POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 27

Redaktor naukowy:
Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 2001

Krzysztof KOŁOWROCKI

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. inż. Janusz Karpiński
Dr hab. inż. Józef Żurek

Publikacja współfinansowana przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH w ramach projektu badawczego Nr 9 T12C 022 16 nt. "Graniczne funkcje niezawodności dużych systemów wielostanowych oraz ich zastosowania w zagadnieniach transportowych i wytrzymałościowych"

ISBN 83-85847-58-8
ISSN 0208-8029

5. Klasa granicznych funkcji niezawodności systemów dwustanowych

5.1. *Graniczne funkcje niezawodności dwustanowych systemów szeregowych*

Podczas poszukiwania granicznych funkcji niezawodności jednorodnych dwustanowych systemów szeregowych opieramy się na niżej sformułowanym twierdzeniu pomocniczym.

Lemat 5.1
Jeśli

(i) $\overline{\mathfrak{R}}(t) = \exp[-\overline{V}(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\overline{\boldsymbol{R}}_n(t)$ jest funkcją niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu szeregowego określoną przez (3.1),

(iii) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \overline{\boldsymbol{R}}_n(a_n t + b_n) = \overline{\mathfrak{R}}(t) \text{ dla } t \in C_{\overline{\mathfrak{R}}} \tag{5.1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n t + b_n) = \overline{V}(t) \text{ dla } t \in C_{\overline{V}}. \tag{5.2}$$

Lemat 5.1 jest niezbędnym narzędziem podczas ustalania granicznych funkcji niezawodności dwustanowych jednorodnych systemów szeregowych. Różne wersje jego dowodu można znaleźć na przykład w pracach [Barlow, Proschan, 1975, Gniedenko, 1943, Kołowrocki, 1999c, Kopociński, 1973]. Lemat ten jest również podstawą do ustalenia klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności jednorodnych dwustanowych systemów szeregowych. Klasę tę wyznacza udowodnione także w tych pracach następujące twierdzenie

Twierdzenie 5.1
Jedynymi możliwymi niezdegenerowanymi granicznymi funkcjami niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu szeregowego są:

$$\bar{\mathfrak{R}}_1(t) = \exp[-(-t)^{-\alpha}] \text{ dla } t < 0, \ \bar{\mathfrak{R}}_1(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0, \ \alpha > 0, \tag{5.3}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}_2(t) = 1 \text{ dla } t < 0, \ \bar{\mathfrak{R}}_2(t) = \exp[-t^{\alpha}] \text{ dla } t \geq 0, \ \alpha > 0, \tag{5.4}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}_3(t) = \exp[-\exp[t]] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty). \tag{5.5}$$

Rozszerzeniem Lematu 5.1 na dwustanowe niejednorodne systemy szeregowe jest kolejne twierdzenie pomocnicze.

Lemat 5.2
Jeśli

(i) $\bar{\mathfrak{R}}'(t) = \exp[-\ \bar{V}'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\bar{\boldsymbol{R}}'_n(t)$ jest funkcją niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu szeregowego określoną wzorem (3.6),

(iii) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\boldsymbol{R}}'_n(a_n t + b_n) = \bar{\mathfrak{R}}'(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}'},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} n\sum_{i=1}^{a} q_i F^{(i)}(a_n t + b_n) = \bar{V}'(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{V}'}.$$

Dowód Lematu 5.2 znajduje się w pracy [Kołowrocki, 1999c]. Lemat ten jest szczególnym przypadkiem Lematu 1 udowodnionego w pracy [Kołowrocki, 1994g]. W pracy tej udowodniony jest także Lemat 2, którego szczególnym przypadkiem jest poniższe twierdzenie pomocnicze będące bardziej wygodnym niż Lemat 5.2 narzędziem służącym do znajdowania granicznych funkcji niezawodności konkretnych niejednorodnych systemów szeregowych, a także punktem wyjścia do ustalenie klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności tych systemów.

Lemat 5.3
Jeśli

(i) $\overline{\Re}'(t) = \exp[-\ \overline{V}'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\overline{R}'_n(t)$ jest funkcją niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu szeregowego określoną wzorem (3.6),

(iii) $a_n > 0,\ b_n \in (-\infty,\infty)$,

(iv) $F(t)$ jest jedną z dystrybuant $F^{(1)}(t),\ F^{(2)}(t),\ ...,\ F^{(a)}(t)$ określonych przez (3.5) taką, że

(v) $\exists\, N\ \forall\, n > N \quad F(a_n t + b_n) = 0$ dla $t < t_0$,

$F(a_n t + b_n) \neq 0$ dla $t \geq t_0$,

gdzie $t_0 \in \langle -\infty,\infty)$,

(vi) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{(i)}(a_n t + b_n)}{F(a_n t + b_n)} \leq 1$ dla $t \geq t_0$, $i = 1,2,...,a$,

i ponadto istnieje niemalejąca funkcja

(vii) $$\overline{d}(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t < t_o \\ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{a} q_i\, \overline{d}_i(a_n t + b_n) & dla\ t \geq t_o, \end{cases} \tag{5.6}$$

gdzie

(viii) $\overline{d}_i(a_n t + b_n) = \dfrac{F^{(i)}(a_n t + b_n)}{F(a_n t + b_n)}$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \overline{R}'_n(a_n t + b_n) = \overline{\Re}'(t) \text{ dla } t \in C_{\overline{\Re}'} \tag{5.7}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} nF(a_n t + b_n)\bar{d}(t) = \bar{V}'(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{V}'}. \tag{5.8}$$

W oparciu o Twierdzenie 5.1 oraz Lemat 5.3 w pracy [Kołowrocki, 1999c] wyznaczona została klasa granicznych funkcji niezawodności dla niejednorodnych dwustanowych systemów szeregowych wyszczególnionych w następującym twierdzeniu

Twierdzenie 5.2
Jedynymi możliwymi niezdegenerowanymi granicznymi funkcjami niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu szeregowego, przy założeniach Lematu 4.3, są:

$$\bar{\mathfrak{R}}'_1(t) = \exp[-\bar{d}(t)(-t)^{-\alpha}] \text{ dla } t < 0, \quad \bar{\mathfrak{R}}'_1(t) = 0 \text{ dla } t \ge 0,\ \alpha > 0, \tag{5.9}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_2(t) = 1 \text{ dla } t < 0, \quad \bar{\mathfrak{R}}'_2(t) = \exp[-\bar{d}(t)t^{\alpha}] \text{ dla } t \ge 0,\ \alpha > 0, \tag{5.10}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_3(t) = \exp[-\bar{d}(t)\exp[t]] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty), \tag{5.11}$$

gdzie $\bar{d}(t)$ jest funkcją niemalejącą zależną od funkcji niezawodności pojedynczych elementów oraz od ich frakcji w systemie określoną wzorem (5.6).

Powyższe twierdzenie jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 2 udowodnionego w pracy [Kołowrocki, 1994g].

5.2. Graniczne funkcje niezawodności dwustanowych systemów równoległych

Klasę granicznych funkcji niezawodności jednorodnych dwustanowych systemów równoległych można wyznaczyć opierając się na niżej sformułowanym twierdzeniu pomocniczym, udowodnionym między innymi w pracach [Barlow, Proschan, 1975, Gniedenko, 1943, Kołowrocki, 1999d, Kopociński, 1973].

Lemat 5.4
Jeśli $\bar{\mathfrak{R}}(t)$ jest graniczną funkcją niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu szeregowego o funkcjach niezawodności pojedynczych elementów $\bar{R}(t)$, to

$$\mathfrak{R}(t) = 1 - \bar{\mathfrak{R}}(-t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}}$$

jest graniczną funkcją niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu równoległego o funkcjach niezawodności pojedynczych elementów

$$R(t) = 1 - \bar{R}(-t) \text{ dla } t \in C_{\bar{R}}.$$

Jednocześnie, jeśli (a_n, b_n) jest parą funkcji normujących w pierwszym przypadku, to $(a_n, -b_n)$ jest taką parą w drugim przypadku.

Korzystając z powyższego lematu można udowodnić odpowiednik Lematu 5.1 dla systemów równoległych [Barlow, Proschan, 1975, Gniedenko, 1943, Kołowrocki, 1999d, Kopociński, 1973], pozwalający dowodzić fakty dotyczące granicznych funkcji niezawodności jednorodnych dwustanowych systemów równoległych.

Lemat 5.5
Jeśli

(i) $\mathfrak{R}(t) = 1 - \exp[-V(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\boldsymbol{R}_n(t)$ jest funkcją niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu równoległego określoną wzorem (3.2),

(iii) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty, \infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_n(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}}, \tag{5.12}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} nR(a_n t + b_n) = V(t) \text{ dla } t \in C_V. \tag{5.13}$$

Stosując Lemat 5.5 i postępując analogicznie jak w przypadku jednorodnych systemów szeregowych można ustalić klasę granicznych funkcji niezawodności jednorodnych dwustanowych systemów równoległych. Aczkolwiek, łatwiej jest otrzymać ten sam rezultat korzystając z Lematu 5.4 oraz z Twierdzenia 5.1. Ich zastosowanie natychmiast skutkuje następującym wynikiem

Twierdzenie 5.3
Jedynymi możliwymi niezdegenerowanymi granicznymi funkcjami niezawodności jednorodnego dwustanowego systemu równoległego są:

$$\mathfrak{R}_1(t) = 1 \text{ dla } t \le 0,\ \mathfrak{R}_1(t) = 1 - \exp[-t^{-\alpha}] \text{ dla } t > 0,\ \alpha > 0, \tag{5.14}$$

$$\mathfrak{R}_2(t) = 1 - \exp[-(-t)^{\alpha}] \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}_2(t) = 0 \text{ dla } t \ge 0,\ \alpha > 0, \tag{5.15}$$

$$\mathfrak{R}_3(t) = 1 - \exp[-\exp[-t]] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty). \tag{5.16}$$

Następny lemat jest modyfikacją Lematu 5.5 udowodnioną w pracy [Kołowrocki, 1999d]. Jest on także szczególnym przypadkiem Lematu 2 udowodnionego w pracy [Kołowrocki, 1995f].

