XV Krajowa Konferencja Automatyki

Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław Bubnicki
Roman Kulikowski
Janusz Kacprzyk

XV Krajowa Konferencja Automatyki
Tom II

KKA 2005

Redaktorzy:
Zdzisław BUBNICKI
Roman KULIKOWSKI
Janusz KACPRZYK

ORGANIZATOR
Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk
WSPÓŁORGANIZATORZY
Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

ORGANIZATOR

Komitet Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk
Instytut Badań Systemowych Polskiej Akademii Nauk

WSPÓŁORGANIZATORZY

Politechnika Warszawska
Przemysłowy Instytut Automatyki i Pomiarów
Polskie Stowarzyszenie Pomiarów, Automatyki i Robotyki

KOMITET PROGRAMOWY

Przewodniczący	Zdzisław BUBNICKI
Zastępca Przewodniczącego	Roman KULIKOWSKI

CZŁONKOWIE

Stanisław BAŃKA	Michał BIAŁKO
Mikołaj BUSŁOWICZ	Władysław FINDEISEN
Ryszard GESSING	Henryk GÓRECKI
Jakub GUTENBAUM	Jerzy JÓZEFCZYK
Stanisław KACZANOWSKI	Tadeusz KACZOREK
Janusz KACPRZYK	Jerzy KLAMKA
Józef KORBICZ	Zbigniew KOWALSKI
Krzysztof KOZŁOWSKI	Juliusz L. KULIKOWSKI
Krzysztof KUŹMIŃSKI	Kazimierz MALANOWSKI
Krzysztof MALINOWSKI	Wojciech MITKOWSKI
Antoni NIEDERLIŃSKI	Władysław PEŁCZEWSKI
Tadeusz PUCHAŁKA	Leszek RUTKOWSKI
Stanisław SKOCZOWSKI	Roman SŁOWIŃSKI
Jerzy ŚWIĄTEK	Andrzej ŚWIERNIAK
Ryszard TADEUSIEWICZ	Piotr TATJEWSKI
Krzysztof TCHOŃ	Leszek TRYBUS
Jan WĘGLARZ	Andrzej P. WIERZBICKI

KOMITET ORGANIZACYJNY

Przewodniczący	Roman KULIKOWSKI
Zastępcy Przewodniczącego	Janusz KACPRZYK
	Stanisław KACZANOWSKI
	Tadeusz KACZOREK
	Krzysztof MALINOWSKI
Członkowie	Roman OSTROWSKI
	Tadeusz PUCHAŁKA
	Dariusz WAGNER
Sekretarze naukowi	Jan STUDZIŃSKI
	Jan W. OWSIŃSKI

ISBN 83-89475-01-4

Druk: ARGRAF, Warszawa

OPTYMALIZACJA
I PODEJMOWANIE DECYZJI

UOGÓLNIONE ZAGADNIENIE ODWROTNE I CAŁKOWITOLICZBOWOŚĆ ZMIENNYCH W ZADANIACH PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Marek LIBURA

Instytut Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa, e-mail:libura@ibspan.waw.pl

Streszczenie: W pracy rozważane jest uogólnione zagadnienie odwrotne dla zadania programowania liniowego. Polega ono na wyznaczeniu najmniejszych, w sensie przyjętej normy, zmian wektora współczynników funkcji celu zadania, które zagwarantują, że w zbiorze rozwiązań optymalnych tak zmodyfikowanego zadania znajdą się rozwiązania należące do danej restrykcji zadania pierwotnego. Podany jest przykład tak postawionego problemu i dyskutowany jest jego związek ze standardowym zadaniem odwrotnym. Następnie podana jest metoda rozwiązania uogólnionego zadania odwrotnego w przypadku, gdy zadaniem wyjściowym jest zadanie programowania liniowego z ograniczonymi zmiennymi, a rozważana restrykcja sprowadza się do warunku całkowitoliczbowości zmiennych.

