

Andrzej Chachulski

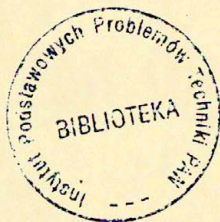
METODA TRZYKROTNEGO POBUDZANIA
WIĄZKI ATOMOWEJ
PROBLEM PRZESUNIĘĆ FAZOWYCH

37/1986

37 / 1986

WARSZAWA 1986

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 28 października 1986 r.



56884

Autor wyraża Panu mgr. Zbigniewowi Banasikowi podziękowanie za twórcze i bardzo sprawne opracowanie programów obliczeniowych służących badaniu opisanej metody.



N a p r a w a c h r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 140 egz. Ark.wyd. 0,68 Ark.druk. 1,25

Oddano do drukarni w październiku 1986 r.

Nr zamówienia 500/86.

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

Andrzej Chachulski
Pracownia Atomowych Wzorców
Częstotliwości

METODA TRZYKROTNEGO POBUDZANIA WIĄZKI ATOMOWEJ-
PROBLEM PRZESUNIEC FAZOWYCH

Streszczenie

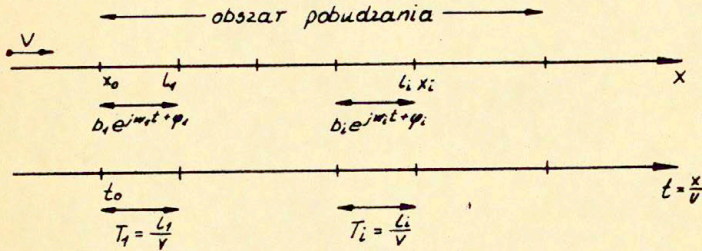
Dokonano analizy własności rezonansowych układu z wiązką atomową w którym zastosowano trzykrotne pobudzenie do przejść kwantowych. Analizowano warunki takiego pobudzenia a w szczególności badano wpływ przesunięć fazowych pomiędzy pobudzającymi atomy sygnałami wielkiej częstotliwości na częstotliwość rezonansową detekowanej krzywej. Stwierdzono że między innymi częstotliwość rezonansowa jest zależna od iloczynu funkcji tych kątów. Proces pobudzenia został opisany w sposób ogólny w formie macierzowej. Badania wpływu przesunięć fazowych przeprowadzono na drodze obliczeń numerycznych dla przypadku układu spektrometru z wiązką atomów cezu.

1. Pobudzenie do przejść kwantowych w układach z wiązką atomową.
- 1.1. Układy z wiązką atomową.

Spektrometry w których wykorzystuje się technikę wiązek atomowych pracują na tej zasadzie, że wiązka opuszczająca wyrzutnię jest polaryzowana pod względem kwantowym, następnie przebiega przez obszar pobudzenia polem elektromagnetycznym i z kolei bieżący stan jej polaryzacji reprezentujący własności rezonansowe atomu jest mierzony odpowiednim układem detekcji

[1] , [2] , [3] .

Atom przez obszar pobudzenia przebiega ruchem jednostajnym z prędkością v . W sposób wyidealizowany dowolny proces pobudzenia można przedstawić tak jak to zobrazowano schematycznie na poniższym rysunku.



rs.1. Schemat obrazujący zasadę wielokrotnego pobudzenia wiązki atomowej.

Przybliżenie, potwierdzone praktyką, polega natym, że cały obszar pobudzenia został podzielony na "1" podobszarów charakteryzujących się, w ramach każdego podobszaru, niezmienniczością parametrów pola elektromagnetycznego. Przyjmuje się, że w podobszarze "1" wzbudzona jest do drgań fala stojąca o częstotliwości drgań ω_i , amplitudzie b_i i fazie początkowej φ_i .

Przyjęto, co jest potwierdzone wynikami spektroskopii nadsubtelnej atomów wodoropodobnych takich jak cez, rubid, thal [9] , [10] , [11] , [12] , że atomy posiadają tylko dwa stany energetyczne. Przejścia wywołane przyłożonym polem elektromagnetycznym występują między tymi stanami kwantowymi.

Powyższe założenie ma jak wiadomo ten skutek że badany zbiór atomów może być rozpatrywany jako zbiór wirujących spinów. Zjawiska zachodzące w trakcie pobudzenia mogą być przedstawione przy pomocy powyższych klasycznych pojęć [4] .

