POLSKA AKADEMIA NAUK
Instytut Badań Systemowych

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Polska Akademia Nauk • Instytut Badań Systemowych

Seria: BADANIA SYSTEMOWE
tom 21

Redaktor naukowy:

Prof. dr hab. Jakub Gutenbaum

Warszawa 1998

Roman KULIKOWSKI
Marek LIBURA
Leon SŁOMIŃSKI

WSPOMAGANIE DECYZJI INWESTYCYJNYCH

Publikację opiniowali do druku:

Prof. dr hab. Maria Podgórska
Doc. dr hab. Leszek S. Zaremba

Książka powstała w wyniku realizacji projektu badawczego finansowanego przez KOMITET BADAŃ NAUKOWYCH

ISBN 83-85847-09-X
ISSN 0208-8029

Część I.
Podejmowanie decyzji na podstawie modeli użyteczności

1. Inwestycje bez ryzyka

1.1. Wartość pieniądza w czasie

Często słyszy się powiedzenie, że „czas to pieniądz". Powiedzenie to wyraża przekonanie, iż odroczona w czasie płatność określonej sumy, np. 100 zł na okres 1 roku, winna przynieść dodatkowy zysk, w formie odsetek bankowych o wysokości $100R_F$ zł. Przyjmujemy tu, że lokata bankowa jest inwestycją pozbawioną ryzyka upadku i z tego względu R_F zwane jest stopą procentową bez ryzyka. Stopę taką gwarantują też papiery wartościowe emitowane przez Skarb Państwa, takie jak obligacje państwowe lub bony skarbowe.

Przyjmiemy też, iż oprócz inwestycji w postaci depozytu w banku, który gwarantuje zwrot 100 zł ze stopą R_F istnieją na rynku inwestycyjnym alternatywy, które gwarantują stopę zwrotu pozbawioną ryzyka i równą k, przy czym k może być większe, równe lub mniejsze od R_F. Rzecz jasna, że inwestor podejmując decyzję dotyczącą wyboru konkretnej alternatywy będzie odrzucał te warianty, które nie gwarantują mu uzyskania stopy zwrotu $k \geq R_F$.

Dla oceny wartości sumy 1 zł zainwestowanej na okres 1 roku w analizie finansowej używane jest pojęcie wartości obecnej (PV) złotówki wypłaconej po upływie roku

$$PV = \frac{1}{1+k} \cdot 1 \text{ zł}.$$

Oznaczając wartość przyszłą tej złotówki przez FV otrzymujemy następującą postać zależności pomiędzy FV i PV w postaci ogólnej, przy inwestycji rocznej

$$PV = \frac{FV}{1+k}$$

W przypadku inwestycji n-letniej uzyskujemy odpowiednio

$$PV = \frac{FV}{(1+k)^n} \tag{1}$$

We wzorze tym k, zwane stopą procentową lub dyskontową, oznacza jednoroczną stopę zwrotu jaką inwestor może uzyskać na rynku inwestycyjnym. Stopę tę inwestor traktuje jako koszt zainwestowanego przez siebie kapitału. Z tego względu k, gdy inwestor używa pożyczonego kapitału, zwane jest też kosztem kapitału.

Następnym ważnym pojęciem używanym w analizie finansowej jest wartość obecna netto (NPV). Załóżmy, że kwota I_0 stanowi wartość przeznaczoną lub wydzieloną z budżetu w roku podatkowym $t = 0$, na inwestycję oraz że inwestycja ta zapewnia uzyskanie w kolejnych latach $t = 1,2,\ldots,n$, strumienia kwot wypłat S_t. Przy danej stopie k (tj. minimalnym, wymaganym na nowej inwestycji zwrocie kapitału) wartość projektu jest różnicą wartości (PV) strumienia $\{S_t\}$ oraz kosztu I_0, czyli

$$NPV = \sum_{t=1}^{n} \frac{S_t}{(1+k)^t} - I_0 \tag{2}$$

1.2. Funkcja użyteczności

We wielu zagadnieniach optymalizacyjnych, jakie występują między innymi w badaniach operacyjnych, teorii sterowania itp. funkcję, która opisuje cel działalności udaje się przedstawić, z dokładnością zadowalającą dla potrzeb praktycznych, w jawnej formie analitycznej. Łącznie z danymi ograniczeniami, które charakteryzują obszar rozwiązań dopuszczalnych, udaje się też sformułować odpowiedni problem optymalizacyjny, oraz zastosować jedną ze znanych technik optymalizacyjnych w celu uzyskania rozwiązania w formie jawnej (*explicite*) lub w formie numerycznej.