Słowa kluczowe: programowanie liniowe, zagadnienia odwrotne, całkowitoliczbowość zmiennych.

1. WPROWADZENIE

W pracy rozważane jest następujące zadanie programowania liniowego ze zmiennymi ograniczonymi:

$$\max\{c^{\mathrm{T}}x : \; Ax \le b, \; 0 \le x \le 1\}, \qquad (1)$$

gdzie $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Podstawowy problem, któremu poświęcona jest praca, można sformułować w postaci poniższego pytania:
Jakie są najmniejsze, w sensie ustalonej normy, zmiany współczynników wektora c, które zagwarantują, że w zbiorze rozwiązań optymalnych zmodyfikowanego zadania (1) istnieją rozwiązania całkowitoliczbowe?

Pytanie to wiąże się z wprowadzonym w [3, 4] tak zwanym *uogólnionym zagadnieniem odwrotnym* dla zadania optymalizacyjnego

$$v(c, X) = \max\{c^{\mathrm{T}}x : \; x \in X\}, \qquad (2)$$

gdzie $X \subseteq \mathbb{R}^n$ jest danym ustalonym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych.

Uogólnione zadanie odwrotne jest definiowane dla zadanego podzbioru $F \subseteq X$ zbioru rozwiązań dopuszczalnych oraz dla danego zbioru $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ dopuszczalnych (addytywnych) zaburzeń wektora c współczynników w funkcji celu zadania (2).

Formalny zapis uogólnionego zadania odwrotnego jest następujący:

$$\begin{aligned} a(F) \; &= \; \min \|\delta\| \qquad (3) \\ & v(c+\delta, X) = v(c+\delta, F) \\ & \delta \in \Delta, \end{aligned}$$

gdzie $\|\delta\|$ oznacza normę wektora δ. W dalszym ciągu będziemy rozważać głównie normy l_1 i l_∞, to znaczy będziemy przyjmować, że $\|\delta\| = \|\delta\|_{l_1} = \sum_{i=1}^{n} |\delta_i|$ albo $\|\delta\| = \|\delta\|_{l_\infty} = \max_{i=1,\ldots,n} |\delta_i|$. Wybór odpowiedniej normy zależy od tego, czy interesuje nas sumaryczna wartość modyfikacji współczynników funkcji celu oryginalnego zadania, czy też największa z wprowadzanych zmian. Będziemy też zwykle zakładać, że $\Delta = \mathbb{R}^n$.

Uogólnione zadanie odwrotne polega zatem na wyznaczeniu takich zmian współczynników funkcji celu w pierwotnym zadaniu, których norma jest minimalna i które zagwarantują, że w zbiorze rozwiązań optymalnych zmodyfikowanego zadania (1), czyli zadania

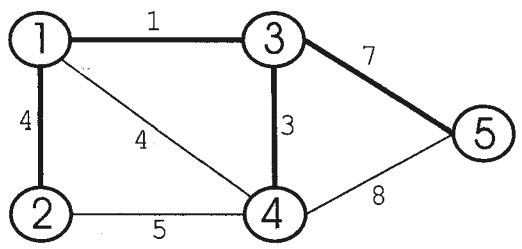
$$\max\{(c+\delta)^{\mathrm{T}}x : \; x \in X\},$$

istnieje rozwiązanie dopuszczalne restrykcji zadania (1), odpowiadające podzbiorowi rozwiązań dopuszczalnych F, to znaczy rozwiązanie optymalne zadania

$$\max\{c^{\mathrm{T}}x : \; x \in F\}. \qquad (4)$$

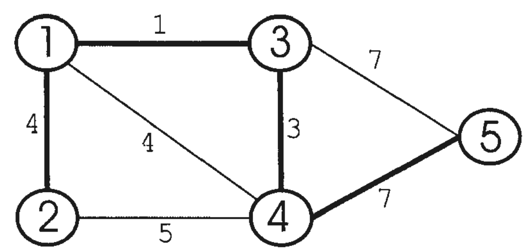
Rozważmy prosty przykład uogólnionego zadania odwrotnego. Niech zbiór X w zadaniu (2) będzie zbiorem wektorów charakterystycznych takich wszystkich podzbiorów krawędzi grafu pokazanego na rys. 1, które tworzą drzewa rozpinające w tym grafie.