Atomy w wiązce poruszają się z różnymi prędkościami. U wylotu wyrzutni rozkład gęstości prawdopodobieństwa p/v poru-

szania się atomów z prędkością v jest następujący /1/

$$/ 1/ \quad p(v) = \frac{v^3}{\alpha^4} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}$$

gdzie α jest prędkością najbardziej prawdopodobną. Prędkość ta jest określona masą atomu m i temperaturą pary nasyconej T gazu atomowego $\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$. Współczynnik k jest stałą Boltzmana.

W praktyce w trakcie polaryzacji wiązki i detekcji stanu polaryzacji następuje dyspersja wiązki. Przyjmuje się że ta część wiązki która jest detekowana i jest nośnikiem informacji o własnościach kwantowych /rezonansowych/ atomów posiada rozkład prędkości określony rozkładem /1/ ograniczonym do przedziału prędkości $v_d - v_g$.

1.2. Zależności podstawowe [4], [5].

Punktem wyjścia obliczeń prawdopodobieństwa zmiany stanu kwantowego atomu jest równanie opisujące własności dynamicznej macierzy gęstości

$$/2/ \quad i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [\rho, H]$$

Równanie to można rozpisać na następujący układ równań

$$/3/ \quad i\hbar \frac{d\rho_{mn}}{dt} = \sum_i [H_{mi} \rho_{ni} - \rho_{mi} H_{ni}]$$

W rozpatrywanym przypadku, gdy bierzemy pod uwagę przejścia pomiędzy dwoma stanami kwantowymi /macierz gęstości ma wymiary 2×2 /, otrzymujemy

$$/4/ \quad i\hbar \frac{d(\rho_{22} - \rho_{11})}{dt} = 2(H_{21}\rho_{12} - \rho_{12}H_{21})$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{12}}{dt} = -i\omega_0\rho_{12} + iV_{12}(\rho_{11} - \rho_{22})$$

W przypadku rozpatrywania własności magnetycznych zbioru atomów z elementami niediagonalnymi wiążemy składowe wirujące wektora magnetyzacji zbioru momentów magnetycznych atomów a z składowymi diagonalnymi składową "z" wektora magnetyzacji której wielkość i zwrot jest zależny od prawdopodobieństwa przejść kwantowych pomiędzy stanami $|1\rangle$ i $|2\rangle$. Składowe niediagonalne macierzy przebiegają w czasie synchronicznie z przyłożonym zaburzeniem.

Element macierzowy zaburzenia periodycznego ma postać

$$/5/ \quad V_{12} = b \exp(-i\omega t)$$

Wobec powyższego przyjmuje się że niediagonalny element macierzy gęstości ρ_{12} można opisać następującą zależnością

$$/6/ \quad \rho_{12} = \frac{1}{2} [a_1 + ia_2] \exp[-i\omega t]$$

gdzie a_1 i a_2 są funkcjami czasu działania zaburzenia τ

$$/7/ \quad \rho_{12} = \frac{1}{2} [a_1(\tau) + ia_2(\tau)] \exp[-i\omega t]$$

dla elementów diagonalnych przyjęto

$$/8/ \quad \rho_{11} - \rho_{22} = a_3(\tau)$$

Procesy jakie rozpatrujemy związane są z czasem bieżącym t jak i czasem oddziaływania zaburzenia. Wobec tego

$$/9/ \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

Uwzględniając /7/ ,/8/ ,/9/ w równaniach otrzymujemy

$$/10/ \quad \frac{\partial}{\partial \tau} a(\tau) - 2ib a_3(\tau) + i(\omega_0 - \omega) a(\tau) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a_3(\tau) - ib(a - a^*) = 0$$

Powyższy układ równań różniczkowych cząstkowych można rozwiązać przy pomocy transformacji Laplace'a /Dodatek A/ [6]

