



POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Mirosław KWIESIELEWICZ

**ANALITYCZNY HIERARCHICZNY
PROCES DECYZYJNY**

**Nierozmyte i rozmyte
porównania parami**



ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY
Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 29

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2002

Mirosław KWIESIELEWICZ

**ANALITYCZNY HIERARCHICZNY
PROCES DECYZYJNY**

**Nierozmyte i rozmyte
porównania parami**

wyd. nieregularne - 2002

- L]

- L]

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk
Prof. dr hab. inż. Franciszek Milkiewicz

Copyright © by Instytut Badań Systemowych PAN
Warszawa 2002

[Podr

ISBN 83-85847-69-3
ISSN 0208-8029



Senia

Bibl. podręczna

44806

2. SZEREGOWANIE CZYNNIKÓW Z WYKORZYSTANIEM METODY PORÓWNYWANIA PARAMI DLA DANYCH OSTRYCH

2.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale sformułowano zagadnienie szeregowania czynników z wykorzystaniem metody porównywania parami dla ocen nierozmytych. Dokonano przeglądu podstawowych metod jego rozwiązania i zaproponowano metodę rozwiązania dla przypadku z brakującymi ocenami oraz wieloma ocenami pary czynników. Metoda ta oparta jest o zastosowanie logarytmicznej regresji do rozwiązania problemu aproksymacji macierzy ocen, za pomocą macierzy ilorazów. Dokonano analizy rozwiązania wykorzystując sformułowane i udowodnione przez autora twierdzenia z zakresu algebry liniowej.

Pierwsze próby szeregowania czynników z wykorzystaniem koncepcji opartej o ich porównywanie parami zostały podjęte przez Thurstone (1927a, b, c), a rozwinięte przez Davida (1963) oraz Saaty'ego (1977, 1980).

Metoda porównywania parami w kategoriach AHP opracowana przez Saaty'ego może być wykorzystana do szeregowania skończonej liczby czynników w szeregowaniu wieloatrybutowym (wielokryterialnym). Polega ona na przyporządkowaniu każdej parze rozważanych czynników pewnej liczby z założonej skali. Liczba ta wyraża subiektywną preferencję eksperta w stosunku do jednego z elementów pary w porównaniu z drugim. Przyporządkowanie może być dokonywane również przez grupę ekspertów i wtedy mamy do czynienia z grupowym podejmowaniem decyzji. Często rozważa się sytuację tzw. brakujących danych, kiedy ekspert lub eksperci nie podają oceny danej pary czynników lub pewnej ich liczby. Oceny podane przez ekspertów umieszczane są w tzw. macierzach ocen. Ponieważ zakłada się, że proces oceny czynników przez eksperta może ulec zniekształceniu, to przyjmuje się, że utworzona macierz ocen zawiera oceny niedokładne, a zadaniem procesu szeregowania jest znalezienie odpowiadającej jej macierzy z ocenami zbliżonymi do dokładnych. Z matematycznego punktu widzenia problem szeregowania sprowadza się do aproksymacji macierzy ocen za pomocą macierzy ilorazów ważności poszczególnych czynników. Stosuje się tutaj głównie trzy metody: maksymalnej wartości własnej (Saaty 1977; 1980; 1984), najmniejszych kwadratów (Jensen 1984; Crawford i Williams 1985) oraz logarytmicznych najmniejszych kwadratów (de Gran 1980; Saaty 1980; Crawford i Williams 1985; Boender i inni 1985; 1989;

Kwiesielewicz 1993a, 1994a, b, 1995a, 1996; 1999, 2000; Kwiesielewicz i van Uden 2000, 2001a, b).

Warto podkreślić, że w przypadku jednego eksperta i pełnej macierzy ocen, zagadnienie logarytmicznych najmniejszych kwadratów sprowadza się do metody średniej geometrycznej (Saaty 1980; Crawford i Williams 1985; Barzilai i inni 1987; Barzilai 1997, 2001; Kwiesielewicz 1993, 1996). Stąd często zamiennie używana jest ta nazwa, aczkolwiek metoda średniej geometrycznej stanowi szczególny przypadek metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów.

W rozdziale omówiono podstawowe metody szeregowania czynników dla przypadku jednego eksperta, a następnie przedstawiono propozycje rozwiązania zagadnienia dla grupowego podejmowania decyzji z uwzględnieniem problemu brakujących danych. Uwagę skoncentrowano głównie na metodach szeregowania. Pominęto szczegółową analizę zagadnienia agregacji wielopoziomowej w hierarchicznym procesie decyzyjnym.

Omówiono również podstawowe metody aproksymacji macierzy ocen z uwzględnieniem ich przydatności (pod kątem ich wykorzystania) w przypadkach z brakującymi danymi.

Wykazano zachowanie porządku uszeregowania czynników dla metody średniej geometrycznej w przypadku wprowadzenia nowego czynnika. W takim przypadku szeroko stosowana metoda maksymalnej wartości własnej powoduje często utratę wagi.

W celu rozwiązania zagadnienia z brakującymi ocenami sformułowano odpowiednie zagadnienie logarytmicznych najmniejszych kwadratów, które następnie sprowadzono się do układu równań normalnych. Układ ten posiada jeden lub więcej stopni swobody. W celu jego rozwiązania wprowadzono metodę uogólnionej pseudoodwrotności. Ze względu na specyficzne własności rozważanego układu dokonano analizy jego rozwiązania. W tym celu wprowadzono niezbędny aparat matematyczny i przeprowadzono dowody szeregu twierdzeń, w oparciu o które pokazano, że zaproponowane podejście jest zgodne z metodą średniej geometrycznej stosowanej dla przypadków bez brakujących danych. Przedstawiono modyfikację zaproponowanego algorytmu, pozwalającą na uproszczenie obliczeń numerycznych. Wprowadzoną metodyką zilustrowano przykładami obliczeniowymi.

2.2 Metoda porównywania parami dla przypadku jednego eksperta

Założmy, że mamy n czynników F_1, F_2, \dots, F_n , które należy uszeregować. Założmy ponadto, że każdej parze czynników (F_i, F_j) , dla $i, j=1, \dots, n$ ekspert przyporządkowuje liczbę $r_{ij} \in S$.

$S = \left\{ \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots, 8, 9 \right\}$ nazywaną oceną pary i wyrażającą jego

subiektywne preferencje dotyczące i -tego czynnika pary w stosunku do j -tego drugiego, zgodnie z zasadami przedstawionymi w Tabelicy 2.1 (Saaty 1980). Następnie wyniki umieszczane są w macierzy ocen \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Macierz \mathbf{R} jest macierzą (Saaty 1980), spełniającą następującą własność:

$$r_{ij} > 0, \quad r_{ij} = 1/r_{ji} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Innymi słowy macierz \mathbf{R} , utworzona przez eksperta, jest macierzą z niezgodnymi ocenami. Koncepcja Saaty'ego (1978, 1980) polega na przybliżeniu macierzy ocen \mathbf{R} za pomocą następującej macierzy ilorazów składowych wektora uszeregowania:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1/p_1 & p_1/p_2 & \cdots & p_1/p_n \\ p_2/p_1 & p_2/p_2 & \cdots & p_2/p_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n/p_1 & p_n/p_2 & \cdots & p_n/p_n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Naszym zadaniem jest znalezienie macierzy \mathbf{P} z ocenami zgodnymi, które przedstawione są w postaci ilorazów $p_{ij} = p_i/p_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Otrzymując macierz \mathbf{P} , otrzymujemy równocześnie wektor rozwiązania

rozważanego problemu, a mianowicie wektor uszeregowania \mathbf{p} , którego składowymi są ważności (wagi) poszczególnych czynników:

$$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T. \quad (2.4)$$

Tablica 2.1 Oceny odpowiadające preferencjom ekspertów

Ocena r_{ij}	Preferencja
1	Równoważność czynników i, j
3	Słaba preferencja czynnika i -tego w stosunku do czynnika j -tego
5	Istotna preferencja czynnika i -tego w stosunku do czynnika j -tego
7	Wyraźna preferencja czynnika i -tego w stosunku do czynnika j -tego
9	Bezwzględna preferencja czynnika i -tego w stosunku do czynnika j -tego
2,4,6,8	Wartości pośrednie
Odwrotności powyższych liczb	Odpowiednia preferencja odwrotna do wyżej wymienionych

Dokonując arytmetycznej normalizacji wektora \mathbf{p} otrzymujemy wektor:

$$\mathbf{p}^* = (p_1^*, \dots, p_n^*)^T, \quad (2.5)$$

gdzie:

$$p_i^* = p_i / \sum_{i=1}^n p_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Wektor \mathbf{p}^* stanowi w tym przypadku znormalizowany wektor uszeregowania, a jego elementy są ważnościami znormalizowanymi czynników Często używa się także pojęcia wag.

Przykładowa macierz ocen dla 3 czynników może wyglądać następująco:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Należy podkreślić, że zaproponowana skala (Tablica 2.1) jest krytykowana w literaturze. Na przykład Murphy (1993) oraz Finan i Hurley (1999) wykazują, że ograniczenie skali do 9 może powodować, że otrzymane wyniki znacznie wychodzą poza akceptowalny zakres indeksu zgodności ocen, podanego przez Saaty'ego i określonego wzorem (2.19). Przyjmowane są także inne skale, np.: (Lootsma 1992; Olson i inni 1995). W dalszej części rozprawy nie analizuje się zagadnienia wyboru skali, przyjmuje się natomiast wyłącznie, że macierze ocen spełniają warunek (2.2).

Jak już wspomniano, w celu znalezienia wektora \mathbf{p} stosowane są głównie trzy metody: metoda maksymalnej wartości własnej (Saaty 1980, Saaty i Vargas 1984), metoda najmniejszych kwadratów (Saaty i Vargas 1984, Grawford i Williams 1985) oraz metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów (Grawford i Williams 1985, Saaty i Vargas 1984). Analizę i porównanie powyższych metod można znaleźć m.in w pracach (Grawford i Williams 1985; Saaty i Vargas 1984). Szereg prac krytycznie ustosunkowuje się do metody maksymalnej wartości własnej, np.: (Dyer 1990, Barzilai i inni 1987; Barzilai 1997, 1998, 2001).

