un théorème dû à M. Poincaré¹⁾ on a :

$$(95) \quad B'_1 < k B_1$$

en désignant par k une constante numérique dépendant uniquement de la nature du domaine (D) . A la vérité la démonstration de M. Poincaré implique des restrictions qui ne permettraient pas d'appliquer cette inégalité actuellement, mais en se rapportant à mon mémoire déjà cité : „Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$ “²⁾, on lèvera aisément ces restrictions. Cela posé les inégalités (93), (94) et (95) entraînent l'inégalité (92), en posant :

$$l = l_1 (1 + k).$$

Le lemme est donc établi.

Revenons à la série (77) et posons :

$$(96) \quad R_n = u - \sum_{k=1}^n c_k v_k.$$

On déduira aisément de (91) l'égalité suivante :

$$(97) \quad \iiint_{(D)} \left\{ \left(\frac{\partial R_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_n}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial R_n}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2.$$

Cela prouve que l'intégrale du premier membre tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Donc, en vertu du lemme qui vient d'être établi, on aura aussi :

$$(97) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{(S)} R_n^2 ds = 0.$$

Il résulte de là que l'on aura, comme si la série (77) était uniformément convergente sur (S) , la relation suivante :

$$(98) \quad \iint_{(S)} u \sigma ds = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \iint_{(S)} v_k \sigma ds,$$

¹⁾ Mémoire sur le Problème de Dirichlet et la méthode de Neumann (Acta mathematica 1896).

²⁾ Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1902.

en désignant par σ une fonction définie sur (S) et quelconque à cela près que l'intégrale:

$$\int_{(S)} \int \sigma^2 ds$$

ait un sens.

Désignons par (Ω) une portion bornée du domaine (D) ayant un volume bien déterminé, mais d'ailleurs quelconque. Soit d'autre part une fonction F quelconque à cela près que l'intégrale:

$$\int_{(\Omega)} \int \int F^2 dx dy dz$$

ait un sens.

On aura, comme si la série (74) était uniformément convergente dans (D) et par suite dans (Ω) , la relation suivante:

$$\int_{(\Omega)} \int \int u F dx dy dz = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{(\Omega)} \int \int v_k F dx dy dz.$$

On démontrera cette proposition en raisonnant comme nous l'avons fait au § 23 pour établir le théorème analogue relatif au cas où le domaine (D) est défini dans le plan.

En résumé, tous les résultats annoncés dans l'Introduction sont établis d'une façon complète.

8. *Badania nad dyspersją światła w gazach. II. Dyspersja etylenu i etanu. — Untersuchungen über die Dispersion des Lichtes in Gasen. II. Die Dispersion des Äthylens und Äthans.* Mémoire de M. **STANISLAS LORIA**, présenté par M. A. Witkowski m. t.

Dulong¹⁾ und Mascart²⁾ untersuchten die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Äthylen.

Dulong bestimmte den Brechungsexponenten für weißes Licht und fand

$$n_{0,760} = 1.000678.$$

¹⁾ *Ann. de Chim. et de Phys.* Vol. 31; S. 172, 1826.

²⁾ *C. R.* 86, S. 321 und 1182, 1878.

Mascart's Angabe bezieht sich auf die Refraktion des genannten Gases für Na-Licht, bezogen auf Luft und lautet:

$$n - 1 = 2.46.$$

Dabei fehlt jedoch jede nähere Angabe über die tatsächlichen Versuchsbedingungen. Von der Temperatur wird gesagt: „une température voisine de 12 degrés“; der Druck wird nicht angegeben.

J. W. Brühl¹⁾ hat den Mascart'schen Wert auf $0^{\circ} 760 \frac{m}{m} \text{Hg}$ reduziert. Da jedoch die von ihm benutzte Reduktionsformel, wegen der unzureichenden Angaben Mascart's, wohl als unsicher bezeichnet werden kann, so ist auch der Wert

$$n_D = 1.000723$$

bloß als annäherungsweise richtig zu betrachten. Dagegen fehlen für Äthan auch diese dürftigen Angaben, und es scheint überhaupt nicht untersucht gewesen zu sein.

Zur Bestimmung der Dispersion der genannten Gase im sichtbaren Spektrum wurde eine der von mir vor kurzem beschriebenen²⁾ ganz ähnliche Methode angewandt. Die von der früheren etwas abweichende Versuchsanordnung ist in Fig. 1 dargestellt. Das durch die Blende (B_1) durchgehende Licht eines Nernstfadens (N) wird von der Linse (L_1) nahezu parallel gemacht, in das in der ersten Abhandlung beschriebene Michelson'sche Interferometer geworfen, durch die Linse (L_2) wieder gesammelt, um nach dem Durchgang durch die Blende (B_2) auf den Spalt eines Spektralapparates konzentriert zu werden. Ist das Interferometer in „Nullstellung“, so erscheint im Okular ein reines kontinuierliches Spektrum. Entfernt man etwa den Spiegel (S_1) von der „Nullstellung“, so bilden sich im Spektrum Interferenzstreifen, die anfangs breit und verwaschen, später immer enger und schärfer werden. Durch entsprechende Justierung der Spiegel (S_1) und (S_2) erreicht man leicht die für die Beobachtung günstigste Schärfe und Entfernung einzelner Minima. Unter entsprechend gut gewählten Bedingungen kann man dann bequem etwa 130 Streifen zählen und $\frac{1}{10}$ einer Streifenbreite schätzen.

Im übrigen blieb die früher benutzte Anordnung unverändert.

¹⁾ *Zeitschr. f. phys. Chemie*, 7. 1. u. ff. 1891.

²⁾ *Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, Déc. 1908, S. 1059 u. ff.

Das Spektroskop, der früher als Monochromator dienende, jetzt mit Okular und Fadenkreuz ausgerüstete festarmige Apparat wurde vor und nach jeder Messungsreihe sorgfältig geeicht.

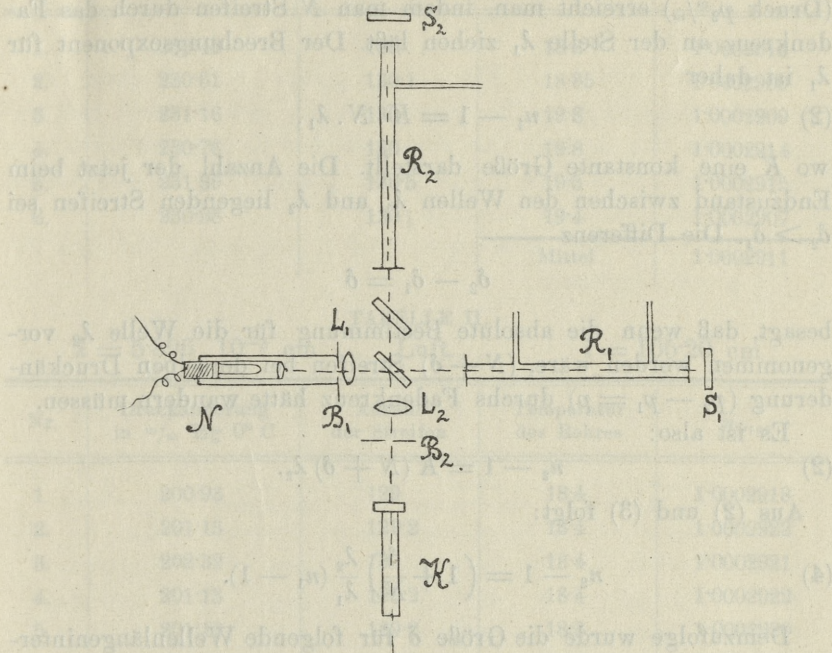


Fig. 1.

Die absolute Bestimmung einzelner Brechungs-exponenten geschah in derselben Weise, wie sie in der zitierten Abhandlung beschrieben wurde: nachdem man die beim Zufluß des untersuchten Gases durch das auf eine bestimmte Welle eingestellte Fadenkreuz wandernden Streifen gezählt und die der Zahl (N) entsprechende Druckänderung (p) beobachtet hat, berechnete man den Brechungs-exponenten bei 0°C 760 m/m Hg aus der Beziehung

$$n - 1 = \frac{N\lambda}{pl} (1 + \alpha t) 760. \quad (1)$$

Bei der Bestimmung der Dispersion muß in Betracht gezogen werden, daß der Spiegel (S_1) von der „Nullstellung“ entfernt worden ist, d. h. daß in den Weg eines von den Strahlen eine Luftplatte ein-

geschoben wurde, deren Dispersion eliminiert werden muß. Es geschieht dies leicht auf Grund folgender Überlegung. Beim Anfangszustand (Druck $p_1^{m/m}$) sei δ_1 die Anzahl der Streifen, die im Spektrum zwischen den Wellen λ_1 und λ_2 liegen. Den Endzustand (Druck $p_2^{m/m}$) erreicht man, indem man N Streifen durch das Fadenkreuz an der Stelle λ_1 ziehen läßt. Der Brechungsindex für λ_1 ist daher

$$(2) \quad n_1 - 1 = K \cdot N \cdot \lambda_1,$$

wo K eine konstante Größe darstellt. Die Anzahl der jetzt beim Endzustand zwischen den Wellen λ_1 und λ_2 liegenden Streifen sei $\delta_2 > \delta_1$. Die Differenz

$$\delta_2 - \delta_1 = \delta$$

besagt, daß wenn die absolute Bestimmung für die Welle λ_2 vorgenommen worden wäre, $(N + \delta)$ Streifen bei derselben Druckänderung ($p_2 - p_1 = p$) durchs Fadenkreuz hätte wandern müssen.

Es ist also:

$$(2) \quad n_2 - 1 = K(N + \delta) \lambda_2.$$

Aus (2) und (3) folgt:

$$(4) \quad n_2 - 1 = \left(1 + \frac{\delta}{N}\right) \frac{\lambda_2}{\lambda_1} (n_1 - 1).$$

Demzufolge wurde die Größe δ für folgende Wellenlängenintervalle ermittelt:

6·677 · 10 ⁻⁵ cm	und	6·185 · 10 ⁻⁵ cm
"	"	5·896 · 10 ⁻⁵ "
"	"	5·790 · 10 ⁻⁵ "
"	"	5·461 · 10 ⁻⁵ "
"	"	5·230 · 10 ⁻⁵ "

Außer der absoluten Bestimmung für $\lambda = 6·677 \cdot 10^{-5}$ cm wurde zur Kontrolle auch die Bestimmung für $\lambda = 5·896 \cdot 10^{-5}$ cm vorgenommen.

Um die Exaktheit des befolgten Verfahrens zu prüfen, habe ich die bekannte Dispersion der Luft neu bestimmt¹⁾. Die Resultate sind in folgenden Tabellen zusammengestellt.

¹⁾ Die Luft wurde dem Garten des Instituts entnommen und mit Phosphor-pentoxyd getrocknet.

TABELLE I.

 $\lambda = 6.677 \cdot 10^{-5}$ cm Luft. $l = 105.20$ cm

Nr.	Druckänderung in $\frac{m}{m}$ Hg 0° C	Anzahl der Streifen	Temperatur des Rohres	$n_{0.760}$
1.	282.43	160	18.3	1.0002915
2.	230.61	130.1	18.85	1.0002909
3.	231.16	130	19.8	1.0002909
4.	230.76	130	19.8	1.0002914
5.	231.36	130.5	19.5	1.0002915
6.	230.98	130]	19.4	1.0002907
			Mittel	1.0002911

TABELLE II.

 $\lambda = 5.896 \cdot 10^{-5}$ cm Luft. $l = 105.20$ cm

Nr.	Druckänderung in $\frac{m}{m}$ Hg 0° C	Anzahl der Streifen	Temperatur des Rohres	$n_{0.760}$
1.	200.93	129	18.4	1.0002918
2.	201.13	129.2	18.4	1.0002922
3.	202.32	130	18.4	1.0002921
4.	201.13	129.2	18.4	1.0002922
5.	201.13	129.2	18.3	1.0002920
6.	200.93	129.2	18.3	1.0002923
			Mittel	1.0002921

Aus der Bestimmung der Dispersion ergab sich die folgende Tabelle der Brechungsindizes.

TABELLE III.

Dispersion der Luft.

	λ in 10^{-5} cm	$n_{0.760}$
a)	6.677	1.0002911
b)	6.185	1.0002916
c)	5.896	1.0002922
d)	5.790	1.0002923
e)	5.461	1.0002929
f)	5.230	1.0002933

Man sieht, daß das Resultat der relativen Bestimmung dem der absoluten gleich ist und die ermittelte Dispersion innerhalb der Fehlergrenzen mit den besten bekannten Beobachtungen übereinstimmt.

Äthylen (C_2H_4). Das Äthylen wurde aus Alkohol und konzentrierter Schwefelsäure hergestellt. Das sich beim Erhitzen dieser Mischung bildende Gas wurde durch Waschflaschen mit konz. Schwefelsäure und konz. Natronlauge geleitet und in einem Gasometer aufgefangen. Da dieses Produkt jedoch nicht rein genug ist, um zur Bestimmung physikalischer Konstanten dienen zu können, wurde es mittels fraktionierter Destillation bei der Temperatur der flüssigen Luft gereinigt.

Die Resultate der Messungen sind in folgenden Tabellen IV, V, VI zusammengestellt:

TABELLE IV.

 $\lambda = 6.677 \cdot 10^{-5}$ cm

Äthylen.

 $l = 105.20$ cm

Nr.	Druckänderung in $\frac{m}{m}$ Hg 0° C	Anzahl der Streifen	Mittlere Tempera- tur des Rohres	$n_{0.760}$
1.	103.44	131	18.4	1.0006519
2.	101.85	128.9	18.4	1.0006515
3.	102.25	129.5	18.37	1.0006520
4.	102.84	130.2	18.3	1.0006515
5.	102.25	129.7	18.27	1.0006524
6.	102.26	129.6	18.0	1.0006516
7.	101.86	129.1	17.9	1.0006514
8.	102.65	130.1	17.9	1.0006514
9.	101.86	129.1	18.0	1.0006516
10.	103.17	130.8	17.7	1.0006512
11.	102.65	130	18.2	1.0006516
12.	103.05	130.6	18.1	1.0006519
			Mittel	1.0006516

Aus fünf voneinander unabhängigen, gut übereinstimmenden Messungen der Dispersion folgen für $\left(1 + \frac{\delta}{N}\right)$ die Werte:

TABELLE V.

$$\text{Äthylen: } \left(1 + \frac{\delta}{N}\right).$$

λ in 10^{-5} cm	6·677 bis 6·185	bis 5·896	bis 5·790	bis 5·461	bis 5·230
$1 + \frac{\delta}{N}$	1·082	1·142	1·166	1·241	1·297

woraus sich nachstehende Brechungsexponenten für die betreffenden Wellen ergeben:

TABELLE VI.

Dispersion des Äthylens.

	λ in 10^{-5} cm	$n_{0,760}$
a)	6·677	1·0006516
b)	6·185	1·0006531
c)	5·896	1·0006571
d)	5·790	1·0006588
e)	5·461	1·0006614
f)	5·230	1·0006620

Aus obigen Werten berechnete Konstanten der Cauchy'schen Interpolationsformel

$$n - 1 = a \left(1 + \frac{b}{\lambda^2}\right)$$

sind:

$$a = 0\cdot0006303$$

$$b = 1\cdot477 \cdot 10^{-10}.$$

Äthan (C_2H_6). Äthan erhielt man auf dem Wege der Grignard'schen Reaktion durch Zersetzung des Magnesium-Brom-Äthyls mit Wasser. Das dabei entwickelte Gas wurde durch Waschflaschen mit rauchender Schwefelsäure geleitet und in einem mit KalilaugeLösung gefüllten Gasometer gesammelt. Um sich zu vergewissern, daß keine beachtenswerten Mengen von Äthylen als Nebenprodukt mitgenommen wurden, habe ich den Assistenten des

hiesigen chemischen Instituts, Herrn Wl. Sobeecki, der mir in liebenswürdiger Weise bei der Herstellung des Gases behilflich war, gebeten, eine Prüfung desselben auf Äthylen vorzunehmen. Es konnten jedoch keine merklichen Mengen von Äthylen nachgewiesen werden, was auch von vornherein wahrscheinlich war. Ich spreche dem genannten Herrn meinen verbindlichen Dank aus.

Die Messungen führten zu nachstehenden Resultaten:

TABELLE VII.

$$\lambda = 6.677 \cdot 10^{-5} \text{ cm} \quad \text{Äthan.} \quad l = 105.20 \text{ cm}$$

Nr.	Druckänderung in $\frac{\text{m}}{\text{m}} \text{ Hg } 0^{\circ} \text{ C}$	Anzahl der Streifen	Temperatur des Rohres	$n_{0.760}$
1.	90.49	131.4	18.45	1.0007477
2.	105.65	153.5	18.2	1.0007475
3.	113.42	165	17.97	1.0007477
4.	103.06	149.9	17.77	1.0007472
5.	88.29	128.2	18.65	1.0007479
6.	89.49	129.9	18.82	1.0007483
7.	89.89	130.6	18.47	1.0007481
8.	89.70	130.5	17.9	1.0007477
9.	89.73	130.8	17.4	1.0007479
10.	89.29	129.7	18.5	1.0007481
			Mittel	1.0007478

Absolute Bestimmung für $\lambda = 5.896 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$ gibt

$$n_{D_1} = 1.0007524.$$

TABELLE VIII.

$$\text{Äthan} \left(1 + \frac{\delta}{N} \right).$$

λ in 10^{-5} cm	6.677 bis 6.185	bis 5.896	bis 5.790	bis 5.461	bis 5.230
$1 + \frac{\delta}{N}$	1.084	1.140	1.163	1.237	1.292

Daraus folgen die Brechungsexponenten:

TABELLE IX.
Dispersion des Äthans.

	λ in 10^{-5} cm	$n_{0,760}$
a)	6.677	1.0007478
b)	6.185	1.0007509
c)	5.896	1.0007528
d)	5.790	1.0007542
e)	5.461	1.0007566
f)	5.230	1.0007568

Die Cauchy'schen Konstanten lauten:

$$a = 0.0007365$$

$$b = 9.308 \cdot 10^{-11}.$$

Ich habe die Dispersion der gasförmigen Kohlenwasserstoffe möglichst exakt untersucht, weil ich von ihr wichtiges für die Dispersionstheorie erwarten zu dürfen glaubte.

Die von Natanson abgeleitete Beziehung¹⁾

$$\Delta = \frac{3(n_2 - n_1)\lambda_1^2\lambda_2^2}{2(n_1 - 1)(n_2 - 1)(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)}$$

bietet nämlich ein sehr empfindliches Mittel, wichtige Fragen der Theorie an der Hand der Erfahrung zu entscheiden. Hierbei kommt in erster Linie die Frage nach der Berechtigung der Annahme monoelektronischer Konstitution für gasförmige Isolatoren in Betracht. Nur unter dieser speziellen Annahme gilt obige Beziehung, und zwar soll dann Δ im ganzen betrachteten Spektralbezirke (mindestens wenn dieser weit von Absorptionsstreifen liegt) eine Konstante von der Größenordnung 10^{-7} cm² sein. Es zeigt sich nun, daß im Falle des Acetylens, Methans, Äthylens und Äthans, die ebenso wie die Kohlensäure bekanntlich ultrarote Absorptionsbanden haben, die Größe Δ , soweit es sich um das sichtbare Spektrum handelt, konstant bleibt.

¹⁾ Bull. Int. de l'Acad. des Sciences de Cracovie für 1907, S. 332.

Sie war ¹⁾

für Acetylen (im Mittel)	$\Delta = 4.05$
für Methan " "	$= 4.48.$

Für Äthylen ergibt sie sich jetzt

aus (a) und (e) . . .	$\Delta = 3.07$
(b) " (f) . . .	$\Delta = 2.83$
(c) " (e) . . .	$\Delta = 3.11$
(a) " (d) . . .	$\Delta = 3.40$
Mittel . . .	$\Delta = 3.10$

für Äthan

aus (a) und (f) . . .	$\Delta = 1.69$
(b) " (e) . . .	$\Delta = 2.03$
(a) " (d) . . .	$\Delta = 2.30$
(c) " (e) . . .	$\Delta = 2.10$
Mittel . . .	$\Delta = 2.03.$

Im betrachteten Spektralbezirke können daher die untersuchten Gase mit genügender Annäherung als monoelektronische Substanzen behandelt werden.

Ist das der Fall, so ist auch der weitere von Natanson angebahnte Weg gangbar. Für das Modell einer Substanz, die nur eine einzige Gattung beweglicher Elektronen besitzt, gilt die Beziehung ²⁾

$$a\Delta = \frac{3\pi c^2}{m} \cdot e M$$

= eine universelle Konstante, wobei a die Anzahl der „Dispersionselektronen“ pro Molekül bezeichnet.

Dies legt uns jedoch die Frage nach der Beziehung zwischen den „Dispersionselektronen“ und der chemischen „Valenz“ nahe. Versucht man die Hypothese ³⁾ von Natanson: $a = v =$ Summe

¹⁾ a. a. O. S. 1066.

²⁾ a. a. O., S. 347.

³⁾ Übrigens ist sie von Natanson nur mit Vorbehalt, als eine Art Arbeits-Hypothese, angenommen worden (a. a. O., S. 331–332, 343–344; insbesondere S. 347–348 und 351).

der Valenzen anzuwenden, so kommt man zu dem Schluß, daß sich die Kohlenwasserstoffe der „ $v\Delta$ “-Regel nicht fügen.

Man bekam nämlich früher

für Methan ($v = 8$)	$v\Delta = 35.84$
für Acetylen ($v = 10$)	$v\Delta = 40.50$.

Ebenso bekommt man jetzt

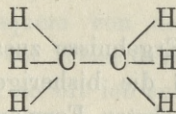
für Äthylen ($v = 12$)	$v\Delta = 37.20$
für Äthan ($v = 14$)	$v\Delta = 28.42$
anstatt etwa 16.	

Folgt man andererseits J. J. Thomson und entscheidet sich für sein Modell der elektronischen Struktur des Atoms, so muß man etwa folgende Betrachtung anstellen:

Bekanntlich findet nach J. J. Thomson¹⁾ bei einer chemischen Vereinigung eine Übertragung von Elektronen (Korpuskeln) von einem Atom auf ein anderes statt, und es ist die Anziehung der positiven und der negativen Ladung, die dazu beiträgt, die Elemente in der Verbindung festzuhalten. Von der Anzahl Elektronen, sagt J. J. Thomson²⁾, die ein Atom unter dem Einfluß von Atomen anderer Elemente aufnehmen oder abgeben kann, hängt die Valenz jenes Atoms ab. Da diese „Valenzelektronen“ diejenigen sind, die am leichtesten bewegt werden können, so müssen sie den größten Einfluß auf den Brechungsexponenten ausüben³⁾.

Wollen wir von diesem Standpunkte aus die Resultate unserer Messungen der Dispersion gasförmiger Kohlenwasserstoffe betrachten, so finden wir die einfachsten Verhältnisse bei Methan⁴⁾ vor. Berücksichtigt man nämlich den elektropositiven Charakter des Wasserstoffatoms⁵⁾, so muß man für Methan $a = 4$ setzen; somit ist für dieses Gas $a\Delta = 17.92$.

Äthan wird durch die Formel



1) *The Corpuscular Theory of Matter*. London 1907. p. 127 sqq.

2) a. a. O., S. 138.

3) a. a. O., S. 156.

4) *Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, Déc. 1908, S. 1066.

5) J. J. Thomson, a. a. O., S. 131.

ausgedrückt. „Wenn wir annehmen“, sagt J. J. Thomson¹⁾, „daß die Vereinigung der beiden Kohlenstoffatome miteinander von einer Übertragung eines Korpuskels von einem Atom auf das andere begleitet ist, . . . so würde das eine Kohlenstoffatom eine Ladung von vier Einheiten negativer Elektrizität, das andere dagegen eine Ladung von nur zwei Einheiten besitzen“. Demnach müßte man $a = 6$ setzen und bekäme $a\Delta = 12 \cdot 18$. Eine ähnliche Betrachtung gibt

für Äthylen $a = 4$. . . $a\Delta = 12 \cdot 40$;

für Acetylen²⁾ $a = 4$. . . $a\Delta = 16 \cdot 20$.

Stellt man die entsprechenden Zahlen, zu welchen einerseits die Natanson'sche, andererseits die J. J. Thomson'sche Hypothese führt, nebeneinander

	nach Natanson	nach J. J. Thomson
CH_4	$v = 8$. . . $v\Delta = 35 \cdot 84$	$a = 4$. . . $a\Delta = 17 \cdot 92$
C_2H_6	$v = 14$. . . $v\Delta = 28 \cdot 42$	$a = 6$. . . $a\Delta = 12 \cdot 18$
C_2H_2	$v = 10$. . . $v\Delta = 40 \cdot 50$	$a = 4$. . . $a\Delta = 16 \cdot 20$
C_2H_4	$v = 12$. . . $v\Delta = 37 \cdot 20$	$a = 4$. . . $a\Delta = 12 \cdot 40$

so sieht man, daß sowohl die Werte von $v\Delta$, wie auch diejenigen von $a\Delta$ um einen konstanten Wert herumschwanken. Dabei ist aber $v\Delta$ ungefähr zweimal größer als der Mittelwert, den Natanson für andere Gase berechnet hat; $a\Delta$ hingegen läßt sich wieder mit dem Werte, den man bei ähnlicher Betrachtungsweise z. B. für H_2 erhält

$$(a = 1 \dots a\Delta = \Delta = 7 \cdot 94)^3)$$

nicht vereinbaren.

Faßt man daher die Ergebnisse zusammen, so muß man vor derhand konstatieren, daß die bisherigen Versuche der Theorie (wenigstens in ihren einfachsten Formen) die Beziehung zwischen

¹⁾ a. a. O., S. 131.

²⁾ *Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, Déc. 1908, S. 1066.

³⁾ Natanson. *Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, Avr. 1907, S. 349.

den „Dispersions-“ und „Valenz“-Elektronen zu erfassen im Falle der Kohlenwasserstoffe keine Bestätigung in der Erfahrung gefunden haben. Es muß jedoch noch ein viel reicheres und exaktes Beobachtungsmaterial gesammelt werden, ehe man in dieser schwierigen und interessanten Frage zu einem sicheren Ergebnis gelangen dürfte.

Breslau, Physikalisches Institut der königl. Universität. Am 25. Jänner 1909.

9. *Wyodrębnianie ziem rzadkich z mariupolitu. — Gewinnung von seltenen Erden aus dem Mariupolit.* Mémoire de M. J. MOROZEWICZ m. c.

Eine der Gangvarietäten des Mariupolits zeichnet sich durch einen eigentümlichen Mineralbestand aus. Sie bildet nämlich ein Gemisch von folgenden Mineralien: Albit, Nephelin, Ägirin, Magnetit, Zirkon, Beckelith ¹⁾, Pyrochlor und Flußspat, von denen die drei ersten stark überwiegen. Die seltenen Elemente befinden sich im Beckelith (Cer-Gruppe) und im Pyrochlor (Tantal-Gruppe). Die Gesamtmenge der beiden Mineralien beträgt nicht mehr als 0.5% des ganzen Gesteines, und zwar die Beckelithmenge zirka 0.3%, die des Pyrochlores zirka 0.2%. Schon lange war ich mit der Idee beschäftigt, einen leichten Weg zu finden, wonach man imstande wäre, die im Mariupolit vorkommenden Cer-Erden zu gewinnen, d. h. dieselben von den stark überwiegenden Eisen-, Aluminium- und Titan-Oxyden quantitativ zu trennen. Nach vielen im vorigen Jahre ausgeführten Versuchen habe ich endlich ein Verfahren gefunden, das am raschesten zum Ziele zu führen scheint.

Da nun der Nephelin und Beckelith, wie dies aus meinen früheren Erfahrungen hervorgeht, sich leicht in verdünnter Salzsäure lösen, so lassen sie sich bequem von den übrigen Gemengteilen des Mariupolits in quantitativer Weise trennen ²⁾. Von dieser Eigenschaft machte ich Gebrauch, so oft ich aus einer größeren Gesteinsportion die seltenen Erden erhalten wollte. Dabei spaltet sich jede

¹⁾ Dieses *Bulletin*, J. 1905, S. 216.

²⁾ Über die chemische Zusammensetzung des Nephelins. Dieses *Bulletin*, J. 1907, S. 966.

Portion in zwei Teile: in einen löslichen und einen unzersetzbaren Teil. In dem ersteren finden sich die seltenen Erden aus der Cergruppe, im letzteren die aus der Tantalgruppe, sowie Zirkon und Titan.

I. Ausscheidung von Cer, Lanthan, Didym, Yttrium und Erbium. 10 bis 50 g fein gepulverten Gesteins werden in einer geräumigen Platinschale stark gegläht, mit 150—500 cm³ heißem Wasser übergossen und dann allmählich mit 10—30 cm³ Salzsäure von sp. Gewicht 1.196 unter stetem Umrühren versetzt. Nach halbstündigem Erwärmen filtriert man den ungelöst gebliebenen Rückstand und wäscht ihn gut aus. Das Filtrat, worin sich die ganze Menge des Nephelins und Beckeliths befindet, wird dann in der Platinschale verdampft und die ausgeschiedene Kieselsäure entfernt. Man verdampft die erhaltene Flüssigkeit von neuem, führt die Chloride in Sulfate über, erwärmt dieselben so lange, bis sich die ersten Schwefelsäuredämpfe zeigen und löst dann die Masse in kaltem Wasser. Nun versetzt man die klare Lösung mit reinem Natriumhydroxyd in Stückehen und in genügender Menge, um den sich anfangs reichlich bildenden Tonerdeniederschlag wiederum in Lösung zu bringen. Der restierende, flockchenartige, schwere Niederschlag besteht dann aus Hydroxyden der Cermetalle, die mit Eisenhydroxyd verunreinigt sind.

Das gewonnene Hydroxydengemisch löst man dann in Salzsäure, verdünnt mit Wasser und schlägt wiederum mit Ammoniak nieder, hauptsächlich um die geringe Kalkmenge zu entfernen. Die sorgfältig gereinigten Hydroxyde werden endgültig in Salpetersäure gelöst und auf dem Wasserbade von überschüssiger Säure befreit. Man verdünnt die schwach sauren Nitrate mit Wasser auf 50 cm³, erwärmt die klare Flüssigkeit und gießt dieselbe tropfenweise in ein Becherglas ein, worin sich großer Überschuß von konzentrierter heißer Oxalsäurelösung findet ¹⁾. Dann scheiden sich schöne Kristallisationen von Oxalaten der seltenen Erden aus, welche sich bald am Boden des Gefäßes sammeln und einen flaumigen, weißen mit einem Stich ins Violette, kleinschuppigen Niederschlag darstellen. Im Filtrat bleibt alles Eisen, auf dem Filter erhält man das ganze Quantum der Oxalate von seltenen Erden. Man versäume aber nicht,

¹⁾ Vergl. C. R. Böhm. Die Darstellung der seltenen Erden. Bd. II, S. 50. Leipzig 1905.

das Filtrat auf mögliche darin gebliebene, kleine Quantitäten von seltenen Erden zu prüfen. Das geschieht bloß durch Einengen oder Trocknen des Filtrates und durch Wiederauflösung desselben. In der Regel bekommt man nur noch eine winzige Menge von seltenen Oxalaten, deren Reinheit man unter dem Mikroskop konstatiert und mit der Hauptmasse der Oxalate vereinigt. Nach dem Ausglühen erhält man schließlich den Gesamtgehalt an seltenen Erden, welcher von etwaigen fremden Verunreinigungen vollkommen frei ist.

Dieses Verfahren gibt gute, übereinstimmende Resultate und kann in verhältnismäßig kurzer Zeit ausgeführt werden. Je nach der Größe der Gesteinsportion gewinnt man daraus die seltenen Erden schon am zweiten oder dritten Tag nach dem Beginn der geschilderten Manipulationen. Es mögen hier einige Bestimmungen beispielsweise angeführt werden.

A. An Beckelith reicherer Mariupolit.

1. 50 g Gestein gaben 0.1057 g $(\text{Ce, La, Di, Y, Er})_2\text{O}_3 = 0.21\%$.
2. 5.2341 g desselben gaben 0.0109 g $(\text{Ce, La, Di, Y, Er})_2\text{O}_3 = 0.21\%$.

B. An Beckelith armer Mariupolit.

1. 8.60 g Gestein gaben 0.0062 g $(\text{Ce, La, Di, Y, Er})_2\text{O}_3 = 0.07\%$.
2. 50 g desselben gaben 0.0320 g $(\text{Ce, La, Di, Y, Er})_2\text{O}_3 = 0.06\%$.

Natürlich sind die erzielten Resultate umso genauer, je reicher das Gestein an seltenen Erden ist.

Schon nach Beendigung dieser und der nächstfolgenden Versuche habe ich mit Vergnügen die vorläufige Mitteilung von M. Dittrich „Über die Bestimmung des Cers und anderer seltenen Erden in Gesteinen“ kennen gelernt¹⁾. Der Verfasser schlägt fast dieselbe Methode vor, indem er nur statt Oxalsäure die Verwendung von Ammoniumoxalat empfiehlt und theoretische Gründe anführt, warum man bei der Ausscheidung der seltenen Erden einen großen Überschuß von Ammoniumoxalat nehmen soll. Am Ende führt M. Dittrich die Resultate seiner Trennungen an, die er an künstlichen Gemischen der Cerosalze mit Salzen von Eisen und Kalzium angestellt hat.

II. Ausscheidung von Niob- und Tantalsäure aus dem in schwacher Salzsäure unzersetzt gebliebenen Teile. Um aus

¹⁾ Berichte d. d. Chem. Gesellsch., XXXXI, S. 4373, Dezember 1908.

dem von Nephelin und Beckelith befreiten Gemisch, welches aus Albit, Ägirin, größerem Teil von Magnetit, ferner aus Zirkon, Pyrochlor und Flußspat besteht, Niob- und Tantal säure auszuschcheiden, bediente ich mich folgender Handgriffe. Zu je 10 g des Gesteinspulvers werden 200 cm³ Wasser und 10 cm³ reine konzentrierte Schwefelsäure (von sp. Gew. 1.845) zugefügt, die Mischung wird in einer geräumigen Platinschale auf dem Wasserbade erwärmt und mit Flußsäure portionsweise so lange behandelt, bis alle oben erwähnten Mineralien, den Zirkon ausgenommen, vollkommen zersetzt erscheinen. Das geschieht in 10—12 Stunden bis 2—3 Tagen je nach der Feinheit und Menge des Pulvers. Dann treibt man die überschüssige Fluß- und Schwefelsäure aus, nimmt die noch stark saure Sulfatmasse mit 200 cm³ Wasser auf und erwärmt am Wasserbade. Nach einigen Stunden löst sich die Masse größtenteils auf. Nur das kristallinische Zirkonpulver und die milchweißen Flöckchen von Tantal- und Niobsäure bleiben ungelöst. Man trennt den Zirkon von den beiden Säuren auf die Weise, daß man dem Gemisch nochmals einige Tropfen konzentrierte Schwefel- und Flußsäure zusetzt und den Zirkon mittels eines Platintrichters abfiltriert. In dem Filtrate hat man den größten Teil von Tantal- und Niobsäure, die man durch Austreiben von Flußsäure, durch Verdünnung mit Wasser und durch starkes Kochen wieder in Form eines charakteristischen milchweißen Niederschlages erhält. Die Abscheidung ist meist eine quantitative (Nachprüfung mit Ammoniak!). Ein kleiner Teil von Niobsäure kann aber beim ersten Abfiltrieren der Sulfate in die Lösung übergehen. Um ihn zu fangen, behandelt man die große Sulfatmasse (wie beim Cer) mit festem Natriumhydroxyd und filtriert den entstandenen Eisenniederschlag mit eventueller Beimischung der seltenen Erden ab, glüht ihn und schmelzt mit Kaliumpyrosulfat. Nach Auflösung der Schmelze in kaltem Wasser und nach Erwärmung der Lösung auf dem Wasserbade scheiden sich meist kleine Quantitäten von Niobsäure aus, die man mit der früher erhaltenen Hauptmenge vereinigt. Im Mariupolit ist die Tantal säure nur in Spuren, die Niobsäure dagegen in etwas größeren Mengen vorhanden.

Auf dem oben gezeigten Wege kommt die Ausscheidung von Niobsäure aus dem Mariupolit glatt zustande und gibt übereinstimmende Resultate:

- 1) 8.60 g Mariupolit gaben 0.0139 g $\text{Nb}_2\text{O}_5 = 0.16\%$.
- 2) 50 g desselben Mariupolits gaben 0.0767 g $\text{Nb}_2\text{O}_5 = 0.15\%$.

Dabei habe ich bemerkt, daß die Niobsäure bei Auslaugung der Kaliumpyrosulfatschmelze in merklichen Mengen in die Lösung nicht übergeht, wenn man die in der Kälte erhaltene Lösung eine halbe Stunde auf dem Wasserbade erwärmt. Ich meine daher, daß die gegen die Genauigkeit dieser Trennungsweise von C. H. Warren¹⁾ gerichteten Einwände insofern unbegründet sind, als er das Auslaugen in kaltem Wasser ausführte. Ein gelindes Erwärmen der sauren konzentrierten Sulfatlösung würde eine genaue Hydrolyse der gelösten Niobsäure bewirken, ohne daß man zu befürchten brauchte, daß gleichzeitig auch ein Teil von Titan sich ausscheidet. Wäre aber das der Fall, so würde dann ein wiederholtes Schmelzen und Auslaugen in der Wärme gewiß zu einem befriedigenden Resultate führen.

