VII.

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

« Comptes rendus Ac. Sc. de Paris », vol. CXXXIX, 1904_2, pp. 956–959.

Les théories des équations différentielles aux dérivées partielles des types elliptique et hyperbolique sont très avancées et ont atteint désormais une forme classique. Je citerai les travaux de M. PICARD sur les équations du type elliptique et, entre les plus récents travaux sur les équations du type hyperbolique, ceux de MM. HADAMARD, COULON et D'ADHÉMAR. Pour le type hyperbolique, on sait que c'est la méthode de RIEMANN et la notion des caractéristiques, développée par DU BOIS-REYMOND et M. DARBOUX, qui a permis de relier par quelques formules générales tous les résultats.

L'étude des équations du type parabolique n'est pas si avancée que celle des équations des autres types. Cependant l'équations différentielle de la propagation de la chaleur est du type parabolique et elle a été le sujet d'un grand nombre de recherches depuis les anciens travaux de FOURIER, de POISSON, de LAPLACE, jusqu'aux travaux récents de M. BOUSSINESQ et de M. APPELL.

Mais, en se bornant même à l'équation de la propagation de la chaleur à deux variables indépendantes, il n'y a pas jusqu'à présent de formules générales capables de faire ressortir toutes les particularités de l'intégration. On sait, par exemple, que l'une des variables indépendantes joue un rôle tout à fait différent de l'autre et POISSON a beaucoup insisté sur ce point en montrant que la même intégrale peut s'exprimer moyennant deux fonctions arbitraires ou une seule fonction arbitraire.

Or la méthode des caractéristiques qui a eu tant de succès dans le cas des équations du type hyperbolique semble, au premier abord, impuissante à éclaircir ces questions fondamentales par rapport aux équations du type parabolique.

Voici, maintenant, la cause de cette difficulté. On a toujours conçu la méthode de RIEMANN comme bornée au domaine des variables réelles. Au contraire, pour approfondir avec succès les questions dont nous venons de parler, il faut commencer par étendre la méthode aux variables complexes et ensuite l'appliquer ainsi généralisée.

Je vais montrer l'avantage que l'on peut tirer de cette idée en étudiant l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, z). \tag{1}$$

Nous supposerons que l'on puisse regarder u et f comme des fonctions de la variable réelle z et de $x = \xi + i\eta$ et que ces fonctions n'aient pas de singularités dans le domaine où on les envisage. En écrivant $u(z, \xi, \eta)$, $f(z, \xi, \eta)$ ce domaine sera à trois dimensions et il sera défini par les trois coordonnées réelles z, ξ, η.

En priant le lecteur de faire la figure, menons une droite mm' parallèle à l'axe z dans le plan ξz et une surface régulière σ limitée par cette droite et par deux lignes MNP et M'N'P', les points M, P, M', P' étant sur mm'. Nous regarderons la ligne $s \equiv$ MNP P' N' M' comme le contour de la surface σ.

ψ étant une solution de l'équation (1) et ψ_1 une solution de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial v}{\partial x} = f_1(x, z),$$

posons

$$u = \psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \quad , \quad v = i\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right) \quad , \quad w = \psi\psi_1 .$$

En choisissant convenablement la direction de la normale n à la surface σ, on aura par le théorème de STOKES

$$\int_\sigma \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos n\xi + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos n\eta + \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cos nz\right] d\sigma$$

$$= \int_s (u\,d\xi + v\,d\eta + w\,dz),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{i}\int_\sigma [\psi_1 f(x, z) - \psi f_1(x, z)]\,\frac{\partial x}{\partial n}\,d\sigma$$

$$= \int_L \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)dx + \psi\psi_1\,dz\right] + \int_{L'} \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)dx + \psi\psi_1\,dz\right]$$

$$+ \int_P^{P'} \psi\psi_1\,dz + \int_{M'}^{M} \psi\psi_1\,dz,$$

où L désigne la courbe MNP et L' la courbe P' N' M'.

Les équations de la droite mm' étant $\xi = x_0$, $\eta = 0$, soit A un point ayant pour coordonnées $\xi = x_1 > x_0$, $\eta = 0$, $z = z_1$. Si la droite aa' parallèle à z menée par A ne rencontre pas la surface σ, nous pourrons prendre

$$(2) \qquad \psi_1 = e^{-\frac{(z - z_1)^2}{4(x_1 - x)}}(x_1 - x)^{-1/2} \quad , \quad f_1 = 0.$$

Cette fonction est polydrome, c'est pourquoi deux cas pourront se présenter:

1° La droite aa' est entourée par la surface σ;

2° Elle n'est pas entourée par cette surface.

Dans le *premier* cas, si l'on prend les valeurs de ψ_1 positives sur la partie MM' du contour, elles seront négatives le long de PP'. Dans le *second* cas, si l'on prend les valeurs de ψ_1 positives sur MM', elles seront aussi positives sur PP'.

Cela posé, déplaçons le point A sur AA_0 parallèle à l'axe ξ en l'approchant indéfiniment du point A_0 de la ligne mm'. Supposons qu'en se déplaçant la droite aa' ne rencontre pas la surface σ. On voit aisément que les intégrales

$$\int_P^{P'} \psi\psi_1\, dz \quad , \quad \int_{M'}^{M} \psi\psi_1\, dz$$

tendront vers zéro, vers $\pm 2\sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1)$, ou vers $\pm\sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1)$; c'est pourquoi, en désignant par ε un facteur numérique qu'on peut déterminer facilement, on aura

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon\sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1) \\ &= \lim\left\{\int_L \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)dx + \psi\psi_1\, dz\right]\right. \\ &\quad \left. + \int_{L'} \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)dx + \psi\psi_1\, dz\right] + i\int_\sigma \psi_1 f \frac{\partial x}{\partial n}\, d\sigma\right\}. \end{aligned}\right.$$

Cette formule est très générale et en la spécialisant elle donne lieu à bien des applications. Si L' est une ligne appartenant au plan parallèle à $\xi\eta$ mené par A, on a

$$\lim \int_{L'} \left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)dx = 0,$$

c'est pourquoi la seconde intégrale du second membre disparaît. Si $f = 0$ la troisième intégrale aussi s'annule et la formule devient

$$(4)\qquad \varepsilon\sqrt{\pi}\,\psi(x_0, z_1) = \lim\left\{\int_L \left[\left(\psi_1 \frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)dx + \psi\psi_1\, dz\right]\right\}.$$

Si l'on est dans le second cas, ou peut réduire la ligne L' à un point, et même alors la seconde intégrale du second membre de l'équation (3) disparaît.

On a supposé que la droite mm' est située dans le plan ξz, mais on peut, par une translation, transporter les axes coordonnés, où l'on veut, de manière que cette condition n'est pas nécessaire. Donc x_0 peut être aussi un nombre complexe.

La valeur de ε dans la formule (4) dépend de la position du point A_0 par rapport au segment MP. Si A_0 est extérieur au segment MP, $\varepsilon = \pm 2$ dans le *premier* cas, et $\varepsilon = 0$ dans le *second* cas. Si A_0 est intérieur au segment MP, $\varepsilon = 0$ dans le premier cas, $\varepsilon = \pm 2$ dans le second cas.

La formule (4) renferme les intégrales connues de l'équation étudiée. Elle réunit sous une expression unique des résultats qui paraissaient n'avoir pas de rapport directs entre eux et explique bien des faits. Tout résulte de la polydromie de l'intégrale (2). Or cette polydromie ne pouvait jouer son rôle, si l'on n'étendait pas d'abord la méthode aux variables complexes.