Istnieje jednak szereg problemów optymalizacyjnych (zwłaszcza w obszarze nauk ekonomicznych, finansach, zarządzaniu, psychologii oraz socjologii) w których cele działania są uzależnione od subiektywnych cech decydenta. Przyjęło się w takich problemach mówić nie tyle o funkcji celu lecz raczej o funkcji użyteczności tego decydenta.

W literaturze ekonomicznej przyjmuje się zwykle, iż zarówno konsument, jak i inwestor charakteryzują się funkcją użyteczności F, która wyraża satysfakcję z posiadanych zasobów pieniężnych x.

Funkcja ta przy założeniu, że mamy do czynienia z racjonalnie zachowującymi się osobnikami winna spełniać następujące warunki:

a. być rosnącą, tj. osobnik preferuje większe bogactwo od mniejszego, czyli $F'(x) > 0$,
b. wraz ze wzrostem bogactwa, ustalony przyrost użyteczności ($\Delta F = const$) wymaga coraz większych przyrostów Δx, czyli $F''(x) < 0$.

Warunki te spełnia $F(x)$, która jest rosnąca i ściśle wklęsła.

?

Obserwacja procesów decyzyjnych potwierdza, iż przyjęty model użyteczności dla dochodów pieniężnych znajduje potwierdzenie w praktyce. Na przykład, przy podziale zysku w zespole, w którym każdy członek zespołu wniósł równy wysiłek, preferowana jest kadra kierownicza, której wynagrodzenie (poziom bogactwa) jest wyższe od pozostałych członków zespołu. Podobnie, przy oferowaniu pracownikom określonego zadania oraz stosownej premii, wyższą premię zwykle proponuje się pracownikom o wyższym wynagrodzeniu. Pracownik o wyższym wynagrodzeniu nie zechce też zwykle wykonywać dodatkowych prac za tę samą premię co pracownik niżej zarabiający.

Z powyższych względów premie i nagrody dla kierowników i menadżerów w dużych przedsiębiorstwach są z reguły większe niż dla reszty niżej uposażonych pracowników.

Podobną zasadę stosuje się w opodatkowaniu osób o różnych dochodach. Stopa opodatkowania wzrasta wraz z wysokością dochodów. Z tego względu dyssatysfakcja wynikająca z płacenia podatków jest w miarę jednorodnie rozłożona w poszczególnych grupach opodatkowania.

Warto zauważyć, że funkcji $F(x)$ nie udaje się wyrazić *explicite* tj. w jawnej, analitycznej postaci. Oprócz postulowanych powyżej własności należy uznać, że każdy osobnik może posiadać „swój własny wariant" tej funkcji, który generalnie biorąc może ulegać pewnym zmianom w zależności od czynników zewnętrznych (np. poziom posiadanych już zasobów czyli bogactwa) oraz wewnętrznych (psychicznych postaw i motywacji).

Aby uwzględnić te dwie kategorie czynników w pracach Kulikowskiego (1993, 1994) zaproponowano model funkcji użyteczności

$$\Phi[\omega x, \pi], \tag{1}$$

w którym x jest zasobem kapitału pieniężnego lub ludzkiego (tj. godzin czasu jakie decydent przeznacza na określoną działalność). W ostatnim przypadku ω jest ceną (opłatą) 1 godziny działalności. Z omawianą działalnością łączy się też pojęcie wartości π tej działalności w przyszłych okresach czasowych. Wartość ta powoduje też motywację do działania, która zmaterializuje się w przyszłych dochodach, prestiżu itp. Dla przykładu młody człowiek rozważający użyteczność podjęcia szkolenia, które kosztuje go ωx, wierzy iż w przyszłości po zakończeniu studiów uzyska pracę płatną π zł/godz. Parametrem, który charakteryzuje atrakcyjność szkolenia jest $A = \pi / \omega$.