Przyjmijmy, że wektor kosztów w zadaniu (2) jest wektorem (wziętych ze znakiem minus) długości krawędzi powyższego grafu. Wówczas zadanie (2) jest klasycznym zadaniem wyznaczania najkrótszego drzewa rozpinającego w grafie. Jego rozwiązanie można łatwo znaleźć na przykład algorytmem zachłannym. W rozważanym przypadku rozwiązaniem optymalnym jest wektor charakterystyczny następującego zbioru krawędzi: $\{\{1,2\},\{1,3\},\{3,4\}\{3,5\}\}$. Odpowiadające temu rozwiązaniu najkrótsze drzewo rozpinające jest zaznaczone na rys. 1 pogrubionymi krawędziami.



Rys. 1. Graf nieskierowany z podanymi długościami krawędzi i zaznaczonym pogrubionymi krawędziami najkrótszym drzewem rozpinającym.

Rozważmy teraz restrykcję powyższego zadania, polegającą na dodatkowym wymaganiu, by w zbiorze F były wyłącznie drzewa rozpinające, które są drogami Hamiltona. Uogólnione zadanie odwrotne polega tu więc na takiej minimalnej - w sensie przyjętej normy - modyfikacji długości krawędzi grafu, aby w zmodyfikowanym grafie najkrótszym drzewem rozpinającym była droga Hamiltona. W przypadku, gdy rozważana jest norma l_1, rozwiązanie uogólnionego zadania odwrotnego prowadzi do zmiany długości jednej tylko krawędzi, a mianowicie długość krawędzi $\{4, 5\}$ jest zmniejszana o 1, a zatem w tym przypadku $a(F) = 1$. Na rys. 2 podany jest zmodyfikowany graf i zaznaczone jest najkrótsze drzewo rozpinające, które jest już drogą Hamiltona. To samo drzewo rozpinające otrzymamy rozważając w uogólnionym zadaniu odwrotnym normę l_∞, ale w tym przypadku $a(F) = \frac{1}{2}$, a zmodyfikowanym wektorem długości krawędzi jest następujący wektor: $(c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{2,4}, c_{3,4}, c_{3,5}, c_{4,5})^{\mathrm{T}} = (4\frac{1}{2}, 1, 4, 5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}$.



Rys. 2. Graf nieskierowany ze zmodyfikowanymi długościami krawędzi i zaznaczonym pogrubionymi krawędziami najkrótszym drzewem rozpinającym.

Jeśli zbiór F zawiera dokładnie jedno rozwiązanie x^o, to wówczas uogólnione zadanie odwrotne sprowadza się do standardowego zadania odwrotnego względem rozwiązania x^o. Mamy wtedy do czynienia z następującym zadaniem:

$$\begin{aligned} a(\{x^o\}) \;=\; & \min \|\delta\| \\ & v(c+\delta, X) = (c+\delta)^{\mathrm{T}} x^o \\ & \delta \in \Delta. \end{aligned} \tag{5}$$

Problem powyższy ma obszerną literaturę (patrz na przykład [1, 2]). Łatwo zauważyć, że zachodzi zależność