III. Ausscheidung von Zirkonerde (ZrO_2). Bei den Operationen, durch welche die Ausscheidung von Niobsäure erzielt wurde, blieb immer nach Zerstörung anderer Mineralien das kristallinische Pulver von Zirkon (ZrSiO_4) übrig, dessen Menge zur angewandten Gesteinsportion jedesmal im gleichen Verhältnis stand. Unter dem Mikroskop bestand das Pulver aus Kristallbruchstückchen mit scharfen Kanten, die in keiner Weise Zersetzungs- oder Zernagungsmerkmale zeigten. Daraus geht hervor, daß der Zirkon auf das Gemisch von Schwefel- und Flußsäure nicht merklich reagiert, obschon die Einwirkungsdauer der beiden Säuren in der Wärme 2—3 Tage betrug. Das zeigen am besten folgende Zahlen:

- 1) 10 g Mariupolit gaben 0.0056 g Zirkon
- 2) " " " 0.0056 g "
- 3) " " " 0.0054 g "

Die an Zirkon reicheren Mariupolitpartien wurden in ähnlicher Weise behandelt und lieferten folgende Resultate:

- 1) 50 g Gestein gaben 0.8480 g Zirkon $= 1.70\%$
- 2) 5.2341 g " " 0.0943 g " $= 1.80\%$

Diese zwei Bestimmungen sind maßgebend. Sie beweisen nämlich, daß trotz des großen Unterschiedes in der Einwirkungsdauer

¹⁾ Zeitschr. f. Kryst., Bd. 43, S. 24 (1907).

der Säuren (im ersten Versuch mehr als 3 Tage, im zweiten nur 12 Stunden), die erhaltenen Zirkonmengen in beiden Fällen doch ziemlich gut übereinstimmen. Um mich zu überzeugen, ob dennoch die Zirkonerde nicht in die Lösung übergegangen ist, habe ich versucht, sie bei Titan nach Entfernung des Eisens zu entdecken. Mit Hilfe der Ammoniumsazylatmethode¹⁾ wurde die Zirkonerde wirklich nachgewiesen, aber nur in sehr kleinen Mengen, die (im zweiten Versuch) 0.0015 g (= 0.03%) betragen. Aber es ist nicht ausgeschlossen, daß etwa ein Teil dieser aufgelösten Zirkonerde nicht nur vom Zirkon, sondern auch vom Pyrochlor und anderen Mineralien stammen kann.

Aus all dem folgt, daß es möglich ist, den Zirkon aus den Silikatgesteinen mittels Schwefel- und Flußsäure beinahe quantitativ auszuschcheiden, besonders wenn man die Operation rasch ausführt und zu große Überschüsse von Säuren vermeidet.

Die Erhaltung von Zirkonerde aus dem so gewonnenen Zirkon ist nun eine ganz leichte Aufgabe. Man braucht nur das Zirkonpulver mit Soda zu schmelzen, die Schmelze in Wasser auszulaugen und die ungelöst gebliebene Zirkonerde zu trennen. Die Brauchbarkeit einer solchen Trennungsweise mögen zwei folgende Bestimmungen illustrieren:

- 1) 0.3757 g Zirkon gaben 0.2505 g ZrO_2 = 66.68% (theor. 67.01%)
 2) 0.8480 g " " 0.5663 g " = 66.78% (" ").

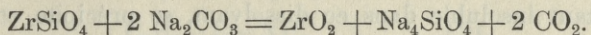
Das beweist zugleich, daß der aus dem Mariupolit mittels Schwefel- und Flußsäure erhaltene Zirkon seinen chemischen Bestand während der Ausscheidungsoperation gar nicht ändert.

Zuletzt sei noch erwähnt, daß der im großen Sodatüberschuß und in der starken Hitze auf dem Gebläse geschmolzene Zirkon sich stets in die in Wasser unlösliche Zirkonerde und das lösliche Natriumorthosilikat umwandelt. Es entsteht dabei die hexagonale Modifikation des Zirkoniumdioxids in schönen Kriställchen, die eine Kombination von {0001} und {1010} zeigen, optisch einachsigt und negativ (—) sind. Genau solche Kriställchen haben schon früher Michel-Lévy und Bourgeois²⁾ unter ganz ähnli-

¹⁾ M. Dittrich, Zeitschr. f. analyt. Chem. Bd. 56 (1907), S. 344.

²⁾ Comptes Rendus, Bd. 94 (1882), S. 812.

chen Bedingungen dargestellt. Die oben erwähnte Zersetzung des Zirkons kommt also nach folgender Gleichung zustande:

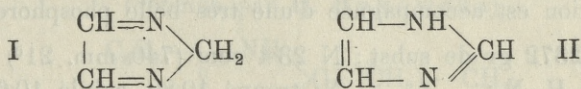


Die kristallisierte Zirkonerde entsteht edmnach bei der Zersetzung des Zirkons schon in der Schmelze und nicht erst beim Laugen durch die hydrolytische Spaltung von Na_4ZrO_4 , wie das z. B. F. P. Treadwell in seinem bekannten Lehrbuche der analytischen Chemie erläutert ¹⁾.

Aus dem Mineralog. Institut d. Jagell. Universität Krakau.

10. *O glyksalinach.* — *Sur les glyoxalines.* Mémoire de M. BR. RADZISZEWSKI m. t.

La constitution de la glyoxaline a été démontrée par mes travaux ²⁾ et par les recherches de Japp et Robinson ³⁾. En obtenant la lophine du benzile, de l'aldéhyde benzoïque et de l'ammoniaque, j'ai prouvé qu'il y a dans une molécule de glyoxaline deux atomes de carbone liés ensemble et que le troisième en est séparé par deux atomes d'azote (I). Japp et Robinson ont accepté cette dislocation du carbone et de l'azote, d'accord avec ma formule, mais ils ont admis qu'un de ces atomes d'azote est lié avec de l'hydrogène en formant le groupe imine (II).



D'après les recherches plus récentes, ce groupe (imine) existe, en effet, dans les glyoxalines obtenues. Néanmoins, il était possible de supposer que l'on pourrait obtenir des glyoxalines qui répondraient à la formule I. Les recherches qui poursuivaient ce but n'avaient pas corroboré cette supposition, mais en les exécutant, mes collaborateurs ont obtenu plusieurs dérivés nouveaux de la glyoxaline que je vais décrire. Ces glyoxalines ont été obtenues (à l'exception de trois que je vais indiquer ci-dessous) par la méthode suivante:

¹⁾ Bd. I, S. 425, 6 Aufl. 1908.

²⁾ Ber. 15, 1493, 2706.

³⁾ Ber. 15, 1268, 2410.

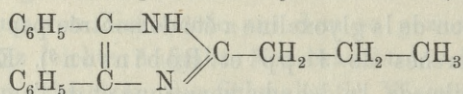
On sature une solution alcoolique de benzile et d'aldéhyde avec du gaz ammoniac. Quelque temps après, on ajoute de l'eau; la glyoxaline étant insoluble dans ce dissolvant, se précipite et se laisse facilement purifier par la cristallisation.

Avec cette méthode, on ne peut pas obtenir la paratoluy-, oxy-methoxyphényl- et la naphtho-biphénylglyoxaline, qui se forment dans des conditions un peu différentes.

Les dérivés méthyliques de toutes ces glyoxalines ont été obtenus en chauffant dans une solution alcoolique des glyoxalines avec de l'iodure de méthyle (en excès). Après avoir évaporé l'alcool, on extrait le résidu avec de l'eau, de la potasse et on le dissout dans de l'éther.

Propyl-biphénylglyoxaline (2, 4, 5)

(obtenue par Br. Wysockański)



Ce composé a été préparé avec du benzile et de l'aldéhyde butylique normal. Il se présente sous la forme d'aiguilles de couleur jaunâtre, fusibles à 205.5°. Elles se dissolvent facilement dans l'alcool, un peu moins dans l'éther; elles sont presque insolubles dans l'eau. En présence de la potasse alcoolique cette glyoxaline, comme toutes les autres, s'oxyde lentement au contact de l'air, et cette réaction est accompagnée d'une très belle phosphorescence.

0.2372 gr de subst.; N 23.4 cem (740 mm, 21°)

$\text{C}_{18}\text{H}_{18}\text{N}_2$; N: trouvé 10.89, calculé 10.68.

Son chlorhydrate, $\text{C}_{18}\text{H}_{18}\text{N}_2 \cdot \text{HCl}$, sous forme de cristaux incolores, fond à 233.5°. Il est soluble dans l'eau chaude et l'alcool. Cl: trouvé 11.41, calculé 11.90.

Son oxalate $(\text{C}_{18}\text{H}_{18}\text{N}_2)_2\text{C}_2\text{H}_2\text{O}_4$ cristallise en aiguilles qui fondent à 210°. Il est soluble comme le chlorhydrate. N: trouvé 8.96, calculé 9.14.

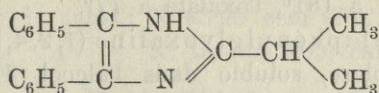
La méthyl-propylbiphénylglyoxaline (1, 2, 4, 5) est un corps cristallisé, incolore, fusible au-dessus de 110°. Elle est soluble dans l'alcool et l'éther, et insoluble dans l'eau.

0.1987 gr de subst.; N 17.7 cem (736 mm, 22°)

$\text{C}_{18}\text{H}_{17}\text{N}_2 \cdot \text{CH}_3$; N: trouvé 9.78, calculé 10.14.

Isopropyl-biphénylglyoxaline (2, 4, 5)

(obtenu par M. Beiser)



Elle a été préparée avec du benzile et de l'aldéhyde isobutylique. Elle forme des cristaux jaunâtres, solubles dans l'alcool, l'éther et le benzène. Elle fond à 246° et présente le phénomène de phosphorescence comme les autres glyoxalines.

0.2416 gr de subst.; N 24.7 ccm (736.5 mm, 24°)

 $\text{C}_{18}\text{H}_{18}\text{N}_2$ N: trouvé 11.03, calculé 10.68.

Son chlorhydrate, $\text{C}_{18}\text{H}_{18}\text{N}_2 \cdot \text{HCl}$, cristallise en aiguilles incolores qui fondent à 227°. Cl: trouvé 11.75, calculé 11.90.

Son chloroplatinate, $(\text{C}_{18}\text{H}_{18}\text{N}_2 \cdot \text{HCl})_2\text{PtCl}_4 + 3\text{H}_2\text{O}$, est un corps cristallisé, orange. Il fond en se décomposant au-dessus de 290°. Pt: trouvé 19.69, calculé 19.71.

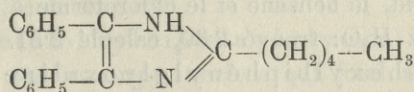
La méthyl-isopropylbiphénylglyoxaline (1, 2, 4, 5), $\text{C}_{18}\text{H}_{17}\text{N}_2 \cdot \text{CH}_3$ est un corps cristallisé, jaunâtre. Il fond à 97°.

0.2315 gr de subst.; N 22 ccm (741 mm, 23.5°)

N: trouvé 10.35, calculé 10.14.

Amyl-biphénylglyoxaline (2, 4; 5)

(obtenu par H. Bukowska)



Elle a été préparée du benzile et de l'aldéhyde caproïque. Elle forme des cristaux incolores, fusibles à 252°, solubles facilement dans l'alcool à chaud, le benzène et l'éther. Elle présente le phénomène de phosphorescence comme les autres glyoxalines.

0.2134 gr de subst.; N 17.75 ccm (746 mm, 14.5°)

 $\text{C}_{20}\text{H}_{22}\text{N}_2$; N: trouvé 9.45, calculé 9.75.

Son chlorhydrate, $\text{C}_{20}\text{H}_{22}\text{N}_2 \cdot \text{HCl}$, est un corps incolore fondant à 161°, soluble dans l'alcool, l'éther et le benzène. Cl: trouvé 10.77, calculé 10.87.

Son chloroplatinate, $(\text{C}_{20}\text{H}_{22}\text{N}_2 \cdot \text{HCl})_2\text{PtCl}_4$, forme des cristaux

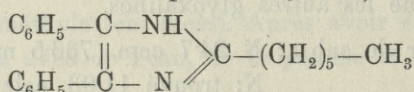
jaunes qui fondent en se décomposant à 272°. Pt: trouvé 18·91, calculé 19·12.

Le sulfate fond à 181°, l'oxalate à 77°.

La éthyl-amylobiphénylglyoxaline (1,2,4,5), $C_{20}H_{21}N_2 \cdot C_2H_5$, est un corps incolore, soluble dans l'alcool. Elle fond à 127°. N-trouvé 9·38, calculé 9·65.

nor.-Hexyl-biphénylglyoxaline (2, 4, 5)

(obtenue par A. Jakało)



Préparée du benzile et de l'aldéhyde oenanthylique, elle forme des aiguilles incolores, fusibles dans l'alcool, l'éther et le benzène. Elle fond à 167° et présente le phénomène de phosphorescence.

0·3007 gr de subst.; N 25·5 ccm (737·5 mm, 20°).

$C_{21}H_{24}N_2$; N: trouvé 9·36, calculé 9·20.

Son chlorhydrate, $C_{21}H_{24}N_2 \cdot HCl$, cristallise en paillettes qui fondent à 133°. Il est soluble dans l'alcool, le chloroforme et dans le benzène. Cl: trouvé 10·20, calculé 10·41.

Le picrate, $C_{21}H_{24}N_2 \cdot C_6H_2(NO_2)_3(OH)$, forme des aiguilles, fusibles à 170° et facilement solubles dans le chloroforme et l'acétone, moins facilement dans l'alcool et l'éther. N: trouvé 13·12, calculé 13·39.

L'oxalate, $(C_{21}H_{24}N_2)_2 C_2H_2O_4 + H_2O$, fond à 190°. Il est soluble dans l'alcool à froid, le benzène et le chloroforme à chaud. N: trouvé 7·92, calculé 8·04. H_2O : trouvé 2·30, calculé 2·51.

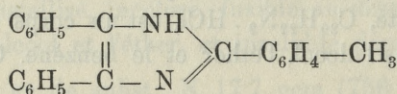
La méthyl-hexylbiphénylglyoxaline (1, 2, 4, 5), $C_{21}H_{23}N_2 \cdot CH_3$, est un corps incolore, qui se dissout dans l'alcool. Elle fond à 164°.

0·2039 gr de subst.; N 17·5 ccm (754 mm, 22°)

$C_{22}H_{26}N_2$; N: trouvé 9·20, calculé 9·14.

Orthotoluylobiphénylglyoxaline (2, 4, 5)

(obtenue par S. Stenzel)



Préparée du benzile et de l'aldéhyde orthotoluique, elle est un

corps cristallisé, fondant à 252° et soluble dans l'alcool et dans les autres dissolvants organiques.

0.5248 gr de subst.: N 43.95 ccm (742 mm, 14.5°)

$C_{22}H_{18}N_2$; N: trouvé 9.05, calculé 9.03.

Son chlorhydrate $C_{22}H_{13}N_2 \cdot HCl$, fond à 120°. Cl: trouvé 10.11 calculé 10.22.

Le chloroplatinate, $(C_{22}H_{18}N_2 \cdot HCl)_2PtCl_4$, forme des cristaux jaunes, qui se décomposent vers 225°. Pt: trouvé 18.87, calculé 18.91.

La méthyl-orthotoluylbiphénylgyoxaline (1, 2, 4, 5) $C_{22}H_{17}N_2 \cdot CH_3$, fond à 259°. Elle est soluble dans l'alcool.

0.1796 gr de subst.; N 13 ccm (750 mm, 14°)

$C_{23}H_{20}N_2$ N trouvé 8.4, calculé 8.6.

Metatoluylbiphénylgyoxaline (2, 4, 5)

(obtenue par S. Stenzel)

Elle se présente sous la forme d'aiguilles incolores, fusibles, vers 300°.

0.1298 gr de subst.; N 10.4 ccm (736.5 mm, 14°)

$C_{22}H_{18}N_2$; N: trouvé 9.12, calculé 9.03.

Son chlorhydrate, $C_{22}H_{18}N_2 \cdot HCl$, cristallise en aiguilles incolores et fond à 125°. Cl: trouvé 10.08, calculé 10.22.

Son chloroplatinate est jaune. Il fond en se décomposant à 230°. Pt: trouvé 18.79, calculé 18.91.

L'éthyl-metatoluylbiphénylgyoxaline (1, 2, 4, 5) $C_{22}H_{17}N_2 \cdot C_2H_5$, est un corps incolore qui fond au-dessus de 310°. N: trouvé 8.29, calculé 8.28.

Paratoluylbiphénylgyoxaline (2, 4, 5)

(obtenue par J. Rohm)

Elle se forme en petites quantités lorsqu'on sature d'ammoniaque une solution alcoolique de benzile et d'aldéhyde paratoluique. On l'obtient plus facilement en chauffant à 180° pendant 6 à 8 heures, dans un tube scellé, des quantités équimoléculaires de benzile et d'aldéhyde avec le carbonate d'ammonium et avec un peu d'alcool. Elle est incolore, cristallisée, fusible à 233°, facilement soluble dans l'alcool, un peu moins facilement dans l'éther.

0.1507 gr de subst.; N 11.8 ccm (752 mm, 9.5°)
 $C_{22}H_{18}N_2$; N: trouvé 9.03, calculé 9.03.

Son chlorhydrate, $C_{22}H_{18}N_2 \cdot HCl$, fond à 120°. Il est soluble dans l'alcool. Cl: trouvé 10.05, calculé 10.22.

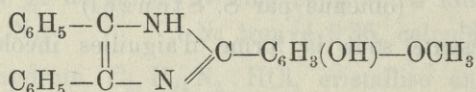
Son chloroplatinate se décompose vers 250°. Pt: trouvé 18.89, calculé 18.91.

La méthyl-paratoluylbiphénylgyoxaline (1, 2, 4, 5), $C_{22}H_{17}N_2 \cdot CH_3$, est un corps jaunâtre, soluble dans l'alcool et l'éther. Elle fond à 217°.

0.1383 gr de subst.; N 10.5 ccm (747 mm, 13°)
 N trouvé 8.77, calculé 8.6.

Oxyméthoxyphényl-biphénylgyoxaline (2, 4, 5)

(obtenue par J. Rohm)



La vaniline n'entre pas en réaction avec le benzile et l'ammoniaque dans les conditions ordinaires; mais chauffée (dans un tube scellé) avec le benzile et le carbonate d'ammonium, elle donne naissance à l'oxyméthoxyphénylbiphénylgyoxaline. C'est un corps incolore, cristallisé, soluble dans l'alcool. Elle fond à 243°.

0.2041 gr de subst.; N 14.5 ccm (742 mm, 14°)
 $C_{22}H_{18}O_2N_2$; N: trouvé 8.32, calculé 8.18.

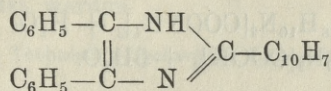
Son chlorhydrate, $C_{22}H_{18}O_2N_2 \cdot HCl$, cristallise en aiguilles solubles dans l'alcool, mais insolubles dans l'éther. Il fond à 154°. Cl: trouvé 9.22, calculé 9.36. Le chloroplatinate est jaune, peu soluble dans l'alcool. Il se décompose vers 230°. Pt: trouvé 17.79, calculé 17.80.

La méthyl-oxyméthoxyphénylbiphénylgyoxaline (1, 2, 4, 5), $C_{22}H_{17}O_2N_2 \cdot CH_3$, forme des aiguilles incolores, solubles dans l'alcool et l'éther. Elle fond à 230°.

0.1745 gr de subst.; N 12.2 ccm (736 mm, 14°)
 N: trouvé 7.92, calculé 7.86.

α -Naphto-biphénylglyoxaline (2, 4, 5)

(obtenue par J. Rohm)



Préparée comme la glyoxaline précédente, elle forme des aiguilles incolores, solubles dans l'alcool et l'éther. Elle fond à 283°.

0.0760 gr de subst.; N 5.1 ccm (746 mm, 15°)

$\text{C}_{25}\text{H}_{18}\text{N}_2$; N: trouvé 8.45, calculé 8.09.

Son chlorhydrate, $\text{C}_{25}\text{H}_{18}\text{N}_2 \cdot \text{HCl}$, est un corps cristallisé, incolore, soluble dans l'alcool. Il se décompose à 180°. Cl: trouvé 9.26, calculé 9.08. Le chloroplatinate se sépare en cristaux jaunes, peu solubles dans l'alcool et l'eau. Il se décompose vers 230°. Pt: trouvé 18.83, calculé 18.87.

La méthyl- α -naphtobiphénylglyoxaline (1, 2, 4, 5), $\text{C}_{25}\text{H}_{17}\text{N}_2 \cdot \text{CH}_3$ est un corps jaunâtre, soluble dans l'alcool et l'éther. Elle fond à 291°.

0.1245 gr de subst.; N 8.4 cm (748 mm, 12°)

N: trouvé 7.83, calculé 7.77.

11. *O kwasach 8.8'-dwuchinolyly. — Über Säuren des 8.8'-Dichinolyly.* — Note de MM. **ZYGM. JAKUBOWSKI** et **ST. NIEMENTOWSKI** m. c.

Durch Oxydation des 5.5-Dimethyl-8.8'-Dichinolyly mit Chromsäureanhydrid und konzentrierter Schwefelsäure wurden zwei Säuren erhalten:

5'-Methyl-8.8'-Dichinolyly-5-Karbonsäure v. Schmelzpk. 331—332°, von amphoterem Charakter. Von ihren Salzen wurden analysiert:

Ammoniumsalz $\text{C}_{19}\text{H}_{13}\text{N}_2 \cdot \text{COONH}_4 + 3\text{H}_2\text{O}$;

Kaliumsalz $\text{C}_{19}\text{H}_{13}\text{N}_2 \cdot \text{COOK} + 5\text{H}_2\text{O}$;

Baryumsalz $(\text{C}_{19}\text{H}_{13}\text{N}_2 \cdot \text{COO})_2\text{Ba} + 12\text{H}_2\text{O}$;

Chlorhydrat $\text{C}_{20}\text{H}_{14}\text{O}_2\text{N}_2 \cdot 2\text{HCl} + \text{H}_2\text{O}$ und

Nitrat $\text{C}_{20}\text{H}_{14}\text{O}_2\text{N}_2 \cdot 2\text{HNO}_3$.

8.8'-Dichinoly-5.5'-Dikarbonsäure, v. Schmlzpkt. 410—415°, von ausgesprochen saurem Charakter.

Ammoniumsalz $C_{18}H_{10}N_2[COONH_4]_2 + H_2O$.

Kaliumsalz $C_{18}H_{10}N_2[COOK]_2 + 5H_2O$.

Bei trockner Destillation unter vermindertem Druck entstand aus der ersten Säure das 5'-Methyl-8.8'-Dichinoly vom Schmpkt. 211·5—212°. Von Salzen dieser Base wurden analysiert: das Chlorhydrat $C_{19}H_{14}N_2 \cdot 2HCl + 5H_2O$; Nitrat $C_{19}H_{14}N_2 \cdot 2HNO_3 + 3H_2O$; Sulfat $C_{19}H_{14}N_2 \cdot H_2SO_4 + 3H_2O$; Chloroplatinat $C_{19}H_{14}N_2 \cdot H_2PtCl_5$. Durch Oxydation mit Chromsäureanhydrid und Schwefelsäure wurde diese Base in 8.8'-Dichinoly-5'-Karbonsäure übergeführt, eine Säure, welche neben basischen Körpern auch in Produkten der trocknen Destillation der 8.8'-Dichinoly-5.5'-Dikarbonsäure aufgefunden wurde. Ihr Schmelzpkt. 310—312°. Ammoniumsalz $C_{18}H_{11}N_2COONH_4 + 4H_2O$; Baryumsalz $[C_{18}H_{11}N_2 \cdot COO]_2Ba + 11H_2O$. Die basischen Anteile der Produkte der trocknen Destillation der Dichinoly-Dikarbonsäure enthielten neben kleinen Mengen des 8.8'-Dichinoly vom Schmlzpkt. 205°, merkwürdigerweise noch eine isomere Base vom Schmlzpkt. 187°.

Um dieses höchst auffallende Resultat am Material anderer Darstellung zu überprüfen, wurde die Dichinoly-Dikarbonsäure vom 2.2'-Dinitro-4.4'-Dimethyldiphenyl ausgehend synthetisiert. Zu dem Ende wurde das Diphenylderivat mit Kaliumdichromat und Schwefelsäure oxydiert. In geringeren Mengen entstand dabei eine für die weitere Untersuchung weniger bequeme 2.2'-Dinitro-4'-Methyldiphenyl-4-Karbonsäure v. Schmlzpkt. 235·5—236°. (Baryumsalz $[C_{13}H_9O_4N_2 \cdot COO]_2Ba + 4H_2O$), welche noch durch Überführung in entsprechende Diaminosäure näher charakterisiert wurde: 2.2'-Diamino-4'-Methyldiphenyl-4-Karbonsäure v. Schmlzpkt. 169—171°. (Chlorhydrat $C_{14}H_{14}O_2N_2 \cdot 2HCl$). Die Hauptmasse des Oxydationsproduktes bestand aus 2.2'-Dinitrodiphenyl-4.4'-Dikarbonsäure v. Schmlzpkt. 335—337°, Baryumsalz $C_{12}H_6O_4N_2(COO)_2Ba + 3H_2O$, welche mit Zinn und Salzsäure 2.2'-Diaminodiphenyl-4.4'-Dikarbonsäure v. Schmlzpkt. 307—309° ergab. Chlorhydrat $C_{14}H_{12}O_4N_2 \cdot HCl$. Diazylderivat $C_{18}H_{16}O_6N_2$ v. Schmlzpkt. 250°. Durch Skraup'sche Synthese wurde dieser Körper in Dichinolydikarbonsäure übergeführt, aus der bei der trocknen Destillation reines 8.8'-Dichinoly entstand.

Für diese sich widersprechenden Resultate kann momentan keine befriedigende Erklärung gegeben werden. Die Untersuchung soll demnach fortgesetzt werden.

Lwów (Lemberg). Technische Hochschule. Laboratorium für allgemeine Chemie.

12. *O wpływie środowiska na tworzenie się izomerów. — Einfluß der Lösungsmittel auf die Verteilung der Isomere.* Mémoire de MM. **L. BRUNER** et **J. VORBRÖDT**, présenté par M. K. Olszewski m. t.

Einleitung. Versuchsmaterialien und Versuchsmethode. Versuchsergebnisse: A. mit Toluol; B. mit Äthylbenzol; C. mit o. m. p. Xylole; D. mit iso-Propylbenzol; E. mit norm. Propylbenzol und sekun. Butylbenzol. Zusammenfassung der Resultate.

In einer früheren Abhandlung¹⁾ hat einer von uns das kinetische Bild der Bromierung eines aromatischen Kohlenwasserstoffes entworfen. Von den dort ermittelten Gesetzmäßigkeiten ist für die vorliegende Arbeit der Nachweis von Wichtigkeit, daß ionisierende Lösungsmittel, wie z. B. das Nitrobenzol, die Kernsubstitution befördern und daß folglich überhaupt die relative Isomeren-Ausbeute durch das Medium, in dem sich die Reaktion abspielt, beeinflusst wird.

In der vorliegenden Abhandlung soll dieser Einfluß zahlenmäßig an mehreren Beispielen erschlossen und aus diesen auch manche praktisch wichtige Schlüsse gezogen werden. Da möglichst viele Lösungsmittel versucht werden sollten, so erschien es ratsam, neben dem ziemlich schwer angreifbaren Toluol auch andere leichter zu bromierende Kohlenwasserstoffe zu untersuchen. Zu diesem Zweck haben wir für die meisten Versuche das Äthylbenzol und die drei isomeren Xylole gewählt.

Versuchsmethode und Materialien. In der Mehrzahl der Versuche haben wir nach der früheren Methode in zugeschmolzenen Probierröhren bromiert. Für schneller verlaufende Versuche brachten wir ein mit zwei feinen Glashähnen versehenes zylindrisches Gefäß zur Anwendung (Fig. 1). Dieses Gefäß wurde mit der Pumpe

¹⁾ Bull. Acad. des Sc. de Cracovie, 1907, 698.

evakuiert und dann das zu bromierende, mit Brom versetzte Gemisch in dasselbe eingesogen. Die Analysenproben wurden dann in ein gewogenes, mit KJ-Lösung gefülltes Wägegläschen entleert und ihre Menge durch Wägung ermittelt.

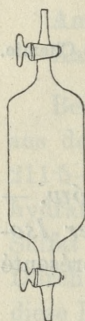


Fig. 1.

Sämtliche Versuche — wo nicht anders speziell angegeben ist — sind bei einer konstanten Temperatur von 25° ausgeführt, die, wie üblich, in einem Ostwald'schen Thermostaten eingehalten wurde. Das Licht wurde ebenso sorgfältig wie früher¹⁾ ferngehalten.

Das Fortschreiten der Gesamtreaktion wurde durch Titration des Broms mit zirka $\frac{2}{10}$ n. $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ und $\frac{1}{10}$ n. Jod wie früher ermittelt.

Wir haben auch hier uns auf die Unterscheidung zwischen kern- und seitensubstituierten Produkten beschränkt, und zwar aus bereits früher dargelegten Gründen. Die Bestimmung der seitensubstituierten Produkte geschah nach mehrmaligem Auswaschen mit kalter verdünnter Ammoniumnitrat-Lösung²⁾ nach Schultze durch Fällung mit titriertem alkoholischem $\frac{2}{10}$ n. AgNO_3 und Rücktitrieren mit $\frac{1}{10}$ n. KCNS nach Volhard. Die Richtigkeit der Methode für die reinen Substitutionsprodukte geht unter vielen anderen aus den Untersuchungen von J. Schramm³⁾ genügend hervor. Die Schwierigkeiten, denen wir manchmal in den Analysen begegneten, sind verursacht durch das schwere Handhaben oder durch die leichte Angreifbarkeit der Lösungsmittel. Je nach der Beschaffenheit der Lösungsmittel wurde die Fällung entweder in der Siedehitze (in nichtchlorhaltigen Lösungsmitteln und den Fällen, wo dasselbe abgetrieben werden konnte, s. w. u.), oder durch längeres Stehenlassen bei Zimmertemperatur ausgeführt. Diese Bedingungen sind in jedem Falle durch spezielle Versuche ermittelt worden.

Versuchsmaterialien.

Das Toluol wurde von Kahlbaum als rein bezogen und zweimal sorgfältig über Natrium destilliert. Der größte Anteil ging dann konstant bei 110.5° über; er wurde dann über Natrium aufbewahrt.

Das Äthylbenzol wurde nach der von Radziewanowski⁴⁾ verbesserten

¹⁾ Bull. Acad. des Sciences de Cracovie, a. a. O.

²⁾ Bull. Acad. des Sciences de Cracovie, a. a. O.

³⁾ Rozpr. Akad. Umiejętn. 16 (1886). S. 1.

⁴⁾ Rozpr. Akad. Umiejętn. 32 (1895) S. 119.

Friedel-Crafft'schen Methode bei einer Temperatur von zirka $+5^{\circ}$ dargestellt. Das Präparat wurde sorgfältig mehreremale über Natrium destilliert. Die Ausbeute an dem konstant bei 136° siedenden Präparat betrug in der Radziewanowski'schen Synthese zirka 70%.

Die drei isomeren Xylole sind Kahlbaums reine Präparate, die noch über Natrium fraktioniert wurden. Die Konstanz und die Übereinstimmung ihrer Siedepunkte mit den Literaturangaben ließ nichts zu wünschen übrig.

Die kostbaren Propylbenzole und das sekundäre Butylbenzol verdanken wir der Liebenswürdigkeit des Hrn. Prof. J. Schramm. Diese Präparate wurden nach der Fittig'schen und Friedel-Crafft-Radziewanowski'schen Methode dargestellt und waren besonders sorgfältig gereinigt.

Wir wenden uns nun den benutzten Lösungsmitteln zu. Von den von uns verwendeten Stoffen mußten wir verlangen, daß sie von Brom und alkoholischem AgNO_3 nicht angegriffen werden oder schlimmstenfalls, wo das nicht zutreffen konnte, dieser Einwirkung regelmäßig in berechenbarer Weise unterliegen. Diese zweite Bedingung schließt natürlich etwaige leicht angreifbare Verunreinigungen aus. Daß auch gewöhnliche, angeblich sehr reine Reagenzien nicht leicht von solchen Verunreinigungen zu befreien sind, wird aus dem unten Gesagten erhellen.

Schwefelkohlenstoff. Reines CS_2 von Merck (pro analysi; kein wägbarer Rückstand nach dem Abdampfen bei mäßiger Wärme) ist gegen Brom bei niederer Temperatur sehr widerstandsfähig, wie dies aus der Tabelle zu ersehen ist. Es bedeuten: t die Zeit in Tagen, a die ursprüngliche Menge in g, x die umgesetzte Menge in Gramm, $x\%$ — in Prozenten. Die Konzentration, wo nicht anders angegeben, ist 30 cm^3 Lösungsmittel auf 1 g Brom.

CS_2			
$T=25^{\circ}$			
t	a	x	$x\%$
$18/24$	1.0111	0.0067	0.6
84	0.4000	0.0155	3.9
$T=18^{\circ}$			
25	0.5640	0.0091	1.6%

Der kleine Verlust nach 18 Stunden ist offenbar der Verlust beim Zuschmelzen und beim Öffnen der Röhre.

Ganz anders verhält sich der Schwefelkohlenstoff von Merck rectificatissimus (gemäß den Satzungen der Pharmacopöa britannica). Das Präparat wurde einmal aus Materialienmangel versucht. Schon nach 2 Tagen betrug der Bromverlust rund 22%.

Die Bestimmung der seitensubstituierten Produkte kann nicht bei Gegenwart von CS_2 geschehen, weil auch beim mäßigen Er-

hitzen das CS_2 angegriffen und schwarzes Silbersulfid gefällt wird. Da das CS_2 sehr leicht flüchtig ist, so hat sich schließlich als beste Analysenmethode herausgestellt, das ausgewaschene Reaktionsprodukt am Wasserbade so lange abzdampfen, bis jeder Geruch an CS_2 verschwunden ist, und dann mit AgNO_3 in üblicher Weise zu fällen. Das AgBr fiel dann immer rein gelblich aus, auch ging kein Bromierungsprodukt verloren.

Beleganalyse. Abgewogen 0.3997 g Benzolbromid, in CS_2 gelöst und dann, wie oben angegeben, behandelt, verbrauchten $11.91 \text{ cm}^3 \text{ AgNO}_3 = 0.1841 \text{ Br} = 0.3935 \text{ Benzylbromid} = 98.5\%$.

Chloroform. Von Kahlbaum bezogenes reinstes Chloroform, einmal überdestilliert, erwies sich wenig und regelmäßig von Brom angreifbar. Auch das undestillierte Produkt wurde nicht mehr angegriffen.

CHCl_3			
t	a	x	$x\%$
$1/24$	0.3423	0.0020	0.58
2	0.9460	0.0086	0.9
4	0.4267	0.0140	3.28
4	0.5602	0.0166	2.96

Jedenfalls wird CHCl_3 zu schnell bromiert, um zu mehrtägigen Versuchen benutzt werden zu können.

Mit Silbernitrat-Lösung gekocht, gab dieses Chloroform absolut keinen Niederschlag.

Ganz anders verhält sich z. B. das Chloroform purissimum pro analysi von Merck.

CHCl_3 (von Merck)			
t	a	x	$x\%$
1	0.3861	0.0476	12.3
$40/24$	0.5433	0.0807	14.9
$51/24$	0.6506	0.0985	15.1

Wie leicht ersichtlich, hat das Präparat eine Verunreinigung, die ziemlich schnell angegriffen wird und nach deren Verbräuche der Bromverlust weiter nicht fortschreiten kann. Beachten wir, daß die Konzentration hier $30 \text{ cm}^3 \text{ CHCl}_3$ auf 1 g Brom beträgt und gehen von der wahrscheinlichen Annahme aus, daß jene Verunreinigung von Alkohol herrührt, so können wir ihre Menge rund auf etwa 0.15% schätzen. In der Tat, gab dieses Präparat eine schwache aber dennoch deutliche Jodoformreaktion auf Äthylalkohol. In Übereinstimmung damit war auch dieses Merck'sche Präparat „silberfest“. Die Bromprobe kann deshalb als ein sehr empfindliches Reinheitsreagens des Chloroforms empfohlen werden.

Benzol. Über Natrium destilliertes thiophenfreies Benzol (von E. Merck, pro analysi) wies keine leicht bromierbare Verunreinigungen auf. Der Stoff wird sehr langsam aber regelmäßig in monomolekularer Reaktion angegriffen.

t	a	x	$x\%$	K
$64/_{24}$	0.2452	0.0014	0.57	
30	0.6715	0.0237	3.5	0.00052
30	0.6671	0.0242	3.6	0.00054
53	0.6247	0.0365	5.7	0.00048
				0.00051

Tetrachlorkohlenstoff. Reiner destillierter Tetrachlorkohlenstoff ging konstant bei 76.0° bis 77.0° über. Es erwies sich von Brom unangreifbar, jedoch nicht „silberfest“, da beim Kochen mit alkoholischem AgNO_3 weißes AgCl immer ausfiel. Bei Zimmertemperatur erfolgte jedoch auch nach 24 Stunden keine Fällung, und deshalb sind in den Versuchen in CCl_4 -Lösung die Seitenkettenprodukte bei Zimmertemperatur durch eintägige Einwirkung der AgNO_3 -Lösung bestimmt¹⁾.

Eisessig. Reiner von Kahlbaum bezogener Eisessig wurde zweimal ausfrieren gelassen und zweimal fraktioniert. Die bei 118° übergehende Fraktion wird sehr schwer von Brom angegriffen: nach 6 Tagen beziffert sich der Bromverlust auf 1.2% . Konzentrierte Essigsäure (80 Volumproz. Eisessig + 20 Volumproz. H_2O) wird etwas schneller bromiert: nach 6 Tagen betrug der Bromverlust 2.5% . Die von Kahlbaum in den Handel gebrachte 90% Essigsäure ist nicht rein und auch nicht bromfest. Nach 2 Tagen betrug ja bereits der Bromverlust 33% .

Benzonitril. Von Merck bezogenes Benzonitril wurde zuerst durch Bromeinwirkung gereinigt und dann einer sorgfältigen Fraktionierung unterworfen. Das so gewonnene Präparat erwies sich für kurz dauernde Versuche genügend widerstandsfähig, denn nach 24 Stunden betrug der Bromverlust 2.6% .

Nitrobenzol. Das Nitrobenzol, das auch technisch rein leicht zu beschaffen ist, wurde mit CaCl_2 getrocknet und zweimal überdestilliert.

Das Brom wurde durch zweimaliges Umkristallisieren des reinsten Broms des Handels (Brom „Kahlbaum“) gewonnen. Die gesammelte umkristallisierte Portion betrug zirka 25% der Gesamtmenge.