Przyjmiemy teraz oczywiste założenie, iż przez zmianę jednostek pieniężnych (np. zamianę złotówek na grosze) użyteczność Φ nie ulega zmianie. Oznacza to iż Φ jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego (tzw. *constant returns to scale*). Funkcję taką można zapisać w postaci równoważnej

$$\Phi = \pi F\left(\frac{\omega x}{\pi}\right) = \pi A F\left(\frac{x}{A}\right),$$

gdzie $F(\cdot)$ spełnia omówione już warunki.

Konkretnym (typowym) przykładem funkcji F jest

$$F(x) = \alpha x^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \beta < 1, \qquad (2)$$

gdzie wartości liczbowe dla α, β, dla określonego decydenta, są zwykle nieznane.

Dla decydenta tego ważne znaczenie ma rozwiązanie następującego problemu optymalizacyjnego:
Dane są atrakcyjności: $A_i = \pi_i / \omega$, $i = 1,...,n$, gdzie n - liczba konkretnych form działalności (np. nauka języków, technologii, zarządzania itp.). Trzeba określić podział danej liczby (godzin) zasobów X na poszczególne działalności (o liczbie godzin x_i, $\forall i$) tak by

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = X, \quad x_i \geq 0, \quad \forall i. \qquad (3)$$

Przyjmiemy tu, że użyteczność wypadkowa Φ jest sumą użyteczności dla poszczególnych działań Φ_i, $\forall i$. Należy zatem wyznaczyć $x_i = \hat{x}_i$, $\forall i$, takie, że

$$\max_{x_i} \sum_{i=1}^{n} \pi_i A_i F\left(\frac{x_i}{A_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i A_i F\left(\frac{\hat{x}_i}{A_i}\right)$$

przy warunkach (3).

Stosując model (2) mamy $F\left(\frac{x_i}{A_i}\right) = \alpha \pi_i A_i^{1-\beta} x_i^{\beta}$. Wprowadzając

oznaczenia

$$l_i \overset{\Delta}{=} \alpha \pi_i A_i^{1-\beta}, \quad x_i^{\beta} \overset{\Delta}{=} y_i, \quad \forall i$$

i stosując nierówność Höldera, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{n} l_i y_i \leq \| l \|_p \cdot \| y \|_q, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \tag{4}$$

gdzie

$$\| l \|_p = \left\{ \sum_{i=1}^{n} l_i^p \right\}^{1/p}, \quad \| y \|_q = \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i^q \right\}^{1/q}.$$

Znak równości w (4) występuje gdy

$$l_i^p = c y_i^q, \quad c = const, \quad \forall i. \tag{5}$$

Przyjmując $q = 1/\beta$ w równości powyższej mamy

$$\left(\alpha \pi_i A_i^{1-\beta}\right)^p = \left(\alpha \pi_i\right)^p A_i = c\,\hat{x}_i, \quad \forall i$$

Korzystając z warunku (3) znajdujemy wartość stałej dowolnej c:

$$c = \alpha^p \frac{A}{X}, \quad A = \sum_{i=1}^{n} A_i \pi_i^p$$

Zatem optymalna strategia ma postać

$$\hat{x}_i = \frac{A_i \pi_i^p}{A} X, \quad \forall i \tag{6}$$

Zgodnie z tą strategią decydent winien podzielić swoje zasoby X proporcjonalnie do atrakcyjności (A_i / A) konkretnych form działalności.

Jak wynika ze wzoru (6) dla efektywnego wyznaczenia strategii alokacji $(\hat{x})$ nie jest wymagana znajomość parametrów α, β, opisujących funkcję użyteczności (2) decydenta.