$$a(F) = \min\{a(\{x\}) : x \in F\}. \tag{6}$$

Rozważmy teraz szczególną sytuację, przyjmując, że

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b,\ 0 \le x \le 1\}$$

oraz

$$F = X \cap \mathbb{Z}^n,$$

gdzie $\mathbb{Z}$ oznacza zbiór liczb całkowitych. Jeśli zatem interesuje nas, jakie minimalne zmiany współczynników funkcji celu wymuszają pojawienie się rozwiązań całkowitoliczbowych w zbiorze rozwiązań optymalnych zadania programowania liniowego (1), to wymaga to rozwiązania uogólnionego zadania odwrotnego (3) dla takiej właśnie restrykcji. Zauważmy, że jeśli zbiór rozwiązań dopuszczalnych pierwotnego zadania (1) zawiera rozwiązania całkowitoliczbowe oraz przyjmiemy, że $\Delta = \mathbb{R}^n$, to wówczas rozwiązanie tak postawionego uogólnionego zadania odwrotnego istnieje. Wynika to z faktu, że wszystkie rozwiązania dopuszczalne zadania (4) dla $F = X \cap \mathbb{Z}$ są też punktami ekstremalnymi zbioru X rozwiązań dopuszczalnych pierwotnego zadania (1).

Zależność (6) może rodzić przypuszczenie, że uogólnione zadanie odwrotne można rozwiązać w dwóch etapach: najpierw wyznaczyć rozwiązanie optymalne x^* restrykcji (4), a następnie znanymi metodami rozwiązać zadanie odwrotne względem x^*. Tak jednak nie jest, o czym świadczy poniższy prosty przykład.

Rozważmy mianowicie następujące zadanie programowania liniowego:

$$\begin{aligned} \max\ \ & 4x_1 + 5x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 2 \\ & 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Rozwiązaniem optymalnym tego zadania jest $x^o = (\frac{1}{2}, 1)^{\mathrm{T}}$. Niech $F = X \cap \mathbb{Z}$. Łatwo pokazać, że rozwiązaniem optymalnym takiej restrykcji zadania jest $x^* = (0, 1)^{\mathrm{T}}$. Rozwiązując zadanie odwrotne (5) względem x^* dla normy l_1 otrzymamy $a(\{x^*\}) = 4$. Nie jest to jednak rozwiązanie optymalne uogólnionego zadania odwrotnego dla zadania (7) i rozważanej restrykcji. Stosując bowiem metodę rozwiązania uogólnionego zadania odwrotnego opisaną w następnym rozdziale można pokazać, że $a(F) = 3$ oraz że zbiór F zawiera inne rozwiązanie dopuszczalne $x' = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, które nie należy do zbioru rozwiązań optymalnych zadania (7) i dla którego $a(\{x'\}) = 3 < 4$.

2. METODA ROZWIĄZANIA UOGÓLNIONEGO ZADANIA ODWROTNEGO

W pracach [3, 4] zaproponowano metodę rozwiązania uogólnionego zadania odwrotnego dla zadania programowania liniowego. W niniejszym rozdziale przedstawimy zasadnicze elementy tego podejścia dla przypadku, gdy $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b,\ 0 \le x \le 1\}$ oraz $F = X \cap \mathbb{Z}$.

Niech $y \in \mathbb{R}^m$ oraz $u \in \mathbb{R}^n$ oznaczają zmienne dualne odpowiednio dla zbiorów ograniczeń $Ax \le b$ oraz $x \le 1$ w zadaniu (1) i niech $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ oznacza macierz jednostkową. Jak pokazano w [3, 4], z dualności w programowaniu liniowym wynika, że w rozważanym przypadku uogólnione zadanie odwrotne (3) może być sformułowane jako następujące zadanie programowania matematycznego:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|\delta\| \qquad (8)\\ & A^{\mathrm{T}}y + Iu - \delta \geq c \\ & b^{\mathrm{T}}y - c^{\mathrm{T}}x - \delta^{\mathrm{T}}x = 0 \\ & Ax \leq b \\ & x \in \{0,1\}^n,\ y \geq 0, u \geq 0 \\ & \delta \in \Delta. \end{aligned}$$