Sämtliche Versuche sind mit Reaktionsgemischen von 75 Volumproz. Lösungsmittel und 25 Volumpr. des zu bromierenden Kohlenwasserstoffes ausgeführt worden. In den Versuchen mit Toluol war die Bromkonzentration dieselbe wie in den früheren Versuchen von L. Bruner und J. Dłuska (a. a. O.), nämlich 1 g Brom auf 26.44 cm^3 Reaktionsgemisches. Für die Versuche mit den übrigen Kohlenwasserstoffen wurde die Konzentration zu 30 cm^3 Reaktionsgemisches auf 1 g Brom abgerundet. Die Resultate bleiben nichtsdestoweniger absolut vergleichbar, da ja auch bei größeren Konzen-

¹⁾ Die Anwendbarkeit eines solchen Verfahrens wurde auch von H. F. Laan (Rec. des tr. chim. Pays Bas 26 [1907] 1.) in seiner Arbeit erkannt.

trationen die Reaktion monomolekular verläuft und ihre Konstante folglich von der Konzentration unabhängig ist.

Versuchsergebnisse.

In den unten angegebenen Tabellen bedeuten:

t — die Zeitdauer in Tagen.

a — das Gewicht des abgewogenen Broms.

x — die in der Zeit t umgesetzte Brommenge in Grammen.

$x^0/0$ — dieselbe Menge in Prozenten ausgedrückt ($x^0/0 = \frac{x}{a} \cdot 100$).

$\frac{x_2}{x}$ — den Bruchteil des in der Seitenkettereaktion verbrauchten Broms.

K — die Geschwindigkeitskonstante nach der monomolekularen Gleichung:

$$K = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a-x} = \frac{1}{t} \log \frac{100}{100-x^0/0}$$

k_1 — die Geschwindigkeitskonstante der Kernreaktion: $k_1 = K \left(1 - \frac{x_2}{x}\right)$.

k_2 — die Geschwindigkeitskonstante der Seitenkettenreaktion: $k_2 = K \frac{x_2}{x}$.

A. Versuche mit Toluol.

TABELLE I.

Toluol.

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_2
1. Lösungsmittel: Schwefelkohlenstoff.							
25	0·6733	0·2102	31·4		0·0066		
33	1·0917	0·4160	38·1	0·82	0·0063		
31	0·8367	0·3689	44·1	0·784	0·0062		
50	0·8181	0·4385	53·6	0·906	0·0067		
80	0·8201	0·5749	70·1	0·892	0·0066		
					0·851	0·00648	0·00107 0·00541
2. Lösungsmittel: Tetrachlorkohlenstoff.							
16	1·0907	0·2972	29·4		0·0095		
30	1·2633	0·6171	48·8	0·569	0·0097		
36	1·0124	0·5852	57·8	0·572	0·0104		
42	0·8903	0·5713	64·2	0·557	0·0106		
					0·566¹⁾	0·0101	0·0044 0·0057

¹⁾ In der Abhandlung von L. Bruner und J. Dłuska (a. a. O.) ist das Verhältnis x_2/x irrtümlich zu rund 0·40 angegeben worden. Es mag wohl ein Rechnungsfehler vorliegen, da nur eine einzige Analyse ausgeführt worden ist.

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_2
3. Lösungsmittel: Toluol ¹⁾ .							
1 Br ₂ + 40 C ₇ H ₈ .							
$\frac{8}{3}$	0.830	0.219	26.4	0.400	0.0500		
5	0.876	0.387	44.5	0.458	0.0511		
$\frac{17}{3}$	0.781	0.407	52.1	0.419	0.0565		
$\frac{17}{3}$	0.769	0.492	64.0	0.450	0.0522		
11	0.839	0.612	73.8	0.447	0.0532		
$\frac{101}{8}$	0.802	0.663	82.6	0.496	0.0608		
$\frac{187}{12}$	0.787	0.694	88.2	0.440	0.0660		
$\frac{105}{4}$	0.923	0.897	97.1	0.535 (?)	0.0586		
				0.456	0.0553	0.0301	0.0252

4. Lösungsmittel: Benzol.							
3	0.5332	0.0630	11.8		0.0182		
6	0.6045	0.1328	22.0		0.0180		
9	0.7811	0.2897	37.1		0.0224		
9	0.9804	0.3767	38.4		0.0234		
12	0.8837	0.3643	41.2		0.0192		
13	1.1152	0.4769	42.7	0.343	0.0186		
15	0.7780	0.3656	47.0		0.0184		
17	1.0111	0.5816	57.4	0.322	0.0218		
25	0.8407	0.5296	63.0	0.336	0.0173		
30	1.0162	0.7388	72.7	0.384	0.0188		
68	0.9172	0.8553	93.3		0.0173		
					0.346	0.0192	
Berechnet nach Berücksichtigung der Bromierung des Benzols (s. oben S. 225) ²⁾							
					0.355	0.0187	0.0121 0.0066

Daß ungeachtet dessen bei höherer Temperatur 135° und 45° (a. a. O.) in Toluol und Tetrachlorkohlenstoff gleiche Benzylbromid-Ausbeuten bestehen können, ist von vornherein nicht abzulehnen, weil der Temperaturgang der Löslichkeit und die Löslichkeit selbst des HBr in diesen Stoffen unbekannt sind.

¹⁾ S. Bull. Acad. des Scien. de Cr. 1907 (698).

²⁾ Die Berechnung ergibt sich leicht folgendermaßen:

$$K \text{ (unkorr.)} = k_1 + k_2 + k_{C_6H_6},$$

$$x_2/x \text{ (unkorr.)} = \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_{C_6H_6}},$$

$$K \text{ (korrig.)} = k_1 + k_2 = K \text{ (unkorr.)} - k_{C_6H_6},$$

$$k_2 = \frac{x_2}{x} \cdot K \text{ (unkorr.)},$$

$$k_1 = K - k_2.$$

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	$K'''^1)$
5. Lösungsmittel: Eisessig.						
$14/24$	0.5376	0.2040	38.1			
$21/24$	0.5916	0.2444	41.0		0.262	0.00011
$38/24$	0.6430	0.3122	48.6			
$66/24$	0.7995	0.4332	54.2	0.056		
2	0.8974	0.4554	50.7	0.030		
$109/24$	0.9971	0.5932	59.5	0.040		
$132/24$	1.2013	0.7374	61.4		0.075	0.00005

In Eisessig ändert sich in ähnlicher Weise, wie das früher (s. L. Bruner und J. Dłuska, a. a. O.) in Nitrobenzol gefunden worden ist, der Reaktionsverlauf total: die Reaktion ist stark katalytisch gehemmt. Die Ursache dieser Erscheinung ist wohl in der bereits in der früheren Abhandlung erörterten Bildung von Polybromwasserstoffsäuren zu suchen.

6. Lösungsmittel: Nitrobenzol.

L. Bruner und J. Dłuska hatten bereits auf die sehr geringe Ausbeute der Seitensubstitutionsprodukte in nitrobenzolischer Lösung hingewiesen und dieses Verhalten mit der elektrolytischen Dissoziation des Broms und der Polybromwasserstoffsäuren in Nitrobenzol in Zusammenhang gebracht. Da bei einer näheren Untersuchung über die elektrolytischen Eigenschaften dieser Stoffe sich herausgestellt hat, daß Spuren von Feuchtigkeit einen großen Einfluß auf den Wert der erzielten Leitfähigkeit haben können (vergl. auch E. Beckmann, Z. f. phys. Chem. **60** (1907) 385), so wurde jetzt die Bromierung in nitrobenzolischer Lösung bei Gegenwart eines stark wasserentziehenden Stoffes wiederholt, und zwar in der Weise, daß nach sorgfältigem Trocknen des Bromierungsgemisches in die Probierröhren noch einige Gramm P_2O_5 gebracht wurden. Ungeachtet des vollkommenen Ausschlusses der Feuchtigkeit blieb die Benzylbromid-Ausbeute ebenso gering wie in den früheren Versuchen.

¹⁾ Unter K''' ist die Geschwindigkeitskonstante nach der trimolekularen Reaktion probeweise berechnet (Vgl. Bruner u. Dłuska a. a. O.).

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x
1	0.9281	0.8963	96.6	0.02
1	0.8352	0.8007	95.9	0.03
1	1.0313	0.9554	92.7	0.03
				0.027

B. Versuche mit Äthylbenzol.

TABELLE II.

Äthylbenzol.

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_8
1. Lösungsmittel: Schwefelkohlenstoff.							
1	0.7139	0.2740	38.4	1.07	0.2104		
$\frac{5}{8}$	0.9037	0.4820	53.3	1.05	0.1990		
$\frac{31}{12}$	0.3317	0.2695	81.3		0.282		
$\frac{17}{6}$	0.6317	0.5116	80.9	0.974	0.2537		
$\frac{8}{8}$	0.6703	0.5733	85.5		0.3145		
				1.00	0.251	0.00	0.251

2. Lösungsmittel: Chloroform.

1	0.5233	0.1683	32.2		0.169		
$\frac{11}{4}$	0.8689	0.5957	68.6	0.631	0.183		
$\frac{4}{4}$	0.5578	0.4665	83.6	0.636	0.196		
				0.633	0.183	0.0672	0.1158

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K
-----	-----	-----	---------	---------	-----

3. Lösungsmittel: Nitrobenzol.

$\frac{1}{24}$	0.6321	0.2835	44.9		6.21
$\frac{3}{24}$	0.6031	0.3590	59.5		
$\frac{19}{72}$	0.3336	0.2329	69.8		
$\frac{15}{24}$	0.7057	0.5665	80.3	0.156	1.10
1	0.8070	0.7114	88.2	0.164	
$\frac{5}{4}$	0.5406	0.4942	90.7		
2	0.8076	0.7615	94.3		0.62

4. Lösungsmittel: Eisessig.

$\frac{3}{24}$	0.2366	0.0730	30.9		
$\frac{33}{48}$	0.6953	0.2994	43.1	0.225	
$\frac{46}{24}$	0.6145	0.3557	57.9	0.290	
7	0.6765	0.5808	85.8	0.46	

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x
5. Lösungsmittel: Phenyleyanid.				
$1/2$	0.5116	0.2533	49.5	
$13/12$	0.9098	0.5334	58.6	0.222

6. Versuche in Tetrachlorkohlenstoff- und Benzol-lösung. Die Versuche in diesen Lösungsmitteln, besonders aber in CCl_4 , bereiteten auffallende und unerwartete Schwierigkeiten, die noch nicht vollständig überwunden werden konnten. Während in CS_2 und besonders in CHCl_3 -Lösung die Erzielung von konstanten, gut stimmenden Resultaten sich ganz leicht bewerkstelligen ließ, ist dasselbe in den zwei obengenannten Lösungsmitteln absolut nicht der Fall. Trotzdem immer nur dieselben Präparate benutzt wurden und auch die Arbeitsweise unverändert blieb, zeigen sich ganz unregelmäßige unerklärliche Schwankungen.

Es wurden folgende Resultate in Benzollösung gefunden.

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_2
6. Lösungsmittel: Benzol.							
$31/48$	0.7628	0.2489	32.6		0.264		
$20/24$	0.8946	0.3916	43.8	0.904	0.300		
$45/48$	0.4547	0.2142	46.9		0.293		
$23/12$	0.6450	0.3902	60.5		0.210		
$63/24$	0.6628	0.4722	71.2		0.200		
$70/24$	0.7280	0.5677	78.0		0.225		
$29/8$	0.6254	0.5176	82.6	0.882	0.210		
$117/24$	0.8455	0.7983	94.4	0.916	0.248		
$14/3$	0.4955	0.4710	95.0	0.897	0.279		
$41/6$	0.9723	0.9406	96.8		0.219		
				0.900	0.245	0.0245	0.221

Es wurden aber auch in einigen Fällen unregelmäßig schwankende Konstanten erhalten; in 5 Fällen war das Brom sogar bereits nach einem Tage total verbraucht, und zwar in diesen Fällen geschah es ausschließlich in der Seitenkettreaktion, da der Bruch x_2/x in den gemessenen Fällen 0.97, 1.05, im Mittel 1.02 war. Vor Lichteintritt waren alle Versuche und alle Probierröhren auf das sorgfältigste geschützt.

Dieser spontane explosionsartige Reaktionsverlauf tritt in CCl_4 bei 25° so oft ein, daß mit diesem Lösungsmittel bei der obenge-

nannten Temperatur überhaupt keine übereinstimmenden Resultate erzielt werden konnten. In manchen Versuchen war bereits nach kurzer Frist (3 Stunden bis 2—3 Tage) das ganze Brom verbraucht; die Lösung war entfärbt. Von 33 insgesamt angestellten Versuchen trat die frühzeitige Entfärbung in 17 Fällen ein. Dies konnte jedoch nicht einer zufälligen Anwesenheit eines starkwirkenden Katalysators zugeschrieben werden, denn auch in diesen Fällen war, wie wir mehrfach konstatiert hatten, die Seitenkettenausbeute x_2/x gleich 1 (es wurde z. B. gefunden $x_2/x = 0.98, 0.96, 1.11, 1.11$, im Mittel 1.04); und doch sind keine starkwirkenden Seitenketten-Katalysatoren bekannt. Es ist auch ausgeschlossen, daß sich bei der sorgfältigen Arbeitsweise eine solche Verunreinigung eingeschlichen hätte.

Man könnte etwa denken, daß es sich vielleicht in solchen Fällen um eine Bromaddition handle, die durch Einwirkung von uns bis jetzt unbekanntem Faktoren ausgelöst wird. Diese Vermutung wird jedoch nicht nur dadurch entkräftet, daß bis jetzt solche Additionsprodukte an Äthylbenzol unbekannt sind, sondern auch durch die direkte Bestimmung des in der Reaktion gebildeten Bromwasserstoffs. Die Menge des in Form von HBr in den Waschwassern durch Titration mit $\text{Ba}(\text{OH})_2$ gefundenen Broms betrug in zwei ausgeführten Analysen 0.52, 0.48, im Mittel 0.50 des Gesamtbroms. Es handelt sich auch hier also ausschließlich um eine regelrechte Substitution.

In den Fällen, wo keine spontane Entfärbung eintrat, wurden sehr verschiedene Reaktionsgeschwindigkeiten beobachtet, ungeachtet dessen ob das Reaktionsgemisch vor der Reaktion insoliert, oder mit flüssiger Luft längere Zeit abgekühlt, ob frisches Äthylbenzol oder ein solches, das sich bereits spontan entfärbt hatte, benutzt worden war¹⁾.

¹⁾ Wir können vorläufig keine genügende Erklärung für diese abnorme Störung geben und hoffen, zu einer weiteren Untersuchung dieser Erscheinung später zurückkehren zu können, glauben jedoch, daß diese spontane Entfärbung jedenfalls mit der Energie der Halogenwirkung im Zusammenhang steht. Während wir z. B. bei der Bromierung des Toluols in CCl_4 oder in reinem Toluol keine Unregelmäßigkeiten bemerkt hatten, konnten wir bei der Chlorierung desselben ganz ähnliche Erscheinungen, wie die bei der Bromierung des $\text{C}_6\text{H}_5 \cdot \text{C}_2\text{H}_5$ in CCl_4 beschriebenen wahrnehmen, weshalb diese Versuche als nicht abgeschlossen vorläufig nicht mitgeteilt werden.

Es mag hervorgehoben werden, daß auch Hr. A. Sinator in seinen orientierenden Versuchen über die unkatalsierte Dunkelchlorierung des Benzols nicht

Um dennoch die in Rede stehenden Lösungsmittel in ihrer Wirkung bei der Bromierung des Äthylbenzols untereinander vergleichen zu können, haben wir damit Versuche bei niedriger Temperatur angestellt in der Hoffnung, daß bei verminderter Reaktionsgeschwindigkeit die Störungen entfallen werden. Das ist in der Tat der Fall, wie dies aus den unten mitgeteilten Tabellen zu ersehen ist. Die Versuchstemperatur war $10\cdot0^\circ$, mit in der Winterzeit bis $1\cdot0^\circ$ reichenden Schwankungen im Tiefkeller des mineralogischen Instituts von Prof. J. Morozewicz, dem wir für sein freundliches Entgegenkommen zu bestem Dank verpflichtet sind.

TABELLE III.

Äthylbenzol. Temperatur $10\cdot0$.

t	a	x	$x^0/0$	x_0/x	K	k_1	k_2
Lösungsmittel: Tetrachlorkohlenstoff.							
19	0·8836	0·3489	39·5	0·892	0·0114		
28	0·8401	0·5014	59·7	0·892	0·0141		
51	0·8584	0·7043	82·1	0·869	0·0145		
				0·884	0·0134	0·00155	0·0128
Lösungsmittel: Benzol.							
11	0·3753	0·1569	41·8	0·708	0·0214		
32	0·3655	0·3190	87·1	0·707	0·0277		
				0·707	0·0245	0·0072	0·0173

C. Versuche mit den Xylenen.

TABELLE IV.

I. o. Xylol.

1. Lösungsmittel: Tetrachlorkohlenstoff.

3	0·9198	0·4176	45·4		0·088		
$\frac{47}{6}$	0·9735	0·7510	77·1	0·391	0·082		
$\frac{211}{24}$	1·0459	0·8856	84·7	0·443	0·093		
$\frac{259}{24}$	0·6770	0·5759	85·0		0·076		
				0·417	0·0847	0·0404	0·0353

zu übereinstimmenden Resultaten gelangen konnte (Zeit. f. phys. Ch. 45, [1906] 520). A. Slator hat der Erscheinung weiter nicht nachgeforscht, da es sich ihm nur darum handelte, festzustellen, daß die Reaktion jedenfalls eine langsame ist, und er begnügte sich mit dem Hinweis auf zufällige Katalysatorwirkungen, was in unserem Fall sicher nicht zutrifft.

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_2
-----	-----	-----	---------	---------	-----	-------	-------

2. Lösungsmittel: Nitrobenzol.

$1/24$	0.2493	0.1700	68.2				
$2/24$	"	0.1919	76.9				
$3/24$	"	0.2087	83.7				
1	"	0.2329	93.4	0.026			

II. m-Xylol.

1. Lösungsmittel: Tetrachlorkohlenstoff.

$5/48$	0.2928	0.1378	47.1		2.655		
$4/24$	"	0.1828	61.8		2.508		
$6/24$	"	0.2214	75.6	0.03	2.450		
$8/21$	"	0.2485	84.9		2.463		
				0.03	2.519	2.44	0.077

2. Lösungsmittel: Benzol.

0	0.3130						
$3/48$	"	0.1616	51.6		5.042		
$5/48$	"	0.2976	66.3		4.955		
$4/24$	"	0.2521	80.6	0.010	4.273		
$7/24$	"	0.2874	91.8	0.009	3.724		
				0.010	4.50	4.45	0.04

3. Lösungsmittel: Nitrobenzol.

t	a	x	$x^0/0$
$1/48$	0.4974	0.4843	97.3

III. Para-Xylol.

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_2
-----	-----	-----	---------	---------	-----	-------	-------

1. Lösungsmittel: Schwefelkohlenstoff.

$39/4$	1.0022	0.6886	68.8	0.859	0.0517		
15	1.0864	0.8803	81.0	0.920	0.0481		
				0.889	0.0499	0.0055	0.0444

2. Lösungsmittel: Tetrachlorkohlenstoff.

$97/24$	0.7722	0.2382	30.8	0.615	0.040		
$31/4$	0.9935	0.5433	54.7		0.044		
$39/4$	0.5800	0.3596	62.0	0.647	0.043		
10	0.9391	0.5988	63.8		0.044		
				0.631	0.043	0.0159	0.0271

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_2
3. Lösungsmittel: Benzol.							
$16/_{24}$	0.4300	0.0577	13.4		0.045		
3	0.7377	0.3808	51.6	0.403	0.105		
$119/_{24}$	0.8410	0.5807	69.0	0.420	0.103		
				0.412	0.101	0.0594	0.0416

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x
4. Lösungsmittel: Nitrobenzol.				
$5/_{24}$	0.5937	0.4722	79.5	
$15/_{24}$	0.5855	0.5207	88.9	0.041
1	0.7617	0.6984	91.7	0.020

D. Versuche mit iso-Propylbenzol.

TABELLE V.

Isopropylbenzol.

t	a	x	$x^0/0$	x_2/x	K	k_1	k_2
1. Lösungsmittel: Tetrachlorkohlenstoff.							
$7/_{24}$	0.6141	0.4813	78.4	0.439	0.380		
3	0.2600	0.2468	94.9	0.425	0.431		
				0.432	0.405	0.230	0.175
2. Lösungsmittel: Benzol.							
$21/_{24}$	0.6620	0.4919	74.2	0.442	0.672		
$28/_{24}$	0.6526	0.5463	83.7	0.397	0.675		
				0.419	0.673	0.392	0.281

E. Versuche mit normalem Propylbenzol und sekundärem Butylbenzol.

Diese Stoffe werden in verdünnter Tetrachlorkohlenstoff-Lösung (75 Vol.-Proz. CCl_4 , 1 g Br_2 auf 30 cm^3 Reaktionsgemisch) von Brom so schnell angegriffen, daß Geschwindigkeitsmessungen unmöglich sind. Bei Zimmertemperatur ist die Reaktion fast momentan (in weniger als 1 Minute beendet); bei 0° dauert der totale Verbrauch von Brom etwa 5 Minuten.

In der angegebenen Verdünnung wird ausschließlich die Seitenkette bromiert; die Reaktionsprodukte halten den Bromwasserstoff hartnäckig auf, so daß für das Verhältnis x_2/x besonders mit Pro-

pylbenzol höhere Werte als 1 (sogar bis 1.29) erhalten werden. Mit Butylbenzol wurde x_2/x gleich 1.08 gefunden.

Das Reaktionsprodukt mit n. Propylbenzol scheint kein einheitlicher Stoff zu sein: aus dem Reaktionsgemisch schieden kleine, seidenglänzende Nadeln aus, die in CCl_4 unlöslich, in Alkohol leicht löslich sind. Sie sind stark bromhaltig und sind wohl zweifach substituierte Produkte, deren weitere Identifizierung für die von uns verfolgten Ziele unwesentlich erschien. Daß auch bei der großen angewandten Verdünnung mehrfach substituierte Produkte erscheinen, hat bei der großen Reaktionsgeschwindigkeit nichts befremdendes.

Die Bromierung dieser so rasch in großer Verdünnung zu bromierenden Kohlenwasserstoffe bietet ein interessantes kinetisches Paradoxon, das besonders hervorgehoben werden mag. Wirkt auf Propylbenzol z. B. in Tetrachlorkohlenstoff Brom in größerer Konzentration ein, so verlangsamt sich die Reaktion außerordentlich und zugleich, wie bereits für Toluol nachgewiesen worden ist¹⁾, sinkt die Seitenketten-Ausbeute. In konzentrierter Lösung reagiert Brom mit dem Gemisch langsamer als in verdünnter. Dies erhellt z. B. aus der unten stehenden Tabelle.

TABELLE VI.

Konzentration: cm^3 Gemisch pro 1 g Brom	t (Stunden)	a	$x\%$	x_2/x
Temperatur 0° .				
30	$\frac{1}{12}$	0.3167	100	1.16 (s. ob.)
15	24	0.9478	100	
9	24	0.5500	84.7	0.655

Die Erklärung dieses scheinbaren Paradoxons ist wohl darin zu suchen, daß sich in konzentrierter Lösung der HBr mit Brom zu Polybromwasserstoffsäuren verbindet, die durch Binden des Broms die Reaktion verzögern und zugleich als kernsubstituierender Faktor wirken.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

Die in den Tabellen mitgeteilten Versuchsergebnisse lassen sich in folgender Tabelle zusammenfassen:

¹⁾ Bull. Acad. des Sc. de Cracovie 1907, 698.

TABELLE VII.

Lösungsmittel (75 Vol. Pr.)	Toluol (25 Vol. Pr.)		Äthylbenzol			Isopropylbenzol			o. Xylol			p. Xylol			m. Xylol			
	k_1	k_2	k_1	k_2	$\frac{k_2}{k_1+k_2}$	k_1	k_2	$\frac{k_2}{k_1+k_2}$	k_1	k_2	$\frac{k_2}{k_1+k_2}$	k_1	k_2	$\frac{k_2}{k_2+k_3}$	k_1	k_2	$\frac{k_2}{k_1+k_2}$	
Schwefelkohlenstoff	0-00107	0-00541	0-00	0-251	1 00							0-0055	0-0444	0-89				
Tetrachlorkohlenstoff	0-0044	0-0057	0-00135	0-0123	0-88 ¹⁾	0-230	0-175	0-43	0-0434	0-0353	0-42	0-0159	0-0271	0-63	2-44	0-076	0-03	
Benzol	0-0121	0-0066	0-0072	0-0173	0-71 ¹⁾	0-392	0-281	0-42				0-0594	0-0416	0-41	4-45	0-04	0-01	
Chloroform			0-0672	0-1158	0-633													
Eisessig			x_2/x		x_2/x			x_2/x			x_2/x			x_2/x			x_2/x	
Phenylcyanid			0-04		0-27													
Nitrobenzol			0-02		0-27									0-02				

¹⁾ Die in Schreibschrift gedruckten Werte beziehen sich auf die Temperatur 10°.

Überblickt man die in der Tabelle angegebenen Zahlen, so ergibt sich daraus vor allem diese wichtigste Schlußfolgerung, daß die Verteilung der Reaktionsgeschwindigkeit auf Seitenkette und Kernsubstitution individuell durch das Lösungsmittel beeinflusst wird, indem im allgemeinen gemäß der von einem von uns entdeckten Gesetzmäßigkeit die ionisierenden Lösungsmittel die Kernsubstitution befördern. Zieht man damit in Betracht den von L. Bruner und J. Dłuska zuerst nachgewiesenen Einfluß der Konzentration auf die Seitenkettenausbeute, so wird man geneigt sein, dem in der Reaktion gebildeten und im Reaktionsgemische gelösten Bromwasserstoff und dessen Ionen eine wesentliche Rolle für den Bromierungsverlauf zuzuschreiben. Je schwächer ionisierende Stoffe als Lösungsmittel angewendet werden, desto mehr steigt die Seitenkettenausbeute: der Schwefelkohlenstoff, und in zweiter Linie CCl_4 erweisen sich als die am meisten die Seitenkettensubstitution fördernden Lösungsmittel. Die Unterschiede der Ausbeute, die man durch Änderung des Lösungsmittels erzwingen kann, sind ganz enorm, besonders bei den Kohlenwasserstoffen, die in nicht ionisierenden Lösungsmitteln langsam angegriffen werden. So beträgt die Ausbeute an Benzylbromid in CS_2 85%, in $\text{C}_6\text{H}_5\text{NO}_2$ und CH_3COOH dagegen nur 2%, beziehungsweise 4%; ganz ähnliche Resultate ergab auch das p. Xylol in den genannten Lösungsmitteln.

Da dieser Einfluß des Lösungsmittels sich nicht nur auf die Dunkelreaktion beschränkt, sondern sich, wie L. Bruner und J. Dłuska nachgewiesen haben, auch auf die Photobromierung erstreckt, so muß er stets beachtet werden, wenn man zu vergleichenden Schlüssen über den Verlauf der Bromierung gelangen will. So hat z. B. A. Korczyński¹⁾ bei seinen Versuchen über die Bromierung des Durols, Penta- und Hexamethylbenzols gefolgert, daß die Bromierung des Durols und Pentamethylbenzols gegen Licht unempfindlich ist: er hatte eben die genannten Kohlenwasserstoffe in Eisessig bromiert, der ein kernsubstituierendes Lösungsmittel ist. Wir haben uns leicht überzeugen können, daß in CS_2 -Lösung die Bromierung des Durols sogar sehr lichtempfindlich ist und dabei in verdünnter Lösung das Monobromdueryl $\text{C}_6\text{H}_2(\text{CH}_3)_3 \cdot \text{CH}_2\text{Br}$ vom

¹⁾ Rozpr. Akad. Umiej. 42 (1902) S. 11.

Schmelzpunkte 34° und augenreizenden Geruche entsteht. Dasselbe kann wohl von Pentamethylbenzol gelten, da Korczyński selbst bemerkt, daß sein Monobrompentamethylbenzol $C_6Br(CH_3)_5$, das er zufällig in CS_2 -Lösung untersuchte, gegen Brom lichtempfindlich ist.

Die Berücksichtigung des Einflusses des Lösungsmittels bildet eine notwendige Vorstufe zu einer allgemeineren Systematik der Lichtempfindlichkeit der Halogensubstitution organischer Stoffe, die in einer späteren Arbeit behandelt werden soll.

Was die stöchiometrischen Geschwindigkeitsverhältnisse anbeht, so sei hier bemerkt, daß in der Seitenkette die Gruppe CH_2 von Brom am leichtesten substituiert wird, und zwar um so schneller, je länger die Seitenkette ist: so werden normales Propylbenzol und sek. Butylbenzol viel schneller bromiert als das Äthylbenzol. In allen diesen Fällen wird nach den Untersuchungen von J. Schramm die Gruppe CH_2 substituiert. In Toluol oder in den Xylole ist die Methylgruppe viel schwieriger angreifbar.

Durch Metasubstitution wird die Angreifbarkeit des Benzolkerns z. B. in Meta-Xylol außerordentlich stark erhöht, so daß dadurch bei annähernd unveränderter Angreifgeschwindigkeit der Methylgruppen die Seitenkettenausbeute auch in nicht ionisierenden Lösungsmitteln fast auf Null sinkt. Während die k_1 -Werte für Ortho- und Para-Xylol von derselben Größenordnung sind, sind sie bei Meta-Xylol etwa 100 mal größer.

Krakau. Zweites Chem. Laboratorium der k. k. Jagell. Universität.

13. *Sztuczne pobudzenie jajek Aricii do rozwoju partenogenetycznego. — Einleitung der künstlichen Parthenogenese bei Aricia.* Mémoire de M. K. KOSTANECKI m. t.

In den Monaten März und April 1907 habe ich während meines Aufenthalts an der zoologischen Station in Neapel versucht, die Eier verschiedener Anneliden künstlich zu parthenogenetischer Entwicklung anzuregen, jedoch fielen die Versuche, trotzdem verschiedene diesbezügliche Agentien in mannigfachen Modifikationen angewandt wurden, negativ aus. Nur bei *Aricia* ist es mir gelungen, die Eier künstlich zu parthenogenetischer Entwicklung zu veranlassen, wenngleich die Entwicklung über die ersten Stadien nicht hinauskam.

Um eine Handhabe zur Beurteilung der bei der künstlichen Parthenogenese sich abspielenden Vorgänge zu gewinnen, habe ich auch die Befruchtungsstadien der Eier zu sammeln gesucht. Die künstliche Befruchtung blieb resultatlos, trotzdem sie zu wiederholten Malen mit verschiedenen Individuen vorgenommen wurde; indessen gelang es mir, aus dem Sande, in welchem die Tiere leben, unter den von den Tieren spontan niedergelegten Eiern befruchtete und sich entwickelnde Eier herauszufinden. Ich halte es für über-

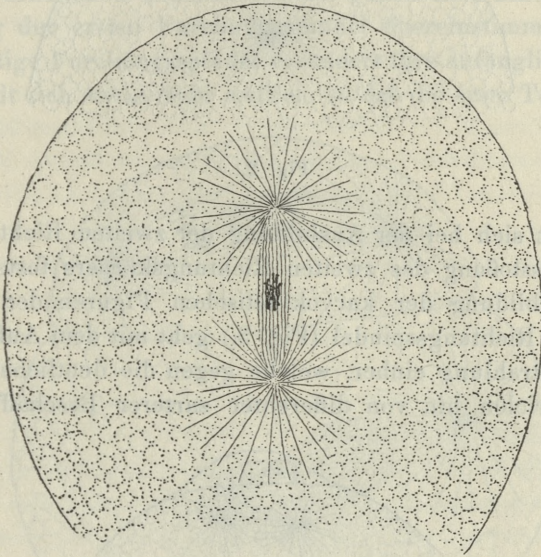


Fig. 1.

flüssig, hier eine eingehende Schilderung der Reifungs- und Befruchtungsvorgänge und der hierbei auftretenden Bilder zu geben.

Die Eier, welche befruchtungs- und entwicklungsfähig sind, werden bei *Aricia* im Stadium des Muttersterns der ausgebildeten ersten Richtungsspindel abgelegt. Die verhältnismäßig schmale aber langgezogene Richtungsspindel liegt im Zentrum des Eies; die schon in Teilung begriffenen Chromosomen liegen in dichtem Haufen in der Achse der Spindel, während an dem peripheren Teile der Zentralspindel die Spindelfasern frei von Pol zu Pol verlaufend zu sehen sind (vergl. Fig. 1.). Als die Richtungsspindel in radialer Richtung gegen die Peripherie vorrückt, erscheint sie kürzer aber

breiter, und die Chromosomen sind in der ganzen Breite ihres Äquators lockerer angeordnet (Fig. 2.); man kann sowohl in diesem Stadium, als auch während der darauf folgenden Metakinese auf günstigen Schnitten feststellen, daß sie neun an Zahl vorhanden sind;

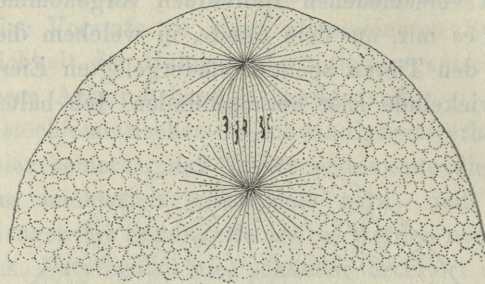


Fig. 2.

dasselbe läßt sich bei der Ausbildung der zweiten Richtungsspindel und der Ausstoßung des zweiten Richtungkörpers feststellen.

Die Ausbildung der karyokinetischen Figuren der ersten und der zweiten Richtungsspindel (Fig. 3.) geht mit dem Auftreten einer mächtigen Strahlung einher, welche gegen die deutlichen punktförmigen Zentriolen hin von differenter zarterer Beschaffenheit sind,

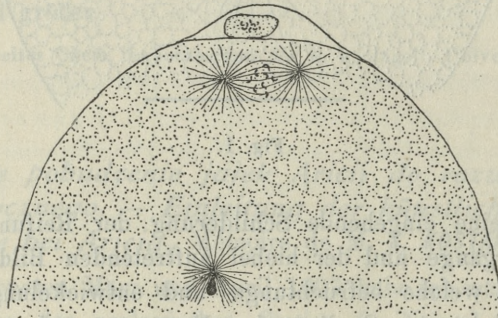


Fig. 3.

so daß aus diesem Verhalten ein charakteristisches Bild von mächtigen Sphären resultiert.

Den Spermakopf fand ich schon während der Wanderung der ersten Richtungsspindel etwas angeschwollen und vor ihm eine zarte Strahlung, welche während der Ausbildung der zweiten Richtungs-

spindel anwächst, inmitten der Strahlung sieht man ein einfaches oder doppeltes Zentriol (Fig. 3.). Die sehr großen, von sehr grobkörnigem Deutoplasma erfüllten Eier von *Aricia* sind ein sehr ungünstiges Material, um daran die weiteren Stadien, das Verhältnis der Spermastrahlung zu den Geschlechtskernen u. s. w. zu studieren, zumal die einzelnen Teile, die Kerne und die achromatischen Figuren in mehrere Schnitte zerlegt sind; aus den Figuren, die ich erhalten habe, kann man jedoch ersehen, daß sie mit den bei anderen Anneliden erhaltenen Einzelheiten die ganze Zeit hindurch bis zur Ausbildung der ersten Furchungsspindel übereinstimmen.

Die fertige Furchungsspindel verändert ihre anfänglich axiale Lage und stellt sich etwas mehr seitlich, so daß die erste Teilungsfurche

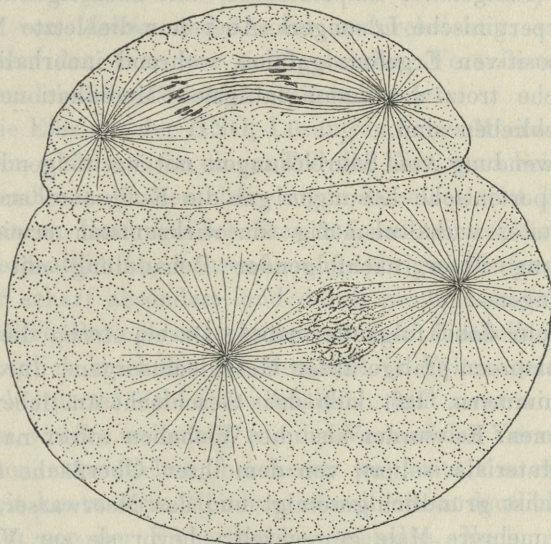


Fig. 4.

seitlich einschneidet und es so zur Teilung in zwei ungleich große Blastomeren kommt. Auch bei der nachfolgenden zweiten Furchungsteilung teilt sich die größere Furchungskugel in zwei ungleiche Blastomeren, während die kleinere, und zwar schon früher, in zwei gleich große Blastomeren zerfällt, welche der kleineren von den aus der Teilung des größeren Blastomers hervorgegangenen Zellen an Größe gleichkommen, so daß das Bild, abgesehen von der Größe der Blastomeren, dem Furchungstypus gleicht, wie ich ihn bei

Maetra und zahlreiche Autoren bei anderen Tieren beschrieben haben. Fig. 4 stellt einen Schnitt durch die beiden ersten Blastomeren dar; dem oben erwähnten Teilungsmodus entsprechend sieht man in dem kleineren Blastomer die mitotische Figur bereits im Stadium der Metakinese, während in dem größeren die Spindel erst in Bildung begriffen ist.

Um die Eier zu parthenogenetischer Entwicklung anzuregen, habe ich verschiedene, bisher bei anderen Tieren angewandte Methoden versucht, so die Behandlung mit hypertonischen Lösungen, sodann die von Lefevre mit so günstigem Erfolge bei *Thalassema* verwendeten Säurelösungen (Salpetersäure, Salzsäure, Schwefelsäure, Oxalsäure, Essigsäure), schließlich die kurze Einwirkung von Säurelösungen (Essigsäure, Salpetersäure) mit nachfolgender Übertragung in hypertonische Lösungen. Aber nur die letzte Methode hat zu einem positiven Ergebnis geführt, während innerhalb der ersten alle Versuche trotz der mannigfaltigsten Modifikationen durchaus erfolglos geblieben sind.

Bei Anwendung von Säurelösungen mit nachfolgender Übertragung in hypertonische Lösungen gab die Essigsäurelösung weniger gute Resultate, verhältnismäßig am wirksamsten erwies sich die HNO_3 -Lösung unter nachfolgender Behandlung mit KCl- oder KNO_3 -Lösungen.

