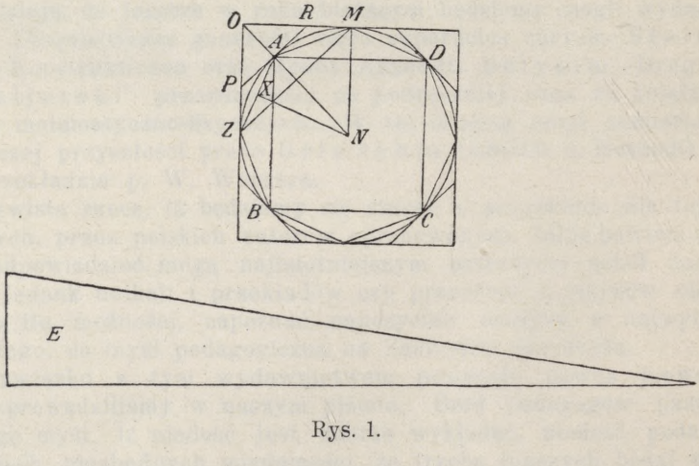
ARCHIMEDES.

O POMIARZE KOŁA*).

(ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ).

TWIERDZENIE I. *Każde koło jest równoważne trójkątowi prostokątnemu, którego jedna przyprostokątna równa się promieniowi, druga zaś obwodowi koła.*

Niech koło $ABCD$ czyni zadość powyższym warunkom; powiadam, że jest równoważne trójkątowi E.



Rys. 1.

Przypuśćmy np., że koło jest większe od trójkąta. Wpiszmy w koło kwadrat AC i dzielmy łuki na połowy tak długo, aż suma odcinków kołowych będzie mniejsza od różnicy między kołem a trójkątem[1]). Otrzymana w ten sposób figura prostolinjowa**) jest większa od naszego trójkąta. Ze środka

---

*) Przekład dokonany według wyd. Heiberga; w uwagach korzystaliśmy z przekładu niemieckiego Rudio'a.

**) mianowicie wielokąt wpisany.

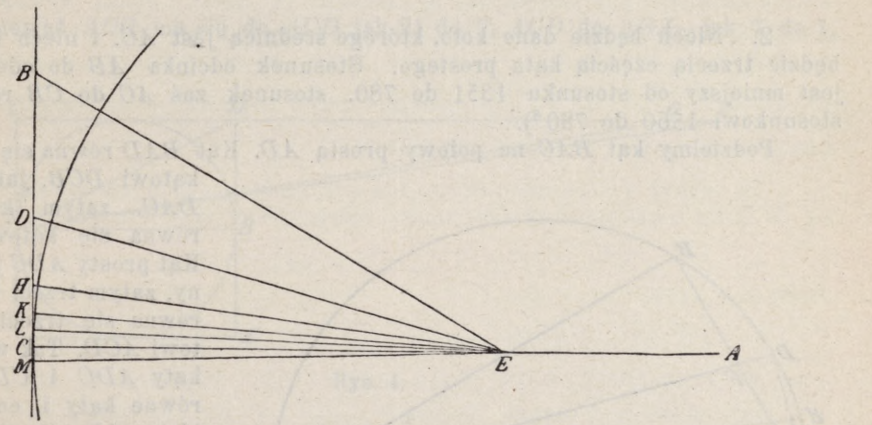
koła N poprowadźmy NX prostopadle do boku wielokąta. Odcinek NX jest mniejszy od jednej przyprostokątnej, obwód zaś wielokąta, jako mniejszy od obwodu koła, jest mniejszy od drugiej przyprostokątnej, zatym wielokąt jest mniejszy od trójkąta, co jest niedorzeczne.

Przypuśćmy teraz, że koło jest mniejsze od trójkąta E. Opiszmy na kole kwadrat, podzielmy łuki na połowy i w punktach podziału poprowadźmy styczne. Kąt OAR jest prosty, zatym OR jest większe od MR, ponieważ MR równa się RA. Wskutek tego trójkąt ROP jest większy od połowy figury $OZAM$. Przypuśćmy, że pozostały nam w końcu odcinki takie, jak PZA, których suma jest mniejsza od różnicy między trójkątem E a kołem. Wielokąt opisany byłby tedy mniejszy od trójkąta E, co jest niedorzeczne, ponieważ NA równa się jednej przyprostokątnej, obwód zaś wielokąta jest większy od drugiej przyprostokątnej, a więc wielokąt musi być większy od trójkąta E.

Stąd wynika, że koło jest równoważne trójkątowi E.