Zadanie powyższe jest nieliniowym zadaniem programowania mieszanego, w którym wszystkie zmienne dyskretne są zmiennymi binarnymi. Jeśli $\Delta = \mathbb{R}^n$ albo Δ jest wielościennym zbiorem wypukłym, opisanym układem ograniczeń liniowych, to jedynym nieliniowym członem w ograniczeniach powyższego zadania jest wyrażenie $\delta^{\mathrm{T}}x$. Człon ten można w sposób formalny zlinearyzować i wówczas całe zadanie (8) daje się zapisać w przypadku norm l_1 lub l_∞ w postaci zadania programowania liniowego mieszanego. Tak powstałe zadanie może już być rozwiązywane dowolnym standardowym pakietem obliczeniowym dla tego typu problemów. W dalszym ciągu przedstawimy zasadnicze kroki tej linearyzacji i podamy końcową postać uogólnionego zadania odwrotnego jako zadania programowania liniowego mieszanego.

Niech $\delta = \delta^+ - \delta^-$, gdzie $\delta^+ = (\delta_1^+,\ldots,\delta_n^+)^{\mathrm{T}}$, $\delta_i^+ = \max\{0,\delta_i\}$, $i = 1,\ldots,n$, $\delta^- = (\delta_1^-,\ldots,\delta_n^-)^{\mathrm{T}}$, $\delta_i^- = \max\{0,-\delta_i\}$, $i = 1,\ldots,n$. Mamy więc $\delta^{\mathrm{T}}x = \sum_{i=1}^n(\delta_i^+x_i - \delta_i^-x_i)$. Wprowadźmy dla $i = 1,\ldots,n$, nowe zmienne $z_i^+, z_i^- \in \mathbb{R}$, spełniające następujące warunki: $z_i^+, z_i^- \geq 0$ oraz $z_i^+ = \delta_i^+x_i$, $z_i^- = \delta_i^-x_i$. Ograniczenie

$$b^{\mathrm{T}}y - c^{\mathrm{T}}x - \delta^{\mathrm{T}}x = 0$$

w sformułowaniu zadania (8) może być teraz zapisane jako ograniczenie liniowe

$$b^{\mathrm{T}}y - c^{\mathrm{T}}x - 1^{\mathrm{T}}z^+ + 1^{\mathrm{T}}z^- = 0,$$

gdzie $z^+ = (z_1^+,\ldots,z_n^+)^{\mathrm{T}}$ oraz $z^- = (z_1^-,\ldots,z_n^-)^{\mathrm{T}}$. Dla każdej z nowych zmiennych z_i^+, z_i^-, $i = 1,\ldots,n$, musimy teraz dodać ograniczenia, które zagwarantują zachodzenie warunków: $z_i^+ = \delta_i^+x_i$ oraz $z_i^- = \delta_i^-x_i$. Weźmy na przykład równość $z_i^+ = \delta_i^+x_i$ dla pewnego ustalonego indeksu i. Jest ona równoważna następującym dwóm implikacjom: $x_i = 0 \implies z_i^+ = 0$, $x_i = 1 \implies z_i^+ = \delta_i^+$, które w standardowy sposób mogą być modelowane poprzez poniższy układ dodatkowych ograniczeń liniowych:

$$\begin{aligned} z_i^+ - Mx_i &\leq 0, \\ -\delta_i^+ + z_i^+ &\leq 0, \\ \delta_i^+ - z_i^+ + Mx_i &\leq M. \end{aligned}$$

W zapisie powyższym M jest dostatecznie dużą stałą, spełniającą nierówność $\delta_i^+ \leq M$. Jeśli zbiór dopuszczalnych modyfikacji Δ jest ograniczony, to stała ta może być bezpośrednio wyliczona z opisu tego zbioru. Jeśli natomiast $\Delta = \mathbb{R}^n$, to możemy przyjąć $M = \|c\|_{l_1}$, bowiem wówczas $y = 0$, $u = 0$, $\delta = -c$, $x \in F$, stanowią rozwiązanie dopuszczalne zadania (8), a zatem musi istnieć rozwiązanie optymalne tego zadania, spełniające warunki $\delta_i^+ \leq \|c\|_{l_1}$ dla $i = 1,\ldots,n$.