Ich verfuhr dabei folgendermaßen: Da bei *Aricia* die mit Eiern, resp. Spermatozoen prallgefüllten Geschlechtsorgane durch die Haut hindurchschimmern, läßt sich das Geschlecht am lebenden Tiere leicht erkennen. Es wurden also die Weibchen sofort nach Beschaffung des Materials isoliert, von dem ihrer Oberfläche anhaftenden Sand möglichst gründlich gereinigt und das Meerwasser, in dem sie verblieben, mehrere Male gewechselt; bevor sie zur Verarbeitung gelangten, wurden sie, um noch etwa anhaftende Spermatozoen zu beseitigen, gründlich in fließendem Süßwasser ausgewaschen. Diese Vorsichtsmaßregeln genügten vollkommen, denn in den darauf auf Schnitten untersuchten Eiern wurde niemals ein Spermatozoon vorgefunden, so daß eine Befruchtung als völlig ausgeschlossen gelten darf.

Die Weibchen wurden aus dem Süßwasser in frisches Meerwasser gebracht und sodann zerschnitten, wobei sich aus den Gonaden die Eier entleerten. Diese wurden von anderen Teilen (wie Stücke des zerschnittenen Leibes, dem Sand aus dem Verdauungskanal

u. s. w.) schnell isoliert und in eine Mischung von 10 Teilen einer $\frac{1}{10}$ n. Lösung von Salpetersäure auf 90 Teile Meerwasser gebracht; hierin verblieben sie 2 — $2\frac{1}{2}$ Minuten, wurden sodann in frisches Meerwasser, daraufhin in eine Mischung von 10 ccm einer $2\frac{1}{2}$ n. KCl-Lösung auf 90 ccm Meerwasser übertragen. Die besten Resultate wurden erzielt, wenn sie in der letztgenannten Mischung 15 — 20 Minuten verblieben und sodann in reines Meerwasser gebracht wurden; längeres Verweilen in KCl-Lösung oder Anwendung stärkerer Lösungen beeinflusste die Eier ungünstig; wenn die Eier in KCl-Lösung länger, ungef. 45 — 50 Minuten blieben, wurde die Ausstoßung der Richtungskörper völlig unterdrückt; statt der $2\frac{1}{2}$ n. KCl-Lösung wurde mit gleichem Erfolge auch eine $2\frac{1}{2}$ n. KNO_3 -Lösung angewandt.

Die Eier von *Aricia* sind absolut undurchsichtig, so daß über die im Innern der Eier vor sich gehenden Veränderungen kein Aufschluß am lebenden Material zu erhalten ist.

Sobald die Eier aus der HNO_3 -Lösung in reines Meerwasser übertragen werden, sieht man an einem Teil der Eier, etwa bei 40 — 50%, sich eine Membran abheben; bei einigen derselben tritt diese gleichmäßig im ganzen Umfange des Eies auf, bei anderen hebt sie sich nur teilweise deutlich ab, während sie im übrigen Umfange des Eies sich weniger scharf absondert und durch protoplasmatische Fäden oder eine lockere Protoplasmaschicht mit dem Eizelleibe verbunden bleibt. Anfänglich erscheint die Membran in Falten gelegt, gleichsam gerunzelt, glättet sich erst allmählich, und zwar vor allem an solchen Eiern, welche weiterhin, wie der Verlauf der Versuche zeigte, sich am besten entwickelten; bei diesen war stets eine regelmäßige, dicke, doppelt konturierte Membran durch einen deutlichen perivitellinen Raum von der Eioberfläche geschieden. Nach ungefähr 50 Minuten sieht man an manchen Eiern, welche eine Membran gebildet haben, an der Peripherie des Eies sich allmählich eine hellere Stelle ausbilden und sodann sich einen hellen Hügel emporheben, bis sich schließlich ein absolut hellklares, der deutoplasmatischen Teile vollständig entbehrendes Bläschen abschnürt, nämlich der erste Richtungskörper, während an dem Ei an dieser Stelle eine leichte Vertiefung zurückbleibt.

Bei vielen Eiern verzögert sich die Ausstoßung des ersten Richtungskörpers sehr bedeutend, bei anderen, auch bei solchen, die die Membran ausgebildet haben, unterbleibt sie vollständig, zum

Teil selbst dann, wenn sich auch an der Peripherie ein helleres Feld auszubilden begonnen hat.

Nach Ausstoßung des ersten Richtungskörpers sieht man in sehr wechselnder Zeit, bisweilen nach weiteren 30—40 Minuten, bisweilen aber erst viel später, sich wieder ein helleres Feld ausbilden und emporheben, worauf sich der zweite Richtungskörper abschnürt, der in der Regel kleiner ist.

Inzwischen sieht man aber sehr oft den ersten Richtungskörper sich in der tangentialen Richtung (im Verhältnis zur Eikugel) in die Länge strecken, sich durchschnüren, wodurch eine Teilung in zwei kleinere gleiche Zellen erfolgt, so daß zusammen mit dem ausgestoßenen zweiten Richtungskörper drei kleine Richtungskörper zu sehen sind. Andererseits muß man, falls man an lebendem Material zwei Richtungsbläschen sieht, in der Beurteilung vorsichtig sein, da es sich hier entweder um den tatsächlich ausgeschiedenen ersten und zweiten Richtungskörper, aber möglicherweise auch um die Zweiteilung des ersten Richtungskörpers handeln kann. Die Größe der wahrgenommenen hellen Bläschen kann hierbei als gewisser Hinweis gelten, da der erste Richtungskörper in der Regel größer, der zweite kleiner ist, doch muß man bedenken, daß die Größe der Richtungskörper großen individuellen Schwan-

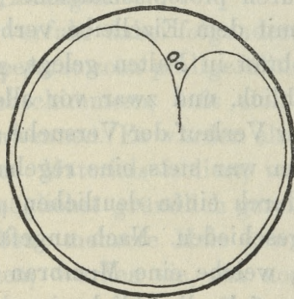


Fig. 5.

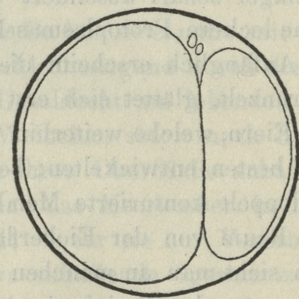


Fig. 6.

kungen unterliegt. Andererseits konnte ich bei fortlaufender Beobachtung des lebenden Materials feststellen, daß auch Eier, die nur einen Richtungskörper ausgestoßen hatten, sich sodann furchten.

Nach Ausstoßung der Richtungkörper verschwindet alsbald das helle Feld an der Peripherie unter der Abschnürungsstelle der Richtungkörper und, nachdem ein Zeitraum von 1—1¼ Stunden

vergangen ist, also etwa $2\frac{1}{2}$ Stunden vom Beginn des Experiments, bisweilen jedoch viel später, sieht man, wie die erste Furche zunächst an der Ausstoßungsstelle der Richtungskörper, sodann im weiteren Umkreise einschneidet, wodurch es zur Teilung in zwei Blastomeren kommt. Diese sind entweder, wie bei den befruchteten Eiern von *Aricia*, von ungleicher Größe (einen solchen typischen Fall stellt Fig. 5 und 6 dar), so daß die Teilungsfurche schief verläuft, oder aber sie sind einander völlig gleich, wobei die Teilungsfurche völlig meridional liegt. Einige von diesen Eiern verbleiben auf dem Zweizellenstadium, einige teilen sich sodann weiter, indem unter Durchschnürung des kleineren Blastomers zunächst 3 Zellen (vergl. Fig. 7.), sodann unter Durchschnürung des größeren 4 Furchungszellen entstehen; ein geringer Prozentsatz gelangte zum 6- oder 8-Zellenstadium, darüber hinaus entwickelten sie sich nicht.

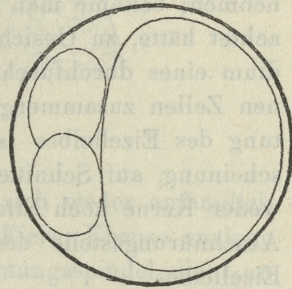


Fig. 7.

Diese wenig weit vorgeschrittene Entwicklung wird vielleicht verhältnismäßig weniger ungünstig beurteilt werden dürfen, wenn man bedenkt, daß an dem von mir in diesem Jahre verwendeten Material die künstliche Befruchtung überhaupt nicht gelingen wollte, und auch die aus dem Sand, in dem die Tiere lebten, ausgespülten befruchteten Eier sich nur teilweise weiter entwickelten; es ist möglich, daß in einem anderen Jahre, zu anderer Jahreszeit, an anderem Material, sowohl die künstliche Befruchtung ein positives Resultat ergibt, als auch die Eier in ausgiebigerem Maße sich zu parthenogenetischer Entwicklung werden anregen lassen und weiter vorgeschrittene Stadien erreichen. Es ist aber auch sehr wohl möglich, daß zum Gelingen der künstlichen Befruchtung die Anwesenheit der Schleimhülle, in der die Tiere stecken, notwendig ist; natürlich müßte dennoch bei Versuchen über künstliche Parthenogenese die Schleimhülle entfernt werden, da sonst hiedurch alle Maßregeln behufs Eliminierung der Spermatozoen illusorisch würden.

Nicht alle Eier, welche zwei oder eventuell einen Richtungskörper ausgestoßen hatten, entwickelten sich in der oben beschriebenen Weise, wenn auch anfangs bei ihnen dieselben Veränderungen sich einzuleiten schienen.

Nach Ausstoßung der beiden oder des ersten Richtungskörpers verschwand, wie wir gesehen haben, das hellere Feld an der Peripherie, zur Zeit aber, als andere Eier sich zur Teilung in zwei Blastomeren anschickten, konnte man an einer ganzen Reihe von Eiern plötzlich ganz auffallende Änderungen wahrnehmen: an der Oberfläche der Eier zeigten sich in mehr oder weniger, meist aber vollständig regelmäßigen Abständen tiefe Einkerbungen, so daß die ganze Eikugel oberflächlich vollständig zerklüftet, wie mit lauter Beulen besetzt aussah. Bei Betrachtung unter dem Mikroskop könnte man glauben, das typische Bild der Zellknospung wahrzunehmen; bekäme man ein solches Ei, ohne daß man es vorhin beobachtet hätte, zu Gesicht, so könnte man vermuten, ein spätes Stadium eines durchfurchten Eies vor sich zu haben, eine aus kleinen Zellen zusammengesetzte Morula oder Blastula. Diese Zerklüftung des Eizelleibes ist indes eine vollkommen pathologische Erscheinung, auf Schnitten sieht man in den zerklüfteten Territorien weder Kerne noch Strahlungen, der Eikern liegt entweder unter der Abschnürungsstelle des Richtungskörpers, oder in der Mitte des Eizelleibes.

Trotzdem bei *Aricia*, wie wir gesehen haben, nur die ersten Furchungsstadien auf dem Wege der künstlichen Parthenogenese sich erreichen ließen und trotzdem nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der Eier überhaupt zur Entwicklung angeregt wurde, schien es mir außer der Tatsache, daß die Einleitung einer künstlichen Parthenogenese bei diesen Eiern möglich ist, auch von Interesse, die im Innern dieser Eier sich abspielenden Vorgänge näher zu studieren. Ich habe deswegen die einer ganzen Reihe von Versuchen entnommen, in verschiedenen Entwicklungsstadien befindlichen Eier in der von mir üblichen Weise fixiert, eingebettet, in 7.5 μ dicke Schnitte zerlegt und entweder mit Hämatoxylin-Eisenaun allein, oder unter Vorfärbung mittels Bordeaux R. tingiert.

Da die Eier von *Aricia* noch innerhalb der Gonaden die erste Reifungsspindel ausbilden, so sieht man im Innern der Eier, welche unmittelbar aus der Mischung von Meerwasser mit HNO_3 -Lösung, wo sie 2—3 Minuten verweilen, fixiert wurden, ebenso an den Eiern, welche nach Ausspülung im Wasser in die KCl-Lösung übertragen und in einigen Minuten abgetötet wur-

den, nur wenige Veränderungen; die meisten bieten das Bild einer zentral gelegenen langgezogenen Spindel mit axial angeordneten Chromosomen, wie wir es in Fig. 1 gesehen haben; in einigen sieht man nur die Richtungsspindel aus ihrer zentralen Lage gegen die Peripherie emporgeschoben. Was die einzelnen Teile der

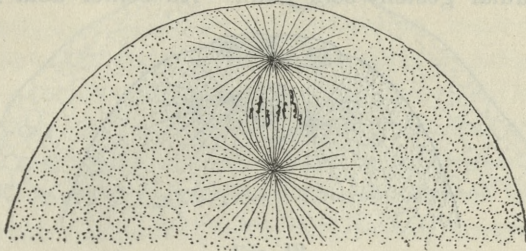


Fig. 8.

mitotischen Figur betrifft, unterscheiden sie sich weder anfänglich noch später von denjenigen in befruchteten Eiern. Ebenso analoge Bilder liefern auch die Stadien, wo die Richtungsspindel dicht an der Peripherie gelegen ist (vergl. Fig. 8.), wo sich dann der Hü-

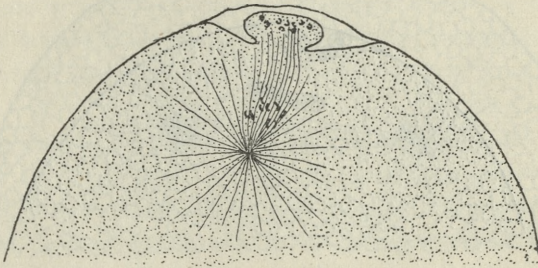


Fig. 9.

gel des ersten Richtungskörpers emporzuwölben beginnt und ebenso, als sich derselbe bereits abschnürt. Man kann in diesem Stadium deutlich wahrnehmen, daß in den ersten Richtungskörper 9 Chromosomen übergegangen und ebenso 9 Chromosomen im Ei verblieben sind (vergl. Fig. 9.); unter Teilung des mit ihnen in der Eizelle verbliebenen Zentriols bildet sich die zweite Richtungsspindel aus, welche sowohl, was die Zentralspindel, als auch was die Polstrahlung betrifft, viel zarter als die erste erscheint (vergl. Fig. 10;

der erste Richtungskörper ist hier gerade im Begriffe, sich in zwei kleinere Tochterzellen zu durchschneiden). Nach Ausstoßung des zweiten Richtungskörpers bildet sich aus den im Ei verbliebenen 9 Tochterchromosomen ein ruhender Kern, der meist etwas in die Länge gestreckt erscheint und mit seiner Längsachse entweder quer oder radiär gestellt sein kann. An seiner dem Eiinnern zu-

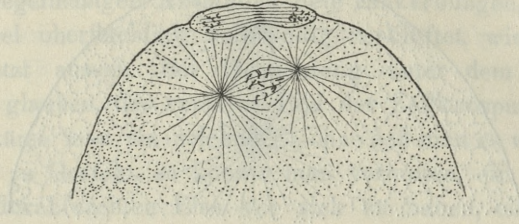


Fig. 10.

gekehrten Seite beginnt sich eine Strahlung auszubilden (Fig. 11.), sie ist anfänglich auf einen der Kernmembran offenbar dicht anliegenden Punkt gerichtet, in anderen Eiern ist die dem Kern anliegende Strahlung dizentrisch, aber auch dann noch anfänglich, wo sie nur schwach ist, auf zwei der Kernperipherie unmittelbar

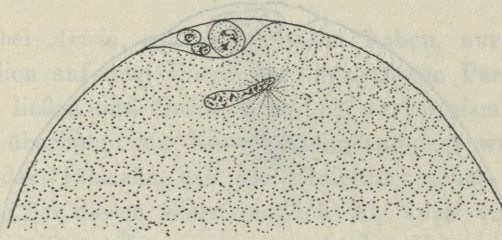


Fig. 11.

anliegende Punkte zentriert, erst nach und nach rückt sie, wie weitere Bilder lehren, von dem Kern ab (vergl. Fig. 12.). Dies leitet die Ausbildung einer typischen Furchungsspindel ein, welche sich nur dadurch von derjenigen der befruchteten Eier unterscheidet, daß in ihr 9 Chromosomen statt 18 enthalten sind; die Chromosomen haben die typische Gestalt von Chromatinschleifen. Auch die weiteren Bilder, das Muttersternstadium, die Tochtersterne (vergl. Fig. 13., wo die Spindel tangential angeschnitten ist), überhaupt die Bilder bis zur Zweiteilung des Zelleibes unterscheiden sich,

abgesehen von der Chromosomenzahl, in keiner Beziehung von denen in befruchteten Eiern; die mitotische Figur erscheint nur öfters nicht, wie es in befruchteten Eiern der Fall ist, nach der Seite gerückt, sondern ist in der Achse des Eies gelegen, was der schon

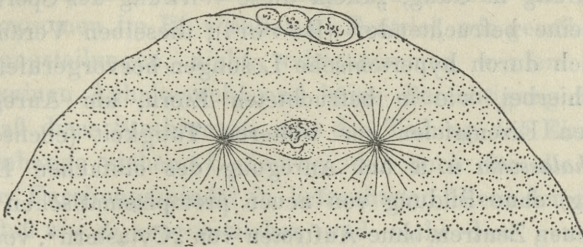


Fig. 12.

an lebendem Material beobachteten Tatsache entspricht, daß die beiden ersten parthenogenetischen Blastomeren öfters von gleicher Größe waren, wenn auch meist das parthenogenetisch sich fur-

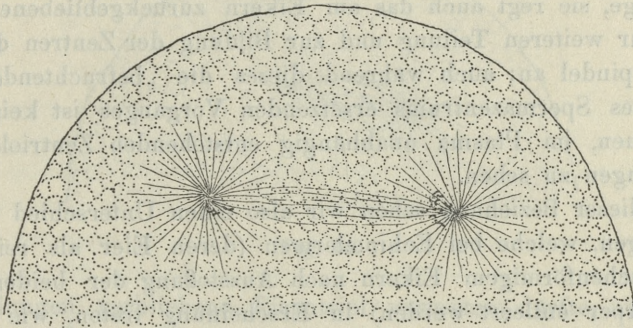


Fig. 13.

chende Ei, ebenso wie das befruchtete, in zwei ungleich große Blastomeren zerfällt (Fig. 4 und 5).

Es muß also für *Aricia* festgestellt werden, daß bei ihren Eiern, ebenso wie bei den Eiern von *Mactra* und einer Reihe anderer Tiere, wo unreife Eier abgelegt werden, die Anwendung der hypertonen Lösung zunächst dieselbe Wirkung hat, wie sie auch das ins Ei eindringende Spermatozoon ausübt, nämlich, daß sie imstande ist, die Reifungsteilungen auszulösen. Das unbefruchtete abge-

legte Ei enthält die erste Richtungsspindel in der Phase des Muttersterns und es verbleibt auf diesem Stadium, wenn es in gewöhnlichem Meerwasser belassen wird, beliebig lange, erst das Eindringen des Spermatozoons bringt die weiteren Veränderungen der Reifungsteilung in Gang, „allein diese Wirkung des Spermatozoons ist nicht seine befruchtende“ (Boveri); dieselben Veränderungen werden auch durch hypertonische Lösungen hervorgerufen, es handelt sich hierbei, wie in befruchteten Eiern, um Anregung der vorhandenen Eizentriolen zur weiteren Tätigkeit (ebenso wie bei *Mactra*, *Thalassema* u. a. um Anregung des einfachen Eizentriols zur Teilung) ohne Bildung von neuen protoplasmatischen Strahlungen, von neuen Zentren, ohne Auftreten von „Cytastern“, von künstlichen Astrosphären. Beim befruchteten Ei stammen die Zentren der Furchungsspindel aus der Teilung des vom Spermatozoon ins Ei eingeführten Zentriols, während das Zentriol, das nach Ausstoßung der zweiten Richtungsspindel im Ei zurückgeblieben ist, nicht mehr in Erscheinung tritt; die Anwendung der hypertonischen Lösung hat aber bei *Aricia* nicht nur die Auslösung der Reifungsteilungen zur Folge, sie regt auch das am Eikern zurückgebliebene Eizentrum zur weiteren Teilung und zur Bildung der Zentren der Furchungsspindel an; auch während dieses die „befruchtende“ Wirkung des Spermazentrums ersetzenden Vorganges ist keine Spur von neuen, im Plasma unabhängig entstehenden Zentriolen oder Strahlungen zu sehen.

In dieser Beziehung sehen wir also einen Unterschied von den Vorgängen, welche bei Echinodermen (deren Eier als reife Eier mit bläschenförmigem Eikern nach Ausstoßung der beiden Richtungskörper entleert werden) in Erscheinung treten, wie wir sie vor allem aus der Arbeit Wilsons kennen, dagegen stehen die Vorgänge bei *Aricia* mit den Beobachtungen über die Einleitung der künstlichen Parthenogenese bei unreif abgelegten Eiern im Einklang, wie wir sie aus den Arbeiten anderer Autoren zum Teil nur vermuteten, zum Teil, insofern genauere, an Schnitten ausgeführte Untersuchungen vorliegen, direkt aus den Beschreibungen herauslesen können. Am meisten nähern sich die Vorgänge denjenigen Bildern, die Lefevre als Anfangsstadien der bei *Thalassema melita* so schön und regelmäßig bis zum Larvenstadium fortschreitenden künstlichen parthenogenetischen Furchung beschreibt. Lefevre sah allerdings zu beiden Seiten des nach Ausstoßung der beiden Richtungs-

körper aus den im Ei verbliebenen Chromosomen gebildeten bläschenförmigen Eikerns gleichzeitig zwei kleine Strahlungen auftreten, welche zu Teilungszentren der ersten Furchungsspindel werden; da Lefevre dieselben nicht auf die Teilung einer vorhin wahrnehmbaren einfachen Strahlung zurückführen und da das mit den Chromosomen im Ei verbliebene Zentriol, wie gewöhnlich nach den Reifungsteilungen, nicht wahrgenommen werden konnte, so sieht er keinen Anhaltspunkt und keine Berechtigung zu der Annahme, daß diese Strahlungen mit der Teilung des Eizentriols im Zusammenhange stehen. Lefevre, der auch für die Zentriolen der ersten Furchungsspindel in befruchteten Eiern den Standpunkt vertritt, daß sie *de novo* entstehen und nicht dem geteilten Spermazentriol entstammen, faßt auch die Teilungszentren der ersten parthenogenetischen Furchungsspindel als Neubildungen auf.

Da ich an dem Eikern anfänglich nur eine Strahlung auftreten sah, und zwar an der Stelle, wo man das im Ei nach den Rei-

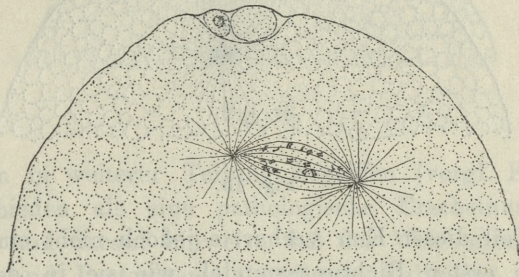


Fig. 14.

fungsteilungen verbliebene Eizentriol vermuten dürfte, und diese einfache Strahlung sicher wohl die daraufhin wahrnehmbaren zwei Strahlungen liefert, so bin ich geneigt, die Teilungszentren der ersten Furchungsspindel mit dem Eizentrum in Zusammenhang zu bringen. Die nahe Lagerung der Strahlung an dem Kerne und daher die Unmöglichkeit, in derselben das Zentriol aufzufinden, erschwert die bestimmte Entscheidung der Frage; ich hoffe auf Grund neuer, vielleicht unter günstigeren Bedingungen unternommener Versuche auf diesen Punkt zurückkommen zu können.

Ich habe schon an lebendem Material bemerkt, daß ab und zu einige Eier nur einen Richtungskörper ausstießen und zur Zeit, als in anderen die Ausstoßung des zweiten Richtungskörpers er-

folgte, diese sich in zwei Blastomeren teilten. Dementsprechend fand ich auch an Schnittpräparaten in Eiern, die sicher nur einen Richtungskörper aufwiesen, eine schon ausgebildete, bisweilen schon im Stadium der Metakinese befindliche Spindel, die nicht, wie dies bei der zweiten Richtungsspindel der Fall ist, schief oder radiär gestellt war, sondern tangential lag. Solche Spindeln waren auch mehr von der Eiperipherie entfernt, dem Eiinnern zugekehrt, man sah in ihnen öfters die doppelte Zahl von Chromosomen, die sich selbst wieder zur weiteren Teilung anschickten (vergl. z. B. Fig. 14, in der oben der erste in zwei durch einen Zwischenkörper verbundene Tochterzellen geteilte Richtungskörper zu sehen ist). Ich habe gleichfalls an lebendem Materiale festgestellt, daß einige Eier überhaupt keine Richtungskörper ausgestoßen hatten;

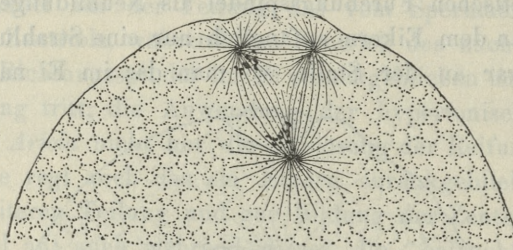


Fig. 15.

ein großer Teil dieser Eier verharrete jedoch nicht einfach in dem Stadium der ersten Richtungsspindel, wie sie in den entleerten Eiern schon zu sehen ist, sondern es gingen in ihnen verschiedene Veränderungen vor, die zu mannigfachen Bildern führten. So sah man in einigen schon nach längerer Zeit fixierten Eiern die erste Richtungsspindel noch in der Mitte des Eies liegen, die Chromosomen bildeten eine Äquatorialplatte oder waren in Metakinese begriffen, an den Polen waren die Zentriolen jedoch nicht nur geteilt, sondern die beiden Teilhälften waren sogar bedeutend voneinander entfernt, so daß die ganze mitotische Figur die Gestalt eines großen Rechtecks darbot. In anderen sah man vielpolige Figuren oder mehrere, offenbar aus den zurückgehaltenen Richtungsspindeln gebildete Kerne. Bisweilen waren gegen die Peripherie genäherte dreipolige Richtungsspindeln zu sehen, die in Metakinese begriffenen Chromosomen waren entweder auf alle drei Pole oder nur auf zwei von ihnen verteilt (vergl. z. B. Fig. 15).

Ab und zu sah ich auch unter den Eiern, welche längere Zeit seit Beginn des Experiments fixiert wurden, neben Eiern, welche schon die zweite Richtungsspindel ausgebildet haben, auch solche, welche die erste Richtungsspindel enthielten und in derselben an jedem, oder an dem gegen das Eiinnere gekehrten Pol 18 Chromosomen statt der gewöhnlichen Neunzahl aufwiesen. Ich vermute, daß diese Richtungsspindeln mit verdoppelter Chromosomenzahl dadurch entstanden sind, daß die erste Richtungsspindel längere Zeit in dem Stadium des Muttersterns oder der Metakinese verweilte und daß die Vierergruppen sich in ihre einzelnen Elemente auflösten. Bisweilen sah man jedoch die in doppelter Zahl vorhandenen

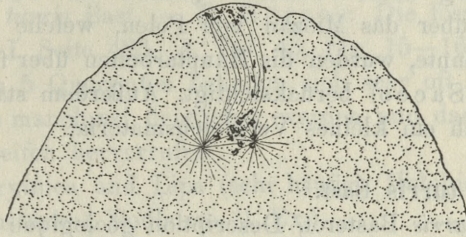


Fig. 16.

Chromosomen in weiterer Teilung begriffen (vergl. Fig. 16.), was schon entschieden als eine pathologische Erscheinung aufgefaßt werden muß und darauf hinweist, daß das Wechselverhältnis zwischen Kern und Protoplasma (in diesem Falle den in reger Teilung begriffenen chromatischen Teilen gegenüber den wie gelähmten Teilen der achromatischen Spindel) durch die angewandten Agentien eine Störung erfahren hat; dieselbe Erscheinung liegt wohl auch dem oben besprochenen, in Fig. 14 dargestellten Bilde zugrunde.

14. *Rodzaj Turritella w miocenie ziem polskich. — Beschreibung der Gattung Turritella im Miozän von Polen.*

Mémoire de M. **WILHELM FRIEDBERG**, présenté par M. J. Niedzwiedzki m. t. dans la séance du 7 Décembre 1908.

(Planches II et III).

Seit einigen Jahren bin ich mit paläontologischen Studien an miozänen Konchylien von Polen beschäftigt. Dabei habe ich be-

merkt, daß die Gattung *Turritella* bei uns stark entwickelt ist und daß manche Formen mit den gewöhnlich ausgeschiedenen Arten nicht übereinstimmen. Diese Beobachtung gab mir Anlaß zur vorliegenden monographischen Arbeit.

Das benützte Material stammt zum Teil aus meinen eigenen Sammlungen, außerdem habe ich das ganze Material des Dzieduszycki'schen Museums in Lemberg und der Physiographischen Kommission in Krakau zur Verfügung gehabt, andere mir zum Gebrauche frei stehende Sammlungen wurden auch berücksichtigt.

Die bei der Bearbeitung benützte Literatur ist nicht sehr umfangreich (sie ist bei jeder Art angegeben), denn leider standen mir in Lemberg keine reicheren Quellen zur Verfügung. Außer der Literatur über das Miozän von Polen, welche ich fast ganz heranziehen konnte, wurden die Hauptarbeiten über fremde Gebiete (H. Hörnes, Sacco) berücksichtigt. Außerdem stand zu meiner Verfügung noch ein kleines Vergleichsmaterial.

Turritella turris Bast.

Turritella turris Basterot, Description géologique du bassin tertiaire du Sud-Ouest de la France“. 1825, Seite 29, Taf. I, Fig. 11.

Beim Vergleiche zahlreicher Exemplare dieser Art aus Leognan bei Bordeaux, aus der Umgegend von Wien (Baden, Vöslau, Soos) und aus Korytnica kann man leicht erkennen, daß die *T. turris* aus Leognan mit den Exemplaren bei Wien und Korytnica nicht identisch ist. Obwohl die unteren Windungen bei Individuen aller Lokalitäten übereinstimmen (fünf Querreifen, von denen der vierte am stärksten ist) haben doch die Exemplare von Leognan (Taf. II Fig. 1) auf den Anfangswindungen einen deutlichen Kiel, auf welchem der stärkste Reifen verläuft und deshalb verleihen sie dem jüngeren Teile des Gehäuses ein schraubenförmiges Aussehen; die Embryonalwindungen haben auch diesen Kiel, jedoch nur einen Reifen.

Alle Exemplare aus der Umgegend von Wien (zirka 50), welche ich durchmustert habe, und die von Korytnica (zirka 100) besitzen auf den ersten Windungen keinen Kiel und 5 oder wenigstens 3 Querreifen. Diesen Unterschied der typischen Form von Basterot gegenüber hat auch wahrscheinlich Sacco¹⁾ bemerkt, wenn er (zwar

¹⁾ Sacco, „I molluschi dei terreni terziarii del Piemonte e della Liguria“. Teil 19, Seite 3.

ohne die Diagnose zu geben) die vom M. Hörnes beschriebene Form als eine Varietät (*Turritella turris* Bast., var. *badensis* Sacco) beschreibt.

Turritella turris ist sehr veränderlich, ich mußte deshalb einige Varietäten unterscheiden.

***Turritella turris* Bast., forma typica.** Taf. II, Fig. 2.

Anfangswindungen mit Kiel und geringer Zahl von Querreifen.

Loc.: Korytnica (1 unvollständiges Exemplar.), Woroniaki (1 Bruchstück).

***Turritella turris* Bast., var. *badensis* Sacco.** Taf. II, Fig. 3—4.

Turritella turris Bast. — H. Hörnes: Die fossilen Mollusken v. Wien. Bd. I, Seite 423—4, Taf. 43, Fig. 15—16.

Außer den 5 Querreifen befinden sich sehr oft schwache Querlinien, welche manchmal deutlicher werden und das Aussehen zahlreicher Querreifen hervorrufen.

Loc.: Korytnica und Lipa (sehr häufig), Holubica (3 Ex.), Rzegocina (Bruchstücke), Podhorce (1 Ex.).

***Turritella turris* var. *sexcincta* mihi.** Taf. II, Fig. 5.

Im oberen Teile der letzten Windungen tritt noch ein stärkerer Querreifen hervor, am stärksten ist also der fünfte Reifen, unter dem sich noch ein sechster befindet.

Loc.: Korytnica und Lipa (einige Ex.).

***Turritella turris* var. *oligocincta* mihi.** Taf. II, Fig. 6—7.

Diese Varietät weist eine geringere Zahl von Querreifen auf. Es verschwindet nämlich entweder der eine von den oberen Querreifen, so daß man also nur vier stärkere Querreifen vorfindet (der dritte ist am stärksten), oder es verschwindet der dritte, wodurch zwischen dem zweiten und dem dritten ein breites Band frei bleibt.

Loc.: Korytnica (4 Exempl.), Lipa (2 Ex.).

***Turritella turris* var. *duplicata* mihi.** Taf. II, Fig. 8—9.

Einige, oder bloß einer von den unteren Querreifen ist doppelt.

Loc.: Korytnica (3 Ex.).

***Turritella turris* var. *tricincta* mihi.** Taf. II, Fig. 10.

Die zwei oberen Querreifen sind schwach, die drei unteren je-

doch dick, der mittlere von ihnen (der vierte von allen) ist am stärksten. *T. turris* var. *crassullecincta* Sacco (Sacco, ibidem, Seite 4, Taf. I, Fig. 6) ist ganz ähnlich, was die Skulptur der Windungen anbelangt, unsere Form hat jedoch runde Windungen und ist kleiner (Länge 30 mm, Breite 7 mm).

Loc.: Holubica (1 Ex.), Rzyca bei Chmielnik (1 Ex.).

Turritella Archimedis Brong. Taf. II, Fig. 11—12.

Turritella Archimedis Brong. — Pusch: Polens Paläontologie, Seite 104.

Turritella Archimedis Brong. — H. Hörnes: l. c., Seite 424—26, Taf. 43, Fig. 13—14.

Archimediella Archimedis Brong. var. *dertonatior* Sacco — Sacco: l. c., Seite 12, Taf. I, Fig. 38.

Turmförmig, 40—50 mm hoch, alle Windungen mit zwei starken, scharfen Kielen; zwischen ihnen, auch unterhalb und oberhalb derselben sind bis 10 feine, linienförmige Reifen zu sehen. Unsere Exemplare stimmen vollkommen mit denen von Vöslau überein.

Loc.: Korytnica (3 Ex.), Holubica (1 Ex.), Dryszczów (einige), Rzegocina (kleine Bruchstücke). Uhlig bestimmte sie aus Niskowa und Grudna Dolna, Niedźwiedzki aus Bogucice, Wiśniowski aus Myszyn. Diese Art ist überhaupt seltener¹⁾.

Turritella dertonensis Mayer. Taf. II, Fig. 13.

Archimediella dertonensis Mayer. — Sacco, l. c., Seite 12—13, Taf. I, Fig. 39.

2 Exemplare, das größere ist 39 mm lang, 11 mm breit. Die Windungen sind wenig gewölbt und mit 2 erhabenen und außerdem mit mehreren (8—10) schwächeren Querreifen versehen, von denen einer (zwischen dem oberen Querreifen und der oberen Naht gelegen) bedeutend stärker ist.

Diese Art steht der *T. Archimedis* nahe, unterscheidet sich aber hauptsächlich durch das Vorhandensein eines dritten, stärkeren Hauptreifens.

Loc.: Korytnica (2 Ex.); diese Art ist bei uns noch nicht beschrieben worden.

¹⁾ Einige Autoren trennen die *T. Archimedis* des Hörnes von derjenigen des Brongniart. Da ich die Originalarbeit von Brongniart nicht benutzen konnte, kann ich mich in dieser Hinsicht nicht äußern.

T. dertonensis var. *subconica* Sacco. Taf. II, Fig. 14.

Sacco, l. c., Seite 13, Taf. I, Fig. 40.

Ein Exemplar, 47 mm lang, 10 mm breit, aus 15 Windungen bestehend, gehört wahrscheinlich dieser Varietät an, worauf die schlankere Gestalt und die schwächer gesonderten Windungen hindeuten. Auf den Windungen sind außer den 2 Hauptreifen, noch 2 schwächere Querreifen im oberen Teile der Windungen, von welchen der zweite etwas stärker, als der erste ist.

Loc.: Holubica (1 Exempl.).

Turritella Pythagoraica Hilb. Taf. II, Fig. 15—16.

Turritella duplicata (L). — Dubois de Montpéreaux: Conchiologie fossile... Seite 37—38, Taf. II, Fig. 19—20.

Turritella bicarinata (Pusch) — Pusch: Polens Paläontologie, Seite 104—105, Taf. X, Fig. 3.

Turritella Pythagoraica Hilb. — Hilber: Neue und wenig bekannte Konchylien a. d. ostgaliz. Miozän. Seite 9, Taf. I, Fig. 19.

Turritella c. f. *Pythagoraica* Hilb. — Hilber: ebda, Seite 10, Taf. I, Fig. 20.

Diese Art war schon früher von Dubois und Pusch beschrieben worden, wie es aus dem Synonymenverzeichnis ersichtlich ist. Da jedoch die Namen dieser Autoren (*T. duplicata* und *T. bicarinata*) schon auf andere Arten angewendet worden sind, erscheint es angezeigt, den Namen Hilbers beizubehalten, da aber diese Art sehr stark variiert, mußte ich mehrere Varietäten ausscheiden.

Die typische Form ist aber auch gewissen Schwankungen unterworfen, so daß aus diesem Grunde ihre Diagnose umfangreicher gestellt werden mußte, als es von Hilber geschehen ist.