Warto zauważyć, iż w przypadku liniowej funkcji użyteczności (gdy $\beta = 1$, zaś $p \to \infty$) mamy

$$\| l \|_{p \to \infty} = \max_i l_i = l_{i_m},$$

czyli cały zasób X winien być przeznaczony na działalność o wskaźniku i_m (o najwyższej atrakcyjności).

Warto również zauważyć, że model alokacji zasobów omawiany w niniejszym punkcie zakłada iż decydent określa atrakcyjności ($A_i = \pi_i / \omega$) w pełnym przekonaniu, iż w przyszłości uzyska rekompensatę (wynagrodzenie) π_i. Bardziej realistyczny jest jednak model, w którym przyszłe wynagrodzenie jest postrzegane jako zmienna losowa z daną wartością oczekiwaną i wariancją. Modele takie będą przedmiotem rozważań następnych rozdziałów niniejszej pracy.

1.3. Wewnętrzna stopa zwrotu

Przy badaniu efektywności inwestycji zachodzi potrzeba oceny nakładów początkowych na inwestycję I_0 z oczekiwanymi strumieniami pieniężnymi S_t w przyszłych latach t. Jeśli okres życia projektu inwestycyjnego wynosi n-lat, zaś stopa dyskontowa (tj. wymagalny minimalny roczny zwrot z nowych inwestycji) jest równy k, to wartość teraźniejszą netto (NPV) projektu określa wzór (2) z § 1.1.

Jeśli wielkości S_t, $\forall t$, I_0 oraz k są dane ze wzoru (2) łatwo wyliczyć numeryczną wartość NPV. Jest sprawą oczywistą, iż dla inwestora tylko te projekty inwestycyjne przedstawiają praktyczną wartość, dla których $NPV > 0$. W ocenie NPV duże znaczenie ma właściwa ocena stopy dyskontowej k. Wartość teraźniejsza netto jest, przy $S_t \geq 0$, malejącą funkcją k. Czym k jest większe tym mniejsza wartość projektu. W przypadku większej liczby alternatywnych projektów inwestycyjnych wybór projektu najkorzystniejszego (z punktu widzenia NPV) można zatem dokonywać przez porównanie wartości NPV dla poszczególnych wariantów.

Można też porównywać poszczególne projekty obliczając tzw. wewnętrzną stopę zwrotu R (*internal rate of return*, IRR) którą obliczamy z zależności $NPV(R) = 0$, czyli rozwiązując równanie

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{S_t}{(1+R)^t} = I_0 ,$$

względem R.

Projekt, który posiada największą wartość R winien być preferowany.

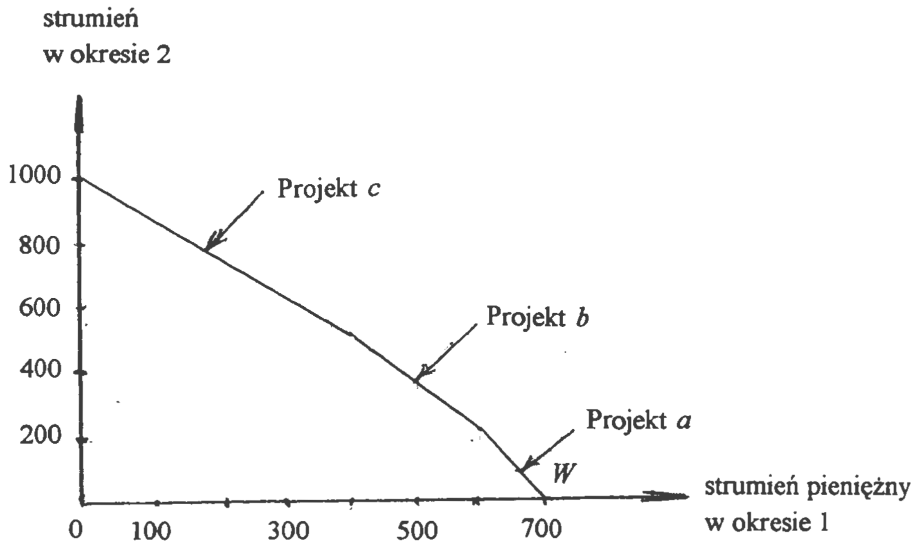
Jeśli projekt jest finansowany w oparciu o kredyt bankowy, którego koszt wynosi k, to warunek akceptacji projektu wymaga by $R > k$. W przeciwnym przypadku (tzn. $R \leq k$) zwroty na inwestycji nie pokryją odsetek kredytowych.