W aspekcie przedstawionej techniki normalizacyjnej (2.6) warto zasygnalizować, że metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów daje w wyniku multiplikatywny wektor uszeregowania (Barzilai i inni 1987, Kwiesielewicz 1996; Barzilai 1997). Innymi słowy wektor ważności znormalizowany jest geometrycznie. Stąd naturalne wydaje się wykorzystanie techniki agregacji opartej raczej o ważoną średnią geometryczną (Barzilai 1997; Xu 2000), niż o średnią arytmetyczną (2.6).

2.3 Metoda porównywania parami dla przypadku wielu ekspertów

Założmy, że ocen dokonuje grupa ekspertów, przy czym D jest liczbą ekspertów oraz, że w szczególnym przypadku ekspert może odmówić oceny pary lub par czynników. Wtedy $d_{ij} \leq D$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, gdzie $d_{ij} \in 0, 1, \dots, D$, d_{ij} oznacza liczbę ocen pary (i, j) . W szczególnym przypadku może zachodzić $d_{ij} = 0$, co oznacza, że parze (i, j) nie przypisano żadnej oceny. Ponadto, podobnie jak dla przypadku jednego eksperta, mamy:

$$r_{ijk} > 0, r_{ijk} = 1/r_{jik} \quad \forall i, j, k. \quad (2.7)$$

W przypadku wielu ekspertów można rozważać macierz ocen \mathbf{R}_k dla k -tego eksperta:

$$\mathbf{R}_k = \begin{pmatrix} r_{11k} & r_{12k} & \cdots & r_{1nk} \\ r_{21k} & r_{22k} & \cdots & r_{2nk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1k} & r_{n2k} & \cdots & r_{nnk} \end{pmatrix}, \quad \forall k = 1, 2, \dots, D. \quad (2.8)$$

Macierz ocen \mathbf{R} , która w przypadku ogólnym, gdy brakuje ocen dla pewnych par (w szczególności może wystąpić kompletny brak ocen dla pewnych par), może być przedstawiona następująco:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11,1} & r_{12,1} & \cdots & r_{1n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{11,d_{11}} & r_{12,d_{12}} & \cdots & r_{1n,d_{1n}} \\ r_{21,1} & r_{22,1} & \cdots & r_{2n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{21,d_{21}} & r_{22,d_{22}} & \cdots & r_{2n,d_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1,1} & r_{n2,1} & \cdots & r_{nn,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1,d_{n1}} & r_{n2,d_{n2}} & \cdots & r_{nn,d_{nn}} \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Oceny poszczególnych ekspertów traktuje się w takim przypadku równoważnie.

Przykładowo macierz \mathbf{R} utworzona na podstawie ocen dwóch ekspertów, może posiadać następującą postać:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & - & 1/5 \\ 1/2 & 1 & - \\ - & 1 & - \\ 1/5 & - & 1 \\ 5 & - & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

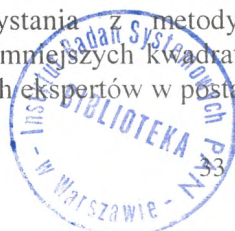
gdzie symbol „-” oznacza brak oceny. Warto zauważyć, że w tym przypadku jeden ekspert nie ocenił pary czynników (1,2), natomiast żaden z ekspertów nie dokonał oceny pary (2,3), czyli zachodzą warunki $d_{23} = d_{32} = 0$ oraz $d_{12} = d_{21} = 0$.

Zagadnienia z pełnymi macierzami ocen \mathbf{R} , dla których zachodzi warunek:

$$d_{ij} = D \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

można rozwiązywać w oparciu o metodę maksymalnej wartości własnej (Saaty 1980, Saaty i Vargas 1984), metodę najmniejszych kwadratów (Saaty i Vargas 1984, Grawford i Williams 1985) lub metodę logarytmicznych najmniejszych kwadratów (Grawford i Williams 1985, Saaty i Vargas 1984). W przeciwnym przypadku należy stosować metodę najmniejszych kwadratów lub logarytmicznych najmniejszych kwadratów, ponieważ metoda maksymalnej wartości własnej nie dopuszcza przypadków z brakującymi ocenami.

Należy podkreślić, że w przypadku wielu ekspertów, bez względu na stosowaną metodę estymacji macierzy ocen, można obliczyć znormalizowane uszeregowania dla każdego z ekspertów, a następnie dokonać agregacji uszeregowania wariantów względem ekspertów. Podejście takie pozwala na przyporządkowanie wag poszczególnym ekspertom. Można stosować tutaj agregację z wykorzystaniem średniej arytmetycznej, jak i geometrycznej (Barzilai i inni 1979; Barzilai 1997; Xu 2000). W przypadku korzystania z metody najmniejszych kwadratów lub logarytmicznych najmniejszych kwadratów można korzystać z macierzy \mathbf{R} z ocenami wszystkich ekspertów w postaci (2.9). Należy pamiętać jednak, że



w tym przypadku ekspertom nie przyporządkowano wag i stąd ich oceny należy traktować jako równoważne.

2.4 Podstawowe metody aproksymacji macierzy ocen

2.4.1 Wprowadzenie

Przypomnijmy postać macierzy ocen \mathbf{R} dla przypadku jednego eksperta:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

Zadaniem aproksymacji jest znalezienie takiej macierzy \mathbf{P} :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1/p_1 & p_1/p_2 & \cdots & p_1/p_n \\ p_2/p_1 & p_2/p_2 & \cdots & p_2/p_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n/p_1 & p_n/p_2 & \cdots & p_n/p_n \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

która będzie najbliższa macierzy \mathbf{R} w sensie wybranej normy.

Z omawianych metod tylko metody najmniejszych kwadratów i logarytmicznych najmniejszych kwadratów stosują takie podejście. Metoda maksymalnej wartości własnej opiera się o nieco inną koncepcję. Z tego też powodu można by kwestionować jej wykorzystanie w tym przypadku.

Istotnym pojęciem związanym z metodą porównywania parami jest zgodność ocen. Podstawą metody jest założenie, że macierz ocen \mathbf{R} została zniekształcona w trakcie procesu decyzyjnego, natomiast macierz ilorazów \mathbf{P} jest macierzą z ocenami zgodnymi. Stąd macierz \mathbf{R} uważana jest za zgodną, jeśli jej elementy spełniają warunek:

$$r_{ij}r_{jk} = r_{ik}, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

W najbliższych punktach zostaną omówione własności rozważanych metod aproksymacji macierzy ocen.

2.4.2 Metoda maksymalnej wartości własnej

Metoda maksymalnej wartości własnej (Saaty 1980) macierzy \mathbf{R} opiera się na założeniu, że macierz ocen \mathbf{R} nie zawiera dokładnych ocen, ale subiektywne oceny, podane przez eksperta. Macierz uszeregowania \mathbf{P} może być natomiast zadaniem Saaty'ego (1980) postrzegana jako macierz z dokładnymi danymi, czyli z dokładnymi ilorazami ważności. Ponadto łatwo zauważyć, że macierz \mathbf{P} posiada następującą własność:

$$\mathbf{P}\mathbf{p} = n\mathbf{p}, \quad (2.15)$$

gdzie $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$ jest wektorem uszeregowania. Biorąc pod uwagę fakt, że macierz ocen \mathbf{R} jest macierzą z niezgodnymi danymi, nie można do niej zastosować formuły (2.15).

W celu sformułowania odpowiedniego warunku dla macierzy ocen przytoczymy podstawowe fakty z algebry liniowej. Jeśli wektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ jest wektorem wartości własnych macierzy \mathbf{A} , natomiast wektor $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ jest wektorem odpowiadającym i -tej wartości własnej to:

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i \quad (2.16)$$

oraz $a_{ii} = 1 \forall i = 1, \dots, n$, wówczas:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n \quad (2.17)$$

Wynika stąd, że jeśli zachodzi warunek (2.15), to wszystkie wartości własne, oprócz jednej, są równe zero. Ta jedna niezerowa wartość jest równa n i jest ona największą wartością własną. Jeśli założymy teraz, że macierz ocen \mathbf{R} posiada tylko nieznacznie zaburzone dane w porównaniu z macierzą \mathbf{P} , to wówczas można oczekiwać, że największa wartość własna macierzy ocen \mathbf{R} jest bliska n , a pozostałe jej wartości własne są bliskie zeru.

Zatem powracając do zagadnienia szeregowania, jeśli macierz \mathbf{R} jest macierzą ocen, to w celu znalezienia wektora uszeregowania należy znaleźć wektor \mathbf{p} spełniający zależność (Saaty 1980):

$$\mathbf{R}\mathbf{p} = \lambda_{\max}\mathbf{p}. \quad (2.18)$$

Warto zauważyć, że skoro małe zmiany w r_{ij} powodują małe zmiany λ_{\max} , to odchylenie maksymalnej wartości własnej od n , może stanowić indeks zgodności ocen (Saaty 1980):

$$C.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}. \quad (2.19)$$

Jeśli liczba ta jest mniejsza od 0.1, to można być zadowolonym z ocen ekspertów (Saaty 1980). Zaproponowany indeks zgodności *C.I.* jest krytykowany w literaturze, np. Murphy (1993) pokazuje ograniczenia metody maksymalnej wartości własnej podając przykłady macierzy, które nigdy nie osiągną zadowalającej wartości indeksu *C.I.* przy przyjętej skali (Tablica 2.1, punkt 2.2). Koczkodaj (1993) wprowadza miarę zgodności opartą o metrykę euklidesową.

