XXXIV.

FORMA MISTA DI EQUAZIONI DEL MOTO CHE CONVIENE AD UNA PARTICOLARE CATEGORIA DI SISTEMI MECCANICI (1).

« Rend. Acc. Lincei », ser. 5ª, vol. $XXIV_2$ (1915_2),

pp. 235-248.

Nel dar forma esplicita alla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi, secondo il criterio esposto in una Nota precedente (2), ho riconosciuto l'opportunità di ricorrere ad un tipo misto di equazioni del moto, che può essere vantaggiosamente usato anche in altri casi. Questa circostanza e, sopra tutto, il desiderio di rendere più agile la Nota che dedicherò prossimamente alla esplicita regolarizzazione suddetta, mi consigliano di stabilire a parte alcune formule preparatorie e la conseguente deduzione delle equazioni miste. Tutto si riduce, come agevolmente si capisce, a combinazione appropriata dei procedimenti abituali; non priva tuttavia di qualche eleganza, e resa qua e là più spedita da concetti e notazioni di calcolo vettoriale.

1. - Richiamo d'una considerazione cinematica dovuta a Kirchhoff (3).

Sia C un corpo rigido girevole attorno ad un punto O. Si designino con $O\xi\eta\zeta$ gli assi cui viene riferita l'orientazione di C; con Ox_ν ($\nu=1, 2, 3$) tre assi mobili solidali col corpo (costituenti al solito un triedro trirettangolo congruente ad $O\xi\eta\zeta$); con $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare (di C rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$).

Sia $\boldsymbol{f}$ un generico vettore *fisso* (rispetto al riferimento $O\xi\eta\zeta$). Al variare del tempo t, varia (in causa del moto di C) l'orientazione del vettore $\boldsymbol{f}$, rispetto agli assi $Ox_1x_2x_3$. Designeremo indifferentemente con $d\boldsymbol{f}/dt$, ov-

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1915.

(2) *Sulla regolarizzazione del problema piano dei tre corpi*, in questo stesso volume dei Rendiconti, pp. 61-75 [in questo vol.: XXXIII, pp. 477-493].

(3) Cfr. *Vorlesungen über mathematische Physik*, B. I, « Mechanik », lezione V, § 3.

vero con $\dot{f}$, la derivata di f, presa in tale accezione. Essa dovrebbe chiamarsi *relativa* attribuendo invece la qualifica *assolute* alle derivate prese con referenza agli assi fissi $O\xi\eta\zeta$. *Nei paragrafi seguenti considereremo esclusivamente derivate della prima specie.*

Designando qui, per un momento, con $d^{(a)}/dt$ le derivate assolute, si ha manifestamente

$$\frac{d^{(a)}\boldsymbol{f}}{dt} = 0 .$$

Giova poi rammentare che, per un vettore $\boldsymbol{m}$ comunque variabile, sussiste la relazione generale

$$\frac{d^{(a)}\boldsymbol{m}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{m}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{m} .$$

Per $\boldsymbol{m}$ del tipo $\boldsymbol{f}$ (fisso rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$), se ne ricava

$$\frac{d\boldsymbol{f}}{dt} = \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{\omega} . \tag{2}$$

Ciò premesso, immaginiamo, ad ogni istante t, attribuito a C un arbitrario spostamento infinitesimo, a partire dalla posizione che ad esso compete nel moto considerato. La successione delle posizioni, in tal guisa modificate, dà luogo al così detto moto variato.

Sia $\boldsymbol{\epsilon}$ (vettore) la rotazione elementare atta a realizzare lo spostamento attribuito a C nell'istante t. Un generico vettore $\boldsymbol{f}$ (fisso) subirà in conseguenza, rispetto al triedro mobile $Ox_1x_2x_3$, una variazione $\delta\boldsymbol{f}$ definita da,

$$\delta\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f} \wedge \boldsymbol{\epsilon} . \tag{3}$$

Nel passaggio dal moto originario al moto variato, anche la velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ subirà un certo incremento $\delta\boldsymbol{\omega}$, che si calcola subito in base alla stessa definizione di velocità angolare. Infatti, nel moto originario, la rotazione elementare, con cui C passa, dalla posizione che gli compete nell'istante t alla posizione dell'istante $t+dt$, è espressa da $\boldsymbol{\omega}\,dt$. Nel moto variato, fra le due orientazioni di C relative agli istanti t e $t+dt$, intercede un divario ulteriore di $d\boldsymbol{\epsilon}$: un tale incremento (verificantesi nel tempuscolo dt) va riferito agli assi fissi e si precisa quindi sotto la forma $(d^{(a)}\boldsymbol{\epsilon}/dt)\,dt$. Il suo rapporto a dt fornisce la cercata espressione di $\delta\boldsymbol{\omega}$. Ne consegue, in base alla (1),

$$\delta\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\epsilon}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{\epsilon} . \tag{4}$$

2. - Definizione di una particolare categoria di sistemi olonomi.