TWIERDZENIE II. *Obwód koła jest cokolwiek większy od potrojonej średnicy, a mianowicie większy jest o mniej niż* $^1/_7$, *lecz więcej niż* $^{10}/_{71}$ *średnicy.*

Niech będzie dane koło, którego promieniem jest CE, środkiem E, styczną CLB. Przypuśćmy, że kąt BEC stanowi trzecią część kąta prostego. W takim razie EB ma się do BC, jak 306 do 153, promień zaś EC ma się do CB (mniej więcej)*) jak 265 do 153 [2]).



Rys. 2.

Przypuśćmy dalej, że ED dzieli kąt BEC na połowy. W takim razie BE tak ma się do EC, jak BD do DC, skąd przez dodanie wyrazów i przestawienie otrzymamy, że stosunek BE i EC, razem wziętych, do BC jest taki sam, jak stosunek EC do DC, że zatym stosunek EC do DC jest większy niż stosunek 571 do 153 [3]). Stąd wynika, iż kwadraty odcinków ED i DC

---

*) Wyrazy: „mniej więcej" zostały wstawione przez tłumacza, zarówno w tym miejscu, jak i w innych. W rozprawce tej, niezmiernie zwięzłej, Archimedes nigdy nie mówi wyraźnie, kiedy operuje liczbami przybliżonemi.

mają się do siebie, mniej więcej, jak 349450 do 23409, zatym ich długości są, mniej więcej, w stosunku $591\frac{1}{8}$ do 153 [4]).

Podzielmy teraz kąt *DEC* prostą *EH* na połowy; postępując tak, jak poprzednio, otrzymamy, iż stosunek *EC* do *CH* jest większy niż stosunek $1162\frac{1}{8}$ do 153 [5]) i że stosunek *HE* do *HC* jest większy od stosunku $1172\frac{1}{8}$ do 153.

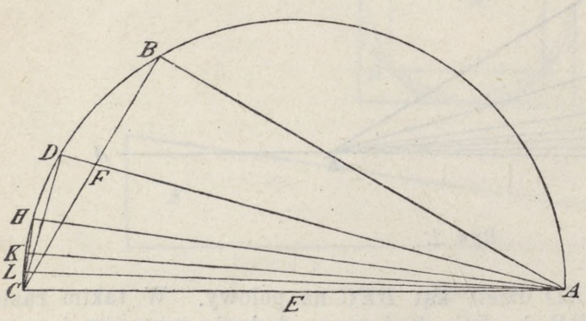
Podzielmy następnie kąt *HEC* prostą *EK* na połowy. Stosunek *EC* do *CK* jest większy od stosunku $2334\frac{1}{4}$ do 153, a więc stosunek *EK* do *CK* jest większy od stosunku $2339\frac{1}{4}$ do 153 [6]).

Podzielmy jeszcze kąt *KEC* prostą *LE* na połowy. Stosunek *EC* do *LC* jest większy od stosunku $4673\frac{1}{2}$ do 153 [7]).

Kąt *BEC*, stanowiący trzecią część kąta prostego, podzieliliśmy cztery razy na połowy, kąt więc *LEC* jest $\frac{1}{48}$ kąta prostego. Przy *E* zbudujmy równy mu kąt *CEM*; w takim razie kąt *LEM* stanowi $\frac{1}{24}$ kąta prostego, odcinek zaś *LM* jest bokiem wielokąta opisanego o 96-ciu bokach. Dowiedliśmy, iż stosunek *EC* do *CL* jest większy od stosunku $4673\frac{1}{2}$ do 153, że zaś średnica jest dwa razy większa od *EC*, *LM* dwa razy większe od *CL*, zatym stosunek średnicy do obwodu 96-cio-kąta jest większy niż stosunek $4673\frac{1}{2}$ do 14688. Ta druga liczba jest większa od potrojonej pierwszej o $667\frac{1}{2}$, t. j. o mniej niż jedną siódmą część liczby $4673\frac{1}{2}$. Stąd wynika, iż obwód tego wielokąta równa się potrojonej średnicy zwiększonej o odcinek mniejszy od $\frac{1}{7}$ średnicy. Tymbardziej więc obwód koła jest mniejszy od potrojonej średnicy, zwiększonej o $\frac{1}{7}$ część tej średnicy.

2. Niech będzie dane koło, którego średnicą jest *AC*, i niech kąt *BAC* będzie trzecią częścią kąta prostego. Stosunek odcinka *AB* do odcinka *BC* jest mniejszy od stosunku 1351 do 780, stosunek zaś *AC* do *CB* równa się stosunkowi 1560 do 780 [8]).