Lemat 5.6
Jeśli funkcja niezawodności $\bar{\mathfrak{R}}'(t)$ jest graniczną funkcją niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu szeregowego o elementach posiadających funkcje niezawodności

$$\bar{R}^{(i)}(t),\ i = 1,2,\ldots,a,$$

to funkcja niezawodności

$$\mathfrak{R}'(t) = 1 - \bar{\mathfrak{R}}'(-t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}}$$

jest graniczną funkcją niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu równoległego o elementach posiadających funkcje niezawodności

$$R^{(i)}(t) = 1 - \bar{R}^{(i)}(-t) \text{ dla } t \in C_{\bar{R}^{(i)}}.$$

Jednocześnie, jeśli (a_n,b_n) jest parą funkcji normujących w pierwszym przypadku, to $(a_n,-b_n)$ jest taką parą w drugim przypadku.

Opierając się na powyższym lemacie można otrzymać następujący wynik [Kołowrocki, 1999d]

Lemat 5.7
Jeśli

(i) $\mathfrak{R}'(\mathrm{t}) = 1 - \exp[-V'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\boldsymbol{R}'_n(t)$ jest funkcją niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu równoległego określoną wzorem (3.8),

(iii) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}'_n(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}'(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{i=1}^{a} q_i R^{(i)}(a_n t + b_n) = V'(t) \text{ dla } t \in C_{V'}.$$

Uszczegółowieniem powyższego twierdzenia, istotnym w praktycznych zastosowaniach, jest kolejny lemat [Kołowrocki, 1999d] będący szczególnym przypadkiem Lematu 3 udowodnionego w pracy [Kołowrocki, 1995f].

Lemat 5.8
Jeśli

(i) $\mathfrak{R}'(t) = 1 - \exp[-V'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\boldsymbol{R}'_n(t)$ jest funkcją niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu równoległego określoną wzorem (3.8),

(iii) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$,

(iv) $R(t)$ jest jedną z funkcji niezawodności $R^{(1)}(t), R^{(2)}(t), \ldots, R^{(a)}(t)$ określonych wzorem (3.7) taką, że

(v) $\exists N \ \forall n > N \quad R(a_n t + b_n) \neq 0$ dla $t < t_0$,

$$R(a_n t + b_n) = 0 \text{ dla } t \geq t_0,$$

gdzie $t_0 \in (-\infty,\infty>$,

(vi) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{R^{(i)}(a_n t + b_n)}{R(a_n t + b_n)} \leq 1$ dla $t < t_0$, i = 1,2,...,a, i ponadto istnieje nierosnąca funkcja

(vii) $$d(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{a} q_i d_i(a_n t + b_n) & dla\ t < t_0 \\ 0 & dla\, t \geq t_0, \end{cases} \tag{5.17}$$

gdzie

(viii) $$d_i(a_n t + b_n) = \frac{R^{(i)}(a_n t + b_n)}{R(a_n t + b_n)},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} R'_n(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}'(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'} \tag{5.18}$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$\lim_{n\to\infty} nR(a_n t + b_n) d(t) = V'(t) \text{ dla } t \in C_{V'}. \tag{5.19}$$

Wychodząc z powyższego lematu można ustalić klasę możliwych granicznych funkcji niezawodności dwustanowego niejednorodnego systemu równoległego [Kołowrocki, 1999d].

Twierdzenie 5.4
Jedynymi możliwymi niezdegenerowanymi granicznymi funkcjami niezawodności niejednorodnego dwustanowego systemu równoległego, przy założeniach Lematu 5.8, są:

$$\mathfrak{R}'_1(t) = 1 \text{ dla } t \leq 0,\ \mathfrak{R}'_1(t) = 1 - \exp[-d(t)t^{-\alpha}] \text{ dla } t > 0,\ \alpha > 0, \tag{5.20}$$

$$\mathfrak{R}'_2(t) = 1 - \exp[-d(t)(-t)^{\alpha}] \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}'_2(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.21}$$

$$\mathfrak{R}'_3(t) = 1 - \exp[-d(t)\exp[-t]] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty), \tag{5.22}$$

gdzie $d(t)$ jest funkcją nierosnącą zależną od funkcji niezawodności poszczególnych elementów systemu oraz od ich frakcji w systemie określoną wzorem (4.17).

Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 1 udowodnionego w pracy [Kołowrocki, 1995f].

5.3. *Graniczne funkcje niezawodności dwustanowych systemów szeregowo-równoległych*

Zanim sformułujemy całościowe wyniki dotyczące klasy granicznych funkcji niezawodności jednorodnych regularnych dwustanowych systemów szeregowo-równoległych, przyjmijmy pewne założenia dotyczące wszystkich rozpatrywanych przypadków możliwych kształtów tych systemów, tzn. założenia dotyczące wszystkich możliwych relacji pomiędzy liczbą k_n podsystemów szeregowych oraz liczbą l_n elementów w tych podsystemach. W założeniach tych w przypadku systemów równoległo-szeregowych k_n oznacza liczbę podsystemów równoległych, a l_n liczbę elementów w tych podsystemach.

Założenie 5.1
Rozpatrywane są relacje pomiędzy k_n oraz l_n postaci

$$k_n = n,\ l_n = c(\log n)^{\rho(n)}, n \in (0,\infty),\ c > 0,$$

z wyróżnionymi następującymi przypadkami:

Przypadek 1. $k_n = n,\ |l_n - c\log n| >> s,\ s > 0,\ c > 0.$

1^0 $l_n << c\log n$,

$$|\rho(\tau_v) - \rho(n)| \ll \frac{\delta \cdot \log v}{\log n \cdot [\log(\log n)]} \text{ dla każdego naturalnego } v > 1,$$

gdzie $0 < \delta \neq 1$ oraz $\frac{\tau_v}{n} = v^{\frac{1}{1-\rho(n)}}$,

2^0 $l_n \approx c\log n$ oraz $|l_n - c\log n| >> \log(\log n)$

$$|\rho(\tau_v) - \rho(n)| \ll \frac{\delta \cdot \log v}{\log n \cdot [\log(\log n)]} \text{ dla każdego naturalnego } v > 1,$$

gdzie $0 < \delta \neq 1$ oraz $\frac{\tau_v}{n} = v^{\frac{1}{1-\rho(n)}}$,

3^0 $s << |l_n - c\log n| \underset{-}{<<} C\log(\log n)$, $s > 0$, $C > 0$,

$$|\rho(\tau_v) - \rho(n)| \approx \frac{\delta \cdot \log v}{\log n \cdot [\log(\log n)]} \text{ dla każdego naturalnego } v > 1,$$

gdzie $\delta > 0$ oraz $\frac{\tau_v}{n} = v^{\frac{1}{(1-\rho(n))\cdot\log(\log n)}}$,

4^0 $l_n >> c\log n$ oraz $\rho(n) << (\log n)^{\lambda}$ dla każdego $\lambda > 0$,

$$|\rho(\tau_v) - \rho(n)| \underset{-}{<<} \frac{\delta \cdot \log v}{\log n \cdot [\log(\log n)]} \text{ dla każdego naturalnego } v > 1,$$

gdzie $0 < \delta \neq 1$ oraz $\frac{\tau_v}{n} = v^{\frac{1}{1-\rho(n)}}$,

5^0 $\rho(n) \underset{-}{>>} (\log n)^{\lambda}$, $\lambda > 0$,

$$|\rho(\tau_v) - \rho(n)| \underset{-}{<<} \frac{\delta \cdot \log v}{\log n \cdot [\log(\log n)]} \text{ dla każdego naturalnego } v > 1,$$

gdzie $\delta > 0$ oraz $\frac{\tau_v}{n} = v^{\frac{1}{(1-\rho(n))A(t)}}$,

$$A(n) \approx \prod_{i=1}^{v} f_i(\rho(n)),$$

gdzie $f_i(n)$ dla $i = 1,2,\ldots,v$, jest i-krotnym złożeniem funkcji $\log n$ oraz v jest takie, że

$$f_{v+1}(\rho(n)) << \log(\log n).$$

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c\log n \approx s$, $s \in (-\infty,\infty)$, $c > 0$.

Przypadek 3. $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$.

Dowody twierdzeń o granicznych funkcjach niezawodności jednorodnych dwustanowych systemów szeregowo-równoległych oraz poszukiwanie takich funkcji oparte są na następującym lemacie

Lemat 5.9
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}(t) = 1 - \exp[-V(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności jednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego określoną wzorem (3.3),

(iv) $a_n > 0, b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}}, \tag{5.23}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n[R(a_n t + b_n)]^{l_n} = V(t) \text{ dla } t \in C_V. \tag{5.24}$$

Dowód Lematu 5.9 znajduje się w pracach [Kołowrocki, 1993d, 1999g].

Uzasadnienie prawdziwości kolejnego lematu znajduje się w pracy [Kołowrocki 1999e].

Lemat 5.10
Jeśli

(i) $k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}(t)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}_{k_n,l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności jednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego określoną wzorem

(3.3),

(iv) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}_{k_n, l_n}(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}}, \tag{5.25}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} [R(a_n t + b_n)]^{l_n} = \mathfrak{R}_0(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}_0}, \tag{5.26}$$

gdzie $\mathfrak{R}_0(t)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności, a ponadto

$$\mathfrak{R}(t) = 1 - [1 - \mathfrak{R}_0(t)]^k \text{ dla } t \in (-\infty,\infty). \tag{5.27}$$

Wyniki prac [Kołowrocki, 1993e-g, 1994f] oparte na Lemacie 5.9 oraz Lemacie 5.10 można sformułować w postaci następującego twierdzenia [Kołowrocki, 1993f, 1993h]

Twierdzenie 5.5
Jedynymi możliwymi granicznymi funkcjami niezawodności jednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego są:

Przypadek 1. $k_n = n$, $|l_n - c \log n| >> s$, $s > 0$, $c > 0$ (przy Założeniu 5.1).

$$\mathfrak{R}_1(t) = 1 \text{ dla } t \le 0,\ \mathfrak{R}_1(t) = 1 - \exp[-t^{-\alpha}] \text{ dla } t > 0,\ \alpha > 0, \tag{5.28}$$

$$\mathfrak{R}_2(t) = 1 - \exp[-(-t)^{\alpha}] \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}_2(t) = 0 \text{ dla } t \ge 0,\ \alpha > 0, \tag{5.29}$$

$$\mathfrak{R}_3(t) = 1 - \exp[-\exp[-t]] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty), \tag{5.30}$$

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c \log n \approx s$, $s \in (-\infty,\infty)$, $c > 0$.

$$\mathfrak{R}_4(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}_4(t) = 1 - \exp[-\exp[-t^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t \ge 0,\ \alpha > 0, \tag{5.31}$$

$$\mathfrak{R}_5(t) = 1 - \exp[-\exp[(-t)^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}_5(t) = 0 \text{ dla } t \ge 0,\ \alpha > 0, \tag{5.32}$$

$$\mathfrak{R}_6(t) = 1 - \exp[-\exp[\beta(-t)^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t < 0,$$

$$\mathfrak{R}_6(t) = 1 - \exp[-\exp[-t^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0, \tag{5.33}$$

$$\mathfrak{R}_7(t) = 1 \text{ dla } t < t_1,$$

$$\mathfrak{R}_7(t) = 1 - \exp[-\exp[-s/c]] \text{ dla } t_1 \leq t < t_2,$$

$$\mathfrak{R}_7(t) = 0 \text{ dla } t \geq t_2, t_1 < t_2, \tag{5.34}$$

Przypadek 3. $k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty$.

$$\mathfrak{R}_8(t) = 1 - [1 - \exp[-(-t)^{-\alpha}]]^k \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}_8(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0, \alpha > 0, \tag{5.35}$$

$$\mathfrak{R}_9(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}_9(t) = 1 - [1 - \exp[-t^{\alpha}]]^k \text{ dla } t \geq 0, \alpha > 0, \tag{5.36}$$

$$\mathfrak{R}_{10}(t) = 1 - [1 - \exp[-\exp t]]^k \text{ dla } t \in (-\infty,\infty). \tag{5.37}$$

Dowody faktów dotyczących granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych dwustanowych systemów szeregowo-równoległych oparte są na niżej sformułowanych twierdzeniach pomocniczych, udowodnionych w pracach [Kołowrocki, 1994e, 1994g, 1995f].