1.4. Krzywa produktywności inwestycji

W przypadku wielu alternatywnych projektów inwestycyjnych inwestor staje wobec zagadnienia ustalenia preferencji pomiędzy alternatywami, a także - wyboru do swego portfela projektów preferowanych. Pomocnym dla tych celów jest pojęcie krzywej produktywności inwestycji (*investment productivity curve*).

Pojęcie to ilustrujemy przy pomocy przykładu liczbowego z Tabeli 1. Przyjmujemy, że mamy do czynienia z trzema jednorocznymi inwestycjami (a, b, c), w których koszty inwestycyjne (I_0) są ponoszone w początku roku, zaś dochody (S) są realizowane w końcu tego roku. Wtedy IRR łatwo obliczyć z zależności $R = \frac{S}{I_0} - 1$. Przyjmujemy tu także, że całkowite nakłady inwestycyjne wynoszą

$w = 700$ zaś kolejne projekty (a, b, c) są uszeregowane zgodnie z malejącymi wartościami wewnętrznej stopy zwrotu R.



Rys. 1. Konstrukcja krzywej produktywności

Tabela 1. Konstrukcja krzywej produktywności

Projekt	Wartość inwestycji I_0	Dochód S	Wewnętrzna stopa zwrotu R %
a	100	200	100
b	200	300	50
c	400	500	25

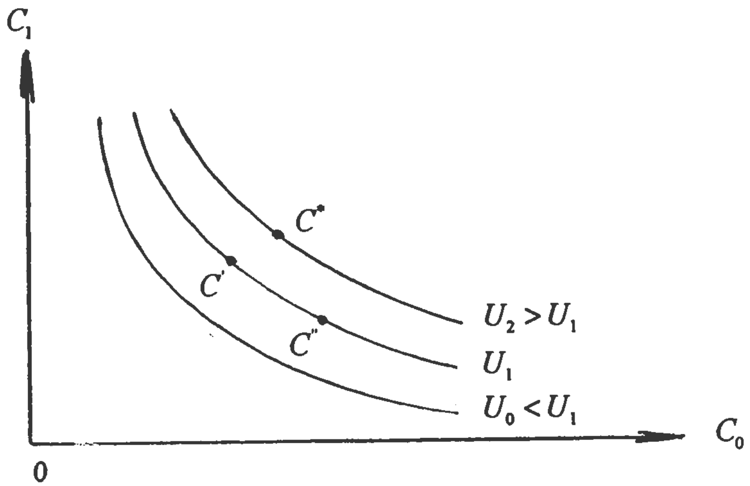
Na podstawie Tabeli 1 konstruujemy wykres ukazany na Rys. 1. Jak widać z Rys. 1 nachylenie krzywej produktywności inwestycji zmniejsza się gdy przesuwamy się od projektu z większym R (tj. projektu a) do projektu z mniejszym R (tj. projektu c). Własność ta będzie zachowana i w każdym innym zbiorze alternatywnych projektów inwestycyjnych wskutek czego obszar zawarty pod krzywą produktywności jest zbiorem wypukłym.

1.5. Konsumpcja i inwestycje

Rozpatrzmy zachowanie inwestora dysponującego zasobami pieniężnymi W, który musi zadecydować jaką część swego kapitału skonsumować w roku bieżącym, a jaką zainwestować by zapewnić sobie konsumpcję w roku następnym.