Sia S un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo, dotato di $n+3$ gradi di libertà, specificati come segue. La configurazione del sistema è univocamente individuata da n parametri lagrangiani q_h $(h = 1, 2, ..., n)$, in concorso coll'orientazione di un corpo rigido C liberamente girevole, il che importa tre ulteriori gradi di libertà.

La dipendenza dall'orientazione di C può, se si vuole, pensarsi direttamente realizzata a mezzo di tre parametri (per es., i tre angoli di EULERO), o, indirettamente, pel tramite di elementi geometrici sovrabbondanti, quali coseni direttori o vettori unitarî: ad es., i tre vettori fondamentali $\boldsymbol{u}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ corrispondenti agli assi del triedro $Ox_1x_2x_3$ solidale con C; od anche — ed è questo il criterio cui ci atterremo — pel tramite degli altri tre vettori fondamentali $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$, che individuano il triedro fisso $O\xi\eta\zeta$ rispetto al corpo C.

Le componenti α_ν, β_ν, γ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ di tali vettori si identificano naturalmente coi nove coseni direttori. Le formule (di POISSON)

$$(2') \qquad \frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \wedge \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \boldsymbol{\beta} \wedge \boldsymbol{\omega}\,, \qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}\,,$$

appariscono in conformità casi particolari della (2), e assicurano che le velocità dei punti del sistema S possono in definitiva risguardarsi quali funzioni lineari ed omogenee delle derivate $\dot{q}$ dei parametri q, e del vettore $\boldsymbol{\omega}$, o, se si vuole, delle sue tre componenti ω_ν secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

La forza viva T di S si presenta, così, quale forma quadratica degli $n+3$ argomenti $\dot{q}_h$, ω_ν, i coefficienti potendo dipendere (in modo qualunque) dalle q_h e dall'orietazione di C: diciamo dalle q_h e dai vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$.

Nell'ipotesi che il sistema S sia sollecitato da forze conservative, la relativa funzione delle forze U potrà egualmente risguardarsi dipendente dalle q_h e da $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$.

La funzione lagrangiana

$$L = T + U$$

sarà così funzione di tali argomenti e delle $n+3$ caratteristiche cinetiche $\dot{q}_h$, ω_ν, che compariscono quadraticamente in T.

3. - Spostamenti virtuali. Moto variato. Ipotesi complementare sulla dipendenza di L dall'orientazione di C. Espressione del δL.

Uno spostamento virtuale di S, ad un generico istante t, può ritenersi individuato dagli incrementi δq_h dei parametri q_h, in concorso (cfr. § 1) con una rotazione elementare $\boldsymbol{\epsilon}$, questa e quelli affatto arbitrarî.

Subordinatamente avremo, a norma della (3),

$$(3') \qquad \delta\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}\wedge\boldsymbol{\epsilon}\,, \qquad \delta\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}\wedge\boldsymbol{\epsilon}\,, \qquad \delta\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\epsilon}\,,$$

e $\delta\boldsymbol{\omega}$ definito dalla (4).

È inoltre chiaro che δL sarà necessariamente funzione lineare ed omogenea delle δq_h, $\delta\dot{q}_h$ e dei due vettori $\boldsymbol{\epsilon}$, $\delta\boldsymbol{\omega}$, o, se si vuole, delle loro componenti ε_ν, $\delta\omega_\nu$ secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

Dacchè δq_h, $\delta\dot{q}_h$, $\delta\omega_\nu$ sono variazioni di quantità q_h, $\dot{q}_h$, ω_ν, che effettivamente appariscono in L, i relativi coefficienti in δL coincidono colle derivate parziali $\partial L/\partial q_h$, $\partial L/\partial\dot{q}_h$, $\partial L/\partial\omega_\nu$; mentre i coefficienti e_ν delle ε_ν non sono direttamente esprimibili quali derivate di L, ma si desumono dall'incremento parziale che L subisce facendo variare l'orientazione C, ossia attribuendo gli incremen*t*i (3') ai vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. Avremo, comunque,

$$\delta L = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\,\delta q_h + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_h}\,\delta\dot{q}_h\right) + \sum_1^3 {}_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial\omega_\nu}\,\delta\omega_\nu + e_\nu\varepsilon_\nu\right).$$

Per lo scopo che abbiamo in vista, giova fissare l'attenzione sul caso in cui L dipende dall'orientazione di C pel tramite d'uno solo dei tre vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$. *In conformità, ammetteremo da ora innanzi che L dipenda esclusivamente da* $\boldsymbol{\gamma}$.

In tale ipotesi la variazione parziale

$$\partial L = \sum_1^3 {}_\nu\, e_\nu\varepsilon_\nu\,,$$

dovuta alla rotazione elementare $\boldsymbol{\epsilon}$, si riduce manifestamente a

$$\partial L = \sum_1^3 {}_\nu \frac{\partial L}{\partial\gamma_\nu}\,\partial\gamma_\nu \ (^4)\,,$$

le $\delta\gamma_\nu$ essendo definite dalle (3').