Lemat 5.11
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}'(t) = 1 - \exp[-V'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności niejednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego określoną przez (3.9)-(3.10),

(iv) $a_n > 0, b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}'(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n \sum_{i=1}^{a} q_i [R^{(i)}(a_n t + b_n)]^{l_n} = V(t) \text{ dla } t \in C_{V'}.$$

Lemat 5.12
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}'(t) = 1 - \exp[-V'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}'_{k_n, l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności niejednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego określoną przez (3.9)-(3.10),

(iv) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$,

(v) $R(t)$ jest jedną z funkcji niezawodności $R^{(1)}(t), R^{(2)}(t), \ldots, R^{(a)}(t)$ określonych przez (3.10) taką, że

(vi) $\exists N \ \forall n > N \quad R(a_n t + b_n) \neq 0$ dla $t < t_0$,

$R(a_n t + b_n) = 0$ dla $t \geq t_0$,

gdzie $t_0 \in (-\infty,\infty>$,

(vii) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{R^{(i)}(a_n t + b_n)}{R(a_n t + b_n)} \leq 1$ dla $t < t_0$, i = 1,2,...,a,

i ponadto istnieje nierosnąca funkcja

$$\text{(viii)} \quad d(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{a} q_i d_i(a_n t + b_n) & dla\ t < t_0 \\ 0 & dla\ t \geq t_0, \end{cases} \tag{5.38}$$

gdzie

$$d_i(a_n t + b_n) = [\frac{R^{(i)}(a_n t + b_n)}{R(a_n t + b_n)}]^{l_n},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}'(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'} \tag{5.39}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n [R(a_n t + b_n)]^{l_n} d(t) = V'(t) \text{ dla } t \in C_{V'}. \tag{5.40}$$

Lemat 5.13
Jeśli

(i) $k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty$,

(ii) $\mathfrak{R}'(t)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\boldsymbol{R}'_{k_n,l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności niejednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego określoną przez (3.9)-(3.10),

(iv) $a_n > 0,\ b_n \in (-\infty,\infty)$,

(v) $R(t)$ jest jedną z funkcji niezawodności $R^{(1)}(t), R^{(2)}(t), \ldots, R^{(a)}(t)$ określonych przez (3.10) taką, że

(vi) $\exists N\ \forall n > N \quad R(a_n t + b_n) \neq 0$ dla $t < t_0$,

$R(a_n t + b_n) = 0$ dla $t \geq t_0$,

gdzie $t_0 \in (-\infty,\infty>$,

(vii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{R^{(i)}(a_n t + b_n)}{R(a_n t + b_n)} \leq 1$ dla $t < t_0$, i = 1,2,...,a,

i ponadto istnieją nierosnące funkcje

$$\text{(viii) } d_i(t) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} d_i(a_n t + b_n) & dla\ t < t_0 \\ 0 & dla\ t \geq t_0, \end{cases} \tag{5.41}$$

gdzie

$$d_i(a_n t + b_n) = [\frac{R^{(i)}(a_n t + b_n)}{R(a_n t + b_n)}]^{l_n},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{R}'_{k_n, l_n}(a_n t + b_n) = \mathfrak{R}'(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'} \tag{5.42}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} [R(a_n t + b_n)]^{l_n} = \mathfrak{R}_0(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}_0}, \tag{5.43}$$

gdzie $\mathfrak{R}_0(t)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności i ponadto

$$\mathfrak{R}'(t) = 1 - \prod_{i=1}^{a} [1 - d_i(t)\, \mathfrak{R}_0(t)\,]^{q_{ik}},\ t \in (-\infty, \infty). \tag{5.44}$$

Twierdzenie 5.3, Lemat 5.12 oraz Lemat 5.13 ustalają klasę granicznych funkcji niezawodności dla niejednorodnych regularnych dwustanowych systemów szeregowo-równoległych wyszczególnionych w następującym twierdzeniu [Kołowrocki, 1994e]

Twierdzenie 5.6
Jedynymi możliwymi granicznymi funkcjami niezawodności niejednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego są:

Przypadek 1. $k_n = n$, $|l_n - c \log n| >> s$, $s > 0$, $c > 0$ (przy Założeniu 5.1 i założeniach Lematu 5.12).

$$\mathfrak{R}'_1(t) = 1 \text{ dla } t \le 0,\ \mathfrak{R}'_1(t) = 1 - \exp[-d(t)t^{-\alpha}] \text{ dla } t > 0,\ \alpha > 0, \tag{5.45}$$

$$\mathfrak{R}'_2(t) = 1 - \exp[-d(t)(-t)^{\alpha}] \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}'_2(t) = 0 \text{ dla } t \ge 0,\ \alpha > 0, \tag{5.46}$$

$$\mathfrak{R}'_3(t) = 1 - \exp[-d(t)\exp(-t)] \text{ dla } t \in (-\infty, \infty), \tag{5.47}$$

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c \log n \approx s$, $s \in (-\infty, \infty)$, $c > 0$ (przy założeniach Lematu 5.12).

$$\mathfrak{R}'_4(t) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$\mathfrak{R}'_4(t) = 1 - \exp[-d(t)\exp[-t^{\alpha}-s/c]] \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.48}$$

$$\mathfrak{R}'_5(t) = 1 - \exp[-d(t)\exp[(-t)^{\alpha}-s/c]] \text{ dla } t < 0,$$

$$\mathfrak{R}'_5(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.49}$$

$$\mathfrak{R}'_6(t) = 1 - \exp[-d(t)\exp[\beta(-t)^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t < 0,$$

$$\mathfrak{R}'_6(t) = 1 - \exp[-d(t)\exp[-t^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0, \tag{5.50}$$

$$\mathfrak{R}'_7(t) = 1 \text{ dla } t < t_1,$$

$$\mathfrak{R}'_7(t) = 1 - \exp[-d(t)\exp[-s/c]] \text{ dla } t_1 \leq t < t_2,$$

$$\mathfrak{R}'_7(t) = 0 \text{ dla } t \geq t_2,\ t_1 < t_2, \tag{5.51}$$

Przypadek 3. $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$ (przy założeniach Lematu 5.13).

$$\mathfrak{R}'_8(t) = 1 - \prod_{i=1}^{a}[1 - d_i(t)\exp[-(-t)^{-\alpha}]]^{q_i k} \text{ dla } t < 0,$$

$$\mathfrak{R}'_8(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.52}$$

$$\mathfrak{R}'_9(t) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$\mathfrak{R}'_9(t) = 1 - \prod_{i=1}^{a}[1 - d_i(t)\exp[-t^{\alpha}]]^{q_i k} \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.53}$$

$$\mathfrak{R}'_{10}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{a}[1 - d_i(t)\exp[-\exp t]]^{q_i k} \text{ dla } t \in (-\infty,\infty), \tag{5.54}$$

gdzie $d(t)$ oraz $d_i(t)$ są nierosnącymi funkcjami zależnymi od funkcji niezawodności poszczególnych elementów systemu oraz od frakcji tych elementów w systemie określonymi odpowiednio przez (5.38) oraz (5.41).

5.4. *Graniczne funkcje niezawodności dwustanowych systemów równoległo-szeregowych*

Klasa granicznych funkcji niezawodności jednorodnych regularnych dwustanowych systemów równoległo-szeregowych może być ustalona w oparciu o niżej sformułowane twierdzenia pomocnicze [Kołowrocki, 1993f-g, 1994f].

Lemat 5.14

Jeśli $\mathfrak{R}(t)$ jest graniczną funkcją niezawodności regularnego jednorodnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego o elementach posiadających funkcję niezawodności $R(t)$, to

$$\bar{\mathfrak{R}}(t) = 1 - \mathfrak{R}(-t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}}$$

jest graniczną funkcją niezawodności regularnego jednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego o elementach posiadających funkcję niezawodności

$$\bar{R}(t) = 1 - R(-t) \text{ dla } t \in C_R.$$

Jednocześnie, jeśli (a_n,b_n) jest parą funkcji normujących w pierwszym przypadku, to $(a_n,-b_n)$ jest taką parą w drugim przypadku.