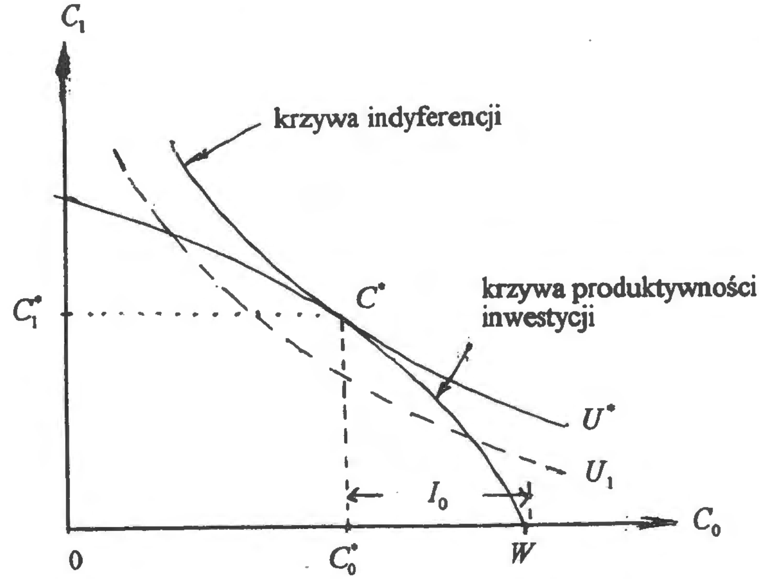
Dla zrozumienia zachowania się inwestora przydatne jest wprowadzenie koncepcji tzw. krzywej obojętności lub indyferencji (*indifference curve*). Zakładamy tu, że konsument działa racjonalnie, tj. że woli on większą konsumpcję od mniejszej (przy innych ewentualnych czynnikach niezmiennych). Konsument ten pragnie wybrać taką kombinację bieżącej (C_0) i przyszłej (C_1) konsumpcji która zapewni mu maksymalną satysfakcję (użyteczność). Konsumpcje C_0, C_1 są wyrażone przez strumienie pieniężne w, odpowiednio, pierwszym i drugim okresie. Można zauważyć, że konsument będzie akceptował takie strategie, które pozwalają zwiększyć jedną wielkość (np. C_1) kosztem zmniejszenia drugiej (C_0) (mowa tu o pewnym zakresie zmian zapewniającym przeżycie okresowych deficytów konsumpcji). Rozważania te pozwalają przyjąć, że funkcja $C_1(C_0)$ jest krzywą wypukłą, której wykres dla określonego poziomu użyteczności $U = U_1$ ilustruje Rys. 2.

Dla dwóch dowolnych punktów, np. C' i C'', które leżą na tej krzywej, użyteczność jest ta sama, równa U_1. Dla dowolnego punktu C^*, który leży powyżej krzywej U_1 użyteczność jest większa ($U_2 > U_1$) i odpowiada mu inna krzywa indyferencji, przechodząca przez punkt C^*, lecz nie przecinająca się z krzywą U_1. Innymi słowy dla konkretnego inwestora istnieje cała rodzina nie przecinających się krzywych indyferencji, odpowiadająca różnym poziomom użyteczności.



Rys. 2. Krzywe indyferencji

Korzystając z pojęć krzywej produktywności i krzywej indyferencji możemy opisać proces wyboru poziomu konsumpcji oraz inwestycji przez inwestora. Na Rys. 3, na którym przedstawiono obie krzywe, widać że istnieje taka krzywa indyferencji (U^*), która w punkcie C^* jest styczna do krzywej produktywności inwestycji. W punkcie tym inwestor osiąga maksymalną użyteczność. Odpowiada ona konsumpcji w pierwszym okresie $C_0 = C_0^*$, oraz inwestycji $I_0 = W - C_0^*$, która zapewnia w drugim okresie konsumpcję C_1^*. Punkt C^* określa też liczbą projektów inwestycyjnych, które inwestor winien włączyć do swego portfela. Wszystkie projekty, które znajdują się na lewo od punktu C^* na krzywej produktywności winny być odrzucone. Projekty odrzucone mają bowiem wewnętrzną stopę zwrotu mniejszą niż projekt graniczny odpowiadający C^*.



