encore la trouver pleinement; je ne vous la proposerois pas pour la chercher, si j'en étois venu à bout (1).

Cette proposition sert à l'invention des nombres qui sont à leurs parties aliquotes en raison donnée, sur quoi j'ai fait des découvertes considérables. Nous en parlerons une autre fois.

Je suis, Monsieur, votre, etc.,

Fermat.

A Toulouse, le 29 août 1654.

LXXIV.

FERMAT A PASCAL (2).

VENDREDI 25 SEPTEMBRE 1654.

(*OEuvres de Pascal*, IV, p. 437-441.)

Monsieur,

1. N'appréhendez pas que notre convenance se démente, vous l'avez confirmée vous même en pensant la détruire, et il me semble qu'en répondant à M. de Roberval pour vous, vous avez aussi répondu pour moi.

Je prends l'exemple des trois joueurs, au premier desquels il manque une partie, et à chacun des deux autres deux, qui est le cas que vous m'opposez.

Je n'y trouve que 17 combinaisons pour le premier et 5 pour chacun des deux autres : car, quand vous dites que la combinaison *acc* est bonne pour le premier et pour le troisième, il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien. Or, cette combinaison ayant fait gagner le premier dès la première partie, qu'importe que le troisième en

(1) *Voir* Tome I, p. 131, et Tome II, p. 206.
(2) Réponse à la lettre LXXII.

gagne deux ensuite, puisque, quand il en gagneroit trente, tout cela seroit superflu?

Ce qui vient de ce que, comme vous avez très bien remarqué, cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à faciliter la règle et (suivant mon sentiment) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination.

Et afin que vous n'en doutiez plus, si au lieu de *trois* parties, vous étendez, au cas proposé, la feinte jusqu'à *quatre*, il y aura non seulement 27 combinaisons, mais 81, et il faudra voir combien de combinaisons feront gagner au premier une partie plus tôt que deux à chacun des autres, et combien feront gagner à chacun des deux autres deux parties plus tôt qu'une au premier. Vous trouverez que les combinaisons pour le gain du premier seront 51 et celles de chacun des autres deux 15, ce qui revient à la même raison.

Que si vous prenez cinq parties ou tel autre nombre qu'il vous plaira, vous trouverez toujours trois nombres en proportion de 17, 5, 5.

Et ainsi j'ai droit de dire que la combinaison *acc* n'est que pour le premier et non pour le troisième, et que *cca* n'est que pour le troisième et non pour le premier, et que partant ma règle des combinaisons est la même en trois joueurs qu'en deux, et généralement en tous nombres.

2. Vous aviez déjà pu voir par ma précédente (1) que je n'hésitois point à la solution véritable de la question des trois joueurs dont je vous avois envoyé les trois nombres décisifs, 17, 5, 5. Mais parce que M. < de > Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé :

Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.

(1) Lettre LXXIII, 2.

S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit trois hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards, lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde et lui la troisième; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards : donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ des hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{27}$, ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$.

Et la règle est bonne et générale en tous les cas, de sorte que, sans recourir à la feinte, les combinaisons véritables en chaque nombre des parties portent leur solution et font voir ce que j'ai dit au commencement, que l'extension à un certain nombre de parties n'est autre chose que la réduction de diverses fractions à une même dénomination. Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne intelligence, puisque nous ne cherchons l'un et autre que la raison et la vérité.

3. J'espère vous envoyer à la Saint-Martin un Abrégé de tout ce que j'ai inventé de considérable aux nombres. Vous me permettrez d'être concis et de me faire entendre seulement à un homme qui comprend tout à demi-mot.

Ce que vous y trouverez de plus important regarde la proposition que tout nombre est composé d'un, de deux ou de trois triangles; d'un, de deux, de trois ou de quatre quarrés; d'un, de deux, de trois, de quatre ou de cinq pentagones; d'un, de deux, de trois, de quatre, de cinq ou de six hexagones, et à l'infini (¹).

Pour y parvenir, il faut démontrer que tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés, comme 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Étant donné un nombre premier de cette nature, comme 53, trouver, par règle générale, les deux quarrés qui le composent.

Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 3, est composé d'un quarré et du triple d'un autre quarré, comme 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Tout nombre premier, qui surpasse de 1 ou de 3 un multiple de 8, est composé d'un quarré et du double d'un autre quarré, comme 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Il n'y a aucun triangle en nombres duquel l'aire soit égale à un nombre quarré (²).

Cela sera suivi de l'invention de beaucoup de propositions que Bachet avoue avoir ignorées, et qui manquent dans le Diophante.

Je suis persuadé que dès que vous aurez connu ma façon de démontrer en cette nature de propositions, elle vous paroîtra belle et vous donnera lieu de faire beaucoup de nouvelles découvertes; car il faut, comme vous savez, que *multi pertranseant ut augeatur scientia* (³).

S'il me reste du temps, nous parlerons ensuite des nombres magiques, et je rappellerai mes vieilles espèces sur ce sujet.

Je suis de tout mon cœur, Monsieur, votre, etc.,

FERMAT.

Ce 25 septembre.

Je souhaite la santé de M. de Carcavi comme la mienne et suis tout à lui.

(¹) *Voir* Lettre XII, **3**.
(²) *Voir* Lettre XII, **2**.
(³) *Voir* plus haut p. 35, note 2.

Je vous écris de la campagne, et c'est ce qui retardera par aventure mes réponses pendant ces vacations.

LXXV.

PASCAL A FERMAT [1].

MARDI 27 OCTOBRE 1654.

(*Œuvres de Pascal,* IV, p. 443.)

Monsieur,

Votre dernière lettre m'a parfaitement satisfait. J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien ; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie.

Mais, Monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations. Pour moi, je vous confesse que cela me passe de bien loin ; je ne suis capable que de les admirer, et vous supplie très humblement d'occuper votre premier loisir à les achever. Tous nos Messieurs les virent samedi dernier et les estimèrent de tout leur cœur : on ne peut pas aisément supporter l'attente de choses si belles et si souhaitables. Pensez-y donc, s'il vous plaît, et assurez-vous que je suis, etc.

Pascal.

Paris, 27 octobre 1654.

(1) Réponse à la Lettre précédente.