Metoda maksymalnej wartości własnej posiada wiele wad. Po pierwsze nie może być stosowana w sposób bezpośredni w przypadkach z brakującymi danymi. Należałoby najpierw uzupełnić brakujące oceny. Po drugie dokonanie transponowania macierzy ocen powoduje uzyskanie innych wartości wektora uszeregowania. W takim przypadku nie jest zachowane prawo przemienności relacji (Barzilai i inni 1987). Własność ta wynika z różnicy pomiędzy rozwiązaniami lewego i prawego zagadnienia rozkładu na wartości własne (Johnson i inni 1978). Wreszcie dodanie nowego czynnika w postaci względnej może spowodować utratę ważności w uszeregowaniu (Dyer 1990; Monsuur 1996, Kwiesielewicz i van Uden 2001b). Innymi słowy dodanie nowego czynnika do uszeregowania może zmienić jego pierwotny porządek. Dyskusja dotycząca utraty ważności znajduje się m.in. w pracy (Dyer 1990). Ponadto metoda ta, w przypadku wieloatrybutowym wraz z arytmetyczną normalizacją (2.6) oraz agregacją z wykorzystaniem sumy ważonej, jak to zaproponował Saaty (1980), może powodować tzw. międzypoziomą niezgodność (Barzilai i Golany 1994; Barzilai i inni 1987, Barzilai 1998). Krytykę tej metody można znaleźć w pracy (Barzilai 2001).

Monsur (1996) zbadał jak na otrzymane uszeregowanie wpłynie dodanie jednego czynnika w postaci względnej. Założył on, że w oparciu o macierz \mathbf{R} otrzymano wektor uszeregowania $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$. Następnie założył dodanie nowego czynnika zakładając jego względną ważność $c > 0$ w stosunku do czynnika pierwszego:

$$p_{n+1} = cp_1. \quad (2.20)$$

Rozszerzając macierz \mathbf{R} do macierzy $\mathbf{R}'(c)$ o wymiarach $(n+1) \times (n+1)$ w sposób następujący:

$$\begin{aligned} r'_{ij} &= r_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \\ r'_{mm} &= 1, \\ r'_{im} &= p_i / (cp_1), \\ r'_{mi} &= (cp_1) / p_i, \quad m = n+1, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

otrzymał następującą postać macierzy $\mathbf{R}'(c)$:

$$\mathbf{R}'(c) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} & 1/c \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} & p_n / (cp_1) \\ c & (cp_1) / p_2 & \dots & (cp_1) / p_n & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Należało oczekiwać otrzymania wektora $\mathbf{p}' = (p'_1, \dots, p'_n, cp'_1)$, ale metoda maksymalnej wartości własnej dała inny wynik.

2.4.3 Metoda najmniejszych kwadratów

Obliczenie uszeregowania czynników z wykorzystaniem metody najmniejszych kwadratów wyznaczania macierzy \mathbf{P} (Saaty 1980; Saaty i Vargas 1984) opiera się na minimalizacji wyrażenia:

$$\sum_{i,j=1}^n \left(r_{ij} - \frac{p_i}{p_j} \right)^2. \quad (2.22)$$

Innymi słowy należy znaleźć macierz ilorazów \mathbf{P} , najbliższą położoną w stosunku do macierzy \mathbf{R} w sensie normy euklidesowej $\|\cdot\|_E$, która dla dowolnej macierzy \mathbf{A} wyraża się zależnością:

$$\|A\|_E^2 = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2, \quad (2.23)$$

gdzie n jest stopniem macierzy A . Normę euklidesową macierzy można również wyrazić jako sumę elementów głównej przekątnej macierzy AA^T (Ralston 1983):

$$\|A\|_E^2 = \text{trace}(AA^T) \quad (2.24)$$

lub sumę jej wartości własnych (Ralston 1983):

$$\|A\|_E^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i. \quad (2.25)$$

Do aproksymacji macierzy R za pomocą macierzy P można wykorzystać metodę aproksymacji poprzez macierz o niższym rzędzie (Eckart i Young 1936; Saaty 1980; Saaty i Vargas 1984). Warto zwrócić tutaj uwagę, że macierz P ma rząd równy jedności. Metoda aproksymacji za pomocą macierzy o mniejszym rzędzie opiera się na koncepcji rozkładu macierzy na wartości szczególne, który dla macierzy kwadratowej A wyrazi się zależnością:

$$A = QSU^T, \quad (2.26)$$

gdzie Q i U są macierzami ortonormalnymi, natomiast macierz S jest macierzą diagonalną, zawierającą pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy AA^T . Macierzą rzędu r ($r < n$) aproksymującą macierz A będziemy nazywali macierz A_r :

$$A_r = Q_r S_r U_r^T, \quad (2.27)$$

gdzie macierze Q_r oraz U_r^T są częściami odpowiednio macierzy Q oraz U^T , odpowiadającymi pierwszym r kolumnom macierzy S . Zależność (2.27) można zapisać jako:

$$A_r = \sum_{k=1}^r s_k \mathbf{q}_k \mathbf{u}_k^T, \quad (2.28)$$

gdzie \mathbf{q}_k oraz \mathbf{u}_k są k -tymi wektorami ortonormalnymi, tworzącymi odpowiednio macierze ortonormalne \mathbf{Q} oraz \mathbf{U} .

Stosując powyższą ideę do aproksymacji macierzy \mathbf{R} za pomocą macierzy \mathbf{P} otrzymujemy:

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}\mathbf{S}\mathbf{U}^T, \quad (2.29)$$

gdzie \mathbf{Q} i \mathbf{U} są macierzami ortogonalnymi, natomiast macierz \mathbf{S} jest macierzą diagonalną, zawierającą pierwiastki kwadratowe wartości własnych macierzy $\mathbf{R}\mathbf{R}^T$. Biorąc pod uwagę fakt, że macierz ilorazów jest rzędu 1, można ją obliczyć zgodnie z zależnością:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_1\mathbf{S}_1\mathbf{U}_1^T = s_1\mathbf{q}_1\mathbf{u}_1^T, \quad (2.30)$$

gdzie macierze \mathbf{Q}_1 oraz \mathbf{U}_1^T są częściami odpowiednio: macierzy \mathbf{Q} oraz \mathbf{U}^T , odpowiadającymi pierwszej kolumnie macierzy \mathbf{S} ; \mathbf{q}_1 oraz \mathbf{u}_1 są pierwszymi wektorami ortonormalnymi, tworzącymi odpowiednio macierze ortonormalne \mathbf{Q} oraz \mathbf{U} ; natomiast s_1 jest odpowiadającą im wartością szczególną.

Należy wybrać maksymalną wartość szczególną macierzy \mathbf{R} , ponieważ wówczas minimalna odległość między macierzami \mathbf{P} i \mathbf{R} (2.22) w sensie zdefiniowanej metryki (2.23) wyrazi się zależnością (Eckart i Young 1936):

$$\sum_{i,j=1}^n \left(r_{ij} - \frac{p_i}{p_j} \right)^2 = \sum_{i=2}^n s_i^2, \quad (2.31)$$

gdzie s_i , $i = 2, \dots, n$ są pozostałymi wartościami szczególnymi macierzy \mathbf{R} . Warto podkreślić tutaj jeszcze raz fakt, że $s_1 = \max(s_i)$.

W efekcie otrzymamy:

$$\frac{p_i}{p_j} = s_1 q_{1i} u_{1j}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n. \quad (2.32)$$

Zależność (2.31) może stanowić miarę zgodności ocen, zdecydowanie lepszą od indeksu (2.19) zaproponowanego przez Saaty'ego. Jednak bardzo istotną wadę metody najmniejszych kwadratów stanowi fakt, że nie zawsze daje ona jedno i tylko jedno rozwiązanie, co zdaniem autora stanowi jej bardzo poważną wadę.

2.4.4 Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów

Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów wyznaczania macierzy \mathbf{P} (de Gran 1980, Saaty 1980) polega na znalezieniu takiej macierzy ilorazów \mathbf{P} , aby uzyskać minimalną wartość wyrażenia:

$$I = \sum_{i,j>i}^n \left(\ln(r_{ij}) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2, \quad (2.33)$$

czyli minimalną wartość odległości pomiędzy macierzami \mathbf{R} i \mathbf{P} w oparciu o normę euklidesową w skali logarytmicznej.

Dokonując następujących podstawień $y_{ij} = \ln(r_{ij})$, $x_i = \ln(p_i)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, otrzymamy następujące zagadnienie optymalizacyjne:

$$\min_{x_i, i=1, \dots, n} \left\{ I = \sum_{i,j=1}^n (y_{ij} - x_i + x_j)^2 \right\}. \quad (2.34)$$

Rozwiązanie zagadnienia optymalizacyjnego (2.34) sprowadza się do przyrównania gradientu I do zera i w konsekwencji rozwiązaniu odpowiedniego układu równań liniowych (Crawford i Williams 1985):

$$\frac{\partial I}{\partial x_k} = -2 \sum_{j=1}^n (y_{kj} - x_k + x_j) = -2 \left(\sum_{j=1}^n y_{kj} - nx_k + \sum_{j=1}^n x_j \right) = 0, \quad (2.35)$$

$$k = 1, \dots, n$$

Zakładając, że spełniony jest warunek (Crawford i Williams 1985):

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0, \quad (2.36)$$

który dla wektora uszeregowania \mathbf{p} jest warunkiem normalizacji geometrycznej:

$$\prod_{i=1}^n p_i = 1, \quad (2.37)$$

wówczas zależność (2.35) przyjmie postać:

$$\sum_{j=1}^n y_{kj} = nx_k, \quad (2.38)$$

co w efekcie daje:

$$x_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{kj}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.39)$$

Biorąc pod uwagę zastosowane przekształcenie logarytmiczne $p_i = \exp(x_i)$, $r_{ij} = \exp(y_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, zależność (2.39) przyjmie postać:

$$p_i = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.40)$$

Warto zwrócić uwagę, że rozwiązanie (2.40) spełnia wcześniej założony warunek geometrycznej normalizacji (2.37). Ponadto po dodaniu nowego czynnika nie występuje utrata wagi (Kwiesielewicz i van Uden 2001a), tak jak dla przypadku metody maksymalnej wartości własnej.