W rezultacie otrzymujemy wartości zmiennych a_1, a_2, a_3 dla chwili $t = \tau$ w zależności od wartości tych zmiennych w chwili $t = t_0$. Ta zależność określa następujące równanie macierzowe

$$/11/ \quad \begin{vmatrix} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \\ a_3(\tau) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4b^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \cos \Omega \tau; & -\frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \Omega \tau; & \frac{2b\Omega_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau) \\ \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \Omega \tau & \cos \Omega \tau & -\frac{2b}{\Omega} \sin \Omega \tau \\ \frac{2b\Omega_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau); & \frac{2b}{\Omega} \sin(\Omega \tau); & \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} + \frac{4b^2}{\Omega^2} \cos \Omega \tau \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1(t_0) \\ a_2(t_0) \\ a_3(t_0) \end{vmatrix}$$

gdzie $\Omega_0 = \omega_0 - \omega$

$$/12/ \quad \Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + 4b^2}$$

Skrótowo

$$/13/ \quad |a(\tau)| = |P| \times |a(t_0)|$$

Dla przypadku gdy atom naswej drodze napotyka "i" obszarów pobudzania ogólne równanie dla współczynników a ma postać następującą

$$/14/ \quad |a(\tau)| = |P_i| \times \dots \times |P_1| \times |a(t_0)|$$

Prawdopodobieństwo zmiany stanu kwantowego atomu P_{pq} jest proporcjonalne do wartości współczynnika a_3/t . Jeżeli przyjąć że w chwili t_0 $a_3 = 1$ to zależność ta ma postać następującą

$$/15/ \quad P_{pg} = \frac{1}{2} (1 - a_3(\tau))$$

Prawdopodobieństwo zmiany stanu kwantowego dla wiązki atomowej jest średnią wyrażenia /15/ po rozkładzie prędkości /1/

$$/16/ \quad \langle P_{pg} \rangle = \frac{1}{2} \int_{V_d}^{V_g} \frac{V^3}{\omega^4} \exp(-\frac{V^2}{\omega^2}) (1 - a_3(\tau)) dV$$

1.3. Szczególne przypadki własności macierzy P.

Przypadek $b=0$

Jeżeli wartość współczynnika amplitudowego b jest równa zeru to macierz P przyjmuje postać następującą

$$/17/ \quad P(b=0, T) = \begin{vmatrix} \cos \Omega_0 T & -\sin \Omega_0 T & 0 \\ \sin \Omega_0 T & \cos \Omega_0 T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Przypadek przesunięcia fazowego φ

Parametr przesunięcia fazowego φ można uwzględnić w macierzy P na podstawie następującego prostego rozumowania. Załóżmy że element macierzy zaburzenia ma postać

$$/18/ \quad V_{pg} = b e^{-i(\omega t + kx)} = b e^{-i\omega t}$$

gdzie parametr k jest tak dobrany że spełnia następujący warunek

$$/19/ \quad k = \frac{\varphi}{l}$$

Jeżeli $t \cdot T$ jest czasem oddziaływania zaburzenia i jeżeli przyjmiemy ponadto że w tym okresie czasu wartość współczynnika b wynosi 0 to otrzymujemy następującą macierz P

/20/

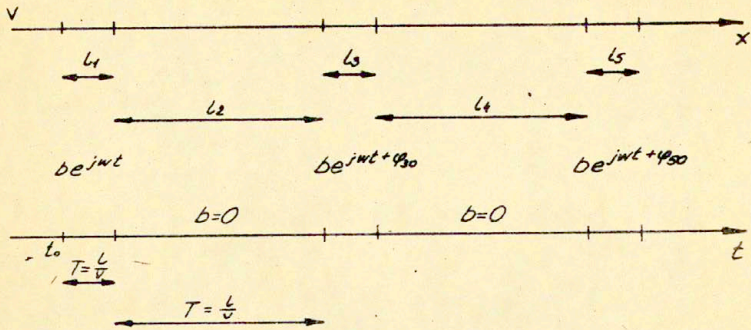
$$P(b=0, T, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos(\Omega_0 T - \varphi) & ; & -\sin(\Omega_0 T - \varphi) & ; & 0 \\ \sin(\Omega_0 T - \varphi) & ; & \cos(\Omega_0 T - \varphi) & ; & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 \end{vmatrix}$$

Macierz ta opisuje wpływ na prawdopodobieństwo zmiany stanu kwantowego P_{pq} przerwy, o czasie trwania T , w pobudzeniu polem elektromagnetycznym atomu jeżeli różnica faz między sygnałem poprzedzającym przerwę i sygnałem następującym po przerwie wynosi φ .