T. Pythagoraica ist zirka 50 mm lang, bei 12 mm größter Breite, die Zahl der Windungen beträgt gegen 15. Jede Windung ist oben dachförmig (dieser Teil ist größer), unten eingezogen, und trägt zwei starke Reifen, welche jedoch schwächer sind als bei *T. Archimedis*; der obere ist in der Mitte der Windung gelegen, der untere etwas oberhalb der unteren Naht. Außer der Hauptreifen besitzt jede Windung noch mehrere schwache Reifen: oberhalb des oberen Hauptreifens sind 8 schwache, von denen abwechselnd 4 schwächer und 4 stärker sind, zwischen den Hauptreifen liegen 3—8 schwächere, von denen der mittlere am stärksten ist, und

unterhalb des unteren Hauptreifens sehen wir noch 3—4 schwächere. Die Zuwachsstreifen sind manchmal stark entwickelt, weshalb die Reifen in diesem Fall perlschnurförmig aussehen. Auf den ersten Windungen sind zwei Hauptreifen deutlich, die schwächeren dagegen sind in geringerer Zahl entwickelt; die Embryonalumgänge sind rundlich und ganz glatt.

Auf manchen größeren Gehäusen sind die letzten Umgänge von runder Gestalt, was hauptsächlich dadurch verursacht wird, daß einige der sekundären Reifen an Größe den zwei Hauptreifen gleich werden; dann finden wir dort 4, 5 oder 6 Hauptreifen. Solche Individuen sind infolge der großen Ähnlichkeit mit *T. turris* Bast. schwer zu bestimmen und nur der Unterschied im Aussehen der ersten Windungen gibt einen Anhaltspunkt zur Scheidung dieser Arten. Manchmal werden bei dieser Art die Umgänge flacher.

Loc.: Bogucice, Zgłobice, Pobitno, Podhorce (sehr häufig), Jasionów, Hołubica (häufig), Czepiele, Hołdy, Smólno, Potylicz, Dryszczów, Brzeżany, Czerniszówka, Leworda, Trościaniec, Woroniaki Husiatyn, Korytnica.

Turritella Pythagoraica Hilb. var. *irregularis* mihi. Taf. II, Fig. 17—18.

An Größe ist diese Varietät der typischen Form gleich, die Windungen sind jedoch mit 3, 5 (oder mehr) Hauptreifen versehen, der mittlere von ihnen, welcher dem oberen Hauptreifen entspricht, ist am stärksten.

Loc.: Podhorce (10 Ex.).

Turritella Pythagoraica var. *minor* mihi. Taf. II, Fig. 19—20.

Klein, bis 30 mm lang, der obere Teil der Windungen konkav, die Windungen gekielt, die Kiele dort gelegen, wo die zwei Hauptreifen verlaufen. Diese Varietät erinnert sehr an die Jugendformen der typischen *T. Pythagoraica*, da man jedoch an manchen Orten (Biała Góra bei Olesko, Hołubica) jetzt nur diese Form finden kann, während die typischen, großen Exemplare ganz fehlen, glaube ich, das Vorhandensein einer Varietät annehmen zu können.

Loc.: Hołubica (sehr häufig), Olesko (Biała Góra), Hołdy, Pieniaki, Tarnoruda, Turówka, Czerniszówka, Werchów, Szuszkowce, Żukowce, Żabiak.

Turritella Pythagoraica Hilb. var. *indigena* Eichw. Taf. II, Fig. 21—22.

Turritella indigena Eichw. — Eichwald: Naturhist. Skizzen v. Lithauen. Wilna 1830.

Turritella indigena Eichw. — Eichwald: *Lethea rossica*, Bd. III, Seite 278—9, Taf. X, Fig. 21.

Gehäuse kleiner, bis 40 mm lang. Die Anfangswindungen sind denen von *var. minor* ähnlich, auf den folgenden ist der mittlere linienförmige, zwischen den Hauptreifen gelegene Reifen so stark wie die beiden Hauptreifen, auf den letzten 2—3 kugeligen Windungen werden auch die übrigen Nebenreifen (bis 6) den Hauptreifen ähnlich.

Es muß die geographische Selbständigkeit dieser Varietät betont werden, da sie nur im Osten (Wolhynien und Russisch-Podolien) vorkommt.

Loc.: Trościaniec (Podolien häufig), Żukowce, Szuszkowce, Zapadnia, Stary Poczajów, Butyń, Werchów, Werbowiec, Biłka, Żabiak, Morozicha (Wolhynien).

Turritella Pythagoraica Hilb. var. *infirmior* mihi. Taf. III, Fig. 1.

Turritella turris aff. var. *percinctula* Sacco — Friedberg: Młodszy miocen Galicyi zachodniej. Sprawozd. Komisji Fizyogr., Bd. 41, Seite 25—26, Fig. 3.

Die Hauptreifen sind schwächer, auf den letzten 3 Windungen unregelmäßig verteilt. Ich habe früher diese Form als der *T. turris* var. *percinctula* Sacco nahestehend bestimmt, da jedoch das Hauptmerkmal der *T. Pythagoraica* Hilb., nämlich die zwei schwachen Reifen, hier vorkommt, finde ich die gegenwärtige Ausscheidung zweckmäßiger.

Loc.: Blonie.

Turritella Pythagoraica var. *duplicata* mihi. Taf. III, Fig. 2.

An Größe der *T. Pythagoraica* gleich, der obere Hauptreifen doppelt, die Nebenreifen etwas stärker als bei den vorigen Varietäten.

Loc.: Podhorec (1 Ex.).

Auf der Tafel III, Fig. 3 habe ich ein unvollständiges Exemplar aus Volhynien abgebildet, welches ohne nähere Ortsangabe im Dzieduszyckischen Museum aufbewahrt wird. Es ist 26 mm lang und der *T. Pythagoraica* var. *minor* ähnlich, der obere Kiel ist jedoch stärker. Der Gestalt nach ähnelt dieses Fragment der

T. bicarinata Eichw., der Skulptur der Schale nach ist es jedoch ganz verschieden (keine Querfurchen, nur einige schwache Querreifen). Da das Exemplar sehr mangelhaft ist (es sind nur 5 letzte Umgänge vorhanden), muß ich von näherer Bestimmung absehen.

Turritella Rabae Niedźw. Taf. III, Fig. 4—6.

Turritella Rabae Niedźw. — Niedźwiedzki: Zur Kenntnis der Fossilien des Miozäns bei Wieliczka u. Bochnia. Sitzungsber. d. Wien. Akad., J. 1886, Seite 18—20, Taf. I u. f., Fig. 3—5.

Turritella marginalis Brocc. — ebda, Seite 19, Taf. I, Fig. 6.

Turritella Rabae Niedźw. — Friedberg: Młodszy miocen Gal. Zach. Seite 26—27.

Diese Art ist der *T. Pythagoraica* ähnlich, unterscheidet sich jedoch durch schwach gewölbte, fast flache Umgänge und dadurch, daß die zwei Hauptreifen sehr schwach entwickelt sind. Nur auf den Anfangswindungen treten sie stärker hervor, auf den letzten Windungen werden sie undeutlich, weil andere Reifen (zirka 10) ihnen an Stärke gleichkommen. Die Umgänge sind unten etwas eingezogen, manchmal kommt unten ein schwacher Kiel zum Vorschein. An Größe unterscheidet sich auch diese Art von der vorigen, da sie gewöhnlich kleiner ist (30—40 mm lang).

Loc.: Bogucice, Grabowice, Zgłobice, Chodenice, Błonie, Po-bitna, Nockowa, Babica. Diese Art kommt nur in Westgalizien vor.

Turritella Dzieduszyckii M. Łom. Taf. III, Fig. 7—8.

Turritella Rabae Niedźw. var. — Friedberg: Nowe skamiełiny miocenu ziem polskich, Lemberg 1907, Seite 8, Taf. I, Fig. 2. 2 Exemplare aus Leworda habe ich früher als *T. Rabae* var. beschrieben; nun habe ich in den Sammlungen des Dzieduszyckischen Museums noch zwei weitere Stücke gefunden, welche von M. Łomnicki als *T. Dzieduszyckii* (in litt.) ausgeschieden wurden. Diese vier Exemplare haben mir ein besseres Studium dieser Art erlaubt.

T. Dzieduszyckii ist zirka 40 mm lang, 11 breit bei 14 Windungen. Der obere Teil der Windungen ist etwas konkav, der untere schwach gewölbt, bei einem Exemplar (Fig. 8) sind die Windungen ganz konkav. In der Mitte der Windungen ist ein schwacher Kiel gelegen, der zweite etwas oberhalb der unteren Naht, auf beiden Kielen verlaufen deutliche, wenn auch schwache Reifen. Sonst sehen die Umgänge ganz glatt aus, nur unter der Lupe sind

zahlreiche (15—20) sehr feine Querlinien sichtbar. Die Mündung ist fast rund, die linke Lippe etwas umgeschlagen.

Loc.: Leworda (4 Exempl.).

Turritella holubicensis mihi. Taf. III, Fig. 13.

26 mm hoch, 7 mm breit, spindelförmig, besteht aus 16 Windungen, welche durch undeutliche Nähte geschieden sind. Die Windungen besitzen 12—15 gedrängte Querreifen, zwischen denen noch schwächere liegen. Auf jedem Umgange finden sich zwei etwas stärkere Querreifen, einer etwas unterhalb der Mitte, der andere etwas oberhalb der unteren Naht; der untere Querreifen ist stärker.

T. Bellardi May. ist ähnlich, hat aber gewölbte, nicht flache Umgänge, entbehrt auch der zwei stärkeren Querreifen.

Loc.: Hołubica (1 Ex.).

Turritella pulchra mihi. Taf. III, Fig. 14.

Das Gehäuse ist wahrscheinlich bis 30 mm lang, die Windungen sind schwach gewölbt, durch breite Furchen voneinander geschieden. Jede Windung hat zwei schwache, ringförmige Kiele, welche durch schwache Einknickungen der Windungen entstehen. Die Windungen besitzen zahlreiche (25) feine Querreifen, von welchen manche (bis 5) stärker sind. Zahlreiche Zuwachsstreifen verursachen ein perlschnurartiges Aussehen der Reifen.

Wirklich ähnliche Arten kann ich nicht angeben, *T. Pythagoraica* ist zwar verwandt, weicht aber in Gestalt und Skulptur ab.

Loc.: Dryszczów (2 beschädigte Exemplare).

Turritella bicarinata Eichw. Taf. III, Fig. 9—12.

Turritella bicarinata Eichw. — Eichwald: Naturhist. Skizze v. Lithauen... Seite 220.

Turritella bicarinata Eichw. — Eichwald: *Lethæa rossica*, Bd. III, Seite 280—1, Taf. X, Fig. 23 (partim).

Turritella bicarinata Eichw. — M. Hörnes: Die fossilen Mollusken... Seite 426—7, Taf. 43, Fig. 8—11 (partim).

Zahlreiche, typische Exemplare, welche denjenigen von Wien vollkommen gleichen, entsprechen jedoch der dritten Varietät bei M. Hörnes (l. c. Fig. 8—9), da von den beiden Reifen der obere stärker ist. Die Oberfläche der Windungen und der beiden Reifen ist fein gefurcht. Die Unterschiede bestehen nur im Verhält-

nisse der Länge zur Breite des Gehäuses, während bei den Exemplaren von Dryszczów das Verhältniß 60:15 beträgt, ist es beim Exemplar von Hołubica wie 34:13.

Bei einigen Exemplaren von Dryszczów kann man außer den zwei Hauptreifen noch zwei schwache Reifen in oberen Teile der Windungen bemerken (Fig. 12).

Loc.: Zgłobice, Podhorce, Hołubica (häufig), Czepiele, Hołdy, Dryszczów (sehr häufig), Trościaniec Mały, Łuka Mała, Czerniszówka, Dżurów. Von den Autoren werden noch erwähnt: Koza-kowa Góra, Podhajce, Grudna Dolna, Rowego Gaj.

Turritella bicarinata Eichw. var. *scalaria* Buch. Taf. III, Fig. 16

Turritella scalaria de Buch. — Dubois: Conchiologie fossile, Seite 36—37, Taf. II, Fig. 18.

Turritella bicarinata Eichw. — M. Hörnes: Die fossilen Mollusken, Seite 426—7, Taf. 43, Fig. 12 (?) (partim).

Umgänge sehr deutlich geschieden, Gewinde schraubenförmig; das größte Exemplar von Szuszkowce mißt 52 mm Länge, bei 16 mm größter Breite. Die untere Fläche eines jeden Umganges, welche vierkantig sind, steht vertikal zur Achse, die Seitenfläche ist flach, die obere dachförmig. Auf den Seitenrändern der Windungen finden sich manchmal oben und unten wulstenförmige, flache Reifen. Die ganze Oberfläche der Schale ist, wie bei der typischen Form, fein und dicht gefurcht.

Loc.: Szuszkowce (10 Ex.), Fulsztyn, Trościaniec. Es muß die geographische Selbständigkeit dieser Varietät betont werden, da sie nur auf den östlichen Teil von Polen (Wolhynien, Ost-Podolien) beschränkt ist.

Turritella subangulata Brocc. var. *polonica* mihi. Tafel III, Fig. 25—26.

Turritella subangulata Brocc. — Eichwald: Lethea rossica... Seite 279—80, Taf. X, Fig. 22.

Turritella spirata Brocc. — Eichwald: Lethea rossica... Seite 281—2, Taf. X, Fig. 24.

Beim Vergleiche der Exemplare der *T. subangulata* Brocc. aus Italien (St. Agatha, Castelnuovo d'Asti) mit denen von Polen habe ich einige Unterschiede bemerkt. Unsere Exemplare sind stärker gekielt, der Kiel liegt mehr in der Mitte der Umgänge, bei den

Exemplaren aus Italien unterhalb der Mitte. Die Wiener Exemplare (wie ich aus den Figuren in der Monographie von M. Hörnes ersehen kann) sind auch etwas verschieden, obwohl sie, was die angegebenen Merkmale anbelangt, eine Mittelstellung zwischen den Exemplaren aus Italien und denen von Polen einnehmen.

Loc.: Pustomyty, Proniatyn, Bileze, Zglobice, Rzegocina.

Turritella tricincta Bors. Taf. III, Fig. 15.

Turritella Riepeli Partsch. — M. Hörnes: Die fossilen Mollusken..., Seite 421—2, Taf. 43, Fig. 2.

Haustator tricinctus Bors. — Sacco: I molluschi... I. c. Seite 25—26, Taf. II, Fig. 28.

2 Exemplare, das größere ist 52 mm lang, 16 breit, hat 12 Umgänge (ohne Embryonalumgänge). Die Umgänge sind wenig gewölbt, mit 3 Reifen versehen, abgeplattet, breit und ebenso wie die Zwischenräume gefurcht. Die Reifen sind gleich stark, auf den ersten Windungen sind wahrscheinlich nur zwei Reifen, was ich nicht genau konstatieren kann, da die Exemplare abgerieben sind. Von der ähnlich aussehenden *T. vermicularis* Brocc. sind unsere Exemplare ganz verschieden.

Loc.: Korytnica (2 Exempl.).

Turritella Bieniaszi n. sp. Taf. III, Fig. 17—18.

Leider nur Bruchstücke, wenn auch in großer Anzahl vorhanden. Diese Art ist 50—60 mm lang, unten 14 mm breit. Die Umgänge sind wenig gewölbt, oben und unten eingezogen. Die Skulptur besteht aus drei starken Reifen, von denen sich einer in der Mitte der Windungen, die zwei anderen in der Nähe der Nähte befinden. In den Zwischenräumen liegen 3—5 schwache Querreifen, von denen der mittlere etwas stärker ist, manchmal aber an Stärke den drei Hauptreifen gleichkommt; auf den Anfangswindungen verschwindet der obere Hauptreifen.

Ich konnte in der mir zugänglichen Literatur keine dieser identische Art finden. Herr Dr. Schaffer in Wien hatte die Güte, meine Exemplare mit denjenigen des k. k. Naturwissenschaftlichen Hofmuseums zu vergleichen, und bestätigte meine Meinung, daß diese Art neu sei. Als ähnlich könnte nur *T. vermicularis* Brocc. bezeichnet werden.

Loc.: Dryszczów (sehr häufig, von Bieniasz gesammelt).

Turritella Bieniaszi Friedb. var. *carinata* mihi. Taf. III, Fig. 19—20.

Der untere Hauptreifen ist bedeutend stärker, weshalb er kiel-förmig absteht.

Loc.: Dryszczów.

Turritella Bieniaszi Friedb. var. *percincta* mihi. Taf. III, Fig. 21—22.

Auf den letzten Umgängen finden sich mehrere (4—6) Hauptreifen, aus ihrer Lage kann man ersehen, daß es Nebenreifen sind, welche bei dieser Varietät so stark wurden, wie die Hauptreifen.

Loc.: Dryszczów.

Turritella multicostata n. sp. Taf. III, Fig. 23—24.

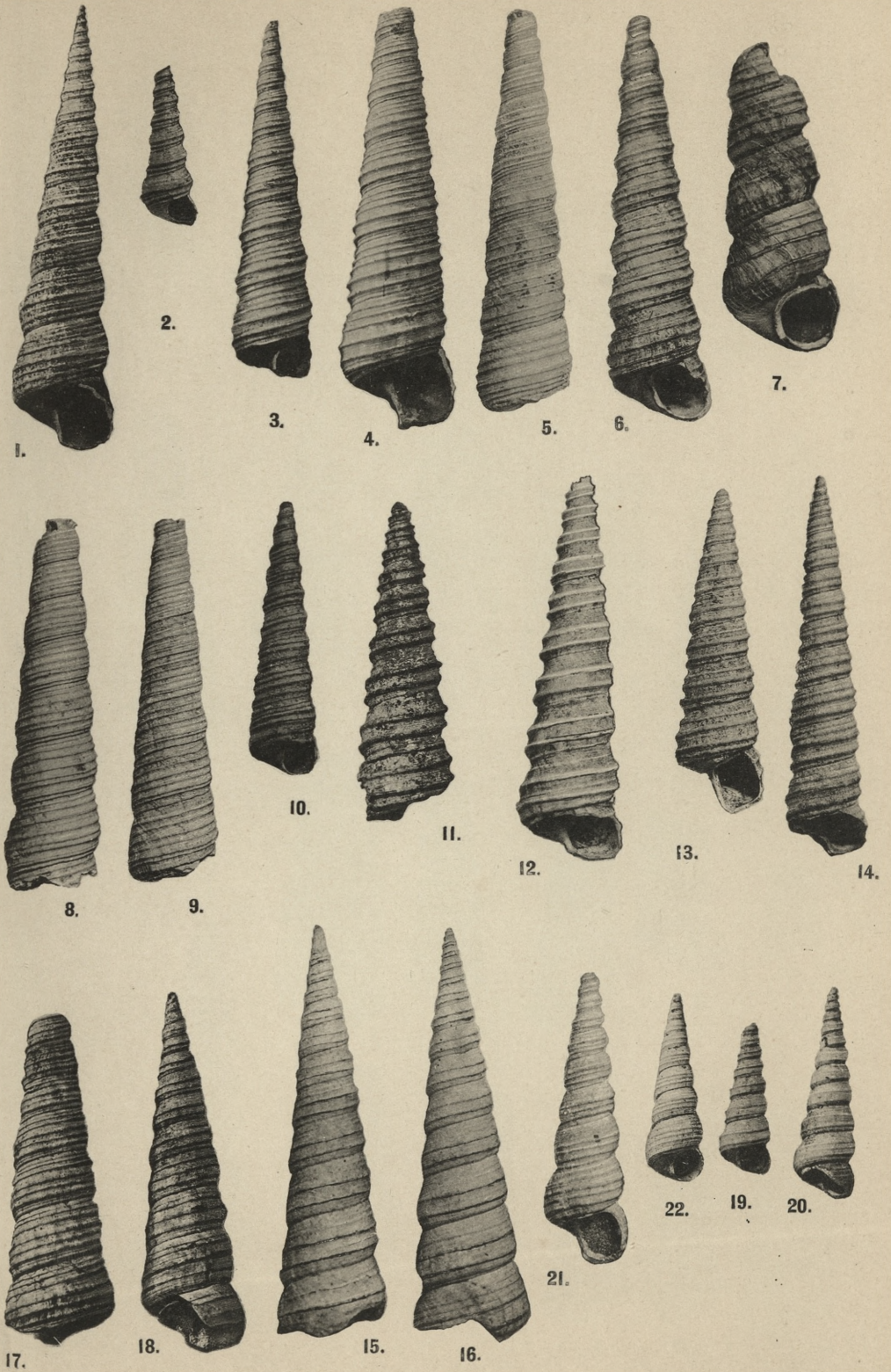
Turritella marginalis Brocc. — Friedberg: Młodszy miocen Gal. zach. l. c., Seite 75.

Die Gehäuse, welche ich früher als *T. marginalis* Brocc. beschrieben habe, stimmen mit dieser Art nicht ganz überein. Die Unterschiede bestehen in folgenden Merkmalen: 1) Die Windungen sind bei meinen Exemplaren weniger flach, sogar etwas gewölbt, 2) sie haben keinen Kiel im unteren Teile der Windungen, 3) die Querreifen sind stärker. Prof. Mariani in Mailand hatte die Güte, meine Exemplare mit den Original-Exemplaren von Brocchi zu vergleichen, und erklärte, daß sie nicht übereinstimmen.

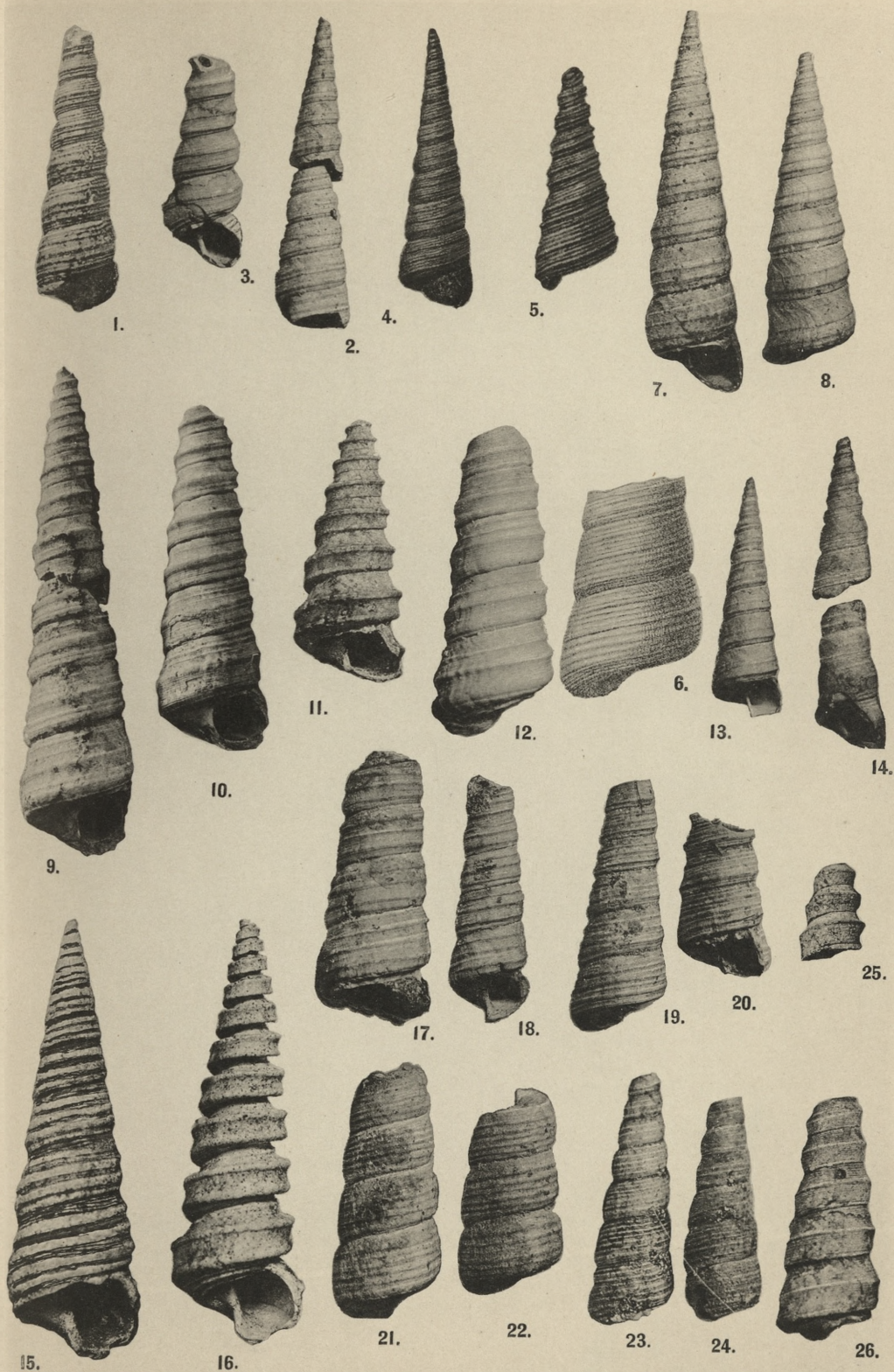
T. multicostata ist 40—50 mm lang, 11—12 mm breit, die Zahl der Windungen beträgt bis 15. Die Windungen sind oben und unten eingezogen, sie haben also keinen Kiel. Auf den Windungen sind zahlreiche (5—10) abgeplattete Querreifen, zwischen denen gewöhnlich je ein schwächerer gelegen ist. Die Zuwachsstreifen bewirken, daß die Querreifen manchmal wie gekräuselt erscheinen. Auf den letzten Umgängen ist die Zahl der starken Querreifen nicht selten geringer, weshalb diese Exemplare an *T. turris* Bast. erinnern, jedoch ist in diesem Fall der dritte, nicht der vierte Querreifen am stärksten. Bei manchen Gehäusen sieht man auf den ersten Umgängen zwei sehr schwach angedeutete Kiele.

Loc.: Blonie (häufig); bei größerem Materiale könnte man in dieser Art einige Varietäten unterscheiden.

Bei Zusammenstellung der beschriebenen Arten in Untergattungen erhalten wir folgende Einteilung:









<i>Turritella</i> (s. str.) <i>turris</i> Bast.
" (<i>Archimediella</i>) <i>Archimedis</i> Brong.
" " <i>dertonensis</i> Mayer.
" " <i>Pythagoraica</i> Hilb.
" " <i>Rabae</i> Niedźw.
" " <i>Dzieduszyckii</i> M. Łom.
" " <i>holubicensis</i> Friedb.
" " <i>pulchra</i> Friedb.
" (<i>Zaria</i>) ¹ <i>bicarinata</i> Eichw.
" " <i>subangulata</i> Brocc.
" (<i>Hauastator</i>) <i>tricincta</i> Bors.
" " <i>Bieniaszi</i> Friedb.
" " <i>multicostata</i> Friedb.

Tafelerklärung.

TAFEL II.

Fig. 1.	<i>Turritella turris</i> Bast, forma typica . . .	×1:2	Leognan, [bei Bordeaux.
Fig. 2.	" " " " " . . .	×1:2	Korytnica.
Eig. 3 i 4.	" " var. <i>badensis</i> Sacco . . .	×1:2	Korytnica.
Fig. 5.	" " var. <i>sexcineta</i> Friedb. . .	×1:2	Korytnica.
Fig. 6—7.	" " var. <i>oligocincta</i> Friedb. . .	×1:2	Korytnica.
Fig. 8—9.	" " var. <i>duplicata</i> Friedb. . .	×1:2	Korytnica.
Fig. 10.	" " var. <i>tricincta</i> Friedb. . .	×1:4	Hołubica.
Fig. 11.	" <i>Archimedis</i> Brong.	×1:2	Hołubica.
Fig. 12.	" " " " "	×1:2	Korytnica.
Fig. 13.	" <i>dertonensis</i> Mayer	×1:2	Korytnica.
Fig. 14.	" " var. <i>subconica</i> Sacco	×1:2	Hołubica.
Fig. 15—16.	" <i>Pythagoraica</i> Hilb., forma typica	×1:2	Podhorce.
Fig. 17—18.	" " var. <i>irregularis</i> Friedb.	×1:2	Podhorce.
Fig. 19—20.	" " var. <i>minor</i> Friedb.	×1:2	Hołubica.
Fig. 21.	" " var. <i>indigena</i> Eichw.	×1:4	Szuskowce.
Fig. 22.	" " " " " "	×1:2	Trościaniec.

TAFEL III.

Fig. 1.	<i>Turritella Pythagoraica</i> Hilb. var. <i>infirmior</i> Friedb.	×1:2	Błonie.
Fig. 2.	" " " var. <i>duplicata</i> Friedb.	×1:4	Podhorce.
Fig. 3.	" " " var. <i>ign.</i>	×1:2	Wołyn

¹) Sacco zählt diese Art zu *Archimediella* (mit Fragezeichen); es wäre vielleicht am besten, für sie eine besondere Untergattung aufzustellen.

Fig. 4.	<i>Turritella Rabae</i> Niedzw.	×1	(photogr. Reproduktion der Figur v. Niedzwiedzki) Grabowice
Fig. 5.	" " "	×4	(photogr. Reproduktion der Figur v. Niedzwiedzki) (Anfangswindungen) Grabowice.
Fig. 6.	" " "	×2	(photogr. Reproduktion der Figur v. Niedzwiedzki) (letzte Windungen) Grabowice.
Fig. 7—8.	" <i>Dzieduszyekii</i> M. Łomn.	×1·2	Leworda.
Fig. 9—10.	" <i>bicarinata</i> Eichw.	×1·2	Dryszczów.
Fig. 11.	" " "	×1·2	Hołubica.
Fig. 12.	" " "	×1·2	Dryszczów.
Fig. 13.	" <i>holubicensis</i> Friedb.	×1·4	Hołubica.
Fig. 14.	" <i>pulchra</i> Friedb.	×1·4	Dryszczów.
Fig. 15.	" <i>tricincta</i> Bors.	×1·3	Korytnica.
Fig. 16.	" <i>bicarinata</i> Eichw. var. <i>scalaria</i> Dub.	×1·2	Szuskowce.
Fig. 17—18.	" <i>Bieniaszi</i> Friedb.	×1·2	Dryszczów.
Fig. 19—20.	" " " var. <i>carinata</i> Friedb.	×1·2	Dryszczów.
Fig. 21—22.	" " " var. <i>percincta</i> Friedb.	×1·2	Dryszczów.
Fig. 23—24.	" <i>multicostata</i> Friedb.	×1·4	Błonie.
Fig. 25.	" <i>subangulata</i> Brocc. var. <i>polonica</i> Friedb.	×1·8	Proniatyn.
Fig. 26.	" " " " "	×1·2	Pustomyty.

15. *Opisy kilku rdzy Jawy. — Über einige javanische Uredineae.* Mémoire de M. M. RACIBORSKI m. c.

Jola javensis Pat.

N. Patouillard, Enum. des champ. récoltés par M. Massart, Ann. du jardin bot. de Buitenzorg, Suppl. 1. S. 119, Tab. XXV. Fig. 7—15.

Die Hyphen entwickeln sich zu einem Strang in dem Zentrum der jungen Kapsel der Moose, außerdem dringen sie unter die Haube und treten durch die Mündung des alten *Archeonium*-Halses nach außen, hier eine weiße, runde oder kurz ovale, 1—1·5 mm breite, schleimige Kugel bildend. Wo *Jola* reichlicher entwickelt ist, sind massenhaft die jungen Fruchtstiele der Moose mit solchen glänzenden, weißen Tröpfchen an der Spitze versehen. Diese Kugeln bestehen aus radiär verlaufenden, in der Schleimmasse eingebetteten, farblosen, verzweigten Hyphen, deren apikale Zellen zu lang ovalen, dünnwandigen, 20—25 μ langen, 5—7 μ breiten Teleutosporen werden. Die Teleutosporen keimen, ohne abzufallen, apikal, mit einer zylindrischen, leicht gekrümmten oder geraden, bis 70 μ langen, 5—6 μ dicken, an der Basis verschmälerten Basidie; diese

teilt sich quer oder etwas schief in vier Zellen, von denen jede auf einem Sterigma eine farblose, etwas gekrümmte zylindrische, 15—20 μ lange, 3—4 μ dicke Basidiospore trägt.

In der Teleutospore findet eine Verschmelzung zweier ursprünglichen kleinen Zellkerne zu einem runden, großen Zellkerne statt, welcher nachträglich in die Basidie übergeht und sich da zweimal teilt.

Jola findet sich auf verschiedenen Moosen auf dem Salak und dem Gedeh, so z. B. auf dem Wege mit nummerierten Bäumen bei Tijbodas, besonders häufig an den Baumstämmen bei Kandak badak.

Uromyces Thelymitrae Rac.

Die Haustorien sind sehr dünn und lang gestielt, an der Stitze blasig angeschwollen, mit langen Emporwölbungen und bis 20 μ breit. Die Unterseite der Blätter ist dicht mit braunen, ovalen oder länglich ovalen, bis 0·8 mm breiten, 1—2·5 mm langen Teleutosporensori übersät, welche unter der Epidermislage gebildet werden und diese Decke nachträglich abwerfen. Die Paraphysen fehlen. Die Teleutosporen sind gestielt, oval, braun, dickwandig, nicht eben, sondern mit flachen unregelmäßigen Verdickungen der Membran versehen, 22—26 μ breit, 33—36 μ lang, an der Spitze fast immer stärker, fast papillenförmig verdickt, wobei in der braunen Verdickungsmembran ein apikaler, breiter, mit farbloser Membran erfüllter Hoftüpfel vorhanden ist. Die Teleutosporenstiele 5—7 μ dick, 40—85 μ lang.

Auf den Blättern der *Thelymitra javanica* (Orchideae) auf der Spitze von Gedeh und Pangerango. *Aecidium Thelymitrae* Rac. gehört als Äcidialform hierher. Von Neu-Seeland ist an einer Thelymitra (?) *Uromyces citrifomis* Bab. gefunden worden, eine Art, welche vielleicht doch von der javanischen verschieden ist, da in der kurzen Diagnose in Saccardo, Sylloge IX, 295 fast kein Wort auf unsere Art paßt.

Uromyces discoideus Rac.

Die Hyphen leben interzellular und senden die Haustorien besonders in die Pallissadenzellen. Die Sori bilden sich zwischen der Epidermislage und der Pallisadenschicht, werden längere Zeit von der Epidermis bedeckt, und erscheinen unter der Lupe als braune,

runde, diskusartige, zerstreute, kompakte Häufchen auf der Blattoberseite. Pseudoperidie fehlt. In dem Sorus stehen nebeneinander unregelmäßig vermengt gestielte Uredosporen und gestielte Teleutosporen. Die Stiele beider Sporenarten sind farblos, 15—30 μ lang, 3—3·5 μ dick. Die Uredosporen sind länglich oval, an der Spitze abgerundet, an der Basis abgestutzt, dünnwandig, blaßgelblich, dicht mit spitzen Wärcchen bedeckt, mit 2—4 kleinen Poren in der Äquatorialebene, 23—28 μ lang, 9—11·5 μ breit. Die Teleutosporen sind ebenfalls gestielt, kuglig oder häufiger an der Basis verflacht, dickwandig, glatt, braungelb, nach wenigen Stunden (in reinem Wasser) mit einer geraden Basidie keimend, 12·5—16 μ breit und lang.

Auf der Oberseite der Blätter der *Acacia* sp. (eine sehr stachelige Art mit fein doppelt gefiederten Blättern) in Buitenzorg.

Uromyces Payenae Rac.

Auf Blättern bilden sich unregelmäßig zerstreute, runde zinnoberrote, 1—2 mm breite Flecke, auf deren Unterseite je ein, seltener je zwei oder drei runde, 0·3 mm breite Sori die Epidermis durchbrechen und als kleine gewölbte Häufchen erscheinen. Das Mycelium ist sehr reichlich entwickelt, doch in der Verbreitung sehr beschränkt, Haustorien klein, keulenförmig. Paraphysen oder eine Pseudoperidie fehlt. Die Uredosporen sitzen an langen, zylindrischen, farblosen, dünnwandigen, 80—90 μ langen, 7—9 μ breiten Stielen, sind ungefähr so lang wie breit, verkehrt kegelförmig, mit mit einem flachen, breiten Scheitel, geraden Seiten, spitzer Basis, 34—44 μ breit, 37—46 μ lang, mit einer braunen, dicken, inneren und einer farblosen äußeren Membran, welche mit kurzen, voneinander weit entfernten Stachelchen regelmäßig bedeckt, und an den oberen Ecken verdickt ist. Unmittelbar an der schmalen Anheftungsstelle der Uredospore liegen 3—4 runde Keimporen. Die Teleutosporen sitzen auf farblosen, dünnwandigen, 70—95 μ langen, 5—10 μ breiten Stielen, sind lang ellipsoidisch, blaßgelb, dünnwandig, glatt, an beiden Enden abgerundet, 46—54 μ lang, 21—25 μ breit, nicht abfallend, sondern in dem Sorus keimend. Die Basidie entsteht apikal durch Zerreißen der äußeren Membran, ist zylindrisch, 70—160 μ lang, an der Spitze durch quere Teilungen vierzellig. Die Sterigmen 26—32 μ lang, an der breiten Basis 5—7 μ dick. Die Basidiosporen kuglig, 14—19 μ breit, gleich mit einer 4 μ dicken Keimhype keimend.

Auf den Blättern der *Sapotaceae Payena Suringariana* Brek. in Depok bei Buitenzorg und *Payena Junghuniana* Miq. in Tjampea.

Uromycladium Tepperianum (Sacc.) Mc. Alpine.

Auf Blättern, Blattstielen, Blüten und Stämmen bilden sich große parenchymatische, gelbbraune, vom Periderm bedeckte, von zahlreichen Gefäßbündeln überzogene Gallen mit sehr zahlreichen Steinzellen. Diese Gallen erreichen an dickeren Ästen, wo ihr Wachstum jahrelang fort dauert, eine Dicke bis 15 cm und eine Länge bis 30 cm, auf Blättern und Blüten sind sie dagegen klein. Zwischen den Parenchymzellen wuchern die farblosen Hyphen und senden in dieselben die blasig erweiterten, manchmal gefingerten Haustorien. An noch jungen Gallen bilden sich die Spermogonien subperidermal, sind konisch zugespitzt, mit flachem oder flachkonkavem Boden, auf welchem eine dichte Schicht zylindrischer bis 20 μ langer Stielzellen entwickelt ist. Die Teleutosporensori sind rundlich oder unregelmäßig rundlich, 0,2—2 mm breit, dicht auf der ganzen Oberfläche der Galle zerstreut, jedoch unterhalb des Periderms gebildet und nach der Reife längere Zeit mit emporgehobenen Peridermlappen umzäumt. Paraphysen fehlen. Am Boden der Teleutosporensori steht eine dichte Schicht von zylindrischen Zellen, von welchen jede an der Spitze zwei Querwände besitzt. Die oberste dieser Zellen wird zu einer Teleutospore, die untere wächst subapikal nach außen und schneidet den Gipfelteil wieder als Teleutospore, die tiefer liegende Zelle des Trägers wächst ebenso subapikal neben der Querwand nach außen und gliedert eine neue Teleutospore ab. Auf einem Stiel sitzen also immer die Teleutosporen nebeneinander, zwei in gleicher Höhe und eine etwas (bis 10 μ) tiefer. Der gemeinsame Stiel der drei Teleutosporen ist 5—6 μ dick, 40—50 μ lang, die apikale, sterile Zelle des Stiels (zwischen den zwei apikalen Teleutosporen und der dritten, tiefer stehenden) bis 10 μ lang. Die Teleutosporen sind einzellig, braun, jede für sich auf einem gemeinsamen Stiel sitzend, mit fast flacher Basis, abgerundetem, unterem Rand und halbkugligem Vorderrand, mit einem runden apikalen Porus, von welchem radiäre, dicht gelagerte Membranleisten basipetal verlaufen. Die Teleutosporen sind 16—20 μ hoch, 22—25 μ breit.