Barzilai (1997) pokazuje, że metoda średniej geometrycznej jest przekształceniem symetrycznym, daje rozwiązanie jedyne, niezależne od odwrócenia skali oraz opisu problemu. Ze względu na multiplikatywny rozkład wektora uszeregowania, do celów agregacji proponuje on zastosowanie metody agregacji opartej o ważoną średnią geometryczną. Metoda ta jest niezależna od kolejności wykonywanych operacji, zatem jest zgodna międzypoziomowo (Barzilai i Gołany 1994, Barzilai 1992). Jako miarę zgodności macierzy ocen można tutaj wykorzystać wartość funkcji kryterialnej I (2.33).

Można pokazać, że kiedy posiadamy uszeregowanie $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, otrzymane na podstawie macierzy \mathbf{R} z wykorzystaniem metody średniej geometrycznej (2.40), a następnie dodamy nowy czynnik zgodnie z zależnością (2.20), to tworząc macierz ocen $\mathbf{R}'(c)$ o strukturze (2.21) i w oparciu o nią obliczając uszeregowanie $\mathbf{p}' = (p'_1, \dots, p'_n, p'_{n+1})$, to spełni ono zależność:

$$p'_i = \left(\frac{1}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.41)$$

co przy rozkładzie multiplikatywnym stanowi bardzo elegancką własność metody średniej geometrycznej.

Zgodnie z zależnością (2.40) można obliczyć ważności uszeregowania $\mathbf{p}' = (p'_1, \dots, p'_n, p'_{n+1})$ jako:

$$p'_1 = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \frac{p_1}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (2.42)$$

oraz

$$p'_i = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \frac{p_i}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.43)$$

co w przypadku ogólnym daje:

$$p'_i = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \frac{p_i}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.44)$$

Korzystając z metody średniej geometrycznej (2.40) i przekształcając zależność (2.44) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p'_i &= \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \frac{p_i}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \frac{\left(\prod_{k=1}^n r_{ik} \right)^{\frac{1}{n}}}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \\ &= \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{1}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \right)^{\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n}} = \\ &= \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \right)^{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}} \left(\frac{1}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} = \\ &= p_i \left(\frac{1}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}}, \end{aligned}$$

co daje:

$$p_i' = \left(\frac{1}{cp_1} \right)^{\frac{1}{n+1}} p_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.45)$$

czyli w efekcie otrzymujemy zależność (2.41), co było do wykazania.

W przypadku wielu ekspertów, kiedy każdy z nich podał ocenę danej pary ($\forall i, j; d_{ij} = D$), zagadnienie (2.33) przyjmie postać:

$$I = \sum_{k=1}^D \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \left(\ln(r_{ijk}) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2. \quad (2.46)$$

Dokonując podstawień $y_{ijk} = \ln(r_{ijk})$, $x_i = \ln(p_i)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, D$, otrzymamy następujące zagadnienie optymalizacyjne:

$$\min_{x_i, i=1, \dots, n} \left\{ I = \sum_{k=1}^D \sum_{i, j=1}^n (y_{ijk} - x_i + x_j)^2 \right\}. \quad (2.47)$$

Wówczas zagadnienie optymalizacyjne (2.47) sprowadzi się do układu równań (Kwiesielewicz 1993a, 1996):

$$x_i \sum_{j=1, j \neq i}^n D - \sum_{j=1, j \neq i}^n Dx_j = \sum_{j=1, j \neq i}^n \sum_{k=1}^D y_{ijk} \quad (2.48)$$

lub

$$nDx_i - D \sum_{j=1, j \neq i}^n x_j = \sum_{j=1, j \neq i}^n \sum_{k=1}^D y_{ijk}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.49)$$

co po uwzględnieniu warunku (2.36) daje (Kwiesielewicz 1993a, 1996):

$$x_i = \frac{1}{nD} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^D y_{ijk}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.50)$$

Biorąc pod uwagę zastosowane przekształcenie logarytmiczne, po powrocie do funkcji wykładniczych: $p_i = \exp(x_i)$, $r_{ij} = \exp(y_{ij})$, $i, j = 1, \dots, n$, zależność (2.50) przyjmie postać:

$$p_i = \left(\prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^D r_{ijk} \right)^{\frac{1}{nD}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.51)$$

Oczywiście spełniony jest warunek normalizacji geometrycznej (2.37).

Rozważane zagadnienie można również przeanalizować w oparciu o klasyczny liniowy model regresyjny. W pracy (Crawford i Williams 1985) pokazano, że przy podanych niżej założeniach, dotyczących rozkładu błędów ocen ekspertów, metoda średniej geometrycznej daje wyniki zgodne z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu kryterium maksymalnej wiarygodności. Załóżmy za przytoczoną pracą, że oceny ekspertów zawarte w macierzy \mathbf{R} są zaburzone w wyniku niezgodnych ocen eksperta:

$$r_{ij} = \frac{p_i}{p_j} e_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j > i, \quad (2.52)$$

gdzie e_{ij} jest zaburzeniem oceny r_{ij} . Wówczas korzystając ze skali logarytmicznej otrzymamy:

$$\ln(r_{ij}) = \ln(p_i) - \ln(p_j) + \ln(e_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, \quad j > i. \quad (2.53)$$

Zakłada się ponadto multiplikatywny oraz recyprokalny model rozkładu błędów, taki że:

$$P(a < e_{ij} \leq b) = P\left(a < \frac{1}{e_{ij}} \leq b\right). \quad (2.54)$$

Zatem skoro rozkład normalny jest powszechnym modelem dla błędów addytywnych, rozkład lognormalny z tych samych powodów może stanowić powszechny model dla błędów multiplikatywnych (Ramsay 1977).

Zakładając, że błędy e_{ij} są niezależne i posiadają rozkład lognormalny o wartości oczekiwanej 0 i wariancji σ^2 , otrzymujemy układ równań:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{E}, \quad (2.55)$$

gdzie:

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \ln(r_{11}) \\ \ln(r_{12}) \\ \vdots \\ \ln(r_{n-1n}) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \ln(p_1) \\ \ln(p_2) \\ \vdots \\ \ln(p_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \ln(e_{11}) \\ \ln(e_{12}) \\ \vdots \\ \ln(e_{n-1n}) \end{pmatrix}.$$

natomiast macierz \mathbf{B} ze wzoru (2.55) zawiera elementy o wartościach 1,0,+1, wynikające z układu równań (2.55). Estymator o maksymalnej wiarygodności dla \mathbf{X} (Scheffe 1959) jest estymatorem w sensie najmniejszych kwadratów i wyrazi się jako:

$$\hat{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln(r_{ij}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.56)$$

Posiada on wszystkie własności estymatora w sensie najmniejszych kwadratów.

Wracając do funkcji wykładniczych otrzymujemy:

$$\hat{p}_i = \left(\prod_{j=1}^n r_{ij} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.57)$$

Zatem opisana powyżej metoda również daje w tym przypadku rozwiązanie w postaci średniej geometrycznej.

Przedstawiona metodyka może być zastosowana do rozwiązania bardziej ogólnego zagadnienia aproksymacyjnego. Warto przypomnieć, że w przypadku ogólnym, zamiast pojedynczej oceny danej pary, możemy dysponować wieloma ocenami r_{ijk} , $k = 1, 2, \dots, d_{ij} \leq D$, $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$, gdzie d_{ij} jest liczbą ocen danej pary, natomiast D jest maksymalną liczbą ocen. W szczególnym przypadku może zachodzić $d_{ij} = 0$. Wówczas zagadnienie znalezienia uszeregowania sprowadza się do minimalizacji sumy kwadratów (Crawford i Williams 1985):

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \sum_{k=1}^{d_{ij}} \left(\ln(r_{ijk}) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2. \quad (2.58)$$

Wracając do metody średniej geometrycznej, wynikającej z logarytmicznej regresji, aproksymacja z wykorzystaniem tej metody sprowadza się do naturalnej miary zgodności dla macierzy ocen. Miara ta jest dobrze ugruntowana w teorii statystyki i może być wykorzystana do testu hipotez. Niech s^2 będzie kwadratem średniej residualnej (Crawford i Williams 1985):

$$s^2 = \frac{S}{\text{d.f.}}, \quad (2.59)$$

gdzie d.f. jest liczbą niezależnych obserwacji pomniejszoną o liczbę liniowo niezależnych parametrów, a S jest długością wektora residualnego określoną zależnością (2.58). Warto zauważyć, że jeśli $d_{ij}=1$, wówczas:

$$\text{d.f.} = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

oraz s^2 jest nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2 i stąd jest naturalną miarą zgodności macierzy ocen.

Jeśli $d_{ij}=1$, wówczas s^2 można postrzegać jako kwadrat odległości macierzy ocen od zgodnej macierzy ocen. Zatem $s^2=0$, jeśli macierz ocen jest zgodna; bliskie zero, jeśli macierz ocen jest bliska zgodnej. Ponadto ponieważ s^2 zależy wyłącznie od ilorazów ważności, jest ono niezależne od skali i operacji transponowania.

Fedrizzi (1990) wprowadzając odpowiednie przekształcenie logarytmiczne pokazał, że macierz ocen daje się sprowadzić do rozmytej relacji preferencji i że w ten sposób rozkład multiplikatywny transformowany jest do rozkładu addytywnego, a średnia geometryczna zostaje przekształcona do średniej arytmetycznej. W ten sposób po dokonaniu omawianego przekształcenia można wykorzystać alternatywną metodykę opartą o logikę rozmytą, która pozwala między innymi na obliczenia związane ze zgodnością ocen w grupie ekspertów.

2.4.5 Podsumowanie

W literaturze zagadnienie aproksymacji macierzy ocen przez macierz ilorazów składowych wektora uszeregowania rozwiązywane jest głównie za pomocą trzech metod, a mianowicie metody maksymalnej wartości własnej,

metody najmniejszych kwadratów i metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów.