2. Metoda trzykrotnego pobudzenia.

Uśrednianie funkcji /15/ po semimaxwellowskim rozkładzie prędkości p/v /16/ uniemożliwia uzyskanie formy analitycznej na wyrażenie /20/ na prawdopodobieństwo przejść kwantowych. Dla przypadku uśredniania w granicach $v_d=0 \div v_g = \infty$ znany jest w literaturze rachunek przybliżony przy użyciu t.zw. funkcji I i K [7], [8]. Z powyższych przyczyn własności rozważanej metody badano na drodze obliczeń numerycznych przeprowadzonych dla szczególnego przypadku spektrometru. Analizowano układ spektrometru z wiązką atomów cezu gdzie wykorzystywany jest rezonans magnetyczny związany z przejściami $F_{3,0} \rightleftharpoons F_{4,0}$ struktury nadesubtelnej stanu podstawowego tego pierwiastka.

Konfigurację rozważanego układu przedstawia rysunek Nr2. Do obliczeń przyjęto że trzy czynne obszary l_1 l_3 i l_5 są jednakowej długości $l=1$ cm. Podobnie jednakowe są obszary przelotu $l_2=l_4=50$ cm. W obszarach czynnych wzbudzone są sygnały o jednakowej amplitudzie $b_1=b_3=b_5=b$ i częstotści drgań. Sygnały te różnią się jedynie fazami początkowymi 0 i φ . Ponadto przyjęto że $v_d=0,1\alpha$; $v_g=10\alpha$; $\alpha=2,2 \cdot 10^4$ cm/s co odpowiada temperaturze wiązki 370°K oraz że w chwili począ-



Rys.2. Schemat obrazujący zasadę trzykrotnego pobudzenia wiązki atomowej.

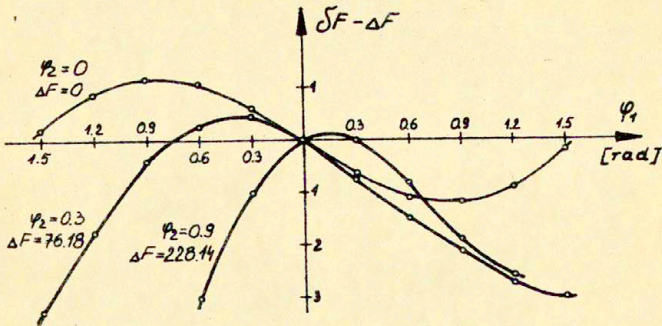
tkowej $t=t_0$ wiązka jest całkowicie spolaryzowana. Równanie macierzowe dla przyjętej konfiguracji układu ma następującą postać

$$/21/ \begin{vmatrix} a_1(t_k) \\ a_2(t_k) \\ a_3(t_k) \end{vmatrix} = P_5(b, T) \times P_4(0, T, \varphi_{30}) \times P_3(b, T) \times P_2(0, T, \varphi_{30}) \times P_1(b, T) \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Własności rezonansowe układu są wyrażane zależnością P_{pq} od częstości pobudzającego sygnału ω

$$/22/ \langle P_{pq}(\omega - \omega_0) \rangle = \frac{1}{2} \int_{0, 1\kappa}^{10\kappa} (1 - a_3(t_k)) \frac{V^3}{\alpha^4} e^{-\frac{V^2}{\alpha^2}} dV$$

W wyniku obliczeń stwierdzono że w pobliżu częstości rezonansu atomowego zmiana częstości rezonansowej spektrometru ΔY_{sp} określona jako $\max P_{pq}$ w funkcji $\omega - \omega_0$ jest funkcją kątów φ_{30} i φ_{50} . Charakter i wielkości tych zmian obrazują otrzymane dane liczbowe przedstawione na rys.3.



