CI.

FERMAT A CARCAVI.

AOUT 1659.

(Corresp. Huyg., nº 651.)

RELATION DES NOUVELLES DÉCOUVERTES EN LA SCIENCE DES NOMBRES (1).

... 1. Et pour ce que les méthodes ordinaires, qui sont dans les Livres, étoient insuffisantes à démontrer des propositions si difficiles, je trouvai enfin une route tout à fait singulière pour y parvenir.

J'appelai cette manière de démontrer la *descente infinie* ou *indéfinie*, etc.; je ne m'en servis au commencement que pour démontrer les propositions négatives, comme, par exemple :

Qu'il n'y a aucun nombre, moindre de l'unité qu'un multiple de 3, *qui soit composé d'un quarré et du triple d'un autre quarré;*

Qu'il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un nombre quarré (2).

La preuve se fait par ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον en cette manière :

S'il y avoit aucun triangle rectangle en nombres entiers qui eût son aire égale à un quarré, il y auroit un autre triangle moindre que celui-là qui auroit la même propriété. S'il y en avoit un second, moindre que le premier, qui eût la même propriété, il y en auroit, par un pareil raisonnement, un troisième, moindre que ce second, qui auroit la même propriété, et enfin un quatrième, un cinquième, etc. à l'infini en descendant. Or est-il qu'étant donné un nombre, il n'y en a point infinis en descendant moindres que celui-là (j'entends

(1) Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 213-216), d'après une copie de la main de Huygens. Cette pièce avait été envoyée « depuis peu » par Fermat à Carcavi, lorsque celui-ci la communiqua à Huygens, le 14 août 1659.

(2) *Voir* Observ. XLV sur Diophante.

www.rcin.org.pl

parler toujours des nombres entiers). D'où on conclut qu'il est donc impossible qu'il y ait aucun triangle rectangle dont l'aire soit quarrée.

On infère de là qu'il n'y en a non plus en fractions dont l'aire soit quarrée; car, s'il y en avoit en fractions, il y en auroit en nombres entiers, ce qui ne peut pas être, comme il se peut prouver par la *descente*.

Je n'ajoute pas la raison d'où j'infère que, s'il y avoit un triangle rectangle de cette nature, il y en auroit un autre de même nature moindre que le premier, parce que le discours en seroit trop long et que c'est là tout le mystère de ma méthode. Je serai bien aise que les Pascal et les Roberval et tant d'autres savans la cherchent sur mon indication.

2. Je fus longtemps sans pouvoir appliquer ma méthode aux questions affirmatives, parce que le tour et le biais pour y venir est beaucoup plus malaisé que celui dont je me sers aux négatives. De sorte que, lorsqu'il me fallut démontrer que *tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés* (1), je me trouvai en belle peine. Mais enfin une méditation diverses fois réitérée me donna les lumières qui me manquoient, et les questions affirmatives passèrent par ma méthode, à l'aide de quelques nouveaux principes qu'il y fallut joindre par nécessité. Ce progrès de mon raisonnement en ces questions affirmatives est tel : si un nombre premier pris à discrétion, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, n'est point composé de deux quarrés, il y aura un nombre premier de même nature, moindre que le donné, et ensuite un troisième encore moindre, etc. en descendant à l'infini jusques à ce que vous arriviez au nombre 5, qui est le moindre de tous ceux de cette nature, lequel il s'ensuivroit n'être pas composé de deux quarrés, ce qu'il est pourtant. D'où on doit inférer, par la déduction à l'impossible, que tous ceux de cette nature sont par conséquent composés de deux quarrés.

3. Il y a infinies questions de cette espèce, mais il y en a quelques

(1) *Voir* Observ. VII sur Diophante.

www.rcin.org.pl

autres qui demandent des nouveaux principes pour y appliquer la *descente,* et la recherche en est quelquefois si malaisée qu'on n'y peut venir qu'avec une peine extrême. Telle est la question suivante que Bachet sur Diophante avoue n'avoir jamais pu démontrer, sur le sujet de laquelle M. Descartes fait dans une de ses lettres la même déclaration, jusques là qu'il confesse qu'il la juge si difficile qu'il ne voit point de voie pour la résoudre (1).

Tout nombre est quarré ou composé de deux, de trois ou de quatre quarrés.

Je l'ai enfin rangée sous ma méthode et je démontre que, si un nombre donné n'étoit point de cette nature, il y en auroit un moindre qui ne le seroit pas non plus, puis un troisième moindre que le second, etc. à l'infini; d'où l'on infère que tous les nombres sont de cette nature.

4. Celle que j'avois proposée à M. Frenicle et autres (2) est d'aussi grande ou même plus grande difficulté : *Tout nombre non quarré est de telle nature qu'il y a infinis quarrés qui, multipliant ledit nombre, font un quarré moins* 1. Je la démontre par la *descente* appliquée d'une manière toute particulière.

J'avoue que M. Frenicle a donné diverses solutions particulières et M. Wallis aussi, mais la démonstration générale se trouvera par la *descente* dûment et proprement appliquée : ce que je leur indique, afin qu'ils ajoutent la démonstration et construction générale du théorème et du problème aux solutions singulières qu'ils ont données.

5. J'ai ensuite considéré certaines questions qui, bien que négatives, ne restent pas de recevoir très grande difficulté, la méthode pour y pratiquer la *descente* étant tout à fait diverse des précédentes, comme il sera aisé d'éprouver. Telles sont les suivantes :

Il n'y a aucun cube divisible en deux cubes (3).

(1) *Voir* la note de la page 403.
(2) *Voir* Pièces LXXX et LXXXI.
(3) *Voir* Observ. II sur Diophante.

www.rcin.org.pl

Il n'y a qu'un seul quarré en entiers qui, augmenté du binaire, fasse un cube. Le dit quarré est 25.