W tym rozdziale pokazano, że metoda maksymalnej wartości własnej ma szereg wad, a mianowicie jest zależna od odwrócenia skali, zdefiniowanej dla ocen, nie jest przekształceniem symetrycznym oraz nie zachowuje ważności po dodaniu nowego czynnika. W połączeniu z addytywną metodą normalizacji oraz addytywną metodą agregacji daje różne rozwiązania, zależne od kolejności operacji. Oznacza to, że rozwiązanie otrzymane w wyniku dokonania agregacji kilku macierzy ocen, a następnie obliczeniu uszeregowania, będzie się różniło od rozwiązania otrzymanego w wyniku obliczenia uszeregowania dla poszczególnych macierzy i dokonania agregacji. Ponadto metoda ta w sposób bezpośredni nie może być stosowana dla przypadku z brakującymi ocenami.

Drugie z omawianych podejść, metoda najmniejszych kwadratów, nie może być stosowana, ponieważ nie daje jednego i tylko jednego rozwiązania.

Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów dla macierzy ocen bez brakujących danych sprowadza się do metody średniej geometrycznej, która nie posiada wad pozostałych rozważanych metod. Udowodniono, że dla wielu ekspertów metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów sprowadza się również do metody średniej geometrycznej. Metoda średniej geometrycznej jest przekształceniem symetrycznym, daje rozwiązanie jedyne, niezależne od odwrócenia skali (operacja transponowania macierzy ocen). Nie powoduje również utraty wagi. Przy zastosowaniu agregacji opartej o ważoną średnią geometryczną uzyskiwana jest zgodność międzypoziomowa (Barzylai 1987, 1997). Oznacza to, że otrzymany zostanie ten sam wynik bez względu na to, czy najpierw dokonana zostanie agregacja macierzy ocen, a potem obliczona wartość uszeregowania, czy też najpierw zostaną obliczone wartości uszeregowania dla poszczególnych macierzy ocen, a potem dokonana agregacja.

Warto podkreślić, że zastosowanie klasycznego liniowego modelu regresyjnego sprowadza również rozważane zagadnienie logarytmicznych najmniejszych kwadratów do rozwiązania w postaci średniej geometrycznej.

Wykazano, że metoda średniej geometrycznej przy dodaniu względnej ważności czynnika, daje uszeregowanie, którego ważności są proporcjonalne do ważności uszeregowania pierwotnego.

Zaznaczono możliwość transformacji macierzy ocen do postaci rozmytej relacji preferencji, co pozwala na wykorzystanie alternatywnej metodyki, opartej o logikę rozmytą.

Ponieważ metoda najmniejszych kwadratów nie daje jednego i tylko jednego rozwiązania nie będzie brana pod uwagę w dalszej części rozprawy. Metoda maksymalnej wartości własnej nie daje się natomiast zastosować w sposób bezpośredni do przypadków z brakującymi ocenami. Dlatego też

do przypadku z brakującymi ocenami proponuje się dokonać rozwinięcia metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów.

2.5 Uogólnione podejście do zagadnienia szeregowania z wykorzystaniem regresji logarytmicznej

2.5.1 Wprowadzenie

Sformułujmy zagadnienie szeregowania czynników w oparciu o metodę porównywania parami z wykorzystaniem logarytmicznych najmniejszych kwadratów dla przypadku ogólnego, a mianowicie uwzględniającego wiele ocen dotyczących pary czynników oraz zagadnienie brakujących ocen. Zadaniem szeregowania czynników jest znalezienie takiej macierzy ocen zgodnych \mathbf{P} (2.3), która znajdowałaby się w najmniejszej odległości od macierzy ocen \mathbf{R} (2.9) w sensie normy euklidesowej z wykorzystaniem skali logarytmicznej:

$$I_{\min} = \min_{p_i, i=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1, j>i}^n \sum_{k=1}^{d_{ij}} \left(\ln(r_{ijk}) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2 \right\}. \quad (2.60)$$

Dokonując podstawień $x_i = \ln(p_i)$ i $y_{ijk} = \ln(r_{ijk})$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, d_{ij}$, zagadnienie minimalizacji (2.60), ze względu na $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, sprowadza się do układu równań normalnych (Boender i inni. 1985):

$$x_i \sum_{i \neq j, j=1}^n d_{ij} - \sum_{i \neq j, j=1}^n d_{ij} x_j = \sum_{i \neq j, j=1}^n \sum_{k=1}^{d_{ij}} y_{ijk}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.61)$$

gdzie:

$$d_{ij} \geq 0, \forall i, j \quad (2.62)$$

oraz:

$$\sum_{i \neq j, j=1}^n d_{ij} > 0, \forall i. \quad (2.63)$$

Układ równań (2.61) można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2.64)$$

gdzie wektor prawych stron posiada następujące współczynniki:

$$b_i = \sum_{i \neq j, j=1}^n \sum_{k=1}^{d_{ij}} y_{ijk}, \quad i=1, \dots, n, \quad (2.65)$$

natomiast macierz \mathbf{A} posiada następującą strukturę:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1, j \neq 1}^n d_{1j} & -d_{12} & \cdots & -d_{1n} \\ -d_{21} & \sum_{j=1, j \neq 2}^n d_{2j} & \cdots & -d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -d_{n1} & -d_{n2} & \cdots & \sum_{j=1, j \neq n}^n d_{nj} \end{pmatrix}, \quad (2.66)$$

W szczególności dla przykładowej macierzy ocen (2.10) otrzymamy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

W celu rozwiązania układu równań normalnych (2.61) przedstawiona zostanie metoda oparta na uogólnionej pseudoodwrotności macierzy \mathbf{A} lewych stron układu równań (2.61). Opiera się one na rozkładzie macierzy na wartości szczególne.

Biorąc pod uwagę specyfikę rozważanego układu, wydaje się sensowne dokonanie analizy jego rozwiązania. W tym celu wprowadza się podstawowe pojęcia z algebry liniowej oraz dowodzi się szeregu twierdzeń i własności, które pozwolą na ocenę struktury rozwiązania i pokażą jego zgodność z metodą średniej geometrycznej (Kwiesielewicz 1993a, 1996).

2.5.2 Własności macierzy lewych stron układu równań normalnych

W celu obliczenia uogólnionej macierzy pseudoodwrotnej zwykle stosuje się rozkład na wartości szczególne (SVD – *ang. singular value decomposition*). Stosując rozkład SVD otrzymujemy trzy różne macierze, a mianowicie jedną diagonalną i dwie ortogonalne, niekoniecznie sobie równe. Zatem w przypadku ogólnym różnica pomiędzy macierzami ortogonalnymi komplikuje analizę zagadnienia, jeśli SVD jest stosowane do obliczeń analitycznych. W pracy (Horn i Johnson 1991) pokazano, że dla rzeczywistych, symetrycznych macierzy kwadratowych pełnego rzędu, SVD jest równoważne z rozkładem spektralnym macierzy (SD – *ang. spectral decomposition*). Z punktu widzenia niniejszej pracy byłoby jednak bardziej użytecznym wykorzystanie rozkładu na wartości własne w bardziej ogólnych przypadkach. Celem następujących podrozdziałów jest pokazanie, że dla każdej rzeczywistej macierzy symetrycznej do zdefiniowania macierzy pseudoodwrotnej może być wykorzystany rozkład na wartości własne, zamiast rozkładu na wartości szczególne. Ponadto dowodzi się, że kiedy dla rzeczywistej macierzy symetrycznej sumy elementów w jej wierszach, jak i w kolumnach są równe zero, to taką samą własność posiada macierz do niej pseudoodwrotna.

2.5.3 Rozkład macierzy na wartości własne

Przytoczmy podstawowe własności rozkładu na wartości własne.

Twierdzenie 2.1 (Strang 1988, s. 309) *Można dokonać diagonalizacji każdej rzeczywistej macierzy symetrycznej A za pomocą poniższej zależności:*

$$Q^{-1}AQ = \Lambda. \quad (2.67)$$

Wartości kolumn macierzy Q zawierają kompletny zbiór wektorów ortonormalnych, natomiast macierz Λ jest macierzą diagonalną zawierającą wartości własne macierzy A .

Zauważmy ponadto, że dla każdej pary $(\mathbf{q}_i, \lambda_i)$, $i=1, \dots, n$ spełniony jest następujący warunek:

$$A\mathbf{q}_i = \lambda_i\mathbf{q}_i, \quad (2.68)$$

gdzie $Q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$.

W szczególności, jeśli $\lambda_i = 0$, wówczas:

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_i = \mathbf{0}. \quad (2.69)$$

Ponieważ macierz \mathbf{Q} jest rzeczywistą macierzą ortonormalną: $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$, równanie (2.67) może być zapisane jako:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^T \quad (2.70)$$

albo w formie jednowymiarowych rzutów (Strang 1988):

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T, \quad (2.71)$$

gdzie n jest stopniem macierzy \mathbf{A} .

Dla ortonormalnych macierzy kwadratowych mamy:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (2.72)$$

oraz

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}, \quad (2.73)$$

gdzie \mathbf{I} jest macierzą jednostkową.