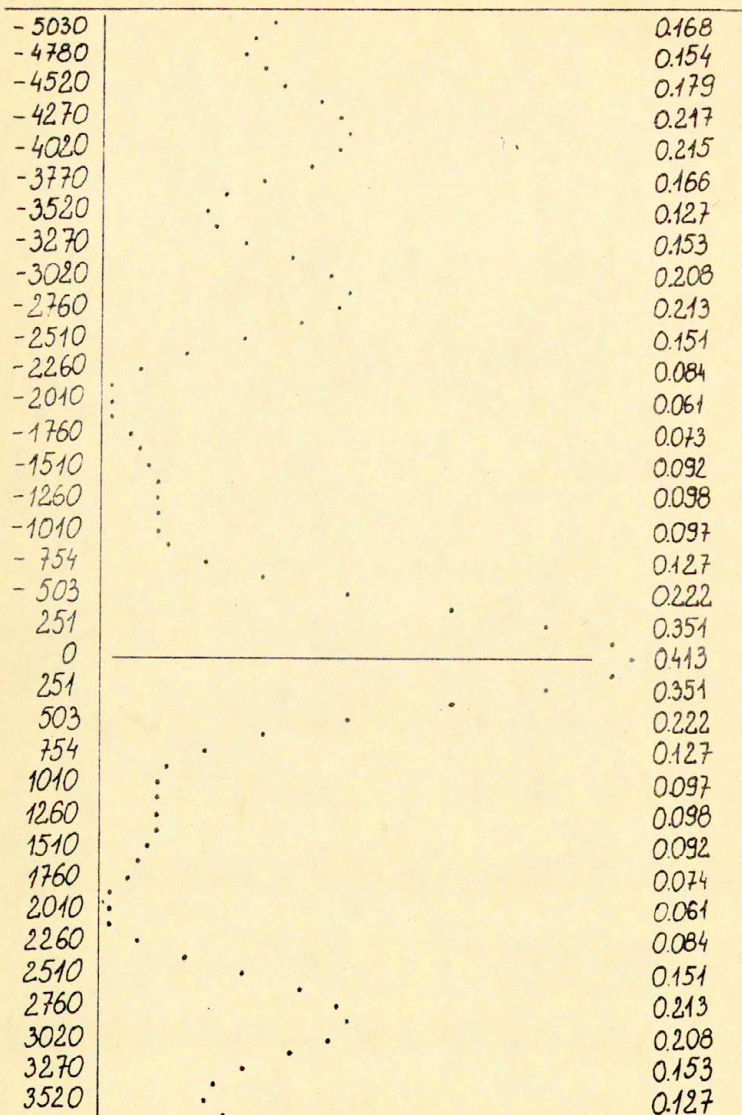
Rys.3. Wpływ kątów przesunięć fazowych φ_{30} i φ_{50} na częstość rezonansową spektrometru.

Własności rezonansowe układu trzykrotnie pobudzanego obliczone na podstawie równania /22/ zostały przedstawione na rys. 4. Zastosowanie rachunku macierzowego pozwala na łatwą analizę metody pobudzenia Raabiego [13] czy Ramsey'a [14]. Krzywa rezonansowa typu N.F.Ramsey'a dla rozpatrywanego spektrometru /przy podwójnym pobudzeniu/ przedstawiona została na rys.5.

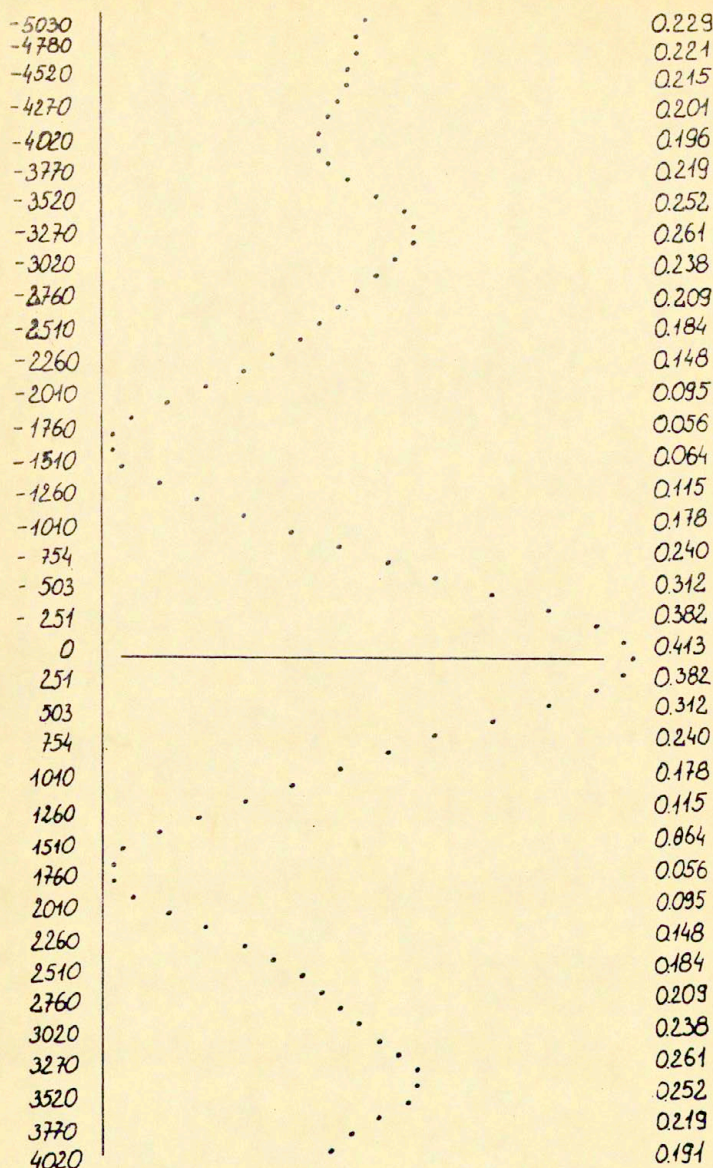
3. Wnioski końcowe.