Auf *Albizia montana*, in der alpinen Zone der Vulkane Java's überall vorhanden. Es ist die einzige javanische Uredinea, welche

auf die Physiognomie der Landschaft von Einfluß werden kann. An der oberen Waldgrenze, wo *Albizia moluccana* in vereinzelt stehenden Bäumchen häufig ist, findet man an denselben die braunen Knollen, manchmal dicht gedrängt, auch aus größerer Entfernung zwischen dem lichten Blattwerk sichtbar. So auf dem Gedeh Tankbanprau, Slamet, Merapi, Tenger und Lamongan.

In Wasser ausgesäte frische Teleutosporen keimen nicht.

D. Mc. Alpine, A new genus of Uredineae — *Uromycladium* (Annales mycologici 1905. Nr. 4) lieferte eine Beschreibung dieser Art aus Tasmanien und Australien und zählt sie der neuen Gattung *Uromycladium* zu; unsere Beschreibung ist nach lebendem Material gegeben.

Gerwasia, nov. Uredinearum genus.

Mycel interzellulär mit Haustorien, in den Lufthöhlen unter den Spaltöffnungen kleine Knäuel bildend, aus welchen eine (selten zwei) starke, an der Spitze kopfförmig angeschwollene Stammzelle emporwächst, die durch die Luftspalte nach außen kommt und auf der Oberfläche der kopffartigen Spitze einem *Aspergillus* ähnlich, mehrere dicke Sterigmen von Teleutosporen bildet. An der Spitze jeder Sterigme wird je eine kuglige, einzellige Teleutospore gebildet, welche gleich auf der Nährpflanze, ohne abzufallen, mit einer vierzelligen Basidie keimt und die vier Basidiosporen bildet.

Eine mit *Uromyces* und *Uromycladium* verwandte Gattung, welche andererseits trotz der kugligen Teleutosporen in der Art der Soribildung an die *Hemileia* und *Hemileiopsis* erinnert und so eine willkommene Zwischenstufe zwischen *Uromyces* und *Hemileiopsis* bildet.

Ich glaube, einige Bemerkungen über das Verhältnis der *Gerwasia* zu *Uromycladium* beifügen zu müssen, da die beiden Genera manchem vielleicht als identisch erscheinen könnten. Unter dem Gattungsnamen *Uromycladium* hat D. Mc. Alpine sieben in Australien auf Acaciaarten parasitisch lebende Uredineen zusammengefaßt, von welchen mir *Uromycladium Tepperianum* lebend bekannt ist. Entwicklungsgeschichtlich differieren *Gerwasia* und *U. Tepperianum* in gewisser Hinsicht in derselber Weise, wie *Aspergillus* und *Penicillium*. Bei *Uromycladium Tepp.* wird der Spitzenteil des Teleutosporenträgers durch zwei Querwände in drei Zellen geteilt, deren unterste von dem tiefer liegenden Mycelium nicht abgeli-

dert wird. Diese Zellen bilden also einen zylindrischen, septierten Faden. Die Spitzenzelle verwandelt sich ganz in eine Teleutospore, unterhalb der Querwand wächst die zweite Zelle seitlich aus, die zweite Teleutospore abgliedernd, endlich wächst auf dieselbe Weise die dritte, tiefer liegende Zelle seitlich aus, die dritte tiefer sitzende Teleutospore seitlich abgliedernd. Wachsen die beiden unteren Zellen nicht durch das Bewegungswachstum seitlich aus, so müßte eine dreizellige, sonst *Puccinia* ähnliche Teleutospore entstehen. Ganz ähnlich erscheint die Teleutosporenbildung bei *Uromycladium maritimum*, Tab. VI, Fig. 7 der Abhandlung von Mc. Alpine (Ann. mycol. III), sowie bei *U. notabile*. Dagegen zeigt gewöhnlich *Ur. maritimum* (VI Fig. 8, 9), sowie *U. alpinum* ein etwas fremdartiges Aussehen, da zwar die unterste (dritte) Zelle seitlich blasig auswächst, jedoch zu einer sterilen Blase wird. Bei *U. simplex* und *U. Robinsoni* wächst sogar die zweite Zelle zu einer sterilen Blase aus. Welche Bedeutung diese Blase hat, wissen wir nicht, vielleicht dient sie der Verbreitung der Teleutosporen, vielleicht der Lockerung der reifen Teleutosporensori. Warum die Blase steril bleibt, wissen wir ebensowenig, vielleicht treten keine Zellkerne in dieselbe ein, oder es unterbleibt die Konjugation derselben. Alle diese Fragen harren noch der Antwort, jedenfalls finden sich in dem Bereiche des *Uromycladium* Mc. Alpine zwei Gruppen von Arten, die vielleicht eine generische Trennung derselben rechtfertigen könnten.

Von beiden ist *Gerwasia* entwicklungsgeschichtlich verschieden. Der Teleutosporenträger ist hier ebenso wie bei dem *Aspergillus* der Konidienträger blasig erweitert und mit Sterigmen bedeckt. Die blasige Erweiterung, welche bei mehreren Arten von *Uromycladium* vorhanden ist, jedoch zuletzt entsteht und steril bleibt, ist bei *Gerwasia* primär, und ihr Plasma tritt durch die Sterigmen in die Teleutosporen.

Gerwasia Rubi Rac.

Auf der Unterseite der Blättter zerstreut stehende, orangegelbe rundliche oder unregelmäßige, 0.2—1 mm breite Flecke bildend, an denen rundliche, winzig kleine, wenigsporige Teleutosporenhäufchen einzeln oberhalb der Spaltöffnung liegen. Haustorien sehr klein, kuglig. Die durch die Spaltenöffnung hindurchwachsende Stammzelle 20—24 μ lang, zylindrisch, 4—6 μ breit, am Ende kuglig

erweitert und 8—12 μ breit. Aus dieser kugligen Blase, oberhalb der Spaltöffnung entspringen mehrere (4—15) nach oben gerichtete, kurze, an der Basis angeschwollene, 18—23 μ lange, 6—9 μ breite, zylindrische Sterigmen der Teleutosporen, an deren Spitze je eine nicht abfallende, genau kuglige, glatte, orangegelbe, 20—24 μ breite, dünnwandige Teleutospore gebildet wird. Seltener trägt eine primäre Sterigme keine Teleutospore an der Spitze, sondern (einer Stammzelle ähnlich) wiederum einige (2—4) Teleutosporen tragende Sterigmen. Die Teleutosporen keimen gleich nach ihrer Bildung apikal, mit einer geraden, 8—10 μ breiten Basidie von verschiedener Länge, mit vier 20—32 μ langen Zellen an der Spitze, deren jede auf einer seitlichen Sterigme eine eiförmige, an der Basis spitze, am Scheitel breit abgerundete, 9—10 μ breite, 14—16 μ lange Basidiospore trägt.

Auf den Blättern des *Rubus* sp., in dem Berggarten in Tjibodas auf dem Gedeh.

Puccinia Toddaleae Rac.

Auf den Blättern bilden sich orangegelbe, runde, hypertrophierte, 4—8 mm breite Flecke, welche oberseits flach, unterseits flach konvex sind. In diesen Flecken wuchert das Mycelium interzellulär und entsendet in die Mesophyllzellen kurze, kuglige oder keulenförmige Haustorien. Auf der Oberseite der Flecke werden subkutikulär die konischen, bis 200 μ breiten Spermogonien, dagegen mitten in dem hypertrophierten Mesophyll die kugligen oder flach ellipsoidischen Teleutosporensori gebildet, welche nachträglich auf der Unterseite sich öffnen. Die Höhe des Teleutosporensorus ist mit einer dünnen, farblosen pseudoparenchymatisch aufgebauten Mycelhülle ausgekleidet. Die Paraphysen fehlen. Die Sori sind bis 400 μ breit, die Teleutosporen zweizellig, dünnwandig, mit blaßgelber Membran, glatt, in der Mitte tief eingeschnürt, oval, an beiden Enden eingeschnürt mit einem apikalen Porus der oberen Zelle, 26—30 μ breit, 42—48 μ lang, mit einem bis 50 μ langen, bis 13 μ breiten, farblosen, dünnwandigen Stiel. Die einzelnen Teilzellen lösen sich nicht voneinander. Die Teleutosporen keimen gleich mit einer zylindrischen, geraden, farblosen, vierzelligen Basidie, welche 12 bis 14 μ dick ist. Die Basidiosporen sind oval, beiderseits abgerundet, farblos, 10 μ breit, 17—21 μ lang,

Auf den Blättern der stacheligen Riesensiane *Toddalea aculeata* auf dem Gedeih, unterhalb der warmen Quellen.

Trotz der gestielten, nicht zerfallenden Teleutosporen scheint diese Art der *Puccinia* (*Schizospora*) *Mitragynes* verwandt zu sein.

Puccinia Puspa Rac.

Auf den Blättern bilden sich braungrüne, rundliche, nicht hypertrophierte, 2—4 mm breite Flecke, auf deren Unterseite die Teleutosori, in 1 bis 3 konzentrischen Ringen, als bis 150 μ breite, runde, flache Polster unterhalb der Epidermislage angelegt werden. Paraphysen fehlen. Auf reich büschelig verzweigten gedrängten Hyphen bilden sich dicht nebeneinander stehende, fast farblose, glatte Teleutosporen. Die Stiele sind 12—14 μ dick, oben dickwandig, farblos, 36—55 μ lang. Die Teleutosporen sind zweizellig, äußerst unregelmäßig geformt, manchmal nur 16 μ breit, bis 80 μ lang, fast zylindrisch, in der Mitte nicht eingeschnürt, oder 25 μ dick, 35 μ lang, kurz oval, in der Mitte tief eingeschnürt. Am häufigsten sind die Formen, wo die untere Zelle bucklig an einer Seite angeschwollen ist, auch häufig sind solche, wo die Längsachsen der beiden Zellen schief gegeneinander gerichtet sind. An der Pflanze keimen die Teleutosporen nicht.

Vielleicht gehört hierher *Aecidium Puspa* Rac., wenigstens habe ich am Pangerango die Teleutosporen und Äcidialgallen auf einem und demselben Baum gefunden.

Auf *Acronodia punctata* auf dem Pangerango.

Sphaerophragmium Mucunae Rac.

Auf der Blattunterseite dicht gehäufte runde, kleine (150—240 μ breite), unterhalb der Epidermis angelegte, nachher offene Uredosori. Diese sind von einem kranzbödig nach innen gerichteten, zylindrischen, an der Spitze zugespitzten und da sehr dickwandigen, zwei- bis dreizelligen, 7—10 μ breiten, 45—65 μ langen Paraphysen umgeben. Die Uredosporen sind gestielt, ohne Stiel abfallend, unregelmäßig oval, gewöhnlich unsymmetrisch, 20—24 μ breit, 40—46 μ lang, dickwandig, an der Spitze manchmal (nicht immer) verdickt, mit feinen, häufig reihenweise angeordneten Stacheln bedeckt, braun und dickwandig, in der äquatorialen Fläche mit 4 Poren. Die Teleutosporensori sind von ähnlichen Paraphysen umgeben, oder die Teleutosporen stehen in den Uredolagern. Die Teleutosporen normal

vierzellig, ausnahmsweise drei bis fünf-zellig, alle Zellen in einer vertikalen Ebene liegend, so daß sie, von oben gesehen, nicht rundlich, sondern oval, braun und dickwandig aussehen. Die Oberfläche der Teleutosporen ist mit konischen, braunen Warzen oder mit abgestutzten Warzen bedeckt, die am Scheitel in 2—3 Stachelchen auslaufen, also glochidienähnlich, jedoch so lang wie breit sind. Die Teleutosporen sind 30—40 μ lang, 24—30 μ breit, 20—25 μ dick. Ihr Stiel ist dünnwandig, bis 4 μ dick, bis 25 μ lang.

Auf den Blättern der *Mucuna* sp. in Buitenzorg. Nächst verwandt mit den glochidiaten *Triphragmium*arten, jedoch sich von denselben durch die vierzelligen Teleutosporen unterscheidend.

Endophyllum Dichroae Rac.

Auf den Blättern orangegelbe, runde, 3—4 mm breite, oberseits flach vertiefte, unterseits hypertrophierte, konvexe, scharf begrenzte flache, auf deren Unterseite, in dem hypertrophierten Blattgewebe eingesenkt, die gelben Teleutosporenbecher stehen. Die Hyphen wuchern zwischen den Zellen der Nährpflanze, in welche lange, sehr reich büschelig verzweigte Haustorien ausgesandt werden. Die Teleutosporenbecher zylindrisch, sehr tief eingesenkt, bis 160 μ breit, bis 400 μ lang, von einer unscheinbaren Pseudoperidie umgeben, deren farblosen Zellen sehr flach, 6—8 μ dick sind. Die Teleutosporen sind eckig oval, glatt, orangegelb, dünnwandig, 18—20 μ breit, 28—38 μ lang, durch große viereckige Zwischenzellen voneinander getrennt. Die Zwischenzellen sind 7—9 μ lang und breit und bleiben bis zur Bildung der Basidien erhalten. Die einzelnen Teleutosporen lösen sich nämlich voneinander nicht ab, sondern bleiben alle miteinander zu einer kompakten Säule verklebt, welche über die Oberfläche des Bechers emporragt und an der Spitze Basidien bildet. Diese sind zylindrisch, gerade oder gekrümmt, 10—13 μ dick, von wechselnder Länge, vierzellig; die Sterigmen schmal konisch, 10—13 μ lang, die Basidiosporen kurz oval, glatt, dünnwandig.

Sehr gewöhnlich auf der Saxifragacea: *Dichroa cyanitis* Miq. auf dem Gedeh und Pangerango.

Von den übrigen *Endophyllum*arten unterscheidet sie sich durch die nicht zerstäubenden Teleutosporen. Während bei anderen *Endophyllum*arten die sterilen Zwischenzellen einer Teleutosporenreihe als Trennungszellen dem Verstäuben der Teleutosporen dienen und

dabei niedrig bleiben, sind solche bei *Endophyllum Dichroae* hoch und dienen zum Emporheben der einzelnen Teleutosporen über die nächst tiefere.

Skierka Agallocha Rac.

An rötlichen, runden, 1—3 mm breiten Flecken brechen an der Unterseite der Blätter durch die Spaltöffnungen weiße, fädige Teleutosporensäulen hervor. Das Mycelium ist in den Interzellularräumen sehr reichlich entwickelt und bildet an zahlreichen Blattstellen zwischen der Epidermislage und dem Schwammparenchym kompakte Lagen, welche hie und da die Epidermis emporwölben und ein Hymenium bilden. Die hymeniale Schicht bildet apikale Teleutosporen, deren Bildung längere Zeit andauert, indem immer neue Hyphenspitze je eine Teleutospore abgliedern. Durch Druck werden die Teleutosporen, welche miteinander verklebt sind, durch die jetzt etwas erweiterten und von gebräunten Zellen umgebene Spaltöffnung in der Form von äußerst dünnen, spinnengewebeähnlichen, 50—80* μ dicken, 1—8 mm langen, gewundenen, mit den benachbarten häufig verwebten, schneeweißen Säule herausgepreßt, welche aus miteinander verklebten, lanzettlichen, farblosen Teleutosporen besteht. Die Teleutosporen sind einzellig, 8—12 μ dick, 60—100 μ lang, glatt, dünnwandig, mit einer stumpfen, 18—25 μ langen Membranspitze. An der Basis der Teleutospore hängen gewöhnlich die kurzen Reste der undeutlichen Stielzelle. Die Teleutosporensori stehen bald einzeln über die Blattunterseite dicht, jedoch unregelmäßig zerstreut, bald in Ringen angeordnet.

Auf den Blättern des Mangrovestrauches *Excoecaria Agallocha* (Euphorbiaceae) sehr häufig am Strande bei Batavia.

Die Teleutosporen keimen auf der Säule mit Basidien, auf welchen auf kurzen Sterigmen kuglig birnförmige, 8—10 μ breite Basidiosporen gebildet werden.

Hamaspora gedeana Rac.

Auf den Blättern bilden sich orangegelbe, rundliche oder gelappte Flecke von 0.5 cm Breite, auf deren Unterseite rundliche, bis 250 μ breite Teleutosori stehen. Diese sind von farblosen, zylindrischen, an der Spitze abgerundeten, dichtstehenden Paraphysen umgeben, welche bis 80 μ lang und an der ein wenig angeschwollenen Spitze 6—8 μ breit sind. Die Teleutosporen sind zy-

lindrisch spindelförmig, 4—7-zellig, bis 0·4 mm lang, bis 7 μ an der Spitze breit. Die Teleutosporen sind orangegelb, miteinander nicht verklebt, ein Häufchen, jedoch keine Säule bildend, 16—22 μ breit, 110—140 μ lang, ihre mittleren Zellen gewöhnlich so lang wie breit, ihre Membran farblos, glatt, die oberste Zelle spitz, in ein kurzes membranöses Stachelchen (von 20 μ Länge) ausgezogen. Die Basidien sind gerade, zylindrisch, vierzellig, ihre Zellen lösen sich leicht voneinander ab und sind 10—11 μ breit; die Basidiosporen oval, bis 16 μ lang, 9—10 breit.

Auf den Blättern des *Rubus alpestris* auf dem Gedeh.

Von *H. longissima*, einer auf dem Gedeh, besonders aber in der unteren noch bebauten Strecke, zwischen Tjipanas, Singanglaja und Tjibodas sehr häufig vorkommenden Art durch die nicht zu einer langen Säule verwachsenen Teleutosporen, so wie durch die in nur kurzen Stachelchen ausgezogenen Teleutosporen verschieden.

Aecidium Elaeocarpi Rac.

Spermogonien subkutikular an der Blattoberseite, konisch 80—130 μ hoch und breit. Die Äcidien brechen an Blättern, oder häufiger, und dann stärker entwickelt, an jungen Zweigen in der Rinde, wo sich mächtige, 2—10 mm dicke und 2—4 cm lange Gallen bilden. Die Äcidienbecher zylindrisch, schmal und tief, bis 350 μ breit, 700—900 μ lang, an der Basis konisch verschmälert. Die Peridie an der Oberfläche nicht vorragend, aus flachen, tafelförmigen, farblosen Zellen gebildet. Die Zwischenzellen der Äcidiosporen besonders hoch und kubisch, nicht wie bei den meisten Uredineen schief, vor dem Verschwinden bis 12 μ hoch und breit. Die Äcidiosporen länglich, braungelb, feinwarzig, an den Enden entweder konisch, oder abgestutzt und unregelmäßig und da mit farblosen membranartigen Verdickungen (Reste der Zwischenzellen) versehen, 44—60 μ lang, 18—24 μ breit, in sehr regelmäßigen Etagen gebildet und manchmal mit den benachbarten (ähnlich wie die Teleutosporen der Gattung *Alveolaria*) verklebt.

Auf Blättern und Zweigen des *Elaeocarpus longifolius* Bl. in Depok bei Buitenzorg. Nahe verwandt, vielleicht sogar identisch ist dieses *Aecidium* mit der *Puccinia Puspa* Rac., welche auf *Acronodia punctata*, also einer verwandten Pflanze auf dem Gedeh wächst. Doch habe ich bei letztgenannter Pflanze wie Stengelgallen gesehen, wie solche bei *Elaeocarpus latifolius* auftreten.

Aecidium Paramignyae Rac.

Auf den Blättern bilden sich 2—5 cm breite, runde, oberseits blaßgrüne, unterseits gelbliche und ein wenig gewölbte Flecken. Das Mycelium lebt interzellulär und entsendet in die Zellen knäuelartig verzweigte Haustorien. Auf der Unterseite stehen nebeneinander die Spermogonien und Äcidienbecher. Die Spermogonien sind kuglig, tief in dem Gewebe eingesenkt, bis 200 μ breit und bis 240 μ hoch, mit einer Schicht von langen Spermienträgern an der ganzen Innenseite, und einer flach konvexen, breiten Mündung. Die Äcidienbecher sind zylindrisch, wenig länger als breit, bis 0.3 mm breit, bis 380 μ hoch, orangegelb, mit einer Peridie, welche nach dem Öffnen am Rande niedrige Lappen bildet. Die Zellen der Peridie sind flach, an der einen Seite mit Warzen und kurzen Leisten bedeckt, dickwandig bis 20 μ breit, 24—36 μ lang. Die Äcidiosporen sind kuglig, dünnwandig, sehr fein punktiert, 18—24 μ lang und breit.

Auf Blättern der *Paramignya Blumei* Harsk. in Tjampea bei Buitenzorg.

Aecidium Mori Barkley.

Auf beiden Blattseiten, Blattstielen und jungen Stengeln bilden sich orangegelbe, rundliche oder längliche, hypertrophierte, orangegelbe Flecke, welche häufig Verkrümmungen der infizierten Organe verursachen. Äcidienbecher ganz in das Gewebe eingesenkt, kuglig, bis 200 μ breit, dicht nebeneinander liegend. Haustorien länglich oval, gewöhnlich gekrümmt, unverzweigt. Peridialhülle schwer sichtbar, jedoch vorhanden, zerfällt bei der Reife und nach dem Öffnen in einzelne polygonale punktierte Zellen, welche 16—22 μ lang sind. Die Äcidiosporen kuglig, dünnwandig, orangegelb, sehr fein punktiert, 10—12 μ breit.

Auf Blättern und Zweigspitzen der *Morus indica* L. in Tjibodas, der Nährpflanze durch zu frühen Blattverlust sehr schädlich.

Offenbar mit *Caecoma Mori* Barkley, einem Parasiten der *Morus alba* aus Simla in Englisch Indien identisch. Die korrekte Beschreibung bei H. et V. Sydov et E. I. Butler, *Fungi Indiae orientalis* (Ann. myc. 1907. S. 507) stimmt mit der unsrigen gut überein.

Caeoma Anthurii Har. var. Alocasiae Rac.

Auf den Blättern bilden sich zunächst blaßgelbe, runde bis 5 mm breite Flecke, an deren Unterseite dicht gedrängt, jedoch unregelmäßig die winzig kleinen, 100—160 μ breiten und runden Caeomasori stehen. Später treten auf denselben Blättern über die ganze Blattunterseite unregelmäßig zerstreute, vereinzelt stehende Caeomasori auf, welche vielleicht der nachträglichen Infektion durch die zuerst gebildeten Sporen ihren Ursprung verdanken. Die Caeomasori sind unterhalb der Blattepidermis angelegt, die Epidermis oberhalb derselben wird gewölbt und zerreißt mit einer nur sehr kleinen runden oder länglichen Öffnung in der Mitte. Die Pseudoperidie wird aus unregelmäßigen, dünnwandigen und glatten Zellen gebildet. Die Sporen bilden sich nur in geringer Anzahl, sind in einer Reihe angeordnet, durch die vergänglichen Zwischenzellen getrennt, blaßgelb, dünnwandig, eiförmig rund, mit kleinen Wärschen bedeckt, 24—26 μ lang, 20—22 μ breit.

Auf Blättern der *Alocasia metallica* bei Buitenzorg, besonders in der Zone der Kaffeegärten.

Caeoma Anthurii Har., eine in Frankreich in den Glashäusern auf *Anthurium* beobachtete Art, hat größere Sporen mit stärkeren Stacheln.

Uredo moricola Henn.

Die Uredosori stehen auf der Blattunterseite, auf polygonalen, braunen, 0.5—1 mm breiten und langen zerstreuten Flecken, dicht gedrängt. Sie sind rundlich, sehr klein, 40—150 μ breit, ohne Paraphysen, unter der Epidermislage angelegt und sehr lange bedeckt. Die Uredosporen sind sehr kurz gestielt, leicht abfallend, eiförmig, orangegelb, dicht mit stacheligen Wärschen bedeckt, bis 20 μ lang, bis 14 μ breit.

In Blättern der *Morus Tokwe* in Buitenzorg, frühzeitiges Abfallen der Blätter verursachend.

Uredo Chonemorphae Rac.

Sehr häufig auf *Apocynae Ichnocarpus bantamensis*. Die Paraphysen bilden hier keinen Kranz um die Uredosori, sondern treten vereinzelt zwischen die gestielten Uredosporen. — Buitenzorg.

Uredo Vitexi Rac.

Auf der Unterseite der Blätter rundliche, gewöhnlich 60—150 μ , seltener bis 300 μ breite, gelbe Sori, welche unter der Epidermis angelegt werden, nachher flach gewölbt sind, ohne Paraphysen oder Pseudoperidie. Die Uredosporen auf kurzen Stielen, eiförmig, dünnwandig, feinstachelig, an der Spitze abgerundet, orangegelb, 14—18 μ breit, 19—25 μ lang.

Auf der Unterseite der Blätter von *Vitex leucoxydon* bei Dja-singa westlich von Buitenzorg, gewöhnlich durch das *Verticillium uredinearum* angetastet.

Uredo pedicellata Rac.

Mycelium interzellular, dick, farblos, mit kugligen Haustorien. Uredosori auf der Unterseite der Blätter und Bracteen, seltener auf der Oberseite entwickelt. Uredosori entweder sehr klein rundlich, 60 μ breit, gelbbraun, unterhalb der Luftspalten entwickelt und diese spaltend, oder subepidermal, die Epidermis abhebend, bis 0.8 mm breit und rundlich. Uredosporen an 35—48 μ langen Stielen, kuglig oder seltener sehr kurz eiförmig, 21—24 μ breit und lang, gelbbraunwandig, fein stachlig, mit 2—3 in der äquatorialen Ebene liegenden runden Poren.

Sehr häufig auf *Commelina* sp. variae in Buitenzorg.

Uredo orientalis Rac.

Mycelium interzellular, in die Zellen des Mesophylls, seltener in die Epidermiszellen kuglige, ovale oder unregelmäßig eckige, dickwandige, braunwandige, 17—24 μ lange, 13—19 μ breite Haustorien entsendend, welche auf einem Querschnitt, bei schwacher Vergrößerung den Sporen ähnlich sind. Die Uredolager bilden sich subepidermal, an beiden Blattseiten, besonders reichlich längs des Mittelnervs, bald dicht gedrängt, 45—200 μ breit, lange von der Epidermis bedeckt, nachträglich durch einen Riß geöffnet, flach gewölbt, an jungen Blättern Verkrümmungen der Blattfieder und dann Absterben der infizierten Stellen verursachend. Paraphysen oder Pseudoperidie fehlen. Die Uredosporen sind kurz gestielt, abfallend, kuglig oder eckig oval, dickwandig, glatt, ohne Poren, mit orangegelbem Inhalt, 17—22 μ breit, 22—28 μ lang, an der Spitze flach oder flach abgerundet.

In den Blättern des *Blechnum orientale* am G. Gagak westlich von Salak bei Buitenzorg. Durch die sonderbaren Haustorien, wie mir solche sonst unbekannt sind, auffallend. Da mir die Keimung der Sporen unbekannt ist, so habe ich auch ihre Uredonatur nicht sicher feststellen können.

16. *Pangium* z *miocœnisch warstw Jawy*. — *Über eine fossile Pangiumart aus dem Miozän Java's*. Note de M. M. RACIBORSKI m. e.

Fr. Junghuhn hat in der ersten Hälfte des neunzehnten Jahrhunderts auf Java, am Nordabhang der Bengbrenzwand eine reiche miozäne Flora entdeckt und gesammelt, die nachträglich von



Fig. 1. Photographie der Außenfläche des Samens von *Pangium Treubii*.

H. R. Göppert beschrieben und abgebildet wurde (Junghuhn, Java, 1857. Vol. III. 79--82; Goeppert, die Tertiärflora auf der Insel Java 1854).

Im Jahre 1900 habe ich die Lokalität der fossilen Pflanzen,

welche weit von den gewöhnlichen Verkehrsstraßen im Süden der Preanger Regentschaften, in der Nähe der indischen Küste liegt, zu Pferde über Sukanegara besucht. Die betreffende Stelle, am Wasserfall des Tjuruk Tjigembong östlich vom Dorf Tanggeung gelegen, ist von Junghuhn sehr genau bezeichnet. Ich konnte sogar in einem Nachbardorf einen gewissen Sundanesen, der seinerzeit Junghuhns Diener war, finden und konnte an einem Tage eine reiche Ausbeute fossiler Pflanzenabdrücke sammeln, die jetzt in dem botanischen Museum in Buitenzorg aufbewahrt sind. Die an fossilen Pflanzen reichste Stelle ist der Ostabhang der Kluft, in

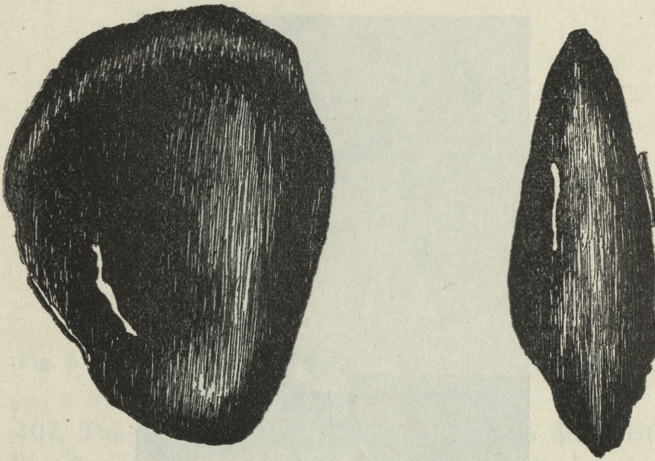


Fig. 2 und 3. Vorder- und Seitenansicht des Steinkernes von *Pangium Treubii*.

welcher das Wasser des Gembongbaches stürzt, und liegt, vom Niveau des Bassins unter dem Wasserfall gerechnet, einige Meter höher.

In den dunkelgrauen, fast bläulichen Schichten habe ich ebenso, wie Junghuhn nur Blattabdrücke gefunden. Über diesen Schichten findet sich dagegen eine Einlagerung weißgelblicher, schneidbarer Tuffmasse mit überlagerten Sandsteinbänken und diese verdient eine nähere Untersuchung, da darin ungeschichtet, wirt durcheinander Bruchstücke von marinen Bivalven und Echinodermen, hellbraune Bruchstücke von Blättern und Stengeln, sogar vereinzelt Früchte und Samen liegen. Wir haben in derselben eine fossile, miozäne Driftzone vor uns, wie solche sich überall an der Küste, einige Centimeter oberhalb des Fluthorizontes findet.

Die Bestimmung miozäner Blattabdrücke ist wohl eine der undankbarsten Aufgaben. So z. B. gehören die Bruchstücke, welche Goeppert a. a. O. als *Musophyllum truncatum* bezeichnet hat, und diejenigen, die ich gesammelt habe, einer Farnart *Nervatio Taeniopteridis*, welche den jetzt auf Java wachsenden *Acrostichum*-, *Asplenium*- oder *Stenochlaena*arten ganz ähnlich sind. Wegen der Bestimmung zahlreicher Blattabdrücke habe ich die kenntnisreichen javanischen Floristen Arsin, Jaheri, Paidan befragt und ihre Bestimmungen selbst nachträglich geprüft. Dabei hat sich herausgestellt, daß unter den vorliegenden Abdrücken viele *Quercus*, *Lau-*

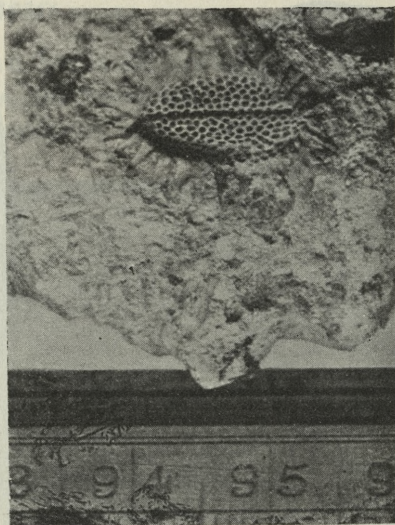


Fig. 4. Photographie des *Monocercarpus miocaenicus*.

raceen, *Dipterocarpus* und *Hopea*, *Michelia* (*M. velutina* ganz ähnlich), *Artocarpus* (*A. integrifolia* ganz ähnlich), weiter *Columbia javanica*, *Gnetum funiculare*, *Calamus* und *Wallichia* ähnliche Blattgestalten vorhanden waren. Doch haben alle diese Bestimmungen bei dem Mangel an Blüten oder Früchten nur wenig Wert.

Anders verhält es sich mit den fossilen Driftsamen. In der erwähnten fossilen Driftzone habe ich leider nur zwei Samen gefunden, da weiteres Sammeln durch die lästigen Lantanasträucher sehr erschwert war.

Der eine von ihnen ist dem rezenten *Pangium edule* ganz ähn-

lich, ich nenne die tertiäre Art *Pangium Treubii*. Von diesem sind einerseits die Abdrücke der äußeren Samentesta mit dem charakteristischen Verlauf der Gefäßbündel, andererseits der glatte Steinkern erhalten. Den Abdruck der Außenfläche gibt die Photographie Fig. 1 wieder, die Vorder- und die Seitenansicht des Steinkernes Fig. 2 und 3. Die Ähnlichkeit mit den Samen der rezenten Art ist frappant, und es scheinen mir alle Zweifel an der systematischen Zugehörigkeit der fossilen Art ausgeschlossen. *Pangium edule* gehört heute zu häufigen Funden unter den Driftsamens des östlichen, tropischen Asiens, A. F. W. Schimper (Die indo-malayische Strand-

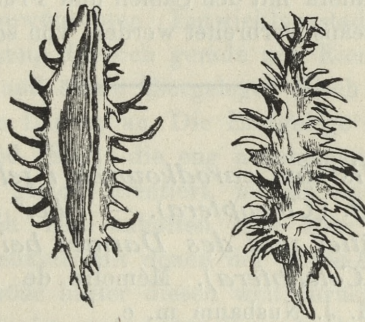


Fig. 5. Die Steinfrucht des rezenten *Monoceras lanceolatus*.

flora, S. 107, Taf. VII. Fig. 24) zitiert die Art aus der Drift Java und Keeling Inseln. Auf Java habe ich selbst die Samen derselben in der Drift von Tjitatjap und Pulu Merak gesammelt.

Die andere gefundene Driftfrucht konnte ich dagegen nicht sicher bestimmen. Es ist der Abdruck einer Steinfrucht, deren wahrscheinlich fleischiges Perikarp verfault ist. Auf dieser flachgedrückten Frucht, die aus zwei Fruchtblättern gebaut war, sind sehr zahlreiche stachlige Auswüchse vorhanden, wie ganz ähnliche bei dem rezenten *Monoceras lanceolatus* vorhanden sind. Ohne der Zugehörigkeit der Frucht genau sicher zu sein, bezeichne ich sie als *Monocercarpus miocenicus*. Auf der Fig. 4 ist die fossile Art, auf der Fig. 5 ist zum Vergleich ein Steinkern des *Monoceras lanceolatus* abgebildet.

Pangium wird jetzt in die Familie der Flacourtiaceen eingereiht, eine Familie, welche ebenso Warburg, wie Hallier junior (Über Juliania) als eine sehr alte Familie bezeichnen. In den „Natürlichen

Pflanzenfamilien“ Bd. VI, a, Seite 10 schreibt Warburg: „Mit „Sicherheit sind paläontologische Reste der Familie nicht nachgewiesen, bei dem Mangel charakteristischer Blattformen oder -neratur wird man sie wohl auch kaum als Flacourtiaceae bestimmen „können. Eher wird man hoffen dürfen, harte Samen, wie z. B. „Pangium-ähnliche Formen, fossil erhalten zu können“. Diese Erwartung hat sich jetzt erfüllt.

Andererseits zeigt der javanische Fund der tertiären *Pangium*art, sowie die früheren Funde von *Nipa* und anderen Driftfrüchten aus eozänen und miozänen Schichten Europas¹, daß die biologische Gruppe der Strandflora mit den Samen und Früchten, welche durch die Wellen des Ozeans verbreitet werden, von sehr altem Datum ist.

-
17. *O rozwoju listków zarodkowych i jelita u Gastroidea viridula Deg. (Coleoptera). — Über die Entwicklung der Keimblätter und des Darmes bei Gastroidea viridula Deg. (Coleoptera).* Mémoire de M. **JAN HIRSCHLER**, présenté par M. J. Nusbaum m. c.

(Planche IV).

1. Einleitung, Material, technisches Verfahren.

Meine Untersuchungen über die Entwicklung der Coleopteren, die ich an *Donacia*-Eiern begonnen habe und deren Ergebnisse demnächst veröffentlicht werden sollen, setzte ich weiter an Eiern eines anderen Chrysomeliden, *Gastroidea viridula* (*Gastrophysa raphani*) fort. Diese Form wurde zwar schon früher von Lecaillon untersucht, jedoch nur gelegentlich als Vergleichsobjekt behandelt, so daß eine genauere Nachuntersuchung sich jedenfalls als wünschenswert erwies. Dieses Studium bot hauptsächlich für mich ein sehr großes Interesse, da ich eben für *Donacia*, gegen Friederichs, die entodermale Herkunft des Mitteldarmes feststellen konnte; ich wollte nun an einer nahe verwandten Form meine eigenen Untersuchungen kontrollieren und dabei auch eine festere Basis für die kritische Betrachtung der Ergebnisse anderer Forscher, hauptsächlich derjenigen von Lecaillon und Friederichs, gewinnen. Wie ich schon hier bemerken will, erwiesen sich meine Untersuchungen lohnenswert, indem ich mich auch an dieser Form ganz

sicher von der entodermalen, nicht aber, wie Lecailon behauptet, ektodermalen Herkunft des Mitteldarmepithels überzeugen konnte; dabei liegen bei diesem Objekte die Entwicklungsverhältnisse so klar auf der Hand, wie sie nur selten bei Insektenembryonen zu finden sind, so daß wir zu dem obengenannten Schlusse rein auf Grund durchmusterter Schnittserien gekommen sind, ohne mehr oder weniger gewagte theoretische Deutungen zu Hilfe zu nehmen.