Zdefiniujmy macierz \mathbf{A}^+ w następujący sposób:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{Q}^T, \quad (2.74)$$

gdzie $\mathbf{\Lambda}^+$ jest macierzą diagonalną o następującej własności:

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} 1/\lambda_i & \text{gdy } \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } \lambda_i = 0 \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.75)$$

Zależność (2.74) daje rozkład spektralny \mathbf{A}^+ , co może być również zapisane jako:

$$\mathbf{A}^+ = \sum_{k=1}^n \lambda_k^+ \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T. \quad (2.76)$$

Z równania (2.76) wynika następujący wniosek:

Wniosek 2.1 (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Macierz \mathbf{A}^+ zdefiniowana zależnością (2.74) jest macierzą symetryczną.*

Zdefiniujmy macierze \mathbf{T} i \mathbf{R} jako:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}, \quad (2.77)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{A}^+ \quad (2.78)$$

oraz załóżmy, że $\text{rank}(\mathbf{A}) = n - m = r \geq 1, m \geq 1$, z czego wynika, że macierz \mathbf{A} ma przynajmniej jedną niezerową wartość własną i przynajmniej jedną zerową wartość własną. Wykorzystując równania (2.70) i (2.74) oraz zakładając, że macierz $\mathbf{\Lambda}$ posiada następującą strukturę:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

otrzymujemy:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} = \mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T, \quad (2.79)$$

gdzie macierz \mathbf{I}_r jest macierzą jednostkową stopnia n . Wynika stąd następujący wniosek:

Wniosek 2.2 (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Macierze \mathbf{T} i \mathbf{R} są macierzami symetrycznymi.*

Z drugiej strony macierze \mathbf{T} i \mathbf{R} można wyrazić w postaci kombinacji jednowymiarowych rzutów:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} = \sum_{k=1}^r \mathbf{q}\mathbf{q}_k^T. \quad (2.80)$$

Z własności (2.73) wynika następującą zależność:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \sum_{k=1}^n \mathbf{q}\mathbf{q}_k^T = \mathbf{I}. \quad (2.81)$$

Równanie (2.80) można teraz napisać w następującej formie:

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - \sum_{k=r+1}^n \mathbf{q}\mathbf{q}_k^T, \quad (2.82)$$

gdzie \mathbf{q}_k , $k = r+1, \dots, n$ są wektorami własnymi macierzy \mathbf{A} , odpowiadającymi $\lambda_k = 0$.

2.5.4 Uogólniona pseudoodwrotność

Twierdzenie 2.2. (Penrose 1955, Pyle 1972). *Dla każdej macierzy rzeczywistej \mathbf{A} o wymiarach $m \times n$ istnieje jedna i tylko jedna macierz \mathbf{X} o wymiarach $n \times m$ spełniająca następujące równania macierzowe:*

1. $\mathbf{A}\mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{A}$
2. $\mathbf{X}\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{X}$
3. $(\mathbf{A}\mathbf{X})^T = \mathbf{A}\mathbf{X}$
4. $(\mathbf{X}\mathbf{A})^T = \mathbf{X}\mathbf{A}$

Definicja 2.1. *Jedna i tylko jedna macierz \mathbf{X} , spełniająca aksjomaty (1),(2),(3),(4) nazywana jest uogólnioną pseudoodwrotnością macierzy \mathbf{A} i oznaczana jako \mathbf{A}^+ .*

Można teraz pokazać, że macierz \mathbf{A}^+ , zdefiniowana równaniem (2.74), jest uogólnioną pseudoodwrotnością macierzy \mathbf{A} w sensie definicji 2.1.

Aksjomat 1. Wykorzystując równania (2.77), (2.82) oraz (2.69) otrzymujemy:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} - \sum_{k=r+1}^n \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T\right) = \mathbf{A} - \sum_{k=r+1}^n \mathbf{A}\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T = \mathbf{A}.$$

Aksjomat 2. Wykorzystując równania (2.78), (2.82) oraz (2.69) otrzymujemy:

$$\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{T} = \mathbf{A}^+\left(\mathbf{I} - \sum_{k=r+1}^n \mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T\right) = \mathbf{A}^+ - \sum_{k=r+1}^n \mathbf{A}^+\mathbf{q}_k \mathbf{q}_k^T = \mathbf{A}^+.$$

Aksjomaty 3 oraz *4* są spełnione w oparciu o zależności (2.77) i (2.78) oraz wniosek 2.2.

Z powyższych zależności wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.3. (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Dla każdej rzeczywistej macierzy symetrycznej \mathbf{A} istnieje unikalna macierz pseudoodwrotna, zdefiniowana zależnością (2.74).*

Niżej analizuje się własności macierzy pseudoodwrotnej do macierzy której sumy elementów kolumn, jak i wierszy wynoszą zero.

Uogólniona pseudoodwrotność dla macierzy o elementach kolumn i wierszy sumujących się do zera

Wykorzystując równanie (2.71) element a_{ij} macierzy \mathbf{A} można wyrazić jako:

$$a_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k q_{ik} q_{jk} \right)_{ij}. \quad (2.83)$$

Jeśli dla każdego wiersza macierzy \mathbf{A} , suma jego elementów równa jest zero, to mamy:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k q_{ik} q_{jk} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_k q_{ik} q_{jk} = \sum_{k=1}^n q_{ik} \lambda_k \sum_{j=1}^n q_{jk} = 0, \quad (2.84)$$

dla $i = 1, \dots, n$,

co w formie macierzowej można przedstawić jako:

$$\mathbf{Q} \begin{pmatrix} \lambda_1 \sum_{j=1}^n q_{j1} \\ \lambda_2 \sum_{j=1}^n q_{j2} \\ \vdots \\ \lambda_n \sum_{j=1}^n q_{jn} \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.85)$$

Ponieważ macierz \mathbf{Q} jest macierzą nieosobliwą, układ równań (2.85) posiada dokładnie jedno rozwiązanie w postaci wektora zerowego:

$$\lambda_i \sum_{j=1}^n q_{jk} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.86)$$

Można teraz sformułować następujący wniosek:

Wniosek 2.3. (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Każdy wektor własny, odpowiadający niezerowej wartości własnej rzeczywistej symetrycznej macierzy, w której elementy każdego wiersza sumują się do zera, posiada składowe sumujące się również do zera.*

Suma elementów i -tego wiersza macierzy \mathbf{A}^+ może być obliczona z wykorzystaniem równania (2.76):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}^+ = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \lambda_k^+ q_{ik} q_{jk} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_k^+ q_{ik} q_{jk} = \sum_{k=1}^n q_{ik} \lambda_k^+ \sum_{j=1}^n q_{jk} = 0, \quad (2.87)$$

dla $i = 1, \dots, n$.

W oparciu o wnioski (2.1) oraz (2.3) można sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.4. (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Uogólniona pseudoodwrotność każdej rzeczywistej macierzy symetrycznej o sumach elementów wierszy równych zero posiada także wiersze oraz kolumny, z których suma elementów jest równa zero.*

Dowód twierdzenia wynika z równań (2.86) i (2.87).

2.5.5 Rząd macierzy lewych stron układu równań normalnych

Stosując twierdzenie Georšgina (Horn i Johnson 1985, 1991) można pokazać, że macierz \mathbf{A} o strukturze (2.66) jest dodatnio półokreślona. Zgodnie z tym twierdzeniem wszystkie wartości własne macierzy znajdują się w zbiorze stanowiącym sumę n dysków:

$$\bigcup_{i=1}^n \left(z \in \mathbb{C}; |z - a_{ii}| \leq \sum_{i=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right), \quad (2.88)$$

co, z uwagi na równanie (2.61) daje:

$$\bigcup_{i=1}^n \left(z \in \mathbb{C}; |z - a_{ii}| \leq |a_{ij}| \right). \quad (2.89)$$

Ponieważ macierz \mathbf{A} jest symetryczna i posiada elementy rzeczywiste, z zależności (2.89) wynika, że wszystkie wartości własne zawarte są w przedziale rzeczywistym $[0, 2 \max(a_{ii})]$. Zatem macierz ta jest dodatnio półokreślona.

Macierz \mathbf{A} jest macierzą osobliwą. W celu określenia jej rzędu należy znaleźć największą jej podmacierz, która jest nieosobliwa. Warto zwrócić uwagę, że jeśli możliwym jest usunięcie z macierzy \mathbf{A} jednego wiersza lub jednej kolumny z wszystkimi niezerowymi elementami, to tak otrzymana podmacierz jest wymiaru $(n-1) \times (n-1)$ i jest ściśle wierszowo diagonalnie zdominowana, skąd jej rząd wynosi $n-1$ (Horn i Johnson 1985, 1991). Zatem rząd macierzy \mathbf{A} także jest równy $n-1$. Innymi słowy, aby macierz \mathbf{A} była rzędu $n-1$, musi posiadać jeden niezerowy wiersz lub kolumnę. Warto zwrócić uwagę, że w takiej sytuacji macierz \mathbf{A} posiada dokładnie jedną wartość własną równą zero.

2.5.6 Uogólnione rozwiązanie układu równań normalnych

W celu rozwiązania układu równań normalnych można wykorzystać następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.5 (Pyle 1972) *Warunkiem wystarczającym i koniecznym na to, aby równanie:*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

posiadało rozwiązanie jest:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Rozwiązaniem jest wówczas wektor \mathbf{x} :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A})\mathbf{y},$$

gdzie \mathbf{y} jest dowolnym wektorem.

Rozwiązanie o minimalnej normie wynosi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}. \quad (2.90)$$

Ponieważ w rozważanym przypadku wiersze i kolumny macierzy pseudoodwrotnej sumują się do zera (Twierdzenie 2.4), więc jeśli rozwiązanie o minimalnej normie istnieje, to spełnia ono następujący warunek:

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ b_j = \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=1}^n a_{ij}^+ = 0, \quad (2.91)$$

co po powrocie do funkcji wykładniczych daje:

$$\prod_{i=1}^n p_i = 1.$$

Przypomnijmy, że:

$$p_i = \exp(x_i), i = 1, \dots, n.$$

Można zatem sformułować następujący wniosek:

Wniosek 2.4. (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Jeśli istnieje rozwiązanie o minimalnej normie (2.90), to daje ono dla wektora uszeregowania \mathbf{p} własność geometrycznej normalizacji (2.37).*

Zatem rozwiązanie problemu szeregowania dla przypadku brakujących danych z wykorzystaniem uogólnionej pseudoodwrotności jest

geometrycznie znormalizowane i w tym sensie jest zgodne z przypadkiem jednego eksperta.

