II.

SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

« Compte rendu du deuxième Congrès intern. des mathématiciens, Paris 1900 »
Parigi, 1902, pp. 377-378.

Tout le monde connaît le théorème de POISSON sur la fonction potentielle. Si ρ désigne la densité d'un corps fini S, et r la distance d'un point a, b, c de S au point x, y, z, et si l'on pose

$$V = \int_{\text{S}} \frac{\rho \, dS}{r},$$

on a

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho,$$

si le point x, y, z fait partie de l'espace S.

(La densité ρ doit satisfaire à certaines conditions peu restrictives et très connues).

Ce théorème a été étendu sans difficultés à d'autres équations et à des systèmes d'équations differentielles du type elliptique.

Mais comment peut s'étendre ce théorème aux équations différentielles du type hyperbolique?

Soit x, y, z un point intérieur à l'espace S. Conduisons, en prenant le point x, y, z pour sommet, un cône de révolution ayant l'axe parallèle à x et dont l'ouverture soit de 45°. Soit S′ la partie de S comprise à l'intérieur de l'une des nappes du cône. Si nous remplaçons V par

$$V' = \int_{\text{S}'} \frac{\rho \, dS'}{r'},$$

où

$$r' = \sqrt{(x-a)^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2},$$

on aura

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 V'}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V'}{\partial z^2} = 2\pi\rho.$$

De même, si nous appelons S″ la partie de l'espace S extérieure aux deux nappes du cône et si nous posons

$$V'' = \int_{\text{S}''} \frac{\rho \, dS''}{r''} \log \frac{r''^2}{\sqrt{(y-b)^2 + (z-c)^2}},$$

où

$$r'' = \sqrt{(y-b)^2 + (z-c)^2 - (x-a)^2},$$

on aura

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial^2 V''}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V''}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V''}{\partial z^2} = -2\pi^2 \rho .$$

Les théorèmes renfermés dans les formules (B) et (C) se déduisent aisément des formules (E) et (F') que j'ai données dans mon Mémoire *Sur les vibrations des corps élastiques isotropes* (« Acta math. », t. XVIII) (*). Elles peuvent aussi s'obtenir directement et ells peuvent s'étendre à d'autres équations et à des systèmes du même type.

Les formules (E) et (F') conduisent aussi à des résultats qui généralisent les théorèmes bien connus sur les discontinuités des dérivées des fonctions potentielles des surfaces et sur les discontinuités des fonctions potentielles des doubles couches.

Ces résultats comprennent des propriétés intéressantes que M. LEVI-CIVITA a obtenues directement par une voie différente [*Sopra una classe d'integrali dell'equazione* $A^2 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ « Nuovo Cimento », 4e série, t. IV; 1897) (**)].

(*) In queste « Opere »: vol. secondo, III, pp. 19–73.

(**) « Opere matematiche »; Bologna, Zanichelli; vol. primo (1954), XVII, pp. 305–309.