Lemat 5.15

Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\bar{\mathfrak{R}}(t) = \exp[-\bar{V}(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności regularnego jednorodnego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (3.4),

(iv) $a_n > 0, b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(a_n t + b_n) = \bar{\mathfrak{R}}(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}} \tag{5.55}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n [F(a_n t + b_n)]^{l_n} = \bar{V}(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{V}}. \tag{5.56}$$

Lemat 5.16
Jeśli

(i) $k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty$,

(ii) $\bar{\mathfrak{R}}(t)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności regularnego jednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (3.4),

(iv) $a_n > 0,\ b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\boldsymbol{R}}_{k_n,l_n}(a_n t + b_n) = \bar{\mathfrak{R}}(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}}, \tag{5.57}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} [F(a_n t + b_n)]^{l_n} = \mathfrak{J}_0(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{J}_0}, \tag{5.58}$$

gdzie $\mathfrak{J}_0(t)$ jest niezdegenerowaną dystrybuantą, a ponadto

$$\bar{\mathfrak{R}}(t) = [1 - \mathfrak{J}_0(t)]^k \text{ dla } t \in (-\infty,\infty). \tag{5.59}$$

Korzystając z Lematu 5.15 oraz z Lematu 5.16 i postępując w analogiczny sposób jak w przypadku jednorodnych systemów szeregowo-równoległych, możemy ustalić klasę granicznych funkcji niezawodności dla jednorodnych systemów równoległo-szeregowych. Klasa ta jest ustalona w pracy [Kołowrocki, 1993f], będącej podsumowaniem wyników prac [Kołowrocki, 1993e, 1993g, 1994f, 1994h]. Łatwiej jest jednak uzyskać ten rezultat stosując Lemat 5.14 oraz Twierdzenie 5.5. Zastosowanie ich natychmiast skutkuje następującym twierdzeniem [Kołowrocki, 1993f, 1993h]

Twierdzenie 5.7
Jedynymi możliwymi granicznymi funkcjami niezawodności regularnego jednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego są:

Przypadek 1. $k_n = n$, $|l_n - c\log n| >> s$, $s > 0$, $c > 0$ (przy Założeniu 5.1).

$$\overline{\mathfrak{R}}_1(t) = \exp[-(-t)^{-\alpha}] \text{ dla } t < 0, \quad \overline{\mathfrak{R}}_1(t) = 0, \text{ dla } t \geq 0, \ \alpha > 0, \tag{5.60}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_2(t) = 1 \text{ dla } t < 0, \quad \overline{\mathfrak{R}}_2(t) = \exp[-t^{\alpha}], \text{ dla } t \geq 0, \ \alpha > 0, \tag{5.61}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_3(t) = \exp[-\exp t] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty), \tag{5.62}$$

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c \log n \approx s$, $s \in (-\infty,\infty)$, $c > 0$;

$$\overline{\mathfrak{R}}_4(t) = \exp[-\exp[-(-t)^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t < 0, \quad \overline{\mathfrak{R}}_4(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0, \ \alpha > 0, \tag{5.63}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_5(t) = 1 \text{ dla } t < 0, \quad \overline{\mathfrak{R}}_5(t) = \exp[-\exp[t^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t \geq 0, \ \alpha > 0,$$
(5.64)

$$\overline{\mathfrak{R}}_6(t) = \exp[-\exp[-(-t)^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t < 0,$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_6(t) = \exp[-\exp[\beta t^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t \geq 0, \ \alpha > 0, \ \beta > 0, \tag{5.65}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_7(t) = 1 \text{ dla } t < t_1,$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_7(t) = \exp[-\exp[-s/c]] \text{ dla } t_1 \leq t < t_2,$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_7(t) = 0 \text{ dla } t \geq t_2, \ t_1 < t_2, \tag{5.66}$$

Przypadek 3. $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$.

$$\overline{\mathfrak{R}}_8(t) = 1 \text{ dla } t \leq 0, \quad \overline{\mathfrak{R}}_8(t) = [1 - \exp[-t^{\alpha}]]^k \text{ dla } t > 0, \ \alpha > 0, \tag{5.67}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_9(t) = [1 - \exp[-(-t)^{\alpha}]]^k \text{ dla } t < 0, \text{ dla } \quad \overline{\mathfrak{R}}_9(t) = 0 \ t \geq 0, \ \alpha > 0, \tag{5.68}$$

$$\overline{\mathfrak{R}}_{10}(t) = [1 - \exp[-\exp(-t)]]^k \text{ dla } t \in (-\infty,\infty). \tag{5.69}$$

Uogólnieniami Lematów 5.14-5.16 są kolejne twierdzenia pomocnicze dotyczące granicznych funkcji niezawodności niejednorodnych systemów równoległo-szregowych, udowodnione w pracach [Kołowrocki 1993h, 1994g-h, 1995f].

Lemat 5.17
Jeśli funkcja niezawodności $\mathfrak{R}'(t)$ jest graniczną funkcją niezawodności regularnego niejednorodnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego o elementach posiadających funkcje niezawodności $R^{(i,j)}(t)$, $i = 1,2,\dots,a$, $j = 1,2,\dots,e_i$, to funkcja niezawodności

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t) = 1 - \mathfrak{R}'(-t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{R}'}$$

jest graniczną funkcją niezawodności regularnego niejednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego o elementach posiadających funkcje niezawodności

$$\bar{R}^{(i,j)}(t) = 1 - R^{(i,j)}(-t) \text{ dla } t \in C_{R^{(i,j)}}.$$

Jednocześnie, jeśli (a_n, b_n) jest parą funkcji normujących w pierwszym przypadku, to $(a_n, -b_n)$ jest taką parą w drugim przypadku.

Lemat 5.18
Jeśli

(i) $\bar{\mathfrak{R}}'(t) = \exp[-V'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(ii) $\bar{R}'_{k_n, l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności regularnego niejednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (3.11)-(3.12),

(iii) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty,\infty)$,

to

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}'_{k_n, l_n}(a_n t + b_n) = \bar{\mathfrak{R}}'(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}'}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n \sum_{i=1}^{a} q_i [F^{(i)}(a_n t + b_n)]^{l_n} = V'(t) \text{ dla } t \in C_{V'}.$$

Lemat 5.19
Jeśli

(i) $k_n \to \infty$,

(ii) $\bar{\mathfrak{R}}'(t) = \exp[-\bar{V}'(t)]$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\bar{R}'_{k_n, l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności regularnego niejednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (3.11)-(3.12),

(iv) $a_n > 0$, $b_n \in (-\infty, \infty)$,

(v) $F(t)$ jest jedną z dystrybuant $F^{(1)}(t), F^{(2)}(t), ..., F^{(a)}(t)$ określonych przez (3.12) taką, że

(vi) $\exists N \ \forall n > N \quad F(a_n t + b_n) = 0$ dla $t < t_0$,

$F(a_n t + b_n) \neq 0$ dla $t \geq t_0$,

gdzie $t_0 \in \langle -\infty, \infty)$,

(vii) $\lim_{n\to\infty} \frac{F^{(i)}(a_n t + b_n)}{F(a_n t + b_n)} \leq 1$ dla $t \geq t_0$, $i = 1,2,...,a$,

i ponadto istnieje niemalejąca funkcja

(viii) $$\bar{d}(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t < t_0 \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{a} q_i \bar{d}_i(a_n t + b_n) & dla\ t \geq t_0, \end{cases} \quad (5.70)$$

gdzie

$$\bar{d}_i(a_n t + b_n) = [\frac{F^{(i)}(a_n t + b_n)}{F(a_n t + b_n)}]^{l_n}$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(a_n t + b_n) = \bar{\mathfrak{R}}'(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}'} \tag{5.71}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} k_n [F(a_n t + b_n)]^{l_n} \bar{d}(t) = \bar{V}'(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{V}'}. \tag{5.72}$$

Lemat 5.20
Jeśli

(i) $k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty$,

(ii) $\bar{\mathfrak{R}}'(t)$ jest niezdegenerowaną funkcją niezawodności,

(iii) $\bar{\boldsymbol{R}}'_{k_n,l_n}(t)$ jest funkcją niezawodności regularnego niejednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego określoną przez (3.11)-(3.12),

(iv) $a_n > 0,\ b_n \in (-\infty,\infty)$,

(v) $F(t)$ jest jedną z dystrybuant $F^{(1)}(t), F^{(2)}(t), \ldots, F^{(a)}(t)$ określonych przez (3.12) taką, że

(vi) $\exists N\ \ \forall n > N \quad F(a_n t + b_n) = 0$ dla $t < t_0$,

$F(a_n t + b_n) \neq 0$ dla $t \geq t_0$,

gdzie $t_0 \in <-\infty,\infty)$,

(vii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F^{(i)}(a_n t + b_n)}{F(a_n t + b_n)} \leq 1$ dla $t \geq t_0$, i = 1,2,...,a,

a ponadto istnieją niemalejące funkcje

$$\text{(viii)}\quad \bar{d}_i(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t < t_0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \bar{d}_i(a_n t + b_n) & dla\ t \geq t_0 \end{cases} \tag{5.73}$$

gdzie

$$\bar{d}_i(a_nt + b_n) = [\frac{F^{(i)}(a_nt+b_n)}{F(a_nt+b_n)}]^{l_n},$$

to

$$\lim_{n\to\infty} \bar{R}'_{k_n,l_n}(a_nt+b_n) = \bar{\mathfrak{R}}'(t) \text{ dla } t \in C_{\bar{\mathfrak{R}}'} \tag{5.74}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} [F(a_nt+b_n)]^{l_n} = \mathfrak{I}_0(t) \text{ dla } t \in C_{\mathfrak{I}_0}, \tag{5.75}$$

gdzie $\mathfrak{I}_0(t)$ jest niezdegenerowaną dystrybuantą, a ponadto

$$\bar{\mathfrak{R}}'(t) = \prod_{i=1}^{a}[1 - \bar{d}_i(t)\,\mathfrak{I}_0(t)]^{q_{ik}},\ t \in (-\infty,\infty). \tag{5.76}$$

Twierdzenie 5.7, Lemat 5.19 oraz Lemat 5.20 wyznaczają klasę granicznych funkcji niezawodności dla regularnych niejednorodnych dwustanowych systemów równoległo-szeregowych wyszczególnionych w następującym twierdzeniu [Kołowrocki, 1993h, 1994e]

Twierdzenie 5.8
Jedynymi możliwymi granicznymi funkcjami regularnego niejednorodnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego są:

Przypadek 1. $k_n = n$, $|l_n - c \log n| >> s$, $s > 0$, $c > 0$ (przy Założeniu 5.1 i założeniach Lematu 5.19).

$$\bar{\mathfrak{R}}'_1(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)(-t)^{-\alpha}] \text{ dla } t < 0,\quad \bar{\mathfrak{R}}'_1(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.77}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_2(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\quad \bar{\mathfrak{R}}'_2(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)t^{\alpha}] \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.78}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_3(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)\exp t] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty), \tag{5.79}$$

Przypadek 2. $k_n = n$, $l_n - c \log n \approx s$, $s \in (-\infty,\infty)$, $c > 0$ (przy założeniach Lematu 5.19).