Zakładając, że układ równań normalnych (2.64) ma dokładnie jeden stopień swobody (macierz \mathbf{A} ma rząd $n - 1$), co najczęściej spotykane jest w praktyce, oraz wykorzystując równanie (2.82), otrzymamy:

$$\mathbf{T} = \mathbf{I} - \mathbf{q}_n \mathbf{q}_n^T, \quad (2.92)$$

gdzie \mathbf{q}_n jest wektorem własnym macierzy \mathbf{A} , odpowiadającym wartości własnej $\lambda_n = 0$ oraz n -tą kolumną macierzy \mathbf{Q} . Wektor ten spełnia następujące równanie:

$$\mathbf{A} \mathbf{q}_n = \lambda_n \mathbf{q}_n = \mathbf{0}. \quad (2.93)$$

Ponieważ wszystkie wiersze macierzy \mathbf{A} sumują się do zera, to:

$$\mathbf{q}_n = (c, c, \dots, c)^T, \quad c \in \mathfrak{R}. \quad (2.94)$$

Ponadto z własności macierzy ortogonalnej (\mathbf{q}_n jest znormalizowany) wynika:

$$\sum_{i=1}^n q_{in} = \sum_{i=1}^n c^2 = 1, \quad (2.95)$$

skąd otrzymujemy:

$$c = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ lub } c = \frac{-1}{\sqrt{n}} \quad (2.96)$$

oraz:

$$\mathbf{q}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^T \quad (2.97)$$

lub:

$$\mathbf{q}_n = \left(\frac{-1}{\sqrt{n}}, \frac{-1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{-1}{\sqrt{n}} \right)^T. \quad (2.98)$$

Podstawiając powyższe wyniki do zależności (2.82):

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} = \mathbf{I} - \mathbf{T}', \quad (2.99)$$

gdzie:

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1 - \frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

Obydwie macierze \mathbf{T} i \mathbf{T}' są idempotentne.

Warto zauważyć, że

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{T} \quad (2.100)$$

oraz

$$\mathbf{I} - \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I} - \mathbf{T} = \mathbf{T}' \quad (2.101)$$

Z powyższych rozważań wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.6. (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Jeśli układ równań normalnych jest dany równaniem (2.61) z założeniami (2.62)-(2.64) oraz macierz \mathbf{A} jego lewej strony posiada przynajmniej jeden wiersz i jedną kolumnę z niezerowymi elementami, wówczas istnieje macierz \mathbf{A}^+ , która po pomnożeniu z lewej strony układu równań normalnych przekształca go do następującej postaci:*

$$x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = g_i, i = 1, \dots, n,$$

gdzie:

$$g_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^+ b_j, i = 1, \dots, n.$$

Dowód twierdzenia jest oczywisty.

Warto zauważyć, że powyższy wynik jest zgodny z przypadkiem jednego eksperta.

Rozwiązanie układu (2.64) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zgodnie z twierdzeniem 2.5:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{b} = \mathbf{b}, \quad (2.102)$$

co przy wykorzystaniu równań (2.77)-(2.78) można zapisać jako:

$$\mathbf{T}\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Teraz z zależności (2.99) otrzymujemy:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T}')\mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{T}'\mathbf{b} = \mathbf{b}, \quad (2.103)$$

ponieważ suma elementów wektora \mathbf{b} równa jest zero.

Twierdzenie 2.7. (Kwiesielewicz 1993a, 1996) *Jeśli macierz \mathbf{A} ze strukturą zdefiniowaną przez (2.61)-(2.63) jest rzędu $n-1$, wówczas rozwiązanie ogólne układu równań (2.64) zawsze istnieje i posiada postać:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b} + \mathbf{z}, \quad (2.104)$$

gdzie:

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad z_i = c.$$

Dowód twierdzenia jest oczywisty.

2.5.7 Modyfikacja algorytmu

Jak pokazano wcześniej (Kwiesielewicz 1993a, 1996), jeśli rozwiązanie o minimalnej normie układu równań (2.64) istnieje, to spełnia ono warunek (2.91), tzn.:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0,$$

który sprowadza się do warunku normalizacji geometrycznej dla uszeregowania. Wykorzystanie tego warunku pozwala na pewną modyfikację podejścia do rozwiązania układu równań normalnych (Kwiesielewicz i van Uden 2000). Modyfikacja ta polega na zastąpieniu dowolnego wiersza układu równań normalnych (2.64) równaniem (2.91). Wówczas dla przypadku z rzędem macierzy \mathbf{A} równym $n - 1$, otrzymamy układ równań z macierzą lewych stron pełnego rzędu:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}. \quad (2.105)$$

Bez utraty ogólności rozważań można przyjąć, że dokonano wymiany pierwszego równania układu równań normalnych (2.64) na równanie (2.91). Wówczas macierz \mathbf{C} przyjmie następującą postać:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -d_{21} & \sum_{j=1, j \neq 2}^n d_{2j} & \dots & -d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -d_{n1} & -d_{n2} & \dots & \sum_{j=1, j \neq n}^n d_{nj} \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

a wektor prawych stron \mathbf{d} następującą postać:

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.107)$$

Można sformułować następujący wniosek:

Wniosek 2.5 (Kwiesielewicz i van Uden 2000) *Jeśli macierz A o strukturze zdefiniowanej przez (2.61)-(2.63) jest rzędu $n-1$, wówczas macierz C , utworzona zgodnie z procedurą przedstawioną powyżej, jest rzędu n .*

Dowód. Po usunięciu z macierzy A jakiegokolwiek wiersza, wiersze pozostałe tworzą zbiór wektorów liniowo niezależnych, ponieważ rząd macierzy A jest $n-1$. Dodając do tego zbioru wektorów wektor $(1,1,\dots,1)^T$, otrzymany w ten sposób zbiór wektorów pozostanie liniowo niezależny. Można łatwo pokazać, że wektor utworzony z pierwszego wiersza macierzy C jest prostopadły do pozostałych wierszy macierzy:

$$\mathbf{c}_1 \circ \mathbf{c}_k^T = \sum_{i=1}^n 1 \cdot c_k = \sum_{i=1}^n c_k = 0, \text{ gdzie } k = 2, 3, \dots, n, \quad (2.108)$$

gdzie \mathbf{c}_k oznacza wektor utworzony z k -tego wiersza macierzy C . Wynika to z własności macierzy A , której wiersze oraz kolumny sumują się do zera. Zatem wiersze macierzy C tworzą zbiór liniowo niezależnych wektorów i stąd macierz C jest macierzą pełnego rzędu.

2.5.8 Przykład obliczeniowy ilustrujący zaproponowaną metodykę

Poniżej zamieszczono przykładowe obliczenia ilustrujące metodykę wprowadzoną w rozdziale 2.5.

Założmy, że macierz ocen dla trzech czynników, utworzona na podstawie ocen dwóch ekspertów, posiada następującą postać:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & - \\ 1 & - & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/3 \\ - & 1 & 1/6 \\ - & 3 & 1 \\ 1/4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Warto zwrócić uwagę, że pierwszy ekspert nie ocenił pary (1,3), natomiast drugi pary (1,2).

Otrzymamy odpowiednio następującą macierz lewych stron i wektor prawych stron układu równań normalnych:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.0794 \\ -3.5835 \\ 1.5041 \end{pmatrix}.$$

Macierz \mathbf{A} posiada rząd 2. Jej uogólniona pseudoodwrotność przyjmie postać:

$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 0.2222 & -0.1111 & -0.1111 \\ -0.1111 & 0.1556 & -0.0444 \\ -0.1111 & -0.0444 & 0.1556 \end{pmatrix}.$$

Macierz \mathbf{A}^+ jest macierzą symetryczną z sumami kolumn i wierszy równymi zero. Otrzymujemy następujące elementy składowe rozwiązania:

(i) Rozkład na wartości własne:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0.8165 & 0.0000 & -0.5774 \\ -0.4082 & 0.7071 & -0.5774 \\ -0.4082 & -0.7071 & -0.5774 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 3.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0000 \end{pmatrix}.$$

Sumy elementów wektorów własnych, odpowiadających niezerowym wartościom własnym, wynoszą zero, natomiast wektor własny odpowiadający zerowej wartości własnej, posiada wszystkie współrzędne równe $-1/\sqrt{n} = -1/\sqrt{3}$.

(ii) Macierze \mathbf{T} oraz \mathbf{T}'

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.6667 & -0.3333 & -0.3333 \\ -0.3333 & 0.6667 & -0.3333 \\ -0.3333 & -0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \\ 0.3333 & 0.3333 & 0.3333 \end{pmatrix}.$$

Stąd rozwiązanie o minimalnej normie (2.90) wyniesie:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.6931 \\ -0.8553 \\ 0.1622 \end{pmatrix},$$

i będzie spełniało warunek:

$$\sum_{i=1}^3 x_i = -1.3878 \times 10^{-16}.$$

Rozwiązanie ogólne istnieje, ponieważ spełniony jest warunek:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^+ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2.0794 \\ -3.5835 \\ 1.5041 \end{pmatrix} = \mathbf{b}.$$

Powracając do funkcji wykładniczych, otrzymujemy:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 0.4251 \\ 1.1761 \end{pmatrix},$$

ze spełnionym warunkiem geometrycznej normalizacji:

$$\prod_{i=1}^3 p_i = 1.$$

Zgodnie z propozycją modyfikacji algorytmu, wstawiając do macierzy \mathbf{A} zamiast pierwszej kolumny wektor $(1,1,1)$, otrzymujemy macierz \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

i układ równań (2.105) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 &= -3.5835, \\ -x_1 - 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 &= 1.5041 \end{aligned}$$

z wartością wyznacznika $\det(\mathbf{C}) = 15$.

Wykorzystując równania Cramera lub rozkład LU, otrzymujemy:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.6931 \\ -0.8553 \\ 0.1622 \end{pmatrix}.$$

Po powrocie do funkcji wykładniczych rozwiązanie wyniesie

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 0.4251 \\ 1.1761 \end{pmatrix}.$$

czyli jest takie same, jak przy użyciu uogólnionej pseudoodwrotności.