Podzielmy kąt *BAC* na połowy prostą *AD*. Kąt *BAD* równa się zarówno kątowi *DCB*, jak kątowi *DAC*, zatym kąt *DAC* równa się kątowi *DCB*. Kąt prosty *ADC* jest spólny, zatym trzeci kąt *DFC* równa się trzeciemu kątowi *ACD*. Tak więc trójkąty *ADC* i *CDF* mają równe kąty i, co za tym idzie, *AD* tak się ma do *DC*, jak *CD* do *DF* lub jak *AC* do *CF*. Ale jak *AC* ma się do *CF*, tak samo mają się *CA* i *AB* razem wzięte do *BC*. Stosunek więc *AD* do *DC* jest taki sam, jak stosunek sumy *CA* i *AB* do *BC*, skąd wynika, iż stosunek *AD* do *DC* jest mniejszy od stosunku 2911 do 780, stosunek zaś *AC* do *CD* mniejszy jest niż stosunek $3013\frac{3}{4}$ do 780 [9]).



Rys. 3.

Podzielmy kąt *CAD* na połowy prostą *AH*. Na tej samej zasadzie otrzymamy, iż stosunek *AH* do *HC* mniejszy jest od stosunku $5924\frac{3}{4}$ do 780, czyli mniejszy od stosunku 1823 do 240, gdyż obie te liczby stanowią $^4/_{13}$ pierwszych dwuch. Stąd wynika, iż *AC* ma się do *CH*, mniej więcej, jak $1838^9/_{11}$ do 240[10]).

Podzielmy dalej kąt *HAC* na połowy prostą *KA*. Stosunek *AK* do *KC* jest mniejszy niż stosunek $3661^9/_{11}$ do 240, czyli mniejszy niż stosunek 1007 do 66, gdyż dwie te liczby stanowią $^{11}/_{40}$ pierwszych dwuch liczb. Tak więc *AC* ma się do *CK*, mniej więcej, jak $1009^1/_9$ do 66[11]).

Podzielmy wreszcie kąt *KAC* prostą *LA* na połowy. Stosunek *AL* do *LC* jest mniejszy od stosunku $2016^1/_6$ do 66, stosunek zaś *AC* do *CL* mniejszy jest od stosunku $2017^1/_4$ do 66[12]).

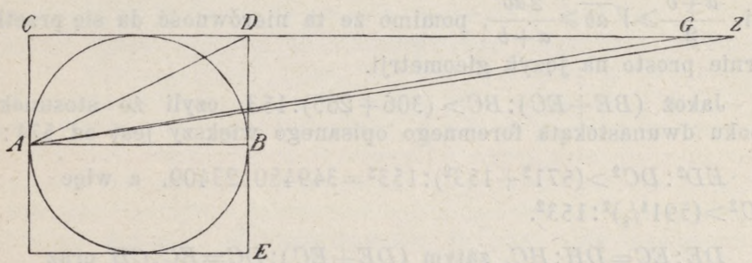
Odwrotnie: stosunek obwodu wielokąta do średnicy jest większy od stosunku 6336 do $2017^1/_4$, co stanowi więcej niż $3^{10}/_{71}$ liczby $2017^1/_4$. Obwód tedy wielokąta wpisanego o 96-ciu bokach przewyższa potrojoną średnicę więcej niż o $^{10}/_{71}$ części tejże średnicy, tymbardziej więc obwód koła przewyższać musi potrojoną średnicę więcej niż o $^{10}/_{71}$ jej części.

Obwód koła jest więc od średnicy większy trzy razy i jeszcze trochę, mianowicie mniej niż o $^1/_7$, lecz więcej niż $^{10}/_{71}$ średnicy.

TWIERDZENIE III*). *Koło ma się do kwadratu swej średnicy, mniej więcej, jak 11 do 14.*

Niech będzie dane koło o średnicy *AB*; opiszmy na nim kwadrat *CE* i uczyńmy *DG* dwa razy większym od *CD*, odcinek zaś *GZ* równym $^1/_7$ odcinka *CD*.

Ponieważ *ACG* ma się do *ACD* jak 21 do 7, *ACD* do *AGZ*—jak 7 do 1,



Rys. 4.

zatym *ACZ* ma się do *ACD* jak 22 do 7. Ale kwadrat *CE* jest cztery razy większy od *ACD*, trójkąt zaś *ACDZ* jest (w przybliżeniu) równoważny kołu, zatym koło ma się do kwadratu *CE*, mniej więcej, jak 11 do 14.