$$\bar{\mathfrak{R}}'_4(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)\exp[-(-t)^{\alpha}-s/c]] \text{ dla } t < 0,$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_4(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.80}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_5(t) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_5(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)\exp[t^{\alpha}\text{-}s/c]] \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.81}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_6(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)\exp[-(-t)^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t < 0,$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_6(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)\exp[\beta t^{\alpha} - s/c]] \text{ dla } t\ \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0, \tag{5.82}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_7(t) = 1 \text{ dla } t < t_1,$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_7(t) = \exp[-\ \bar{d}(t)\exp[-s/c]] \text{ dla } t_1 \leq t < t_2,$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_7(t) = 0 \text{ dla } t \geq t_2,\ t_1 < t_2, \tag{5.83}$$

Przypadek 3. $k_n \to k$, $k > 0$, $l_n \to \infty$ (przy założeniach Lematu 5.20).

$$\bar{\mathfrak{R}}'_8(t) = 1 \text{ dla } t \leq 0,$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_8(t) = \prod_{i=1}^{a}[1 - \bar{d}_i(t)\exp[-t^{-\alpha}]]^{q_i k} \text{ dla } t > 0,\ \alpha > 0, \tag{5.84}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_9(t) = \prod_{i=1}^{a}[1 - \bar{d}_i(t)\exp[-(-t)^{\alpha}]]^{q_i k} \text{ dla } t < 0,$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_9(t) = 0 \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \tag{5.85}$$

$$\bar{\mathfrak{R}}'_{10}(t) = \prod_{i=1}^{a}[1 - \bar{d}_i(t)\exp[-\exp(-t)]]^{q_i k} \text{ dla } t \in (-\infty,\infty), \tag{5.86}$$

gdzie $\bar{d}(t)$ oraz $\bar{d}_i(t)$ są niemalejącymi funkcjami zależnymi od funkcji niezawodności elementów systemu oraz frakcji tych elementów w systemie określonymi odpowiednio przez (5.70) oraz (5.73).

5.5. *Przykłady systemów dwustanowych oraz ich granicznych funkcji niezawodności*

Podrozdział ten zawiera przykłady zastosowania wyników asymptotycznego podejścia do oceny niezawodności systemów dwustanowych. W oparciu o twierdzenia poprzednich podrozdziałów sformułowane oraz udowodnione zostały cztery fakty pozwalające wyznaczyć graniczne funkcje niezawodności rozważanych systemów. Następnie, fakty te posłużyły do oszacowania funkcji niezawodności, wartości średnich oraz odchyleń standardowych czasów zdatności tych systemów. Zilustrowana została także dokładność tych oszacowań. Ocenie poddane zostały: modelowy niejednorodny system szeregowy, równoległy jednorodny system kabla energetycznego, niejednorodny szeregowo-równoległy system rurociągu oraz modelowy jednorodny system równoległo-szeregowy. Dane niezawodnościowe elementów przyjęte zostały arbitralnie lub też w oparciu o opinie ekspertów. I tak, dla elementów modelowego niejednorodnego systemu szeregowego przyjęte zostały weibullowskie oraz wykładnicze funkcje niezawodności takie, że ich średnie czasy do uszkodzenia zawarte są w granicach od 23 do 50 lat, dla elementów jednorodnego równoległego systemu kabla energetycznego przyjęta została weibullowska funkcja niezawodności taka, że ich średnie czasy zdatności wynoszą około 6 lat, dla elementów szeregowo-równoległego systemu rurociągu przyjęte zostały weibullowskie rozkłady czasów zdatności o średnich zmieniających się od 10 do 50 lat, dla elementów modelowego jednorodnego systemu równoległo-szeregowego przyjęty został wykładniczy rozkład ich czasów zdatności o średniej wynoszącej 100 godzin. Oszacowania charakterystyk niezawodnościowych rozważanych systemów należy traktować jako ilustrację możliwości zastosowań metody asymptotycznego podejścia do oceny niezawodności dużych systemów.

Fakt 5.1

Jeśli elementy i-tego typu niejednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowego mają weibullowskie funkcje niezawodności

$$R^{(i)}(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\ R^{(i)}(t) = \exp[-\beta_i t^{\alpha_i}] \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha_i > 0,\ \beta_i > 0, \quad (5.87)$$
$$i = 1,2,...,a,$$

oraz

$$a_n = 1/(\beta n)^{1/\alpha}, \quad b_n = 0, \tag{5.88}$$

gdzie

$$\alpha = \min_{1\le i\le a}\{\alpha_i\}, \quad \beta = \max\{\beta_i : \alpha_i = \alpha\}, \tag{5.89}$$

to

$$\bar{\mathfrak{R}}'_2(t) = 1 \text{ dla } t < 0, \quad \bar{\mathfrak{R}}'_2(t) = 1 - \exp[-\bar{d}(t)t^{\alpha}] \text{ dla } t \ge 0,$$

gdzie

$$\bar{d}(t) = \sum_{(i:\alpha_i=\alpha)} q_i\beta_i / \beta, \tag{5.90}$$

jest jego graniczną funkcją niezawodności.

Uzasadnienie: Ponieważ, zgodnie z (5.88) mamy

$$a_n t + b_n = (\beta l_n)^{-1/\alpha}\, t \to 0^- \text{ dla } t < 0$$

oraz

$$a_n t + b_n = (\beta l_n)^{-1/\alpha}\, t \to 0^+ \text{ dla } t \ge 0 \text{ przy } n \to \infty,$$

to zgodnie z (5.87), dla wszystkich i = 1,2,...,a, otrzymujemy

$$R^{(i)}(a_n t + b_n) = 1 \text{ dla } t < 0$$

oraz

$$R^{(i)}(a_n t + b_n) = \exp[-\beta_i (a_n t)^{\alpha_i}] \text{ dla } t \ge 0.$$

Definiując

$$R(t) = 1 \text{ dla } t < 0 \text{ oraz } R(t) = \exp[-\beta t^{\alpha}] \text{ dla } t \ge 0, \tag{5.91}$$

gdzie α oraz β są określone wzorami (5.89), dla wszystkich i = 1,2,...,a oraz $t \ge t_0 = 0$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F^{(i)}(a_n t+b_n)}{F(a_n t+b_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\exp[-\beta_i(a_n t)^{\alpha_i}]}{1-\exp[-\beta(a_n t)^{\alpha}]}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\beta_i}{\beta}(a_n t)^{\alpha_i-\alpha} \le 1,$$

co oznacza, że warunek (vi) Lematu 5.3 jest spełniony.
Także, zgodnie z warunkiem (viii) Lematu 5.3, mamy

$$\lim_{n\to\infty} d_i(a_n t + b_n) = \beta_i / \beta$$

dla i takich, że $\alpha_i = \alpha$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} d_i(a_n t + b_n) = 0$$

w przeciwnym przypadku. Zatem, wobec (5.6), $\bar{d}(t)$ jest określone wzorem (5.90) dla $t \ge 0$ oraz równe 0 dla $t < 0$.
Ponadto, wobec (5.91) i (5.88), otrzymujemy

$$\bar{V}'(t) = \lim_{n\to\infty} nF(a_n t+b_n)\bar{d}(t) = 0 \text{ dla } t<0$$

oraz

$$\bar{V}'(t) = \lim_{n\to\infty} nF(a_n t+b_n)\bar{d}(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n[1-\exp[-\beta(a_n t)^{\alpha}]]\bar{d}(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n[\beta(a_n t)^{\alpha} - o(\frac{1}{n})]\bar{d}(t) = t^{\alpha}\bar{d}(t) \text{ dla } t \ge 0,$$

co wobec Lematu 5.3 kończy dowód.

Przykład 5.1

Rozważmy system składający się z $n = 100$ połączonych szeregowo elementów czterech typów, w którym 40 elementów ma funkcję niezawodności

$$R^{(1)}(t) = \exp[-0.025t] \text{ dla } t \geq 0,$$

20 elementów ma funkcję niezawodności

$$R^{(2)}(t) = \exp[-0.020t] \text{ dla } t \geq 0,$$

10 elementów ma funkcję niezawodności

$$R^{(3)}(t) = \exp[-0.0015t^2] \text{ dla } t \geq 0,$$

oraz 30 elementów ma funkcję niezawodności

$$R^{(4)}(t) = \exp[-0.001t^2] \text{ dla } t \geq 0.$$

Zgodnie z Definicją 3.11 jest to niejednorodny system szeregowy z parametrami:

$$n = 100, a = 4, q_1 = 0.4, q_2 = 0.2, q_3 = 0.1, q_4 = 0.3$$

oraz wobec (3.6) jego dokładną funkcją niezawodności jest

$$\bar{R}'_{100}(t) = \prod_{i=1}^{4} (R^{(i)}(t))^{q_i 100}$$

$$= \exp[-t - 0.4t - 0.015t^2 - 0.03t^2] \text{ dla t} \geq 0.$$

Ponieważ

$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 0.025,$$

$$\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0.02,$$

$$\alpha_3 = 2, \beta_3 = 0.0015,$$

$$\alpha_4 = 2, \beta_4 = 0.001,$$

więc

$$\alpha = \min\{1,1,2,2\} = 1,$$

$$\beta = \max\{0.025, 0.02\} = 0.025 .$$

Przyjmując, zgodnie z Faktem 5.1, stałe normujące

$$a_n = 1/\beta n = 0.4, \quad b_n = 0$$

oraz

$$d(t) = \sum_{(i:\alpha_i = \alpha)} q_i \frac{\beta_i}{\beta} = 0.56$$

otrzymujemy graniczną funkcję niezawodności systemu określoną wzorem

$$\overline{\mathfrak{R}}'_2(t) = \exp[-0.56t] \;\text{ dla } t \geq 0.$$

Stąd jego dokładna funkcja niezawodności, wobec (2.1), może być przybliżona wzorem

$$\overline{\boldsymbol{R}}'_{100}(t) \cong \exp[-0.56(t/0.4)] = \exp[-1.4t] \;\text{ dla } t > 0$$

Średnie czasy zdatności poszczególnych rodzajów elementów systemu liczone w latach wynoszą:

$$E(T_1) \cong 1/0.025 = 40, E(T_2) \cong 1/0.020 = 50,$$

$$E(T_3) \cong \Gamma(3/2)(0.0015)^{-1/2} \cong 23, E(T_4) \cong \Gamma(3/2)(0.001)^{-1/2} \cong 28.$$