2.5.9 Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów, a metoda średniej geometrycznej

Dla przypadku z jednym ekspertem metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów sprowadza się do metody średniej geometrycznej. W przypadku wielu ekspertów oraz tej samej liczby ocen na parę obiektów, problem szeregowania obiektów może być również rozwiązany przy wykorzystaniu metody średniej geometrycznej. W obydwu przypadkach rozwiązanie jest znormalizowane geometrycznie.

W przypadku najbardziej ogólnym, tj. wielu ekspertów i różnych liczb ocen na parę (brakujące oceny), problem szeregowania można rozwiązać dwojako:

1. Założyć, że w miejsce brakujących ocen wstawiamy liczbę równą 1, co oznacza, że ekspert, który nie był w stanie ocenić danej pary obiektów, nie wyraził swojej preferencji. Zatem obiekty są równoważne. Wtedy powracamy do metody średniej geometrycznej;
2. Założyć, że w miejsce brakujących ocen nie wstawiamy nic, albo wstawiamy iloraz zgodny z rozwiązaniem końcowym, tzn. rozwiązanie otrzymane dla przypadku z brakującymi ocenami nie ulegnie zmianie, jeśli policzymy uszeregowanie jeszcze raz uzupełniając brakujące dane korzystając z ilorazów, obliczonych na podstawie otrzymanego uprzednio wyniku. Wówczas otrzymujemy układ równań normalnych i wykorzystując podejście z uogólnioną pseudoodwrotnością otrzymujemy rozwiązanie również znormalizowane geometrycznie.

Należy zwrócić uwagę, że otrzymujemy różne rozwiązania w zależności od przyjętych założeń, jakkolwiek w obydwu przypadkach rozwiązanie o minimalnej normie daje rozwiązanie znormalizowane geometrycznie. Pokazano, że dla przypadku z jednym stopniem swobody, rozwiązanie ogólne zawsze istnieje. Jeśli nie istnieje, jako rozwiązanie można przyjąć rozwiązanie układu (2.64) w sensie najmniejszych kwadratów.

Zakładając, że w miejsce brakujących danych wstawiamy iloraz zgodny z rozwiązaniem końcowym, zagadnienie minimalizacyjne (2.60) przyjmie postać zagadnienia (2.46) dla przypadku z kompletnym zbiorem ocen:

$$\begin{aligned}
I_{\min} &= \min_{p_i, i=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^{d_{ij}} \left(\ln(r_{ijk}) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2 \right\} = \\
&= \min_{p_i, i=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^{d_{ij}} \left(\ln(r_{ijk}) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^D \left(\ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2 \right\} = \\
&= \min_{p_i, i=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^D \left(\ln(r_{ijk}) - \ln\left(\frac{p_i}{p_j}\right) \right)^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Zgodnie z przekształceniami (2.47)-(2.51) rozwiązaniem zagadnienia (2.109) jest średnia geometryczna (2.51). Fakt ten pozwala na wykorzystanie własności rozwiązania opartego o średnią geometryczną do uogólnionego podejścia zaproponowanego w punkcie 2.5.

2.5.10 Uwagi

W celu rozwiązania zagadnienia porównywania parami z brakującymi ocenami z wykorzystaniem logarytmicznych najmniejszych kwadratów, do rozwiązania układu równań normalnych autor zaproponował zastosowanie uogólnionej pseudoodwrotności.

Ze względu na specyficzną postać rozważanego układu równań liniowych dokonano jego analizy. Sformułowano warunki, dla których macierz lewych stron ma jeden stopień swobody, ponieważ z taką sytuacją mamy do czynienia najczęściej w praktyce. W celu zbadania struktury rozwiązania udowodniono, że dla rozważanego przypadku rozkład macierzy na wartości szczególne może zostać zastąpiony rozkładem na wartości własne. Warto tutaj podkreślić, że udowodnione w tym zakresie twierdzenie może być stosowane w przypadkach bardziej ogólnych.

W oparciu o dokonaną analizę udowodniono szereg własności rozwiązania układu równań normalnych, co pozwoliło w efekcie na wykazanie zgodności rozwiązania zagadnienia szeregowania czynników dla przypadku z brakującymi danymi, otrzymanego z wykorzystaniem metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów i uogólnionej

pseudoodwrotności, z rozwiązaniem dla przypadku bez brakujących danych z wykorzystaniem metody średniej geometrycznej.

Wykonano przykładowe obliczenia w celu ilustracji zaproponowanej metody

2.6 Podsumowanie

Przedstawiono główne metody obliczania uszeregowania na podstawie macierzy porównań parami. Dokonano ich analizy pod kątem użyteczności do aproksymacji macierzy ocen dla przypadków z brakującymi ocenami.

Scharakteryzowano podstawowe metody aproksymacji macierzy ocen oraz dokonano ich analizy dla przypadku bez brakujących ocen. Ponieważ metoda najmniejszych kwadratów nie daje jedyne rozwiązanie, została ona pominięta w dalszych rozważaniach.

Metoda maksymalnej wartości własnej, mimo że jest najbardziej popularna, posiada szereg wad. Po pierwsze operacja transponowania macierzy ocen powoduje uzyskanie różnych wyników. Zatem nie jest spełniona własność przemienności relacji. Po drugie dodanie nowego czynnika do istniejącego uszeregowanie może je zmienić, czyli może wystąpić tzw. utrata wagi (ważności). Po trzecie metoda ta, wraz z agregacją za pomocą sumy ważonej, może spowodować międzypoziomą niezgodność, czyli wynik może zależeć od kolejności wykonywania poszczególnych operacji. Ważnym jest fakt, że uszeregowanie otrzymywane przy pomocy metody porównywania parami powinno mieć rozkład multiplikatywny, a przy takim założeniu arytmetyczna normalizacja i agregacja za pomocą średniej ważonej jest nieodpowiednia.

Metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów nie posiada wymienionych powyżej wad, a w przypadku pełnych macierzy ocen sprowadza się do metody średniej geometrycznej. Przede wszystkim daje rozkład multiplikatywny wektora uszeregowania. Z tego też powodu do agregacji nie należy stosować średniej ważonej, lecz średnią geometryczną. Wynik nie zależy od operacji transponowania macierzy, nie występuje utrata wagi przy dodaniu nowego czynnika. Przy założeniu agregacji za pomocą średniej geometrycznej nie występuje zjawisko zależności wyniku od kolejności wykonywania poszczególnych operacji. Jest ona zgodna z metodą estymatora o największej wiarygodności, co uzasadnia jej użycie z punktu widzenia statystyki. Po przekształceniu logarytmicznym macierzy ocen, otrzymywana jest rozmyta relacja podobieństwa o charakterze addytywnym. Z tego punktu widzenia metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów jest zgodna z odpowiednim podejściem opartym o relacje rozmyte w teorii zbiorów rozmytych.

W przypadku brakujących danych jedyną metodą, która może być zastosowana bezpośrednio, jest metoda logarytmicznych najmniejszych kwadratów. Pokazano, że rozwiązanie ma rozkład multiplikatywny oraz przy założeniu, że brakujące oceny są zgodne z uszeregowaniem wynikowym, metoda ta sprowadza się również do metody średniej geometrycznej. Fakt ten ma bardzo duże znaczenie, ponieważ pozwala to na wykorzystanie wszystkich własności metody średniej geometrycznej. Należy tutaj jednak jeszcze raz podkreślić, że ze względu na multiplikatywny rozkład rozwiązania, agregacja powinna być dokonywana za pomocą średniej geometrycznej.

Do dokonania analizy rozwiązania z wykorzystaniem metody logarytmicznych najmniejszych kwadratów wykorzystano pojęcie rozwiązania ogólnego układu równań liniowych i uogólnionej pseudoodwrotności w sensie Penrose. Pozwoliło to na analityczne zbadanie struktury rozwiązania oraz udowodnienie szeregu jego własności, co w efekcie doprowadziło do znalezienia jego postaci analitycznej w przypadku ogólnym i sformułowanie warunków na istnienie i jedność rozwiązania. Warto podkreślić, że pewne twierdzenia i własności dowiedzione w niniejszym rozdziale są na tyle ogólne, że mogą być stosowane w innych przypadkach, związanych z obliczeniami algebry liniowej.

Przedstawiono modyfikację metody opartej o pseudoodwrotność, sprowadzając macierz lewych stron układu równań normalnych do pełnego rzędu, co pozwala na znaczne uproszczenie obliczeń numerycznych.

Zaproponowana metoda rozwiązania zagadnienia szeregowania czynników dla przypadku z brakującymi ocenami, może być łatwo rozwinięta dla sytuacji z ocenami rozmytymi i zastosowana do analizy rozwiązania zagadnienia rozmytego.

Z punktu widzenia przydatności przedstawionych metod aproksymacji macierzy, celowe byłoby zbadanie zgodności ocen ekspertów i jej wpływ na otrzymane uszeregowanie.

Mirosław KWIESIELEWICZ

ANALITYCZNY HIERARCHICZNY PROCES DECYZYJNY

Nierozmyte i rozmyte porównania parami

Analityczny hierarchiczny proces decyzyjny (ang. Analytic Hierarchy Proces - AHP) należy do klasy metod wielokryterialnych podejmowania decyzji. Polega na wyborze najlepszego wariantu, ze skończonej, niezbyt dużej ich liczby, z uwzględnieniem wielu kryteriów. Metoda oparta jest na porównaniach parami wariantów, dokonywanych przez ekspertów, w oparciu o subiektywną preferencję jednego wariantu nad drugim. Wynikiem porównania może być ocena nierozmyta i rozmyta. Może również zaistnieć sytuacja braku ocen. Na podstawie uzyskanych ocen otrzymywane są wagi, wyrażające ważność poszczególnych wariantów.

Praca koncentruje się na analizie i ocenie głównych metod obliczania wag. Autor proponuje również własne podejście dla przypadku z brakującymi danymi oraz danymi nierozmytymi i rozmytymi.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-69-3