W przypadku trzykrotnego pobudzenia wiązki atomowej zmiana częstości rezonansowej spektrometru jest między innymi proporcjonalna do iloczynu funkcji kątów przesunięć fazowych φ_{30} , φ_{50} .

Taka zależność stwarza możliwości detekcji występujących przesunięć fazowych w pracujących spektrometrach. Ma to istotne znaczenie w precyzyjnej metrologii własności rezonansowych atomów i molekuł [15].



Rys.4. Krzywa rezonansowa spektrometru w przypadku trzykrotnego pobudzenia.



Rys.5. Krzywa rezonansowa Ramsey'a .

5. Dodatek A .

Rozwiązanie układu równań różniczkowych, cząstkowych /10/
metodą transformacji Laplace'a .

Po zastosowaniu transformacji Laplace'a układ równań /10/
przyjmuje formę następującą :

$$\begin{aligned} /A1/ \quad & -a_1(\tau=0) + z A_1(z) - (\omega_0 - \omega) A_2(z) = 0 \\ & -a_2(\tau=0) + z A_2(z) + A_1(z) - 2b A_3(z) = 0 \\ & -a_3(\tau=0) + z A_3(z) + 2b A_2(z) = 0 \end{aligned}$$

gdzie :

$$\begin{aligned} /A2/ \quad & A(z) = \int a(\tau) e^{-z\tau} d\tau \\ & A_i(z) = \int a_i(\tau) e^{-z\tau} d\tau \end{aligned}$$

Z układu równań /A1/ otrzymuje się :

$$\begin{aligned} /A3/ \quad A_1(z) = & \left[\frac{-2(\omega_0 - \omega)^2 b}{z(z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2)} - \frac{1}{2} \right] \cdot a_1(\tau=0) + \\ & + \frac{4b(\omega_0 - \omega)}{z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2} \cdot a_2(\tau=0) + \\ & + \frac{\omega - \omega_0}{4bz} \left[1 - \frac{(z^2 + (\omega - \omega_0)^2) 2b}{z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2} \right] \cdot a_3(\tau=0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_2(z) &= \frac{-2(\omega_0 - \omega)b}{z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2} \cdot a_1(\tau=0) + \\
 &+ \frac{4bz}{z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2} \cdot a_2(\tau=0) + \\
 &+ \frac{1}{2b} \left[1 - \frac{[z^2 + (\omega_0 - \omega)^2] 2b}{z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2} \right] \cdot a_3(\tau=0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3(z) &= \frac{2(\omega_0 - \omega)b}{z[z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2]} \cdot a_1(\tau=0) + \\
 &- \frac{2b}{z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2} \cdot a_2(\tau=0) + \\
 &+ \frac{z^2 + (\omega_0 - \omega)^2}{z[z^2 + (\omega_0 - \omega)^2 + 4b^2]} \cdot a_3(\tau=0)
 \end{aligned}$$

Wartości zmiennych a_1 a_2 a_3 dla chwili $t = \tau$ otrzymuje się stosując do wyrażeń /13/ odwrotną transformację Laplace'a. Wprowadzając oznaczenia $\Omega_0 = \omega_0 - \omega$; $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + 4b^2}$ otrzymuje się