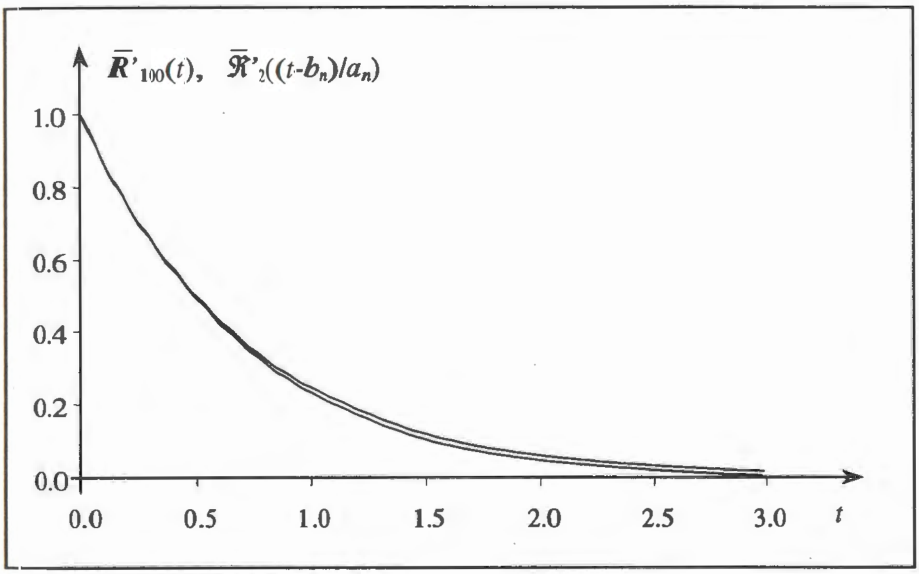
Przybliżona wartość średnia i odchylenie standardowe czasu zdatności systemu obliczone w oparciu o jego graniczną funkcję niezawodności wynoszą

$$E(T) = 1/1.4 \cong 0.71 \text{ roku}, \sigma(T) = 1/1.4 \cong 0.71 \text{ roku}.$$

Zachowanie się dokładnej oraz przybliżonej funkcji niezawodności systemu zilustrowane jest w Tablicy 5.1 oraz na Rysunku 5.1. W Tablicy 5.1 umieszczone są także różnice pomiędzy wartościami tych funkcji. Różnice te świadczą o dobrym przybliżeniu dokładnej funkcji niezawodności poprzez jej graniczną funkcję niezawodności.

Tablica 5.1 Wartości oraz różnice pomiędzy graniczną i dokładną funkcją niezawodności niejednorodnego systemu szeregowego

t	$\bar{\boldsymbol{R}}'_{100}(t)$	$\bar{\mathfrak{R}}'_2(\frac{t-b_n}{a_n})$	$\Delta = \bar{\boldsymbol{R}}'_{100} - \bar{\mathfrak{R}}'_2$
0.00	1.000	1.000	0.000
0.10	0.869	0.869	0.000
0.20	0.754	0.756	-0.001
0.30	0.654	0.657	-0.003
0.40	0.567	0.571	-0.004
0.50	0.491	0.497	-0.006
0.60	0.425	0.432	-0.007
0.70	0.367	0.375	-0.008
0.80	0.317	0.326	-0.009
0.90	0.274	0.284	-0.010
1.00	0.236	0.247	-0.011
1.20	0.175	0.186	**-0.012**
1.40	0.129	0.141	**-0.012**
1.60	0.095	0.106	**-0.012**



Rys. 5.1 Wykres dokładnej i granicznej funkcji niezawodności niejednorodnego systemu szeregowego

Fakt 5.2
Jeśli elementy jednorodnego dwustanowego systemu równoległego mają weibullowskie funkcje niezawodności

$$R(t) = 1 \text{ dla } t < 0, R(t) = \exp[-\beta t^{\alpha}] \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha > 0, \beta > 0,$$

oraz

$$a_n = b_n/(\alpha \log n),\ b_n = (\log n/\beta)^{1/\alpha},$$

to

$$\mathfrak{R}_3(t) = 1 - \exp[-\exp[-t]],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną funkcją niezawodności.

Uzasadnienie: Ponieważ dla dostatecznie dużych n oraz wszystkich $t \in (-\infty,\infty)$ mamy

$$a_n t + b_n = b_n(t/(\alpha \log n) + 1) > 0,$$

więc

$$R(a_n t + b_n) = \exp[-\beta(a_n t + b_n)^{\alpha}] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty).$$

Stąd

$$n\ R(a_n t + b_n) = n \exp[-\beta(a_n t + b_n)^{\alpha}]$$

$$= n \exp[-\beta(b_n)^{\alpha}(t/(\alpha \log n) + 1)\ ))^{\alpha}]$$

$$= n \exp[-\log n(t/(\alpha \log n) + 1)\ ))^{\alpha}].$$

Następnie, stosując równość

$$(t/(\alpha \log n) + 1)\ ))^{\alpha} = 1 + t/\log n + o(1/\log n) \text{ dla } t \in (-\infty,\infty),$$

otrzymujemy

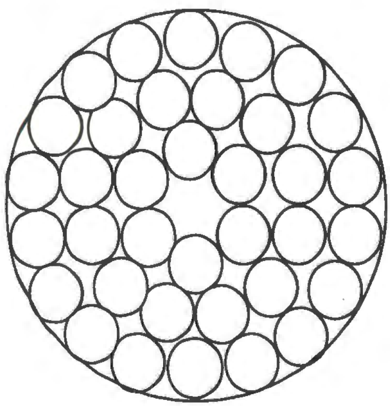
$$V(t) = \lim_{n\to\infty} n\ R\ (a_n t + b_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n \exp[-\log n - t - o(1)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp[-t - o(1)] = \exp[-t] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty),$$

co, na podstawie Lematu 5.5, kończy dowód.

Przykład 5.2
Rozważmy kabel energetyczny zbudowany z 36 drutów typu $A1Si$ używany w napowietrznych sieciach energetycznych. Przyjmijmy, że jest on w stanie przewodzić prąd gdy co najmniej jeden z drutów jest zdatny. Przy tym założeniu możemy uważać kabel za jednorodny system równoległy zbudowany z n = 36 elementów podstawowych. Przekrój poprzeczny kabla przedstawiony jest na Rysunku 5.2.



Rys. 5.2 Przekrój poprzeczny kabla energetycznego

Przyjmując dalej, że druty mają weibullowskie funkcje niezawodności o parametrach

$$\alpha = 2, \beta = (7.07)^{-6},$$

wobec (3.2), dokładna funkcja niezawodności kabla ma postać

$$\boldsymbol{R}_{36}(t) = 1 \text{ dla } t < 0, \ \boldsymbol{R}_{36}(t) = 1 - [1 - \exp[-(7.07)^{-6} t^2]]^{36} \text{ dla } t \geq 0.$$

Zgodnie z Faktem 5.2, przyjmując

$$a_n = (7.07)^3/(2\sqrt{\log 36}), \ b_n = (7.07)^3\sqrt{\log 36},$$

oraz stosując wzór (2.1), otrzymujemy wzór przybliżony na funkcję niezawodności kabla postaci

$$R_{36}(t) \cong \mathfrak{R}_3((t-b_n)/a_n) = 1\text{-}\exp[-\exp[-0.01071t+7.167]] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty).$$

Wartość średnia czasu zdatności T kabla (w miesiącach) oraz jego odchylenie standardowe obliczone w oparciu o powyższy wynik przybliżony według wzorów [Bobrowski, 1985, Kopociński, 1973]

$$E[T] = Ca_n + b_n, \quad \sigma = \pi a_n / \sqrt{6},$$

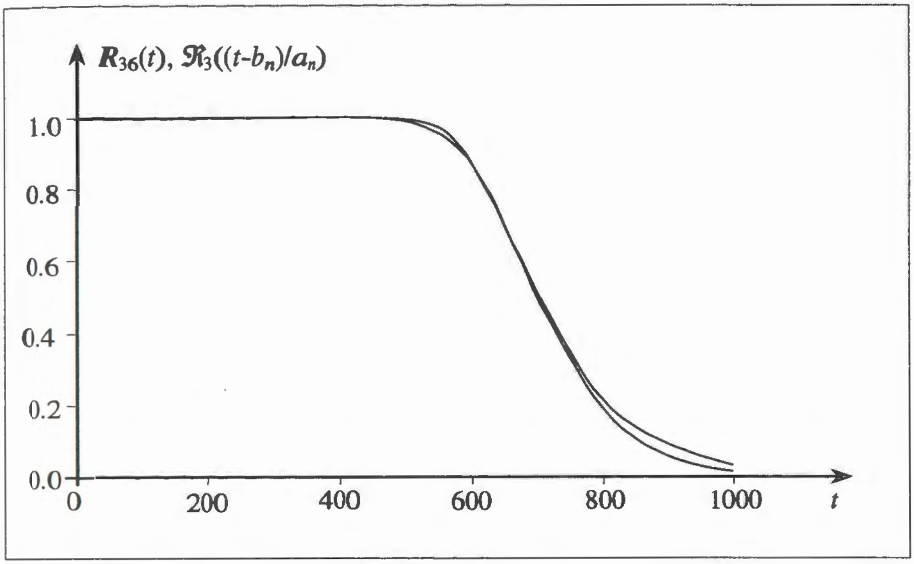
gdzie $C \cong 0.5772$ jest stałą Eulera, wynoszą:

$$E(T) \cong 723, \; \sigma(T) \cong 120.$$

Wartości dokładnej oraz przybliżonej funkcji niezawodności kabla przedstawione są w Tablicy 5.2, a ich wykresy na Rysunku 5.3. Ponadto w Tablicy 5.2 umieszczone są różnice tych wartości świadczące o dobrym przybliżeniu dokładnej funkcji niezawodności poprzez jej funkcję graniczną.