Das Material sammelte ich während der letzten Ferien (August) auf einigen sumpfigen, am Ufer des Flusses Strypa (Österr.-Podolien) gelegenen Waldwiesen; das Einsammeln eines ziemlich reichen Materials war in diesem Falle leicht, denn man konnte gleichzeitig alle gewünschten Entwicklungsstadien finden; neben trächtigen Weibchen, die sich gerade zur Eierablage anschickten, traf man jüngere und ältere Eiergelege, frisch ausgeschlüpfte und fast ausgewachsene Larven an. Die Eiergelege von *Gastroidea* enthalten je 30 — 50 Eier, die eng nebeneinander liegen und mit ihren Längsachsen gleich orientiert, mittels eines klebrigen Stoffes dem Blatte ziemlich fest anhaften. Die Eier sind länglich-oval, zeigen viel Ähnlichkeit mit denen der *Meloe*-Art und stehen nur hinsichtlich der Größe hinter diesen weit zurück. Das frisch abgelegte *Gastroidea*-Ei ist von lichtgelber Farbe, die während der weiteren Entwicklung in Orange übergeht, um noch später schmutzig-gelb und endlich schmutzig-grün zu werden. Die letztgenannte Farbe besitzen auch die frisch ausgeschlüpfte Larven, welche allmählich dunkler und zuletzt schwarz werden. Man kann sich also, bei gewisser Übung, schon im Freien beim Einsammeln der Eiergelege über ihr Alter gewissermaßen orientieren.

Da die *Gastroidea*-Eier ziemlich weich sind und beim Abpräparieren vom Blatte leicht verletzt werden, stach ich ein jedes am Blatte mittels einer feinen Nadel an, danach wurde das Blattstück, welchem das Eiergelege anhaftete, ausgeschnitten und alles in die Fixierungsflüssigkeit auf 4 — 10 Stunden gebracht. Zur Konservierung diente mir eine Mischung von Sublimatlösung und 3% wässriger Salpetersäure, worüber näheres in meiner früheren¹⁾ Arbeit (über *Donacia*) zu finden ist. Nachdem die Eier eine Reihe steigender Alkohole passiert hatten, wurden sie im 96° Alkohol von ihrer Blattunterlage mittels Nadeln befreit und auf 24 Stun-

¹⁾ Die Arbeit erscheint demnächst in der „Zeitschrift für wiss. Zoologie“.

den in eine Thioninlösung gelegt (siehe näheres in meiner Arbeit über *Donacia*), wodurch man eine färbige Differenzierung des Keimstreifs erzielt und hiernach die bei Anwendung bekannter Manipulationen in Paraffin eingebetteten Eier nach Belieben orientieren kann. So behandelte Eier ließen sich leicht samt Chorion und Epichorion in schöne Schnittserien zerlegen, deren Schnittdicke 5—6 μ betrug; sie zeigten also eine ebenso gute Schnittfähigkeit wie andere *Chrysomeliden*-Eier (*Donacia*), die im allgemeinen, was das technische Verfahren anbelangt, ein sehr anziehendes Studiumobjekt darstellen. Die Schnittserien wurden fast ausschließlich mit Delafield'schem Hämatoxylin gefärbt, wobei ich hie und da zur Nachfärbung Eosin oder Orange gebrauchte. Statt Zeichnungen legte ich dieser Arbeit eine Reihe mikrophotographischer Aufnahmen bei, welche uns mit möglichst größter Objektivität und Treue die hier geschilderten Entwicklungsvorgänge illustrieren.

Viele Entwicklungsvorgänge bei *Gastroidea* sind den nämlichen Prozessen bei *Donacia* fast gleich, so daß ich auf eine genauere Beschreibung derselben verzichten kann. Dies betrifft vor allem die Blastokinese, die Segmentierung des Keimstreifens und die Entwicklung der Körperanhänge, welche letztere Vorgänge ich in meiner Arbeit über die Entwicklung von *Donacia* eingehender behandelt habe. Auch die Entwicklung der mesodermalen Organe und Gewebe scheint bei *Gastroidea* nichts merkwürdiges darzustellen.

2. Erste Gastrulationsphase (Entwicklung des s.g. Blastoderms).

Am jüngsten Stadium, welches ich an Schnittserien durchmustert habe, finden wir die Furchungskerne bereits schon in zwei Partien geteilt; die erste kommt in der ersten Eihälfte im Dotter zu liegen und ist als Anlage der Dotterzellen zu betrachten, dagegen die übrigen Kerne, die in der Zukunft das periphere Epithel aufbauen werden, haben sich gegen die Eiperipherie verschoben und sind eine kurze Strecke unter dem Keimhautblastem anzutreffen. Das Keimhautblastem ist in der ganzen Äquatorialzone des Eies verhältnismäßig dünn, während es gegen die Eipole allmählich an Dicke zunimmt und hier am dicksten erscheint. Sowohl das Keimhautblastem wie auch die Plasmahöfe der im Innern des Dotters und der mehr peripher gelegenen Kerne entsenden zahlreiche äußerst feine Plasmafortsätze, welche die Dotterkügelchen netzartig

umgeben. Das Keimhautblastem ist von außen mit drei Membranen bedeckt; unmittelbar über ihm finden wir ein ganz zartes strukturloses Häutchen, die *Membrana vitellina*, darüber kommt eine dickere Membran, das Chorion, zu liegen und endlich von außen ist das ganze Ei mit einem Epichorion bedeckt, welches einigemale dicker als das Chorion und an der Dorsalseite mächtiger als an der Ventralseite des Eies entwickelt ist. Obwohl das Epichorion, hinsichtlich seiner Dicke, bei *Gastroidea* weit hinter dem bei *Donacia* zurücksteht, so zeigen doch beide durch ihre spongiöse Struktur viel Ähnlichkeit miteinander.

Während der weiteren Entwicklung wandern die peripher gelegenen Kerne knapp unter das Keimhautblastem, und man kann in diesen Stadien eine viel mächtigere Ansammlung derselben in der Nähe des vorderen Eipoles wahrnehmen, wie in anderen Eiregionen. Zuerst erreichen die Kerne die Eiperipherie an der Ventralseite, später, fast gleichzeitig am hinteren Eipol und an der Dorsalseite, während sie in der Umgebung des vorderen Eipoles noch ziemlich lange unter dem Keimhautblastem verharren. Durch tangentielle Teilungen der peripher gelegenen Kerne kommt es bald zur Entwicklung eines Epithels, welches aus kubischen Zellen aufgebaut ist und an der ganzen Eiperipherie mit Ausnahme des vorderen Eipoles anzutreffen ist. An der letztgenannten Stelle spielen sich ziemlich komplizierte Vorgänge ab: Die hier in größerer Menge vorhandenen Kerne weisen nämlich ein sehr verschiedenes Aussehen auf, indem einige ihre frühere Größe, die derjenigen der Dotterzellen gleich ist, beibehalten, während andere bedeutend an Umfang zugenommen und oft riesige Dimensionen erreicht haben; letztere tingieren sich äußerst schwach und zeigen das Chromatin zu mehreren Kügelchen zusammengeballt. Während manche von ihnen fast kugelrund oder oval sind, zeigen andere zahlreiche Ausbuchtungen, so daß ihre Konturen stark gelappt erscheinen. Durchmustern wir zum Vergleich eine größere Zahl von Präparaten, so kommen wir zu der Überzeugung, daß wir vor uns Kerne haben, die einer rapiden Fragmentation unterliegen, indem sie zugleich in mehrere kleine Kerne zerfallen, von denen jeder ein Chromatinkügelchen trägt. Diese kleinen, durch Fragmentation entstandenen Kerne verlieren bald ihre Membran, wobei das Chromatinkügelchen frei im Dotter zu liegen kommt und weiter in noch kleinere Granula zerfällt. Während die Degeneration der großen

Kerne fortdauert, wandern die übrigen, die den normalen Dotterkernen in den hinteren Eiregionen gleichkommen, in das Keimhautblastem ein und bringen das periphere Epithel auch hier zum Abschluß. Wir können nun an älteren Stadien, an welchen das s. g. Blastoderm schon vollkommen entwickelt ist, immer in der Nähe des vorderen Eipols ein ziemlich reiches Gerinsel antreffen, welches den degenerierten großen Kernen entstammt.

Diese Vorgänge erscheinen mir deswegen recht interessant, weil sie gewissermaßen Licht auf ganz ähnliche, aus der Entwicklung anderer Insekten bekannte Prozesse werfen; ich meine hier die Verhältnisse, die Schwangart bei *Endromis* und Dickel bei *Apis* beschrieben haben, wobei beide Autoren die Blastodermücke am vorderen Eipole als Blastoporus deuten. Ich habe schon in meiner Lepidopteren- und *Donacia*-Arbeit Gelegenheit gehabt, die Unrichtigkeit dieser Annahme auf Grund der den Arbeiten dieser Autoren entnommenen Zitate und vergleichend-morphologischer Erwägungen zu beweisen, und bin jetzt so glücklich, die Richtigkeit meiner Behauptung durch meine eigenen Untersuchungen bestätigt zu finden und die Blastodermücke nicht als Blastoporus, sondern als eine Stelle, an welcher das periphere Epithel zuletzt entwickelt wird, anzusehen. Dafür sprechen alle meine Präparate und auch die Darstellungen Schwangarts und Dickels. Wir haben in allen diesen Fällen nicht mit einem Einwandern von Zellen in den Dotter, sondern umgekehrt mit einem Heranwandern an die Eiperipherie zu tun. In meiner *Donacia*-Arbeit versuchte ich mit einiger Reserve die Blastodermücken zum Vergleich mit dem „primären Dorsalorgan“ bei *Donacia* heranzuziehen, jetzt scheint mir aber die zuvor ausgesprochene Meinung den Vorzug zu verdienen.

Kurz darauf, nachdem sich das Epithel an der ganzen Eioberfläche entwickelt hat, bekommt es in den verschiedenen Eiregionen ein verschiedenes Aussehen. An der ganzen Dorsalseite des Eies flacht es sich allmählich ab und verwandelt sich in ein Plattenepithel, an der Ventralseite bleibt es ziemlich unverändert, während in den lateralen Partien des Eies die Zellen an Höhe zunehmen und zu einem Zylinderepithel werden. Es kommt nun zur Differenzierung des peripheren Epithels in eine Hüllenzone, welche die Dorsalseite des Eies umgreift, und in eine Keimzone, welche sich auf die ventrale und die lateralen Partien erstreckt und etwas auf beide Eipole übergeht. Im Bereiche der Keimzone stellen uns die lateralen, aus

einem Zylinderepithel aufgebauten Partien die Seitenplatten dar, zwischen welchen ventral die Mittelplatte zu liegen kommt. Ein genaues Studium der eben beschriebenen Differenzierungsprozesse erlaubt uns, ein wenig tiefer in den Mechanismus dieser Vorgänge einzudringen, als es sonst gewöhnlich in anderen Fällen möglich ist. Ich habe nämlich in meiner *Donacia*-Arbeit hervorgehoben, daß wir uns die Plattenentwicklung im Bereiche des peripheren Epithels teils durch Differenzierungsvorgänge, teils aber durch rein mechanische Faktoren verursacht denken können. Ich konnte nun bei *Gastroidea* beobachten, daß in Stadien, in welchen die Differenzierung des peripheren Epithels eingeleitet ist, mitotische Figuren in großer Zahl nur längs der Dorsalseite des Eies anzutreffen sind, während die übrigen Eiregionen ihrer vollkommen entbehren. Man bekommt oft Bilder, an denen man alle Zellen an der Dorsalseite in Teilung begriffen findet, während man an anderen Stellen keine einzige Mitose antrifft. Dabei sind median längs der Dorsalseite gewöhnlich nur Asterstadien, mehr lateral aber Diasterstadien und lockere und dichte Spiremen zu sehen. Angesichts dessen bin ich geneigt, die letztgenannte Eiregion als eine Proliferationszone zu betrachten, in welcher eine längere Zeit sich immer neue Zellen entwickeln; letztere werden lateralwärts verschoben und üben auf die benachbarten Elemente einen Druck aus, dessen Richtung tangential zur Eioberfläche verläuft und das kubische Epithel allmählich in ein zylindrisches umwandelt. Obwohl ich nun weit davon entfernt bin, in diesem tangentialen Druck den einzigen differenzierenden Faktor sehen zu wollen, so scheint mir seine Rolle nicht ganz von untergeordneter Natur zu sein und meine Deutung ein gewisses Quantum von Wahrscheinlichkeit für sich zu haben. Sie wird auch noch weiter durch diese Tatsache gestützt, daß während an der Dorsalseite des Eies die Zellenproliferation fort dauert, es zu beiden Seiten der Mittelplatte dort, wo diese an die Seitenplatten angrenzt, zur Entwicklung von zwei Wülsten kommt, die in der Äquatorialzone des Eies am mächtigsten erscheinen und etwas medianwärts auf die Mittelplatte umgeschlagen sind. Wir könnten uns nun die Entstehung dieser Wülste, die als künftige Blastoporusränder zu deuten sind, auch als durch diesen tangentialen Druck verursacht denken.

Wie aus dem vorher Gesagten zu entnehmen ist, weicht die Entwicklung des peripheren Epithels bei *Gastroidea* etwas von den

nämlichen Vorgängen bei *Donacia* ab, während sich seine Differenzierung ähnlich wie bei der letztgenannten Form gestaltet. Als Hauptunterschied muß das Fehlen einer Genitalanlage hervorgehoben werden, die bei *Donacia* sehr frühe deutlich zu erkennen ist, während ich bei *Gastroidea* die Genitalzellen erst an einem späteren Stadium, wo der Keimstreif die Anatrepsis beginnt, auffinden konnte.

3. Zweite Gastrulationsphase (Entwicklung des s. g. unteren Blattes).

Sobald die Wülste zu beiden Seiten der Mittelplatte erschienen sind, beginnt sich letztere rinnenartig gegen den Dotter einzustülpen. Diese Einstülpung ist zuerst in der Äquatorialzone des Eies zu bemerken, während sie sich an älteren Stadien weiter gegen beide Eipole verbreitert. Gleichzeitig mit der Einstülpung der Mittelplatte kommt es unweit vor dem hinteren Eipole zur Entwicklung einer anderen rinnenartigen Einstülpung, deren Längsachse zur oroboralen Achse des Eies senkrecht orientiert ist und die von hinten durch einige mächtige Falte begrenzt wird; wir erkennen darin die Anlage der künftigen Amnionhöhle und der hinteren Amnionfalte.

In älteren Stadien hat der Gastrulationsvorgang bedeutende Fortschritte gemacht, wobei es auch gleichzeitig zur Ausbildung eines Keimstreifs gekommen ist, dessen stark erweitertes Vorderende uns die Anlage der künftigen Kopflappen darstellt. Wir finden die Mittelplatte auch in der vorderen Region des Keimstreifs etwas unter das Niveau der Seitenplatten versenkt (Textfig. I 1a.), wobei sie aber ihr plattenartiges Aussehen hier nicht verloren hat. In der ganzen mittleren Region des Keimstreifs erscheint sie bereits zu einem Rohr eingekrümmt (Textfig. I 1b.), wobei sich die Blastoporusränder an manchen Stellen, hauptsächlich dort, wo der Keimstreif in den Dotter einbiegt (ähnlich wie bei *Donacia*), so nahe aneinander gelegt haben, daß wir einen fast geschlossenen Schlauch vor uns zu haben glauben. Als ein charakteristisches Merkmal der *Gastroidea*-Entwicklung muß hervorgehoben werden, daß auch in diesen Stadien in der ganzen mittleren Region des Keimstreifs eine deutliche Grenze zwischen den Seitenplatten und der rinnenartig eingestülpten Mittelplatte zu erkennen ist; man kann sich also

in unserem Falle aufs deutlichste davon überzeugen, daß die Elemente der Seitenplatten an der Rinnenbildung vollkommen un-
 beteiligt sind und daß das eingekrümmte Rohr nur aus Zellen der
 Mittelplatte aufgebaut ist. Diese haben jetzt ihre Form ge-
 ändert, indem sie das Aussehen hoher, zylindrischer Epithelzellen
 angenommen haben und in einer Schicht zu liegen kommen. In der
 ganzen hinteren Region (Textfig. I 1c.) des Keimstreifs, die in den
 Dotter versenkt, von außen durch die hintere Amnionfalte bedeckt,

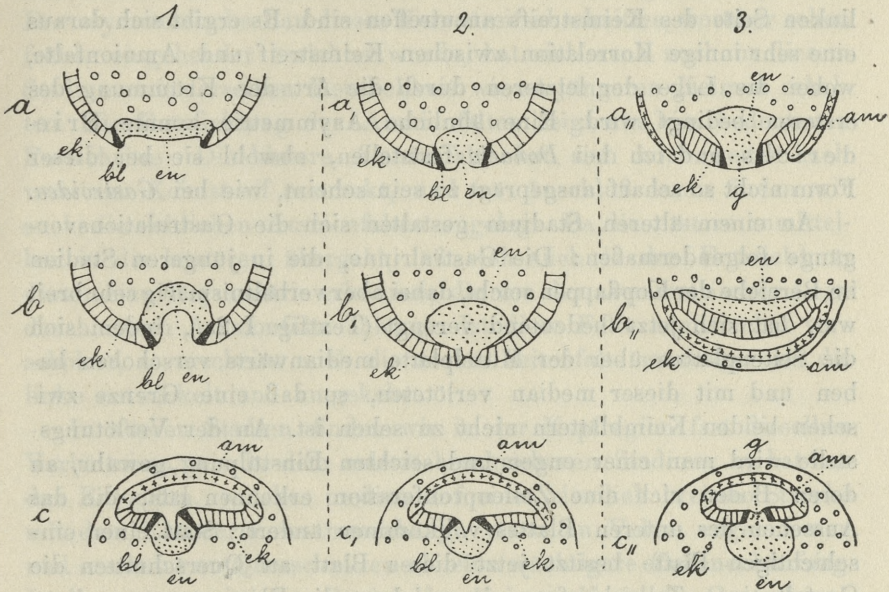


Fig. I. Schemata zur Erläuterung des Gastrulationsvorganges; *ek* — Ektoderm,
en — Entoderm, *bl* — Blastoporusrand, *g* — Gastralherd, *am* — Amnion.

sich dorsal zu krümmen beginnt, trifft man auch eine rinnenartige
 Gastraleinstülpung an, die hier ihre größte Tiefe erreicht. Die Grenze
 zwischen den Seitenplatten und der Mittelplatte ist hier verwischt,
 die seitlichen Wände, hauptsächlich aber der Boden der Gastral-
 rinne weisen eine bedeutende Dicke auf und scheinen an manchen
 Stellen aus mehreren Zellschichten zusammengesetzt zu sein. Nach
 hinten zu reicht die Gastralrinne bis knapp an die Genitalanlage
 und die hintere Amnionfalte, die sich ventral längs des Keimstreifs
 ziemlich weit nach vorn erstreckt und deren innere Lamelle aus

Elementen der Keimzone, die äußere aber aus Hüllenektoderm aufgebaut ist. Charakteristisch ist auch in diesem Stadium der asymmetrische Bau des hinteren Keimstreifsendes, welchem eine asymmetrische Entwicklung der hinteren Amnionfalte folgt. Die Medianebene dieses Keimstreifsabschnittes fällt nämlich nicht mit der Eimediane zusammen, sondern bildet nach rechts oder links mit ihr einen Winkel. Im ersten Falle finden wir die rechte Seitenplatte viel breiter als die linke und die ganze Amnionfalte rechts verschoben, während im zweiten Falle dieselben Verhältnisse an der linken Seite des Keimstreifs anzutreffen sind. Es ergibt sich daraus eine sehr innige Korrelation zwischen Keimstreif und Amnionfalte, wobei die Lage der letzteren durch die Art der Krümmung des ersteren bedingt wird. Eine ähnliche Asymmetrie konnte Friederichs und ich bei *Donacia* feststellen, obwohl sie bei dieser Form nicht so scharf ausgeprägt zu sein scheint, wie bei *Gastroidea*.

An einem älteren Stadium gestalten sich die Gastrulationsvorgänge folgendermaßen: Die Gastralrinne, die in jüngeren Stadien im Bereiche der Kopflappen seicht, dabei aber verhältnismäßig sehr breit war, hat sich jetzt bedeutend verengt (Textfig. I 2a.), indem sich die Seitenplatten über der Mittelplatte medianwärts verschoben haben und mit dieser median verlöteten, so daß eine Grenze zwischen beiden Keimblättern nicht zu sehen ist. An der Verlötungsstelle wird man einer engen und seichten Einstülpung gewahr, an deren Boden sich eine Zellenproliferation erkennen läßt, die das Aussehen des unteren Blattes vollkommen ändert. Statt einer einschichtigen Platte besitzt jetzt dieses Blatt an Querschnitten die Gestalt eines Zellenhaufens, in welchem die Elemente unregelmäßig über- und nebeneinander gelagert sind. In dem vorderen Abschnitte der mittleren Keimstreifsregion haben sich die gut gegen das untere Blatt abgegrenzten Seitenplatten auch etwas medianwärts verschoben, die Gastralrinne ist aber noch erhalten, obwohl sie viel seichter erscheint, als vorher, während das untere Blatt an Querschnitten eine eingekrümmte, aus einer Schicht sehr hoher Epithelzellen aufgebaute Platte darstellt. In der hinteren Partie der mittleren Keimstreifsregion (Textfig. I 2b.) berühren sich beinahe die Seitenplatten über dem unteren Blatte, eine Trennung beider Keimblätter ist aber noch nicht eingetreten; längs der Mediane hängt hier das Ektoderm mit dem Entoderm zusammen, wobei sich an der Verbindungsstelle eine ganz kleine Einstülpung wahrnehmen läßt. Das Aussehen des

Entoderms hat sich hier stark geändert: Statt als eine eingekrümmte, einschichtige Platte, wie dies etwas weiter nach vorn der Fall ist, erscheint es an Querschnitten als ein ziemlich mächtiger, median gelegener, abgerundeter Zellenhaufen, mit unregelmäßig gelagerten Elementen. Im hinteren Abschnitte des Keimstreifs (Textfig. I 2c.), der stärker als vorher gegen die Dorsalseite eingekrümmt ist, findet man die Gastralrinne noch erhalten; sie hat nur etwas an Breite und Tiefe abgenommen, wobei ihre seitlichen Wände und ihr Boden dick und aus mehreren Zellenschichten aufgebaut erscheint. Der asymmetrische Bau dieses Keimstreifsabschnittes, worüber schon früher eingehender berichtet wurde, hat sich auch noch in diesem Stadium mit derselben Deutlichkeit wie an jüngeren Keimen erhalten. Die Entwicklung der Amnionfalten zeigt uns hier bedeutende Fortschritte: Die hintere Amnionfalte hat sich noch weiter nach vorn am Keimstreif erstreckt, und im Anschluß daran finden wir auch die seitlichen Amnionfalten angelegt. Da die erstere unmittelbar in die letzteren übergeht, läßt sich auch in der Entwicklung dieser eine Asymmetrie erkennen, die von der asymmetrischen Lage der hinteren Amnionfalte abhängt. Ist diese Falte nach rechts verschoben, so erscheint auch die rechte Seitenfalte mächtiger als die linke entwickelt und umgekehrt.

In älteren Stadien finden wir in der Kopfregion fast dieselben Verhältnisse, wie in dem zuletzt beschriebenen Stadium, es hat nur das Entoderm, welches median auf einer ziemlich breiten Strecke mit dem Ektoderm zusammenhängt, etwas an Volum zugenommen und erscheint an Querschnitten als eine mächtigere Zellenanhäufung. In der ganzen mittleren Region des Keimstreifs ist die Gastralrinne spurlos verschwunden, die Seitenplatten sind längs der Mediane verwachsen, zeigen aber noch eine deutliche Verbindung mit dem unteren Blatte. Letzteres hat etwas an Umfang zugenommen und die epitheliale Anordnung der Zellen verloren, wobei es auch etwas lateralwärts erweitert erscheint und beiderseits etwa bis zur Mitte der Seitenplatte reicht. Nur im hinteren Abschnitte des Keimstreifs, der jetzt ganz auf die Dorsalseite des Eies umgeschlagen ist, hat sich noch die Gastralrinne erhalten, obwohl sie jetzt hier viel seichter geworden ist. Durchmustern wir aufmerksam Schnitte aus dieser Keimstreifspartie, so können wir uns eine ziemlich genaue Vorstellung davon machen, wie die Gastralrinne zum Abschluß gelangt. Wir erblicken nämlich am Boden der Rinne eine Verwachsungs-

naht, die dadurch entstanden ist, daß sich die seitlichen Blastoporuswände, in den tieferen Partien der Rinne, aneinander gelegt haben und verwachsen sind. Wir haben nun in unserem Falle mit einer deutlichen Konkreszenz der Blastoporuswände zu tun, so wie sie in typischer Weise bei anderen Tiergruppen (Amphibien, manchen Tunicaten) auftritt. Bemerkte sei noch, daß in diesem Stadium die Asymmetrie des Keimstreifs verschwunden ist, indem er der ganzen Länge nach symmetrisch gebaut erscheint. Unterdessen ist die hintere Amnionfalte mit den Seitenfalten zu einer Falte verwachsen, die bis zur Mitte des ventral gelegenen Keimstreifsabschnittes reicht, während von einer vorderen Amnionfalte noch nichts zu sehen ist. Die innere Lamelle der vorher genannten Falte ist ganz aus Keimepithel aufgebaut, während die äußere nur aus Hüllentoderm besteht.

In einem älteren Stadium gestalten sich die Verhältnisse fast gerade so, wie an dem zuletzt beschriebenen Keimstreifen, nur die entodermale Anhäufung am Vorderende hat noch mehr an Umfang (Textfig. I 3a.) zugenommen und hängt an Querschnitten median mit dem Ektoderm zusammen; in der ganzen mittleren Region des Keimstreifs ist dagegen zwischen beiden Keimblättern eine deutliche Grenze aufgetreten (Textfig. I 3b.), wobei das untere Blatt ein plattenartiges Aussehen angenommen hat und lateralwärts fast bis zu den Amnionlamellen reicht. Seine Zellen sind sich auf diesem Stadium alle gleich und zeigen stellenweise eine epitheliale Anordnung, stellenweise sind sie aber abgerundet und kommen unregelmäßig nebeneinander zu liegen. In der hinteren Partie des Keimstreifs, (Textfig. I 3c.), die auf die Dorsalseite des Eies umgeschlagen ist, ist die gastrale Einstülpung nur noch in der nächsten Umgebung des hinteren Endes vorhanden, während sie etwas nach vorn schon vollkommen fehlt und nur ein Zusammenhang zwischen beiden Keimblättern längs der Mediane erhalten bleibt. Das untere Blatt erscheint am hinteren Ende des Keimstreifs sehr mächtig entwickelt und aus vielen Zellenschichten aufgebaut, wobei zahlreiche Mitosen anzutreffen sind. In diesem Stadium bekommen wir zum erstenmal die vordere Amnionfalte zu Gesicht, die aus zwei nach hinten zugewendeten Lappen besteht; ähnlich wie bei der hinteren und den seitlichen Amnionfalten ist auch hier die innere Lamelle aus Keimepithel-, die äußere aus Hüllentoderm-Zellen zusammengesetzt. Da die hintere Amnionfalte samt den Seitenfalten,

mit denen sie verwachsen ist, schon bis an das Gnathocephaleum reicht, die vordere Amnionfalte aber bereits die erste Hälfte der Kopflappenregion bedeckt, bleibt somit nur noch ein kleiner Teil des Keimstreifs von Amnion frei.

Der vollkommene Abschluß der Amnionfalten kommt erst in einem älteren Stadium auf der Höhe des Gnathocephaleums zustande, wobei auch die Differenzierung beider Keimblätter bedeutende Fortschritte zeigt. Zwischen beiden ist eine deutliche Grenze längs des ganzen Keimstreifs aufgetreten, mit Ausnahme von zwei Stellen, nämlich in der hinteren Partie der Kopflappenregion und eine kurze Strecke vor dem hinteren Ende des Keimstreifs. In den beiden genannten Regionen hängt das Entoderm mit dem Ektoderm median aufs innigste zusammen, wobei an den Verbindungsstellen immer neue Zellen proliferiert werden. Beide Stellen können somit für Proliferationsfelder angesehen werden, an welchen der Gastrulationsvorgang noch fort dauert. Das in der Kopflappenregion gelegene Feld hat eine nahezu rundliche Form und ist verhältnismäßig ziemlich groß, wobei an ihm keine Einstülpung wahrzunehmen ist. Das hintere Proliferationsfeld ist erheblich kleiner und zeigt uns deutlich eine seichte Einstülpung, die für einen Rest der Gastralrinne angesehen werden darf. Angesichts dessen möchte ich beide Proliferationsstellen einfach als „Gastralherde“ bezeichnen, wozu uns ihre innige Beziehung zum Gastrulationsvorgang und zum rinnenartigen Blastoporus, auf jüngeren Stadien, berechtigt.

Kurzgefaßt, stellt sich somit der Gastrulationsvorgang bei *Gastroidea* folgendermaßen dar: Sobald es zur Entwicklung der bekannten drei Keimplatten gekommen ist, wird median am Keimstreif eine Gastralrinne angelegt, die zuerst in der mittleren Partie des Keimstreifes erscheint und sich von hier nach vorn und nach hinten erstreckt, wo sie ihre größte Tiefe erreicht. Zuerst kommt es zu ihrem Abschluß in der hinteren Partie des mittleren Keimstreifabschnittes, später in der vorderen und in der Kopflappenregion und zuletzt im hinteren Abschnitte des Keimstreifs, wo sie auf einer kleinen Strecke vor dem Hinterende noch lange erhalten bleibt. Nach dem Abschluß der Gastralrinne läßt sich noch immer ein Zusammenhang zwischen beiden Keimblättern in allen erwähnten Keimstreifsregionen feststellen. Eine Grenze zwischen beiden tritt erst in älteren Stadien auf: Sie erscheint zuerst in der mittleren Region und erstreckt sich bald auf den ganzen Keimstreif mit

Ausnahme von zwei Stellen, einer in der Kopflappenregion und einer anderen am hinteren Ende des Keimstreifs, an denen der Zusammenhang zwischen beiden Keimblättern bestehen bleibt und eine Entodermproliferation stattfindet. Die genannten Stellen bezeichne ich als „Gastralherde“.

4. Die Entwicklung des Darms.

An Sagittalschnitten durch etwas ältere Keimstreife erkennt man unmittelbar vor dem vorderen Gastralherde eine Zellenplatte die median im Ektoderm zu liegen kommt (Textfig. IIA u. Fig. 7.) und aus höheren Zellen, als die der benachbarten Ektodermelemente aufgebaut ist; da diese Platte in älteren Stadien eingestülpt wird und somit die Anlage des Stomodäums darstellt, nenne ich sie kurzweg Stomodäalplatte; nach vorn geht sie ohne scharfe Grenze in das kubische Ektoderm-Epithel des vordersten Kopflappenabschnittes über, nach unten ist sie überall deutlich vom Entoderm abgegrenzt, nach hinten hängt sie aufs innigste mit dem vorderen Gastralherde zusammen, an welchem der Gastrulationsvorgang fort-dauert. Von einer Stomodäaleinstülpung ist hier noch nichts zu sehen und auch am hinteren Ende des Keimstreifs ist es noch nicht zu einer Anlage des Proktodäums gekommen; nur der Gastralherd ist auch hier erhalten (Fig. 1.) und hat sich im Vergleich mit den jüngeren Stadien wenig geändert. Erst etwas später wird knapp hinter dem hinteren Gastralherde das Proktodäum eingestülpt, welches aber nicht durch eine plattenartige Anlage vorgebildet ist. Das vordere Gastralfeld übertrifft in diesem Stadium bedeutend die Stomodäalplatte an Größe, so daß es an mehr seitlichen Dorsoventral-schnitten, an denen von einer Stomodäalplatte nichts mehr zu sehen ist, immer noch mitgetroffen wird, während das hintere Gastralfeld (Gastralherd) von gleicher Größe mit der eben angelegten ganz seichten Proktodäaleinstülpung zu sein scheint. In diesem Stadium werden wir auch im Ektoderm zu jeder Seite des Proktodäums dreier kleiner Einstülpungen gewahr, die uns die Anlagen der malphigischen Gefäße darstellen und die derzeit noch außerhalb der Proktodäaleinstülpung zu liegen kommen, wobei sie erst später in die letztere verlagert werden — ein Verhalten, welches Grassi bei *Apis*, Carriere bei *Chalicodoma* und Wheeler bei *Doryphora* beschrieben haben. Im Bereiche des unteren Blattes lassen sich auch

bedeutende Änderungen wahrnehmen: In der Kopflappenregion, vor der Stomodäalplatte, ist das Entoderm einschichtig und erstreckt sich beiderseits bis an das Amnion, nach hinten wird es allmählich mehrschichtig und geht in eine mächtige Entodermanhäufung über,

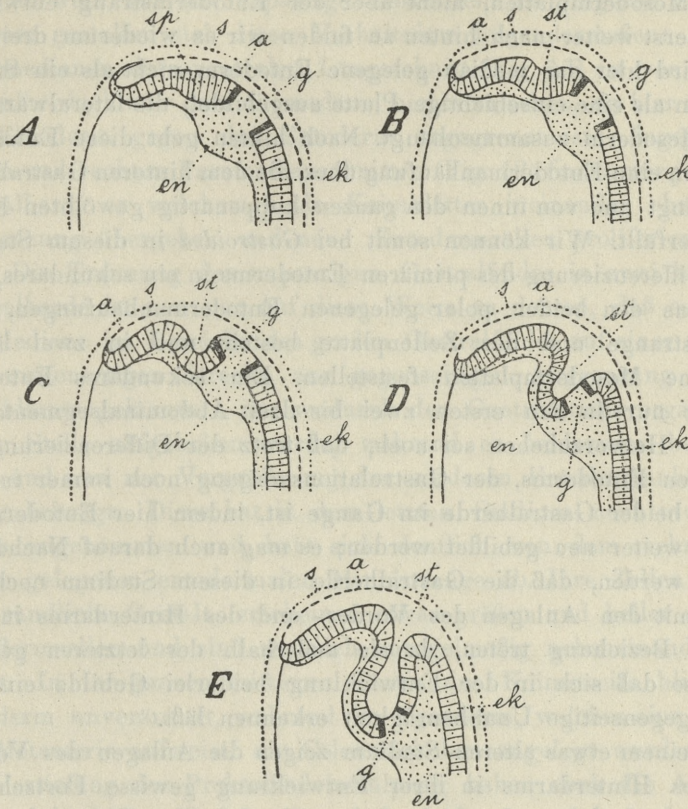


Fig. II. Schemate zur Erläuterung der allmählichen Verlagerung des Gastralherdes in den Bereich der Stomodäaleinstülpung; a — Amnion, s — Serosa, g — Gastralherd, sp — Stomodäalplatte, ek — Ektoderm, en — Entoderm, st — Stomodäum.

die median mit dem Gastralherde zusammenhängt und lateralwärts in doppelschichtige Platten, die das Mesoderm darstellen, ausläuft. Eine ähnliche Dreiteilung des primären Entoderms hat auch im Gnathocephaleum und in der ganzen Thorakalregion (Fig. 8) stattgefunden. Wir treffen hier überall median einen mächtigen entodermalen Zellenstrang an, der nach vorn mit der Entodermanhäufung

fung verbunden ist und welchem beiderseits zweischichtige Mesodermplatten anliegen, in denen hie und da die Lumina der Cölomsäckchen zum Vorschein kommen. In den ersten Abdominalsegmenten erscheint das untere Blatt zweiteilig, indem hier nur die lateralen Mesodermplatten, nicht aber der Entodermstrang entwickelt wird; erst weiter nach hinten zu finden wir es wiederum dreiteilig, nur wird hier das median gelegene Entoderm nicht als ein Strang, sondern als eine einschichtige Platte ausgebildet, die lateralwärts mit dem Mesoderm zusammenhängt. Nach hinten geht diese Entodermplatte in eine Entodermanhäufung über, die dem hinteren Gastralherde entspringt und von innen den ganzen kuppenartig gewölbten Keimstreif erfüllt. Wir können somit bei *Gastroidea* in diesem Stadium eine Differenzierung des primären Entoderms in ein sekundäres, welches aus den beiden polar gelegenen Entodermanhäufungen, dem Zellenstrange und der Zellenplatte besteht und in zwei lateral gelegene Mesodermplatten feststellen. Ein sekundäres Entoderm scheint nur in den ersten zwei bis drei Abdominalsegmenten zu fehlen. Hervorzuheben sei noch, daß trotz der Differenzierung des primären Entoderms, der Gastrulationsvorgang noch immer im Bereiche beider Gastralherde im Gange ist, indem hier Entodermelemente weiter neu gebildet werden; es mag auch darauf Nachdruck gelegt werden, daß die Gastralherde in diesem Stadium noch gar nicht mit den Anlagen des Vorder- und des Hinterdarms in eine nähere Beziehung treten, da sie außerhalb der letzteren gelegen sind, so daß sich in der Entwicklung beiderlei Gebilde eine gewisse gegenseitige Unabhängigkeit erkennen läßt.