Uwzględniając wprowadzone dodatkowe zmienne i ograniczenia możemy teraz zapisać uogólnione zadanie odwrotne (8) dla normy l_1 w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \min \quad & 1^{\mathrm{T}}\delta^+ + 1^{\mathrm{T}}\delta^- \qquad (9)\\ & A^{\mathrm{T}}y + Iu - \delta^+ + \delta^- \geq c \\ & b^{\mathrm{T}}y - c^{\mathrm{T}}x - 1^{\mathrm{T}}z^+ + 1^{\mathrm{T}}z^- = 0 \\ & Ax \leq b \\ & z^+ - Mx \leq 0 \\ & -\delta^+ + z^+ \leq 0 \\ & \delta^+ - z^+ + Mx \leq M \\ & z^- - Mx \leq 0 \\ & -\delta^- + z^- \leq 0 \\ & \delta^- - z^- + Mx \leq M \\ & x \in \{0,1\}^n,\ y \geq 0, u \geq 0 \\ & z^+, z^-, \delta^+, \delta^- \geq 0 \\ & \delta^+ - \delta^- \in \Delta. \end{aligned}$$

Jeśli $\Delta = \mathbb{R}^n$ albo zbiór Δ jest zadany układem ograniczeń liniowych, to zadanie powyższe jest zadaniem programowania liniowego mieszanego

Również w przypadku normy l_∞ funkcję celu uogólnionego zadania odwrotnego można formalnie przekształcić w standardowy sposób do postaci liniowej. Wymaga to wprowadzenia jeszcze jednej zmiennej ciągłej $v \in \mathbb{R}$, której wartość należy minimalizować, oraz dodania do ograniczeń zadania następującego układu nierówności liniowych:

$$\delta_i^+ - v \leq 0, \qquad \delta_i^- - v \leq 0 \ \text{ dla } i = 1,\ldots,n.$$

W analogiczny sposób możemy sformułować uogólnione zadanie odwrotne, jeśli interesują nas minimalne względne (procentowe) zmiany wyjściowych współczynników funkcji celu, które zagwarantują istnienie rozwiązań całkowitoliczbowych w zbiorze rozwiązań optymalnych zmodyfikowanego zadania. Również i w tym przypadku wymaga to wprowadzenia jednej dodatkowej zmiennej $v \in \mathbb{R}$, której wartość należy minimalizować, oraz dodania do ograniczeń zadania następującego układu nierówności liniowych:

$$\delta_i^+ - v\,|c_i| \leq 0, \quad \delta_i^- - v\,|c_i| \leq 0 \ \text{ dla } i = 1,\ldots,n.$$

W przeprowadzonych eksperymentach obliczeniowych do rozwiązywania tak powstałych zadań programowania liniowego mieszanego stosowano pakiet obliczeniowy CPLEX 9.0. W następnym rozdziale podamy kilka prostych przykładów ilustrujących otrzymywane opisaną tu metodą rozwiązania uogólnionego zadania odwrotnego.

3. PRZYKŁADY

Rozważmy następujące zadanie programowania liniowego:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 7 \\ & 0 \le x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \le 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Rozwiązaniem optymalnym tego zadania jest wektor $x^o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o, x_4^o)^T = (1,\ 1,\ \frac{1}{4},\ 0)^T$, który nie jest wektorem całkowitoliczbowym. Przyjmijmy, że interesują nas minimalne zmiany współczynników funkcji celu zadania (10), które zagwarantują, że rozwiązując zmodyfikowane zadanie natrafimy w jego zbiorze rozwiązań optymalnych na rozwiązanie całkowitoliczbowe.