Tablica 5.2 Wartości dokładnej oraz przybliżonej funkcji niezawodności kabla energetycznego

t	$R_{36}(t)$	$\mathfrak{R}_3(\frac{t-b_n}{a_n})$	$\Delta = R_{36} - \mathfrak{R}_3$
0	1.000	1.000	0.000
400	1.000	1.000	0.000
500	0.995	0.988	-0.003
550	0.965	0.972	-0.007
600	0.874	0.877	-0.003
650	0.712	0.707	0.005
700	0.513	0.513	0.000
750	0.330	0.344	-0.014
800	0.193	0.218	-0.025
900	0.053	0.081	**-0.028**
1000	0.012	0.029	-0.017
1100	0.002	0.010	-0.008
1200	0.000	0.003	-0.003



Rys. 5.3 Wykresy dokładnej i przybliżonej funkcji niezawodności kabla energetycznego

Fakt 5.3

Jeśli elementy niejednorodnego regularnego dwustanowego systemu szeregowo-równoległego mają weibullowskie funkcje niezawodności

$$R^{(i,j)}(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\ R^{(i,j)}(t) = \exp[-\beta_{ij} t^{\alpha_{ij}}] \text{ dla } t \geq 0,\ \alpha_{ij} > 0,\ \beta_{ij} > 0, \quad (4.92)$$
$$i = 1,2,\ldots,a,\ j = 1,2,\ldots,e_i.$$

oraz

$$k_n \to k,\ k > 0,\ l_n \to \infty, \quad (5.93)$$

$$a_n = 1/(\beta l_n)^{1/\alpha},\ b_n = 0, \quad (5.94)$$

gdzie

$$\alpha_i = \min_{1 \leq j \leq e_i}\{\alpha_{ij}\},\ \beta_i = \sum_{(j:\alpha_{ij}=\alpha_i)} p_{ij}\beta_{ij}, \quad (5.95)$$

$$\alpha = \max_{1 \leq i \leq a}\{\alpha_i\},\ \beta = \min\{\beta_i : \alpha_i = \alpha\}, \quad (5.96)$$

to

$$\mathfrak{R}'_9(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\ \mathfrak{R}'_9(t) = 1 - \prod_{\{i:\alpha_i=\alpha\}} [1 - \exp[-\frac{\beta_i}{\beta} t^\alpha]]^{q_{ik}} \text{ dla } t \geq 0,$$

jest jego graniczną funkcją niezawodności.

Uzasadnienie: Ponieważ, zgodnie z (5.93) oraz (5.94), mamy

$$a_n t + b_n = (\beta l_n)^{-1/\alpha} t \to 0^- \text{ dla } t < 0$$

oraz

$$a_n t + b_n = (\beta l_n)^{-1/\alpha} t \to 0^+ \text{ dla } t \geq 0 \text{ przy } n \to \infty, \tag{5.97}$$

to dla wszystkich $i = 1,2,\ldots,a$, otrzymujemy

$$R^{(i)}(a_n t + b_n) = 1 \text{ dla } t < 0$$

oraz zgodnie z (3.10), (5.92), (5.95) i (5.97)

$$R^{(i)}(a_n t + b_n) = \exp[-\sum_{j=1}^{e_i} p_{ij} \beta_{ij} (a_n t)^{\alpha_{ij}}]$$

$$= \exp[-(a_n t)^{\alpha_i} \sum_{j=1}^{e_i} p_{ij} \beta_{ij} (a_n t)^{\alpha_{ij} - \alpha_i}]$$

$$= \exp[-\beta_i (a_n t)^{\alpha_i} + o(1)] \text{ dla } t \geq 0.$$

Definiując

$$R(t) = 1 \text{ dla } t < 0 \text{ oraz } R(t) = \exp[-\beta t^\alpha] \text{ dla } t \geq 0,$$

gdzie α oraz β są określone wzorami (5.96), dla wszystkich $i = 1,2,\ldots,a$ oraz $t \geq 0$, otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R^{(i)}(a_n t + b_n)}{R(a_n t + b_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp[-\beta_i (a_n t + b_n)^{\alpha_i}]}{\exp[-\beta (a_n t + b_n)^{\alpha}]}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp[-\beta(a_n t)^{\alpha}[\frac{\beta_i}{\beta}(a_n t)^{\alpha_i-\alpha} - 1]] \leq 1.$$

Powyższe oznacza, że warunek (vii) Lematu 5.13 zachodzi z $t_0 = \infty$.
Zgodnie z (5.41) i (5.94) otrzymujemy

$$d_i(t) = \begin{cases} 1 & dla\ t < 0 \\ \exp[-(\frac{\beta_i}{\beta} - 1)t^{\alpha}] & dla\ t \geq 0 \end{cases}$$

dla i takich, że $\alpha_i = \alpha$ oraz

$$d_i(t) = \begin{cases} 1\ dla\ t < 0 \\ 0\ dla\ t \geq 0 \end{cases}$$

w przeciwnym przypadku.
Ponadto

$$\lim_{n\to\infty}[R(a_n t + b_n)]^{l_n} = 1 \text{ dla } t < 0$$

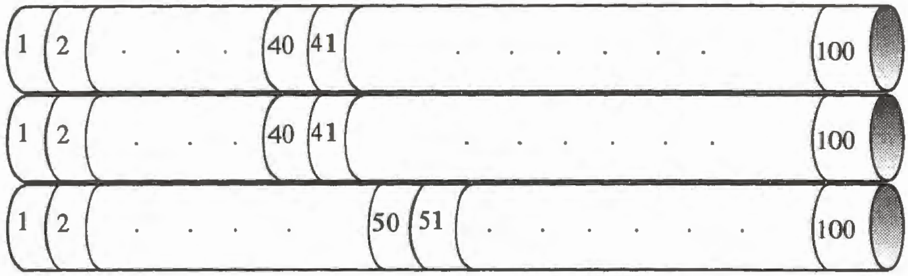
oraz

$$\lim_{n\to\infty}[R(a_n t + b_n)]^{l_n} = \lim_{n\to\infty} \exp[-l_n \beta(a_n t)^{\alpha}]$$

$$= \exp[-t^{\alpha}] \text{ dla } t \geq 0,$$

co po uwzględnieniu (5.44), wobec Lematu 4.13, kończy dowód.

Przykład 5.3
Rozważmy rurociąg składający się z $k_n = 3$ nitek rur, z których każda zbudowana jest z $l_n = 100$ segmentów. Schemat rozważanego rurociągu przedstawiony jest na Rysunku 5.4.



Rys. 5.4 Model niejednorodnego szeregowo-równoległego systemu rurociągu

W dwóch nitkach znajduje się 40 rur o funkcjach niezawodności

$$R^{(1,1)}(t) = \exp[-0.05t] \text{ dla } t \geq 0,$$

oraz 60 rur o funkcjach niezawodności

$$R^{(1,2)}(t) = \exp[-0.0015t^2] \text{ dla } t \geq 0,$$

W trzeciej nitce jest 50 rur o funkcjach niezawodności

$$R^{(2,1)}(t) = \exp[-0.0007t^3] \text{ dla } t \geq 0,$$

oraz 50 rur o funkcjach niezawodności

$$R^{(2,2)}(t) = \exp[-0.2\sqrt{t}\,] \text{ dla } t \geq 0.$$

Jest to zatem niejednorodny system szeregowo-równoległy. Zgodnie z Definicją 3.13 system ten ma następujące parametry:

$$k_n = k = 3,\ l_n = 100,\ a = 2,\ q_1 = 2/3,\ q_2 = 1/3.$$

Toteż, wobec (3.9), mamy

$$\boldsymbol{R}'_{3,100}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{2}[1-(R^{(i)}(t))^{100}]^{q_i 3}$$

$$= 1 - [- (R^{(1)}(t))^{100}]^2\ [1 - (R^{(2)}(t))^{100}],$$

gdzie podstawiając:

$e_1 = 2, p_{11} = 0.4, p_{12} = 0.6, \ \alpha_{11}=1, \beta_{11} = 0.05, \alpha_{12} = 2, \beta_{12} = 0.0015,$

$e_2 = 2, p_{21} = 0.5, p_{22} = 0.5, \ \alpha_{21} = 3, \beta_{21} = 0.0007, \alpha_{22} = 0.5, \beta_{22} = 0.2,$

na podstawie (3.10)

$$R^{(1)}(t) = \prod_{j=1}^{e_1} (R^{(1,j)}(t))^{p_{1j}} = (R^{(1,1)}(t))^{0.4}(R^{(1,2)}(t))^{0.6}$$

$$= \exp[-0.02t - 0.0009t^2],$$

$$R^{(2)}(t) = \prod_{j=1}^{e_2} (R^{(2,j)}(t))^{p_{2j}} = (R^{(2,1)}(t))^{0.5}(R^{(2,2)}(t))^{0.5}$$

$$= \exp[-0.00035t^3 - 0.1\sqrt{t}\ ].$$

Tak więc dokładna funkcja niezawodności systemu określona jest wzorem

$$\boldsymbol{R}'_{3,100}(t) = 1 - [1 - \exp[-2t - 0.09t^2]]^2 \cdot [1 - \exp[\,-0.035t^3 - 10\sqrt{t}\ ]],\ t \geq 0.$$

Następnie, zgodnie z (5.95), (5.96) i (5.94), otrzymujemy

$$\alpha_1 = \min\{\alpha_{11}, \alpha_{12}\} = \min\{1,2\} = 1,$$

$$\beta_1 = p_{11}\beta_{11} = 0.4 \cdot 0.05 = 0.02,$$

$$\alpha_2 = \min\{\alpha_{21}, \alpha_{22}\} = \min\{3, 0.5\} = 0.5,$$

$$\beta_2 = p_{22}\beta_{22} = 0.5 \cdot 0.2 = 0.1,$$

$$\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\} = \max\{1,0.5\} = 1,$$

$$\beta = \min\{\beta_1\} = \min\ \{0.02\} = 0.02,$$

$$a_n = (0.02 \cdot 100)^{-1} = 0.5,\ b_n = 0,$$

i na podstawie Faktu 5.3 wnioskujemy, że graniczną funkcją niezawodności systemu jest

$$\mathfrak{R}'_9(t) = 1 - [1 - \exp[-t]]^2 \text{ dla } t \geq 0.$$

Stąd, wobec (2.1), funkcja niezawodności systemu jest w przybliżeniu określona wzorem

$$\boldsymbol{R}'_{3,100}(t) \cong \mathfrak{R}'_9((t - b_n)/a_n) = 1 - [1 - \exp[-2t]]^2 \text{ dla } t \geq 0.$$

Dane niezawodnościowe elementów systemu zostały przyjęte w oparciu o opinię ekspertów, zgodnie z którą średnie czasy zdatności rur w zależności od ich typu zmieniają się w zakresie od 10 do 50 lat. Czasy te, liczone w latach, są następujące:

$$E(T_{11}) = 1/0.05 = 20,\ E(T_{12}) = \Gamma(3/2)(0.0015)^{-1/2} \cong 23,$$

$$E(T_{21}) = \Gamma(4/3)(0.0007)^{-1/3} \cong 10,\ E(T_{22}) = \Gamma(3)(0.2)^{-2} \cong 50.$$