Il n'y a que deux quarrés en entiers, lesquels, augmentés de 4, fassent un cube. Les dits quarrés sont 4 et 121 (1).

Toutes les puissances quarrées de 2, augmentées de l'unité, sont nombres premiers (2).

Cette dernière question est d'une très subtile et très ingénieuse recherche et, bien qu'elle soit conçue affirmativement, elle est négative, puisque dire qu'un nombre est premier, c'est dire qu'il ne peut être divisé par aucun nombre.

Je mets en cet endroit la question suivante dont j'ai envoyé la démonstration à M. Frenicle, après qu'il m'a avoué et qu'il a même témoigné dans son Écrit imprimé (3) qu'il n'a pu la trouver :

Il n'y a que les deux nombres 1 *et* 7 *qui, étant moindres de l'unité qu'un double quarré, fassent un carré de même nature*, c'est-à-dire qui soit moindre de l'unité qu'un double quarré.

6. Après avoir couru toutes ces questions, la plupart de diverse nature et de différente façon de démontrer, j'ai passé à l'invention des règles générales pour résoudre les équations simples et doubles du Diophante.

On propose, par exemple,

$$2Q + 7967 \text{ égaux à un quarré.}$$

J'ai une règle générale pour résoudre cette équation, si elle est possible, ou découvrir son impossibilité, et ainsi en tous les cas et en tous nombres tant des quarrés que des unités.

(1) *Voir* Lettre LXXXIV, **5**. *Cf.* Observ. XLII sur Diophante.

(2) *Voir* Lettre XCVI, **3**, 1°.

(3) Cet Écrit, aujourd'hui introuvable, était intitulé *Solutio duorum problematum etc.*, dédié à Kenelm Digby, et commençait comme suit : *En tibi, Vir Illustrissime, Lutetia præbet*.... Deux exemplaires en arrivèrent en Hollande, pour Schooten et Huygens, le 26 octobre 1657. En Angleterre, Brouncker en reçut un seulement en décembre.

www.rcin.org.pl

On propose cette équation double :

$$2N + 3 \quad \text{et} \quad 2N + 5 \text{ égaux chacun à un quarré.}$$

Bachet se glorifie, en ses Commentaires sur Diophante [1], d'avoir trouvé une règle en deux cas particuliers; je la donne générale en toute sorte de cas et détermine par règle si elle est possible ou non.

J'ai ensuite rétabli la plupart des propositions défectueuses de Diophante et j'ai fait celles que Bachet avoue ne savoir pas et la plupart de celles auxquelles il paroît que Diophante même a hésité, dont je donnerai des preuves et des exemples à mon premier loisir.

7. J'avoue que mon invention pour découvrir si un nombre donné est premier ou non n'est pas parfaite, mais j'ai beaucoup de voies et de méthodes pour réduire le nombre des divisions et pour les diminuer beaucoup en abrégeant le travail ordinaire. Si M. Frenicle baille ce qu'il a médité là dessus, j'estime que ce sera un secours très considérable pour les savans.

8. La question qui m'a occupé sans que j'aie encore pu trouver aucune solution est la suivante, qui est la dernière du Livre de Diophante *De multangulis numeris*.

Dato numero, invenire quot modis multangulus esse possit.

Le texte de Diophante étant corrompu, nous ne pouvons pas deviner sa méthode; celle de Bachet ne m'agrée pas et elle est trop difficile aux grands nombres. J'en ai bien trouvé une meilleure, mais elle ne me satisfait pas encore.

9. Il faut chercher en suite de cette proposition la solution du problème suivant :

Trouver un nombre qui soit polygone autant de fois et non plus qu'on voudra, et trouver le plus petit de ceux qui satisfont à la question.

(1) *Voir* Observ. XLIV sur Diophante et l'*Appendix* à cette Observation.

www.rcin.org.pl

10. Voilà sommairement le compte de mes rêveries sur le sujet des nombres. Je ne l'ai écrit que parce que j'appréhende que le loisir d'étendre et de mettre au long toutes ces démonstrations et ces méthodes me manquera; en tout cas, cette indication servira aux savans pour trouver d'eux-mêmes ce que je n'étends point, principalement si MM. de Carcavi et Frenicle leur font part de quelques démonstrations *par la descente* que je leur ai envoyées sur le sujet de quelques propositions négatives. Et peut-être la postérité me saura gré de lui avoir fait connoître que les Anciens n'ont pas tout su, et cette relation pourra passer dans l'esprit de ceux qui viendront après moi pour *traditio lampadis ad filios*, comme parle le grand Chancelier d'Angleterre [1], suivant le sentiment et la devise duquel j'ajouterai [2] :

Multi pertransibunt et augebitur scientia.

CII.

FERMAT A BILLY [3].

26 AOUT 1659.

(Bibliothèque nationale, latin 8600, fol. 13, autographe.)

Mon Reverend Pere,

Je suis bien aise que mes solutions vous ayent pleu et je vous remercie des eloges que vous me donnés, bien que je recognoisse de bonne foi que vous en usés avec un peu trop de profusion. Peust-estre serés vous plus surpris de ce que vous allés lire sur le subject de vostre nouvelle question que vous enoncés en ces termes :

Treuver trois nombres dont le solide estant osté de chacun d'eux et de

(1) Bacon, *De dignitate et augmentis scientiarum*, L. VI, cap. 2.
(2) *Voir* page 35, note 2.
(3) Publiée pour la première fois par Libri (*Journal des Savants*, 1839, p. 548).

www.rcin.org.pl