Jeśli celem jest minimalizacja sumy wartości bezwzględnych zmian wag, to wymaga to rozwiązania uogólnionego zadania odwrotnego (9) z normą l_1. Jego rozwiązanie optymalne jest następujące: $\delta^+ = (0,0,0,0)^T$, $\delta^- = (0, \frac{1}{4}, 0, 0)^T$. Zmodyfikowane zadanie (10) ma postać:

$$\begin{aligned} \max \quad & 7x_1 + 3\tfrac{3}{4}x_2 + 5x_3 + 2x_4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 7 \\ & 0 \le x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \le 1. \end{aligned} \tag{11}$$

Zauważmy, że dodatnia wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego uogólnionego zadania odwrotnego oznacza, że w zbiorze rozwiązań optymalnych pierwotnego zadania (10) nie ma żadnego rozwiązania całkowitoliczbowego. Rozwiązanie takie jest natomiast w zbiorze rozwiązań optymalnych zadania zmodyfikowanego (11) i jest nim wektor $x^* = (1,0,1,0)^T$.

W przypadku, gdy interesuje nas minimalizacja maksymalnej wartości bezwzględnej zmiany każdego ze współczynników funkcji celu zadania (10), która spowoduje pojawienie się rozwiązań całkowitoliczbowych w zbiorze rozwiązań optymalnych zmodyfikowanego zadania, wówczas należy rozwiązać uogólnione zadanie odwrotne z normą l_∞. W rozważanym przykładzie rozwiązanie optymalne uogólnionego zadania odwrotnego jest następujące: $\delta^+ = (0,\ 0,\ \frac{1}{7},\ 0)^T$, $\delta^- = (\frac{1}{7},\ \frac{1}{7},\ 0,\ 0)^T$. Zmodyfikowane zadanie (10) ma więc teraz postać:

$$\begin{aligned} \max \quad & 6\tfrac{6}{7}x_1 + 3\tfrac{6}{7}x_2 + 5\tfrac{1}{7}x_3 + 2x_4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 7 \\ & 0 \le x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \le 1. \end{aligned} \tag{12}$$

Rozwiązaniem optymalnym tak zmodyfikowanego zadania jest całkowitoliczbowy wektor $x^* = (1,0,1,0)^T$.

Podobnie wygląda rozwiązanie uogólnionego zadania odwrotnego, gdy interesuje nas minimalna procentowa zmiana początkowych współczynników funkcji celu, która zagwarantuje, że w zbiorze rozwiązań optymalnych zmodyfikowanego zadania (10) znajdzie się rozwiązanie całkowitoliczbowe. Okazuje się, że w tym przypadku wymaga to modyfikacji tych współczynników o nie więcej niż około 3,2%. W wyniku rozwiązania uogólnionego zadania odwrotnego otrzymujemy następujące przybliżone wartości zmian: $\delta^+ = (0,\ 0,\ 0{,}161290,\ 0)^T$, $\delta^- = (0{,}225806,\ 0{,}129032,\ 0,\ 0)^T$.

GENERALIZED INVERSE PROBLEMS AND INTEGRALITY OF SOLUTIONS FOR LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

Abstract: We propose a generalization of the inverse problem for continuous linear programming problems with all variables belonging to the unit cube. The problem consists in finding less costly perturbations of the original objective function coefficients, which guarantee that an optimal solution of the perturbed problem belongs to some specified subset of feasible solutions. We describe a method of solving such problem in the case when it is required that the set of optimal solutions of the perturbed problem must contain an integral solution.

References

[1] Ahuja R.K., Orlin J.B. (2001) Inverse optimization. Operations Research, 49, 771-783.

[2] Heuberger C. (2001) Inverse optimization: A survey on problems, methods and results. Bericht Nr. 219, Technische Universität Graz, 1-26.

[3] Libura M. (2002) Adjustment problem for binary constrained linear programming problems. Research Report RB/66/2002, IBS PAN, Warszawa, 1- 17.

[4] Libura M. (2003) Uogólnione zagadnienie odwrotne dla zadań optymalizacji dyskretnej. W: Tarnowski W., Kiczkowiak T. (ed.) Polioptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania, Tom II, WNT, Warszawa, 88-95.

Instytut Badań Systemowych
Polskiej Akademii Nauk

ISBN 83-89475-01-4