In einem etwas älteren Stadium zeigen die Anlagen des Vorder- und des Hinterdarms in ihrer Entwicklung gewisse Fortschritte: Die Stomodäalplatte hat sich ein wenig unter das Ektodermniveau eingestülpt (Fig. 12 u. Textfig. II B.), während die Proktodäaleinstülpung ziemlich bedeutend an Tiefe zugenommen hat. Die Wände der ganz frisch angelegten Stomodäaleinstülpung sind aus ähnlichen Elementen aufgebaut, wie sie uns schon in jüngeren Stadien aus der Stomodäalplatte bekannt sind; nach vorn und nach unten ist das Stomodäum deutlich gegen das untere Blatt abgegrenzt, nach hinten aber hängt es mit dem Gastralherd zusammen, welcher jetzt schon am hinteren Rande der Mundeinstülpung zu liegen kommt und in seinem Bau verändert erscheint. Das ursprünglich unpaarige, große Gastralfeld ist nämlich in zwei kleinere Felder zerfallen,

worüber man sich aus Serien von dorsoventralen Längsschnitten überzeugen kann. Beide Felder sind längs der Mediane voneinander getrennt und liegen der Stomodäaleinstülpung von hinten und beiderseits etwas lateral an; lateralwärts reichen sie auch nicht mehr so weit, wie das unpaarige Gastralfeld an jüngeren Stadien. Genauer gestalten sich diese Verhältnisse folgendermaßen: An einem medianen dorsoventralen Längsschnitt (Fig. 16) ist von einem Gastralherde hinter dem Stomodäum nichts zu sehen, da hier überall das Ektoderm gegen das Entoderm abgegrenzt ist; dagegen an linken und rechten Paramedianschnitten (Fig. 12) finden wir je einen Gastralherd, an welchem beide Keimblätter ineinander ohne jede Abgrenzung übergehen und neue Entodermzellen proliferiert werden. Die Trennung des unpaarigen Gastralfeldes in zwei kleinere Gastralherde ist nun nur auf diese Weise zu deuten, daß es längs der Mediane im Bereiche des großen Gastralfeldes auf einer schmalen, streifenartigen Strecke zur gegenseitigen Abgrenzung beider Keimblätter gekommen ist, wodurch der Gastrulationsvorgang an dieser Stelle aufgehoben wurde, während er beiderseits bestehen blieb und nun zur Vergrößerung der vorderen Entodermanhäufung weiter beiträgt. Diese hat in dem letzten Stadium noch etwas an Größe zugenommen und hebt sich deutlich von dem mehr nach hinten gelegenen entodermalen Mittelstrange ab. Ihre Zellen haben eine rundliche Gestalt, erscheinen etwas größer und heller als die Ektodermzellen und sind sämtlich unregelmäßig nebeneinander gelagert. In der ganzen mittleren Partie des Keimstreifs blieb das Entoderm unverändert, während im Mesoderm, welches eine deutliche Metamerie aufweist, die Cölomsäckchen angelegt wurden. Mit der Vertiefung der Proktodäaleinstülpung haben auch die Anlagen der malphigischen Gefäße ihre frühere Lage geändert, da sie in das Proktodäum hineinverschoben erscheinen. Auch der hintere Gastralherd wurde ein wenig nach hinten verschoben und wir finden ihn teilweise in die Proktodäaleinstülpung verlagert, wobei er aber seinen unpaarigen Bau beibehalten hat.

In einem nächst älteren Stadium hat sich das Stomodäum etwas tiefer nach innen eingestülpt, und gleichzeitig damit fand auch eine Verlagerung beider dahinter gelegenen Gastralherde statt. Eine Serie von dorsoventralen Längsschnitten gibt uns folgende Bilder: Am Medianschnitt (Fig. 9) erscheint das Stomodäum am tiefsten und seine Wand, sowie auch das gleich dahinten gelegene Ektoderm ist

überall deutlich vom Entoderm abgegrenzt. Die Stomodäalwand ist aus auffallend hohen Epithelzellen aufgebaut, die am Einstülpungsrande oft in Teilung begriffen sind. Der Stomodäaleinstülpung legen sich von vorn schichtenweise oder vereinzelt Zellen des unteren Blattes an, während sie nach hinten zu an die mediane Entoderm-anhäufung angrenzt. An linken und rechten Paramedianschnitten (Fig. 10 u. Textfig. II C.) ist die Stomodäalwand nur vorn und am Boden der Einstülpung vom Entoderm abgegrenzt, dagegen hängt sie nach hinten mit der Entodermanhäufung zusammen, und eine solche Verbindung beider Keimblätter läßt sich auch eine kurze Strecke hinter dem Stomodäum wahrnehmen. Die ganze Keimpartie, an welcher eine Grenze zwischen beiden Keimblättern nicht zu finden ist, stellt uns den linken, eventuell den rechten Gastralherd dar, welcher hier größtenteils in die Stomodäaleinstülpung verlagert wurde, während nur sein hinterer und seitlicher Abschnitt, worüber uns mehr lateral gelegene Paramedianschnitte belehren (Fig. 11.), noch oberflächlich gelegen ist. Die ganze hintere Wand des Stomodäums ist somit aus einem medianen schmalen Ektodermstreifen und aus den beiderseits gelagerten Gastralherden, die nach hinten mit der Entodermanhäufung in Verbindung stehen, aufgebaut. Am Proktodäum, wo ein unpaariger Gastralherd erhalten bleibt, gestalten sich die Verhältnisse ähnlich, so daß auf eine genauere Beschreibung derselben verzichtet werden kann. Dasselbe betrifft auch das in der mittleren Keimstreifspartie gelegene Entoderm, an welchem keine nennenswerten Veränderungen eingetreten sind, während sich im Mesoderm die bekannten Differenzierungsvorgänge abspielen.

Abhängig von der weiteren Vertiefung des Stomodäums, werden endlich die Gastralherde ganz in den Bereich der Einstülpung verlagert, so daß am hinteren Rande der Stomodäaleinstülpung überall eine deutliche Grenze zwischen beiden Keimblättern zu erkennen ist. Die Stomodäalwand ist wie vorher am Boden der Einstülpung und nach vorn gegen das untere Blatt abgegrenzt, während sie hinten (Fig. 6) fast vollkommen aus den Gastralherden (Textfig. 2D) besteht, die mit dem Entoderm verbunden sind und median teilweise miteinander verschmolzen sind, so daß sich auch an Medianschnitten (Fig. 17) eine Grenze zwischen Ekto- und Entoderm nur mit Mühe auffinden läßt. Das paarige Auftreten der Gastralherde ist also nur eine vorübergehende Erscheinung, indem sie schon in die-

sem Stadium und noch deutlicher in älteren miteinander zu einem unpaarigen Gastralherde verschmelzen.

In einem etwas älteren Stadium, in welchem die Stomodäaleinstülpung unbedeutend tiefer erscheint, finden wir auch noch den jetzt schon unpaarigen Gastralherd erhalten, dessen Lage sich aber etwas geändert hat. Während er sich vorher an der hinteren (ventralen) Stomodäalwand befand, hat er jetzt etwas an Größe abgenommen und kommt am unteren Rande des Stomodäalendes (Fig. 4 u. Textfig. II E) zu liegen. Hier findet eine rege Zellenproliferation statt, worüber uns eine ziemlich große Entodermanhäufung belehrt, die nach hinten mit dem entodermalen Zellenstrang zusammenhängt. Dieser Strang hat die Gestalt eines stumpfen Zapfens, der sich dem Dotter anlegt und nach hinten gerichtet ist. Welche Zellen am Aufbau dieses Zapfens beteiligt sind, ob es die Zellen sind, die der früher beschriebenen Entodermanhäufung entstammen, oder Entodermelemente, die frisch aus dem Gastralherde hervorgewuchert sind, wäre, wie es mir scheint, sicher zu entscheiden unmöglich, da sie alle vollkommen gleich aussehen und ineinander übergehen. Darum erscheint es mir am wahrscheinlichsten, daß dieser Zellenzapfen aus Elementen zusammengesetzt ist, die während verschiedener Phasen der Gastrulation aus dem Gastralherde proliferiert wurden und somit alle als Entodermzellen zu betrachten sind. Ähnlich wie am Stomodäum gestalten sich die Verhältnisse auch am Proktodäum (Fig. 2).

In nächst älteren Stadien, an welchen die Stomodäaleinstülpung noch weiter in die Länge gewachsen erscheint, sehen wir die Entodermproliferation am Gastralherde noch reger von statten gehen. Es wird nämlich an der erwähnten Stelle aus dem Zellenzapfen eine mächtige, unpaarige, aus Entodermzellen aufgebaute Schaufel gebildet, die sich dem Dotter anlegt und nach hinten in zwei laterale Zipfel ausläuft. Sie ist aus mehreren Zellschichten zusammengesetzt, wobei die unmittelbar an den Dotter angrenzende, ihre Elemente gewissermaßen epithelartig angeordnet zeigt, während die darunter gelegenen Zellen unregelmäßig nebeneinander zu liegen kommen und nach unten, wo es bald zur Entwicklung des Epineuralsinus kommt, ziemlich lose zusammenhängen. Die am Dotter epithelförmig angeordneten Zellen, welche in diesem Stadium auch dorsalwärts übergreifen und das Stomodäalende kappenartig bedecken, stellen uns die Anlage des Mitteldarmepithels dar, welche somit als entodermal bezeichnet werden muß. Gleichzeitig damit spie-

len sich in der mittleren Keimstreifpartie, im Bereiche des median gelegenen Entoderms, höchst interessante Vorgänge ab. Der in der Gnathal- und Thorakalgegend gelegene Entodermstrang, löst sich in einzelne Elemente auf, wobei zugleich zwischen Keimstreif und Dotter ein ziemlich enger Spalt entsteht, in welchem wir den Epineuralsinus zu erblicken haben. Auf ähnliche Weise wird auch die Entodermplatte in der hinteren Abdominalregion aufgelöst, so daß ihre Elemente frei in Epineuralsinus zu liegen kommen. Die abgetrennten Entodermzellen gleichen in ihrem Aussehen den Zellen der entodermalen Schaufel am Stomodäalende, zeigen aber auch hie und da eine birnenförmige oder sternartige Gestalt, wobei ihr Plasma feine Plasmaausläufer entsendet, die als nutritive Einrichtungen zu deuten sind. Ähnlich, wie am Stomodäalende, wird auch am Proktodäalende eine mehrschichtige Schaufel gebildet, deren Elemente sämtlich dem Gastralherde entstammen und die entodermale hintere Anlage des Mitteldarmes darstellen. Ein großer Teil der hinteren Entodermanhäufung wurde dabei am Aufbau dieser Schaufel verbraucht, während sich ihr Rest in einzelne Zellen aufgelöst hat, die jetzt frei im Epineuralsinus flottieren.

Im nächsten Stadium hat sich der Gastralherd am Stomodäum erheblich verkleinert (Fig. 15), wobei auch die Schaufel dünner erscheint, da sich die darunter gelegenen Zellen von ihr losgelöst haben und jetzt frei in dem schon auch in dieser Gegend des Keimstreifs deutlich entwickelten Epineuralsinus, einzeln oder zu mehreren zusammengeballt, angetroffen werden. Unterdessen ist auch eine große Zahl von Entodermzellen aus dem Epineuralsinus an den Dotter gewandert und hat ihn ziemlich dicht von der Ventralseite inselartig besetzt. Die Entoderminseln, die am Dotter zu sehen sind, zeigen einerseits ihre Elemente ziemlich lose verbunden, während man andererseits an vielen Stellen eine epithelartige Anordnung der Entodermzellen wahrnehmen kann. Ich bin nun geneigt, die Differenzierungsvorgänge im Bereiche des in der mittleren Keimstreifpartie gelegenen Entoderms folgendermaßen zu deuten: Ein Teil der Entodermzellen wandert an den Dotter heran und vereinigt sich zu inselartigen Anhäufungen, die als Mitteldarmanlagen aufzufassen sind, während ein anderer Teil im Epineuralsinus verharret und samt den dort gelegenen Zellen, die den polaren Entodermanhäufungen entstammen, sich in Blutzellen verwandelt.

Wir gehen nun zu einem Stadium über, welches insofern inter-

essant erscheint, als die Gastralherde am Prokto- und Stomodäalende (Fig. 13 u. 5) verschwunden sind und somit die Entodermproliferation an den genannten Stellen aufgehört hat. An medianen, dorsoventralen Längsschnitten treffen wir am Stomo- und Proktodäalende oft gar keine Entodermzellen an, dagegen in manchen Fällen sind hier Entodermzellen zu finden, die sich den Grenzlamellen anlegen oder etwas ventral am Dotter als inselartige Mitteldarmanlagen (Fig. 13 u. 14) erscheinen. In der ganzen mittleren Keimstreifspartie sind dafür reichlich Entoderminseln (Fig. 18) vorhanden, die sich durch Zellteilungen vergrößern, miteinander verschmelzen und den Dotter von der Ventralseite bedecken. Links und rechts finden wir an Paramedianschnitten im Anschluß an das Stomo- und Proktodäalende (Fig. 5) die paarigen Entoderm-schaukeln, welche in diesen Stadien bereits das Aussehen von Streifen angenommen haben und deutlich eine epithelartige Anordnung ihrer Elemente erkennen lassen. Nachdem sich die vom Stomo- und Proktodäum gegen die Mitte heranwachsenden Entodermstreifen miteinander vereinigt haben, nehmen sie allmählich an Breite zu und verschmelzen medianwärts mit den Entoderminseln zu einer Entodermplatte, welche später zu beiden Seiten am Dotter emporwächst und sich dorsal über dem letzteren zu einem Rohre abschließt. Damit ist die Entwicklung des Mitteldarms vollendet.

Das Epithel des frisch entwickelten Mitteldarms ist aus kubischen Zellen (Fig. 3) aufgebaut, welche allmählich eine zylindrische Form annehmen. Der Mitteldarm stellt uns nicht einen blind geschlossenen Sack, wie von anderer Seite behauptet wurde, sondern ein echtes Rohr dar, welches nach vorn und nach hinten an die Grenzlamellen des Vorder- und Hinterdarmes angrenzt. Bald darauf treten alle drei Darmabschnitte miteinander in Verbindung, indem beide Grenzlamellen einer Degeneration unterliegen. Noch vor dem Ausschlüpfen der Larve lassen sich im Bereiche des Mitteldarmepithels Regenerationsvorgänge wahrnehmen, die aus der Insektenmetamorphose bereits hinreichend bekannt sind.

Die Entwicklung des Mitteldarmes fasse ich nochmals kurz zusammen: Während es nach dem Abschlusse der Gastralrinne, längs der ganzen mittleren Keimstreifsregion und im vorderen Kopflappenabschnitte zur Abgrenzung des Entoderms vom Ektoderm kommt, bleiben in der hinteren Kopflappenpartie und unweit vor dem Hinterende des Keimstreifs zwei Proliferationsfelder erhalten, an denen

der Gastrulationsvorgang fort dauert, indem hier noch immer Entodermzellen neugebildet werden. Die Proliferationsfelder, die ich Gastralherde genannt habe und die als Blastoporusreste zu deuten sind, werden nach der Entwicklung des Stomodäums und Proktodäums in die genannten Einstülpungen verlagert und kommen zuletzt am unteren Rande des Stomo- und Proktodäalendes zu liegen, wobei sie während dieser ganzen Verlagerungsvorgänge tätig bleiben und immerfort Entoderm proliferieren. An den zuletzt erwähnten Stellen angelangt, entwickeln sich aus dem seitens ihrer gebildeten Entoderm zwei schaufelartige Mitteldarmanlagen, wonach der Gastrulationsvorgang eingestellt wird und am Stomo- und Proktodäalende eine deutliche Grenze zwischen Ekto- und Entoderm zu finden ist. Gleichzeitig mit dem Erscheinen der schaufelartigen Mitteldarmanlagen läßt sich in der mittleren Partie des Keimstreifs das median gelegene Entoderm in einzelne Zellen auf, von denen viele an den Dotter heranwandern und seine Ventralseite inselartig besetzen. Jede Entodermschaukel differenziert sich zunächst in zwei lateral gelegene Streifen, die von vorn und hinten gegen die Mitte wachsen und sich hier miteinander wie auch medianwärts mit den inselartigen Mitteldarmanlage zu einer Platte vereinigen. Diese Platte umwächst den Dotter und gelangt an der Dorsalseite zum Abschluß, womit die Mitteldarmentwicklung vollendet ist.

Auf Grund meiner Untersuchungen an *Gastroidea* bin ich zu dem Schlusse gelangt, daß sich der Mitteldarm in unserem Falle multipolar, und zwar aus zwei Entodermschaukeln und aus mehreren Entoderminseln entwickelt, und daß er somit ein reines Entodermprodukt ist, wobei eine Beteiligung des Ektoderms vollkommen ausgeschlossen ist.

5. Einige Bemerkungen zur Frage über die Gastrulation und die Mitteldarmentwicklung bei den Insekten.

Ich habe schon in meiner Arbeit über die Lepidopteren Gelegenheit gehabt, zu der Heymons'schen theoretischen Deutung des Gastrulationsvorganges bei den Insekten Stellung zu nehmen, wobei ich mit ihm die Entwicklung des s. g. Blastoderms als erste Gastrulationsphase betrachte, während ich die zweite Gastrulationsphase, von ihm abweichend, in der Differenzierung des unteren Blattes erblicke. Andererseits habe ich in meiner Arbeit über *Donacia*, auf Grund

der einschlägigen Literatur, alle Formen zusammengestellt, denen auch *Donacia* und *Gastroidea* zuzuzählen sind und bei welchen man im Bereiche des frisch entwickelten sogenannten Blastoderms einige Zellenbezirke unterscheiden kann, die als Anlagen der später zur Differenzierung gelangenden Keimblätter gedeutet werden müssen. Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß die Entwicklung einer Mittelplatte und zweier Seitenplatten unter den Insekten eine verhältnismäßig weit verbreitete Erscheinung ist und daß sie sich bei verschiedenen Formen findet, die zu phylätisch älteren und jüngeren Insektengruppen (Orthopteren, Coleopteren, Hymenopteren) gehören. Ich möchte nun hier an einige, an einer anderen Stelle gemachten und die zweite Gastrulationsphase betreffenden Erörterungen erinnern und dabei näher auf den morphologischen Wert der Mittelplatte eingehen.

Aus dem Vergleich der Vorgänge, die sich am Cumulus bei den Myriopoden abspielen, mit den Differenzierungsprozessen, die bei den Insekten längs der Keimstreifsmidiane zu beobachten sind, versuchte ich, vom rein morphologischen Standpunkte, den Beweis zu erbringen, daß die Entwicklung des unteren Blattes als Gastrulationsvorgang zu deuten und das untere Blatt somit als primäres Entoderm zu betrachten ist. Meine Annahme stützte ich auf die Tatsachen, daß am Cumulus primitivus bei den Myriopoden (Heymons: Scolopendra) ein mächtiger Zellenhaufen proliferiert wird, aus dem sich, beim gleichzeitigen Längewachstum des Keimstreifes nach vorn, allmählich zwei laterale Mesodermstreifen und ein über ihnen und auch, was mir wichtig erscheint, median zwischen ihnen gelagertes Entoderm herausdifferenziert, wobei die Entodermbildung gar nicht auf den Cumulus beschränkt ist, sondern auch teilweise in den vorderen Partien des Keimstreifes stattfinden kann. Da aus dem undifferenzierten Zellenhaufen am Cumulus sowohl Mesowie auch Entodermzellen hervorgehen, fühlte ich mich berechtigt, auf ähnliche Verhältnisse aus der Entwicklung anderer Tiergruppen gestützt, ihn als primäres Entoderm zu bezeichnen. Ganz ähnlich wie bei den Myriopoden am Cumulus, kommt es am Insektenkeimstreif längs seiner Mediane zur Entwicklung eines Zellenstranges, welcher zuerst aus undifferenzierten Zellen aufgebaut ist und unter das Ektoderm verdrängt wird; danach zerfällt er in eine mediane und zwei lateral gelegene Platten, seine Differenzierung stimmt also vollkommen mit derjenigen, welche bei den Myriopoden, von

dem Cumulus ausgeht, überein. Auch wenn wir nun ganz von der künftigen, weiteren Entwicklung aller drei Zellenstreifen absähen, so scheint ihr morphologischer Wert aus dem Vergleich mit den Vorgängen bei Myriopoden schon genügend bewiesen zu sein; sie können nämlich nur als sekundäres Entoderm und Mesoderm gedeutet werden, während der undifferenzierte Zellenstrang, respektive Zellenplatte, welcher sie entstammen, als primäres Entoderm zu bezeichnen ist. Gewisse Unterschiede in der Entwicklung des unteren Blattes bei Myriopoden und Insekten scheinen mir von untergeordneter Bedeutung zu sein, wobei sie leicht aus der Entwicklung des Keimstreifes bei den ersteren und letzteren erklärt werden können: Bei den Myriopoden ist der Keimstreif zuerst ganz kurz und somit kann auch das primäre Entoderm zuerst nur auf einer kleinen Stelle proliferiert werden und sich erst später bei fortschreitendem Längewachstum des Keimes in die bekannten Produkte differenzieren; dagegen bei den Pterygoten ist der Keimstreif von Anfang an viel länger, und Hand in Hand damit entwickelt sich auch das primäre Entoderm auf einer längeren Strecke. Wir haben hier also nur mit quantitativen Unterschieden zu tun, während das wesentliche bei beiden Tiergruppen gleich bleibt. Erwähnt sei noch, daß die Entwicklungsvorgänge bei den Apteriygoten (*Lepisma*) auch diese Unterschiede schön überbrücken, da bei den letzteren der Keimstreif zuerst auch kurz und ovalförmig ist und im Zusammenhang damit auch die Entwicklung des unteren Blattes viel Ähnlichkeit mit den nämlichen Vorgängen bei Myriopoden zeigt. Deuten wir also mit Heymons den Cumulus der Myriopoden als einen soliden Blastoporus und die Vorgänge, die sich an ihm abspielen, als Gastrulation, so müssen wir die Entwicklung des unteren Blattes bei den Insekten auch als einen Gastrulationsvorgang auffassen, wobei die Anwesenheit oder Abwesenheit einer medianen Rinne Nebensache ist. Halten wir aber an dieser Annahme fest, so müssen wir weiter die Mittelplatte, aus der fast ausschließlich das untere Blatt bei den meisten Insekten (mit Ausnahme von *Gryllotalpa*) hervorgeht, als eine Entodermanlage ansehen, die schon weit früher zum Vorschein kommt, bevor noch die zweite Gastrulationsphase begonnen hat. Da an den Seiten der Mittelplatte, bei einigen Formen (Wheeler: *Doryphora*, Lecaillon: *Clytra*, Heider: *Hydrophilus*, Graber: *Lina*, Carriere: *Chalicodoma*, Hirscher: *Donacia* und *Gastroidea*) mehr oder weniger stark entwickelte

Wülste beschrieben worden sind, können wir diese auch als prädisponierte Blastolabia ansehen, die bei vielen Insekten nach dem Abschluß der Gastrulation miteinander verwachsen und ihre Zellenproliferation einstellen, während sie bei manchen Formen, wie *Chalicodoma* und *Gastroidea*, auf einer kleinen Strecke vorn und hinten am Keimstreif fortdauernd tätig bleiben und die zuvor beschriebenen Gastralherde begrenzen.

Beurteilen wir das untere Blatt nach seinen Produkten, so erweist sich sein entodermaler Charakter auch als vollkommen klar, indem eine Reihe von Forschern in den letzten Jahren und auch vorher daraus das Mitteldarmepithel herleiteten. Diesen Ergebnissen sind die Angaben Heymons', Schwartzes, Deegeners, Lecaillons und Friederichs' entgegenzustellen, die das Mitteldarmepithel als ein ektodermales Produkt ansehen und es aus dem Boden der Stomo- und Proktodäaleinstülpung hervorwuchern lassen. Vielleicht wird mir Heymons, so wie Schwangart den Vorwurf machen, ich richte mir die Sache zu bequem ein, indem ich den zuletzt erwähnten Angaben nicht zustimmen will; dennoch scheint mir mein Bedenken berechtigt zu sein, und ich weise hier vor allem auf die Untersuchungen Nusbaums u. Fuliński's an *Phyllodromia* hin, wo gegen Heymons die entodermale Herkunft des Mitteldarmes bewiesen wurde; ich erinnere weiter an die Untersuchungen von Schwangart und an die meinigen, die jenen von Schwartze und Toyama entgegenzustellen sind, und an meine neuerdings an *Donacia* und *Gastroidea* angestellten Studien, wo ich gegen Lecaillon und Friederichs auch die entodermale Herkunft des Mitteldarmes überzeugend nachweisen konnte. Angesichts dessen, bleibt mir nur der einzige Schluß möglich, den Mitteldarm der Insekten als ein entodermales Produkt anzusehen, welches seine Entwicklung den Entodermzellen des unteren Blattes verdankt, wobei ich von einem Teile der Dotterzellen, was Schwangart bei *Endromis* angenommen hat, auf Grund meiner Untersuchungen an Lepidopteren-Embryonen nichts bemerken konnte. Ob die Annahmen eines „latenten Entoderms“, wie es Heider tut, oder zweier heterochronischer Varianten zwischen der Entwicklung des unteren Blattes und des Stomo- und Proktodäums im Sinne Heymons', die Meinungsverschiedenheiten zu schlichten imstande sind, lasse ich, angesichts ihres rein hypothetischen Charakters, unentschieden.

Fassen wir dagegen alle Fälle, wo die entodermale Herkunft des Mitteldarmes sicher bewiesen ist, zusammen, so können wir derzeit hinsichtlich seiner Entwicklung etwa zwei Typen unterscheiden: 1) Der Mitteldarm entwickelt sich aus dem Entoderm, welches noch vor der Anlage des Stomo- und Proktodäums überall deutlich gegen das Ektoderm abgegrenzt ist (*Catocala*, *Donacia*), 2) oder es bleiben während seiner Entwicklung Gastralherde bestehen, die in verschiedene Beziehungen zu den Stomo- und Proktodäaleinstülpungen treten können und sich an seinem Aufbau lebhaft beteiligen. Gastralherde kommen entweder dauernd an dem hinteren Rande des Stomodäums zu liegen (Nusbaum und Fuliński: *Phyllo-dromia*), oder sie nehmen die zuletzt erwähnte Lage ein und werden nächstens in den Bereich des Stomo- und Proktodäums bis auf ihren Boden verschoben (*Chalicodoma*, *Gastroidea*), wo sie noch immer tätig bleiben und die schaufelartigen Mitteldarmanlagen entwickeln. Der zuletzt genannte Fall scheint uns ziemlich interessant zu sein, denn wir treffen hier an älteren Stadien, am Boden des Stomo- und Proktodäums Wucherungsstellen an, die viel Ähnlichkeit mit den betreffenden Bildern Heymons' zeigen. Es wäre nun sehr erwünscht, die seitens Heymons', Schwartzes u. a. untersuchten Formen einer Nachuntersuchung zu unterziehen, wobei es sich vielleicht herausstellen würde, daß auch in diesen Fällen die Wucherungsstellen am Prokto- und Stomodäum auf Gastralherde zurückzuführen seien.

Hinsichtlich der Literaturangaben verweise ich auf meine *Donacia*-Arbeit, die bald in der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie erscheinen wird.

Aus dem Zoolog. Institute d. Universität Lemberg.

Erläuterung der Tafel IV.

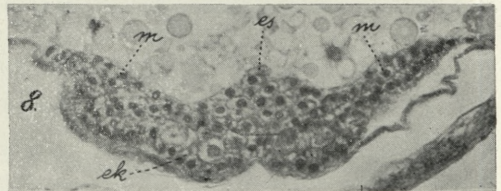
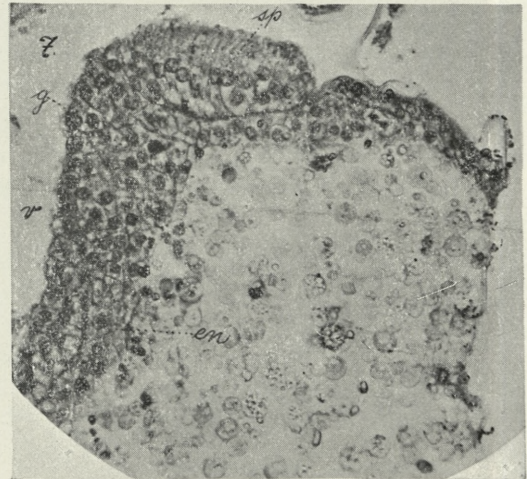
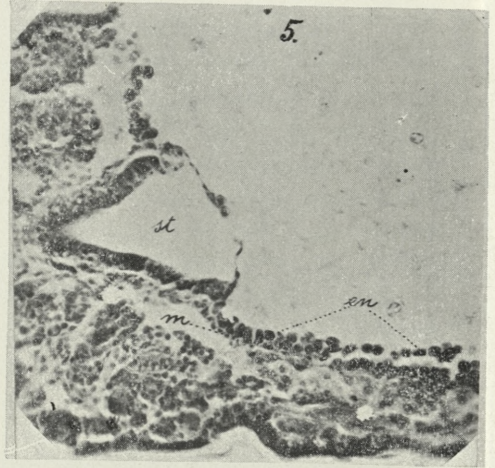
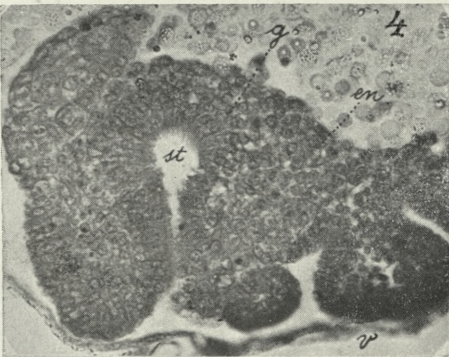
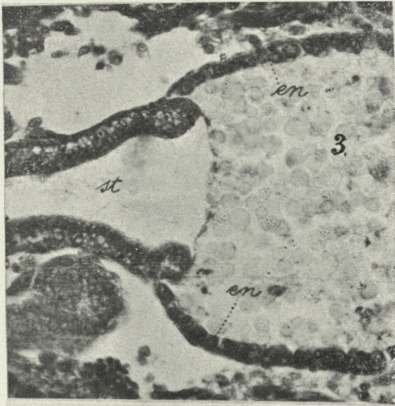
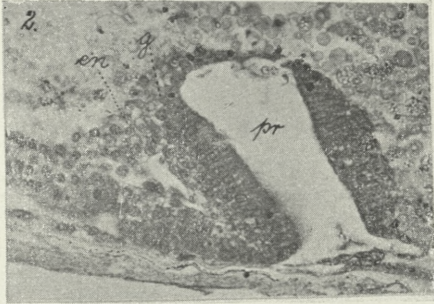
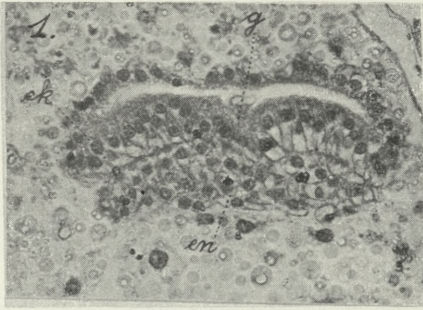
Sämtliche Figuren sind 330-fach vergrößert.

Die Buchstaben bezeichnen auf allen Figuren dasselbe.

<i>ek</i> — Ektoderm	<i>m</i> — Mesoderm
<i>en</i> — Entoderm	<i>pr</i> — Proktodäum
<i>es</i> — entodermaler Mittelstrang	<i>sp</i> — Stomodäalplatte
<i>g</i> — Gastralherd	<i>st</i> — Stomodäum
	<i>v</i> — Ventralseite

Fig. 1. Querschnitt durch das Hinterende des Keimstreifs mit dem Gastralherd.





J. Hirschler.

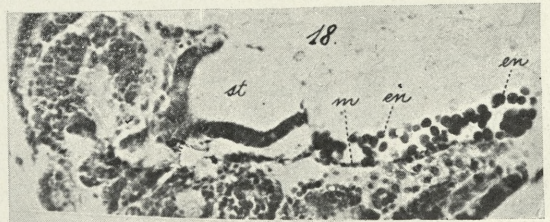
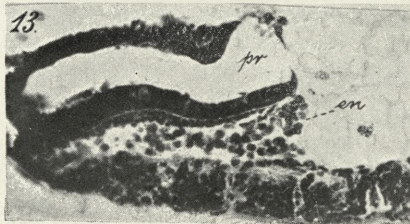
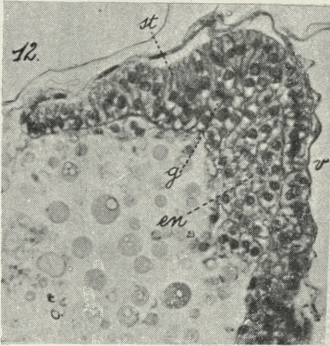
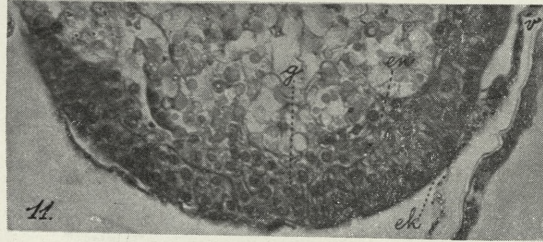
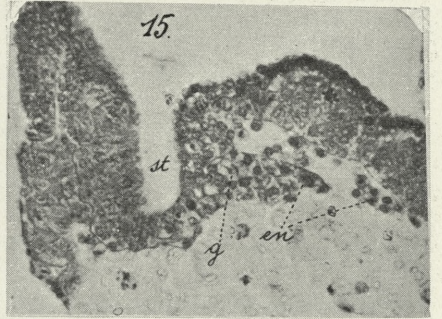
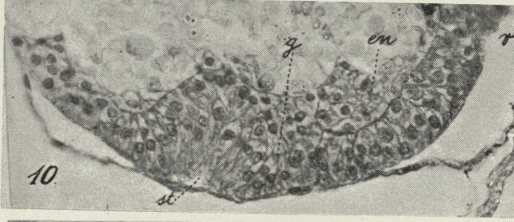
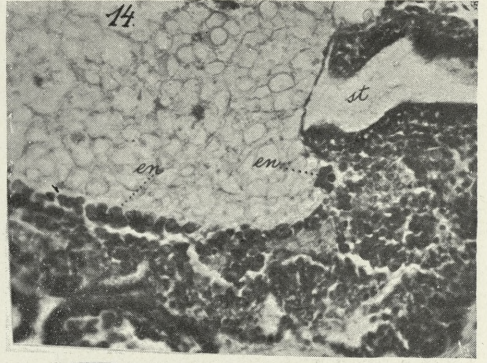
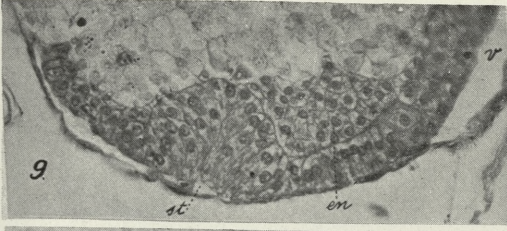




Fig. 2. Medianschnitt durch ein ziemlich stark ausgewachsenes Proktodäum welches Entoderm vom Gastralherde proliferiert.

Fig. 3. Bruchstück von einem Medianschnitte durch einen fast vollkommen entwickelten Embryo; die Vereinigungsstelle des Vorderdarms mit dem Mitteldarm.

Fig. 4. Medianschnitt durch ein ziemlich stark ausgewachsenes Stomodäum, an welchem der Gastralherd Entoderm proliferiert.

Fig. 5. Paramedianschnitt durch ein Stomodäum und die angrenzenden Keimstreifspartien.

Fig. 6. Paramedianschnitt durch ein Stomodäum, dessen hintere Wand mit dem Entoderm zusammenhängt.

Fig. 7. Medianschnitt durch den vorderen Teil eines Keimstreifs; man findet hier die Stomodäalplatte und den dahinter gelegenen Gastralherd.

Fig. 8. Querschnitt durch die Thorakalregion eines Keimstreifs; das untere Blatt erscheint hier in eine mediane, entodermale Zellenanhäufung und in beiderseits gelegene Mesodermplatten differenziert.

Fig. 9. Medianschnitt durch den vorderen Teil eines jungen Keimstreifs; die eben angelegte Stomodäaleinstülpung ist überall gegen das Entoderm abgegrenzt.

Fig. 10. Paramedianschnitt durch den vorderen Keimstreifsabschnitt, derselben Serie angehörig wie der Medianschnitt auf Fig. 9.; die Stomodäaleinstülpung hängt nach hinten mit dem Gastralherde zusammen.

Fig. 11. Ein mehr seitlich gelegener Paramedianschnitt, wie der auf Fig. 10 abgebildete; am vorderen Eipol ist hier der Gastralherd zu sehen, an welchem beide Keimblätter, Ekto- und Entoderm ineinander übergehen.

Fig. 12. Paramedianschnitt durch den vorderen Keimstreifsabschnitt; die Stomodäalplatte erscheint etwas eingestülpt und hängt nach hinten mit dem Gastralherde zusammen.

Fig. 13. Medianschnitt durch ein ziemlich ausgewachsenes Proktodäum, an dessen Ende zahlreiche Entodermzellen anzutreffen sind.

Fig. 14. Medianschnitt durch ein ziemlich stark ausgewachsenes Stomodäum und die angrenzenden Keimstreifspartien; unweit vom unteren Rande des Stomodäalendes und etwas weiter gegen die Mitte des Keimstreifs liegen am Dotter Entoderminseln.

Fig. 15. Medianschnitt durch ein Stomodäum mit der entodermalen Mitteldarmanlage (*en*); weiter gegen die Mitte trifft man am Dotter eine Entoderminsel an.

Fig. 16. Medianschnitt durch den vorderen Keimstreifsabschnitt; das noch ganz seichte Stomodäum ist überall gegen das Entoderm abgegrenzt.

Fig. 17. Medianschnitt durch ein Stomodäum, dessen hintere Wand undeutlich gegen das Entoderm abgegrenzt ist.

Fig. 18. Medianschnitt durch das Stomodäalende und die nächste Umgebung; am Dotter sind zahlreiche Entoderminseln zu sehen, die teilweise miteinander verschmelzen und von unten von dem splanchnischen Mesoderm umfaßt werden.

Errata.

Page 46 ligne 6 *lire* auf Veranlassung *au lieu de* auf Verlangen.

Page 53 ligne 2 (en Note) *lire* Entwicklungsweise *au lieu de* Entwicklungsmethode.

Nakładem Akademii Umiejętności.

Pod redakcją

Sekretarza Wydziału matem.-przyrod. Władysława Natanson'a.

Kraków, 1909. — Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego, pod zarządem J. Filipowskiego.

4 Marca 1909.