/A4/

$$\begin{aligned}
 a_1(\tau) &= \left[\frac{4b^2}{\Omega^2} + \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} \cos \Omega \tau \right] \cdot a_1(\tau=0) + \\
 &- \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin \Omega \tau \cdot a_2(\tau=0) + \\
 &- \frac{2b\Omega_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau) \cdot a_3(\tau=0)
 \end{aligned}$$

$$a_2(\tau) = \frac{d_0}{\Omega} \sin \Omega \tau \cdot a_1(\tau=0) + \\ + \cos \Omega \tau \cdot a_2(\tau=0) + \\ + \frac{2b}{\Omega} \sin \Omega \tau \cdot a_3(\tau=0)$$

$$a_3(\tau) = \frac{2bd_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau) \cdot a_1(\tau=0) + \\ + \frac{2b}{\Omega} \sin \Omega \tau \cdot a_2(\tau=0) + \\ + \left[\frac{d_0^2}{\Omega^2} + \frac{4b^2}{\Omega^2} \cos \Omega \tau \right] \cdot a_3(\tau=0)$$

Powyższy wynik w postaci macierzowej przyjmuje postać następującą :

/A5/

$$\begin{array}{l} a_1(\tau) \\ a_2(\tau) \\ a_3(\tau) \end{array} \left| \begin{array}{l} \frac{4b^2}{\Omega^2} + \frac{d_0^2}{\Omega^2} \cos \Omega \tau ; \frac{d_0}{\Omega} \sin \Omega \tau ; \frac{2bd_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau) \\ \frac{d_0}{\Omega} \sin \Omega \tau ; \cos \Omega \tau ; -\frac{2b}{\Omega} \sin \Omega \tau \\ \frac{2bd_0}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega \tau) ; \frac{2b}{\Omega} \sin \Omega \tau ; \frac{d_0^2}{\Omega^2} + \frac{4b^2}{\Omega^2} \cos \Omega \tau \end{array} \right| \begin{array}{l} a_1(0) \\ a_2(0) \\ a_3(0) \end{array}$$

Wykaz literatury

- 1 RAMSEY N.F. : Molecular beams Oxford University Press 1956
- 2 ENGLISH T.C., ZORN J.C. : Molecular beam spectroscopy - Methods of Experimental Physics Vol.3 ,1972
- 3 CHACHULSKI A., DROGON K. : A caesium atomic beam spectrometer - J.Tech.Phys., 26,2,1985
- 4 VANIER J. : Basic theory of lasers and masers. A density matrix approach : Gordon and Beach. Science Publishers 1971
- 5
- 5 SCHIFF L.I. : Mechanika kwantowa - P.W.N. Warszawa 1977
- 6 OSIOWSKI J. : Rachunek operatorowy - Warszawa 1965
- 7 TORREY H.C. : Notes -Phys.Rev.Vol.59,p.293,1941
- 8 SIENKIEWICZ K., MALIK T., CHACHULSKI A. : Obliczanie całki typu $\int_0^{\infty} y \exp(-y) / dy$, Prace IPPT 34,1971
- 9 KLEPPNER D., GOLDENBERG H.M., RAMSEY N.F. : Theory of the hydrogen maser - Phys.Rev., Vol.126,p.603,1962
- 10 BEEHLER R.E., RICHARDSON J.M. : Cesium beam atomic time and frequency standards , Metrologia, Vol.1, Nr.3, 1965
- 11 CEREZ P., HARTMAN F. : Theoretical analysis of the operation of an optically pumped rubidium atomic beam clock - IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol.QE-13, Nr.5, 1977
- 12 BONANOMI I. : A thalium atomic beam frequency standard IRE Trans. on Instrum., Vol.I-11, 1962
- 13 RAMSEY N.F. : Recent research in molecular beams - Academic Press , 1959
- 14 RAMSEY N.F. : Molecular beam resonance with separated oscillating fields - Phys.Rev., Vol.78, Nr.6, 1950
- 15 RAMSEY N.F. : Molecular beam resonances in oscillatory fields of nonuniform amplitudes and phases - Phys.Rev. Vol.109, Nr.3, 1958

Spis treści

1. Pobudzanie do przejść kwantowych w układach z wiązką atomową	3
1.1. Układy z wiązką atomową	3
1.2. Zależności podstawowe	5'
1.3. Szczególne przypadki własności macierzy P	8
2. Metoda trzykrotnego pobudzania	9
3. Wnioski końcowe	13
4. Podziękowanie	14
5. Dodatek A	15
6. Wykaz literatury	17