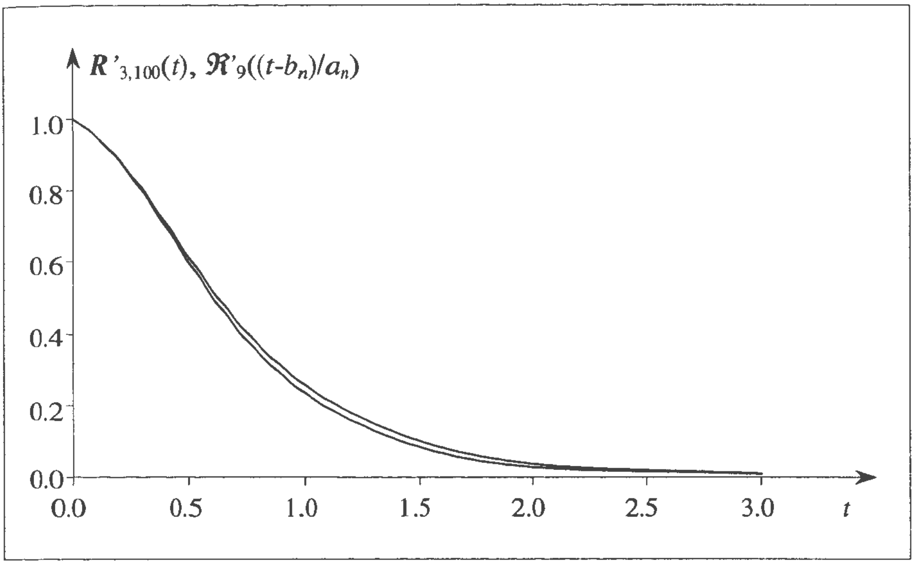
Wartość średnia oraz odchylenie standardowe czasu zdatności systemu obliczone w oparciu o jego przybliżoną funkcję niezawodności wynoszą

$$E(T) \cong 0.75 \text{ roku},\ \sigma(T) \cong 0.56 \text{ roku}.$$

Wartości dokładnej oraz przybliżonej funkcji niezawodności systemu, a także różnice pomiędzy nimi przedstawione są w Tablicy 5.3 oraz zilustrowane na Rysunku 5.5.

Tablica 5.3 Zachowanie się dokładnej oraz przybliżonej funkcji niezawodności rurociągu

t	$\boldsymbol{R}'_{3,100}(t)$	$\mathfrak{R}'_9\,(\frac{t-b_n}{a_n})$	$\Delta = \boldsymbol{R}'_{3,100} - \mathfrak{R}'_9$
0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.2	0.8910	0.8913	-0.0003
0.4	0.6902	0.6968	-0.0066
0.6	0.4984	0.5117	-0.0133
0.8	0.3449	0.3630	-0.0181
1.0	0.2321	0.2524	**-0.0202**
1.2	0.1530	0.1732	**-0.0202**
1.4	0.0994	0.1179	-0.0186
1.6	0.0637	0.0799	-0.0162
1.8	0.0404	0.0539	-0.0135
2.0	0.0254	0.0363	-0.0109
2.2	0.0158	0.0244	-0.0086
2.4	0.0098	0.0164	-0.0066



Rys. 5.5 Wykresy dokładnej oraz przybliżonej funkcji niezawodności rurociągu

Fakt 5.4
Jeśli elementy jednorodnego regularnego dwustanowego systemu równoległo-szeregowego mają wykładnicze funkcje niezawodności

$$R(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\ R(t) = \exp[-\lambda t] \text{ dla } t \geq 0,\ \lambda > 0,$$

oraz

$$k_n = n,\ l_n - c \log n >> s,\ c > 0,\ s > 0,$$

$$a_n = 1/(\lambda \log n),\ b_n = (1/\lambda)\log(l_n/\log n),$$

to

$$\bar{\mathfrak{R}}_3(t) = \exp[-\exp[t]],\ t \in (-\infty,\infty),$$

jest jego graniczną funkcją niezawodności.

Uzasadnienie: Ponieważ dla dostatecznie dużych n oraz wszystkich $t \in (-\infty,\infty)$ mamy

$$a_n t + b_n = (1/\lambda)\log(l_n/\log n) + t/(\lambda \log n) > 0,$$

więc

$$F(a_n t + b_n) = 1 - \exp[-\lambda(a_n t + b_n)]$$

$$= 1 - \exp[-\log(l_n/\log n) - t/\log n]$$

$$= 1 - (\log n)/l_n(1 - t/\log n + o(1/\log n))$$

$$= 1 - (\log n)/l_n + t/l_n - o(1/l_n) \text{ dla } t \in (-\infty,\infty),$$

oraz

$$\overline{V}(t) = \lim_{n\to\infty} k_n[F(a_n t + b_n)]^{l_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n[1 - (\log n)/l_n + t/l_n - o(1/l_n)]^{l_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp[t - l_n\, o(1/l_n)] = \exp[t] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty),$$

co, wobec Lematu 5.15, kończy dowód.

Przykład 5.4
Jeśli system równoległo-szeregowy jest taki, że

$$k_n = 30,\ l_n = 60,$$

oraz jego elementy mają wykładnicze funkcje niezawodności z parametrem

$$\lambda = 1/100,$$

to jego dokładną funkcją niezawodności, wobec (3.4), jest

$$\overline{\boldsymbol{R}}_{30,60}(t) = 1 \text{ dla } t < 0,\quad \overline{\boldsymbol{R}}_{30,60}(t) = [1\text{-}[1\text{-}\exp[-0.01t]]^{60}]^{30} \text{ dla } t \geq 0.$$

Zgodnie z Faktem 5.4, przyjmując

$$a_n = 100/\log 30 \cong 29.4,\ b_n = 100\log(60/\log 30) \cong 287,$$

wobec (2.1), otrzymujemy następujący wzór przybliżony na funkcję niezawodności systemu

$$\overline{R}_{30,60}(t) \cong \overline{\mathfrak{R}}_3((t-b_n)/a_n)$$

$$= \exp[-\exp[0.034t-9.76]] \text{ dla } t \in (-\infty,\infty).$$

Wartości średnie czasów zdatności T_i elementów systemu są równe

$$E[T_i] = 1/\lambda = 100\ h.$$

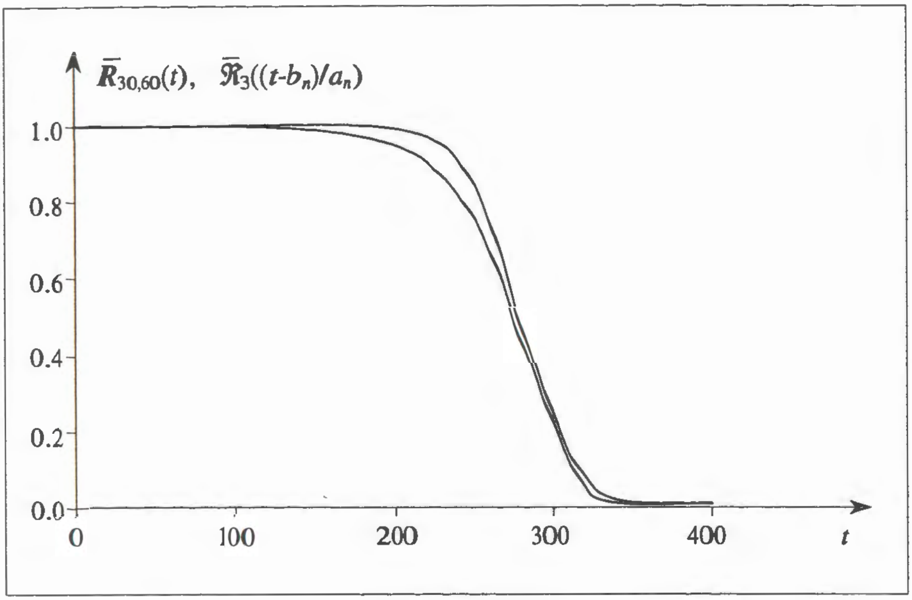
Wartość średnia i odchylenie standardowe czasu zdatności systemu wyznaczone w oparciu o jego graniczną funkcję niezawodności wynoszą [Bobrowski, 1985, Kopociński, 1973]

$$E[T] \cong -0.5772a_n + b_n \cong 270\ h,\ \sigma(T) = \pi a_n / \sqrt{6} \cong 38\ h.$$

Zachowanie się dokładnej i przybliżonej funkcji niezawodności systemu przedstawia Tablica 5.4 oraz Rysunek 5.6.

Tablica 5.4 Wartości dokładnej i przybliżonej funkcji niezawodności jednorodnego systemu równoległo-szeregowego

t	$\overline{R}_{30,60}(t)$	$\overline{\mathfrak{R}}_3(\frac{t-b_n}{a_n})$	$\Delta = \overline{R}_{30,60} - \overline{\mathfrak{R}}_3$
0	1.0000	1.0000	0.0000
100	1.0000	0.9983	0.0017
150	1.0000	0.9906	0.0084
200	0.9961	0.9495	0.0456
220	0.9742	0.9028	0.0714
240	0.9049	0.8172	0.0877
260	0.7453	0.6713	0.0742
280	0.4947	0.3973	**0.0974**
300	0.2382	0.2117	0.0265
320	0.0760	0.0467	0.0293
340	0.0151	0.0024	0.0127
360	0.0018	0.0000	0.0018



Rys. 5.6. Wykresy dokładnej i przybliżonej funkcji niezawodności jednorodnego systemu równoległo-szeregowego

Krzysztof Kołowrocki

ASYMPTOTYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY NIEZAWODNOŚCI SYSTEMÓW

Książka zawiera opis metod oraz wyniki badań niezawodności dużych systemów.

Rozważane są nieodnawialne systemy dwustanowe oraz systemy wielostanowe ze starzejącymi się elementami uszkadzającymi się niezależnie.

Ustalone zostały klasy możliwych granicznych funkcji niezawodności dla dwu i wielostanowych jednorodnych i niejednorodnych systemów szeregowych, równoległych, szeregowo-równoległych i równoległo-szeregowych. Problem wyznaczania granicznych funkcji niezawodności dla tych systemów został rozwiązany całościowo przy dowolnych funkcjach niezawodności ich elementów.

Przytoczone zostały przykłady zastosowań wyników do oceny niezawodności modelowych dużych systemów dwustanowych. Wyniki dotyczące systemów wielostanowych zastosowane zostały do oszacowania charakterystyk niezawodnościowych dużych systemów transportu portowego i stoczniowego.

Sformułowane zostały problemy otwarte oraz wytyczona została perspektywa dalszych badań nad metodami oceny i optymalizacji niezawodności dużych systemów.

Monografia przeznaczona jest dla czytelników zainteresowanych badaniami niezawodności oraz bezpieczeństwa eksploatacji dużych systemów technicznych na etapach ich projektowania i eksploatacji.

ISSN 0208-8029

ISBN 83-85847-58-8

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN

ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa

tel. 837-35-78 w. 241 e-mail: bibliote@ibspan.waw.pl