Przełożył *W. W.*

1) Możliwość takiego podziału ustalił Euklides w ks. XII, tw. 2, rozumując w następ. sposób. Pole kwadratu wpisanego jest dwa razy mniej-

*) Rękopisy dzieł Archimedesa podają mylnie to twierdzenie przed twierdzeniem II, na którym się ono opiera.

sze od pola kwadratu opisanego, zatym jest większe od półkola. Niech będzie AB bok kwadratu wpisanego; podzielmy łuk AB na połowy w punkcie M. poprowadźmy w tym punkcie styczną oraz proste AK, BL prostopadłe do stycznej. Trójkąt AMB jest dwa razy mniejszy od prostokąta $AKLB$, zatym jest większy od połowy odcinka kołowego AMB. Dzieląc łuki AM i BM na połowy i postępując dalej w ten sam sposób, możemy otrzymać odcinki kołowe, których suma jest mniejsza od różnicy między kołem a polem dowolnie danego prostokąta (co jest równoznaczne z twierdzeniem, iż pole koła można wyczerpać przez podwajanie liczby boków wielokąta wpisanego, jeżeli przytym długość każdego boku dąży do zera). W dowodzeniu tym Euklides powołuje się na tw. I, ks. X, które powiada, iż mając dwie wielkości a i b (przyczym $a>b$) i odejmując od a jakąś wielkość c większą niż $\frac{a}{2}$, od reszty, jaka pozostanie, wielkość d większą od połowy tej reszty i t. d., musimy dojść do wielkości mniejszej od b.

2) $EB:BC=2:1=306:153$ i $EC:CB=\sqrt{3}:1$. Archimedes i wogóle starożytni, musieli być w posiadaniu jednego lub więcej sposobów wyciągania pierwiastków kwadratowych, dotąd jednak, mimo poszukiwań pierwszorzędnych badaczów, nie udało się tego sposobu odtworzyć. Poszukiwania te zestawił bardzo szczegółowo S. Günther w rozprawie p. t. Die quadratischen Irrazionalitäten der Alten u. deren Entwickelungsmethoden (Abhandl. zur Geschichte d. Mathem. IV Heft). Jedno tylko zdaje się nie ulegać wątpliwości, iż sposób Greków nie był podobny do żadnego z używanych dziś sposobów. Nie był im znany nawet algorytm, oparty na nierówności $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2ab}{a+b}$, pomimo że ta nierówność da się przetłumaczyć niezmiernie prosto na język gieometrji.

3) Jakoż $(BE+EC):BC>(306+265):153$, czyli że stosunek średnicy do boku dwunastokąta foremnego opisanego większy jest od $571:153$.

4) $ED^2:DC^2>(571^2+153^2):153^2=349450:23409$, a więc $ED^2:DC^2>(591^1/_8)^2:153^2$.

5) $DE:EC=DH:HC$, zatym $(DE+EC):DC=EC:CH$ oraz

$EC:CH>(591^1/_8+571):153=1162^1/_8:153$. Stąd wynika, iż

$HE^2:HC^2>1373943^{33}/_{64}:23409$, zatym $HE:HC>1172^1/_8:153$.

6) i 7) Stosując tę samą metodę, co poprzednio, sprawdzimy z łatwością wyniki Archimedesa.

8) $AC:BC=2:1=1560:780$ i $AB:BC=\sqrt{3}:1$, a prócz tego $1351^2=$ $=1825201$, zaś $3.780^2=1825200$.

9) $AC:BC=1560:780$ i $AB:BC<1351:780$, zatym

$(CA+AB):BC<2911:780$, a więc również $AD:DC<2911:780$.

Stąd wypływa, iż $AC^2:CD^2<9082321:608400$, zatym

$AC:CD<3013^3/_4:780$.

10) $(CA+AD):DC=AH:HC$, zatym
$AH:HC<(3013^3/_4+2911):780=1823:240$. Ponieważ
$AH^2:HC^2<3323329:57600$, więc $AC^2:CH^2<3380929:57600$
i tymbardziej $AC:CH<1838^9/_{11}:240$.

11) W podobny sposób, jak poprzednio, znajdujemy, że
$AK:KC<(1838^9/_{11}+1823):240=1007:66$, a zatym
$AK^2:CK^2<1014049:4356$ i $AC:CK<1009^1/_6:66$.

12) Nierówność otrzymujemy przez zastosowanie tej samej metody, co powyżej.