Rys. 3. Wybór konsumpcji i inwestycji

Warto zauważyć, że proces akceptacji projektów inwestycyjnych oparty na powyższej procedurze nie jest pozbawiony cech subiektywnych, jako że opiera się on na pojęciu krzywej indyferencji i użyteczności inwestora, które mają charakter subiektywny.

Związany z tymi pojęciami model akceptacji inwestycji jest, rzecz jasna, modelem deskryptywnym. Dla nadania temu modelowi cech normatywnych należałoby dla konkretnego inwestora określić analityczną postać funkcji użyteczności i rozwiązać problem poszukiwania strategii (C_0, C_1) w zbiorze projektów dopuszczalnych, jaki określa krzywa produktywności.

Drugim istotnym ograniczeniem powyższego modelu akceptacji projektów inwestycyjnych jest założenie, iż wewnętrzne stopy zwrotu są deterministyczne. Ponieważ w realnych zagadnieniach inwestycyjnych przyszłe strumienie pieniężne, jakie generują projekty inwestycyjne, mogą być określane (tj. przewidywane) z większym lub mniejszym prawdopodobieństwem zwrot jest, ogólnie biorąc, zmienną przypadkową. Możemy co najwyżej mówić o wartościach oczekiwanych zwrotu oraz o parametrach, takich jak wariancja lub dyspersja, które charakteryzują naszą niewiedzę co do przyszłych wartości zwrotu. W rezultacie decyzje dotyczące realnych problemów inwestycyjnych obarczone są ryzykiem zaistnienia niekorzystnego (najgorszego) przypadku w którym zwrot jest tak niski iż grozi konsekwencjami niewypłacalności lub bankructwa inwestora.

Uwzględnienie ryzyka w modelach optymalizacji portfela inwestycyjnego wymaga głębszej analizy zarówno modeli deskryptywnych jak i normatywnych. Analizie tej będą poświęcone następne podrozdziały niniejszej pracy.

Warto też zauważyć iż krzywa produktywności inwestycji została skonstruowana z projektów niepodzielnych na mniejsze części, tzn. inwestor nie może tu inwestować tylko w część projektu. Jeśli uogólnimy pojęcie inwestowania na przypadek inwestowania w akcje przedsiębiorstwa, to przy niskiej cenie akcji (w stosunku do zasobów W) inwestor będzie mógł nabyć dowolną część projektu, a więc jego strategie decyzyjne będzie można traktować jako zmienne ciągłe. Portfel takiego inwestora będzie zawierał różne akcje; o cenach P_i, $i = 1,\ldots,n$, w ilościach x_i każda, zaś całkowity koszt akcji (P) wyniesie:

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \,.$$

Strategie inwestora mogą jednak nabyć charakteru dyskretnego (lub dyskretno-ciągłego) gdy przedmiotem obrotu będą nie tylko pojedyńcze walory lecz ich duże pakiety.

Wspomaganie decyzji inwestycyjn

Roman Kulikowski,
Marek Libura,
Leon Słomiński

W książce omawiane są zagadnienia z obszaru analizy finansowej i teorii portfela inwestycyjnego z wykorzystaniem komputerowej metodologii wspomagającej podejmowanie decyzji.
Książka może być przedmiotem zainteresowania zarówno decydentów, podejmujących decyzje finansowe, jak i inwestorów giełdowych i doradców finansowych oraz studentów i doktorantów.
Monografia pozwoli głębiej i pełniej zrozumieć złożoną problematykę finansów i inwestycji, z uwzględnieniem różnych form ryzyka i podejmować w działalności praktycznej decyzje optymalne.
Rozważane są zasady konstruowania modeli matematycznych opisujących rynki kapitałowe – kształtowanie się cen oraz oczekiwanych zwrotów nakładów inwestycyjnych – jak również modeli działalności inwestora w postaci tzw. funkcji użyteczności.

ISBN 83-85847-09-X

W celu uzyskania bliższych informacji i zakupu dodatkowych egzemplarzy prosimy o kontakt z Instytutem Badań Systemowych PAN
ul. Newelska 6, 01-447 Warszawa
tel. 37-35-78 w. 241 e-mail: kotuszew@ibspan.waw.pl