(4) Va notato che, dall'essere ben determinata la dipendenza di L dal vettore $\boldsymbol{\gamma}$, non risulta

Introducendo il vettore $\mathbf{\Gamma}$, che ha per componenti

$$\Gamma_\nu = \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{5}$$

rispetto agli assi $Ox_1x_2x_3$, si può scrivere

$$\partial L = \mathbf{\Gamma} \times \delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{\Gamma} \times (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon} \times (\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}) .$$

Le e_ν del caso generale si identificano pertanto, nell'adottata ipotesi, colle componenti del prodotto vettoriale

$$\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma} \quad (^5).$$

Introducendo un secondo vettore $\mathbf{\Omega}$, definito dalle componenti

$$\Omega_\nu = \frac{\partial L}{\partial \omega_\nu} = \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{6}$$

si attribuisce alla variazione totale δL della funzione lagrangiana l'espressione

$$\delta L = \sum_1^n{}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h} \delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} \delta \dot{q}_h \right) + \mathbf{\Omega} \times \boldsymbol{\delta\omega} + (\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}) \times \boldsymbol{\epsilon} .$$

Avuto riguardo alla (4), ove si ponga

$$\mathfrak{M} = \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma} , \tag{7}$$

---

egualmente determinata l'espressione analitica di L in termini di $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e ciò in causa dell'identità $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, la quale consente di attribuire all'espressione analitica suddetta infiniti aspetti formalmente distinti. Ciò non pertanto si arriva poi sempre, come è naturale, allo stesso valore di ∂L. Infatti due diverse espressioni L' ed L'' possono differire soltanto pel fatto che l'unità vi è talora sostituita dal trinomio $u = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$. Siccome $\partial u = 0$ [per la terza delle (3')], così la differenza

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial u} - \frac{\partial L''}{\partial u}\right) \partial u ,$$

è pur nulla, c. d. d.

(5) L'osservazione (testè fatta in nota) circa l'indeterminazione dell'espressione formale di L si riverbera nel fatto che il vettore $\mathbf{\Gamma}$, avente per componenti le (5), dipende esso stesso dalla forma che si attribuisce alla L. Però l'indeterminazione si riduce (nelle componenti) a termini addizionali della forma $(\partial L/\partial u)(\partial u/\partial \gamma_\nu) = 2(\partial L/\partial u)\gamma_\nu$, ossia, vettorialmente, ad un vettore parallelo a $\boldsymbol{\gamma}$. Nel prodotto vettoriale $\mathbf{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\gamma}$, questo non reca contributo alcuno. È quindi indifferente, nei riguardi del δL, l'espressione di L, in base a cui viene introdotto il vettore $\mathbf{\Gamma}$.

si è condotti alla forma tipica

$$(8) \qquad \delta L = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial L}{\partial q_h}\, \delta q_h + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h}\, \delta \dot{q}_h \right) + \mathfrak{M} \times \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \,,$$

in cui sono messi in evidenza i coefficienti delle singole caratteristiche δq_h, $\boldsymbol{\epsilon}$ e loro derivate $\delta \dot{q}_h$, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$.

4. - Equazioni del moto in forma euleriano-lagrangiana.

La materiale applicazione alla (8) della regola formale, in cui si traduce il principio di Hamilton [6], dà luogo alle seguenti equazioni del moto:

$$(9) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial L}{\partial q_h} = 0 \,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(10) \qquad \frac{d}{dt} \boldsymbol{\Omega} = \mathfrak{M} \,,$$

la derivata vettoriale dovendo essere presa — ben si intende — nella stessa accezione sotto cui si presenta quella di $\boldsymbol{\epsilon}$, cioè (§ 1) con referenza agli assi $Ox_1x_2x_3$.

La (10) equivale perciò alle

$$\frac{d\Omega_\nu}{dt} = \mathcal{M}_\nu \,. \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

Si possono ulteriormente esplicitare le $\mathcal{M}_\nu$ in base alla (7). Ove si convenga di risguardare coincidenti due valori dell'indice ν congrui rispetto al modulo 3, si ha tosto

$$\mathcal{M}_\nu = (\Omega_{\nu+1}\omega_{\nu+2} - \Omega_{\nu+2}\omega_{\nu+1}) + (\Gamma_{\nu+1}\gamma_{\nu+2} - \Gamma_{\nu+2}\gamma_{\nu+1}) \qquad (\nu = 1, 2, 3).$$

È appena necessario aggiungere che il sistema (9), (10) va completato colla terza delle formule di Poisson [terza delle (2′)], cioè

$$(11) \qquad \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega} \,,$$

(6) Cfr. per es. Kirchhoff, loc. cit., lezione III, § 3.

rimanendo, così, complessivamente definite le derivate seconde delle q_h e prime delle ω_ν, γ_ν in funzione delle q_h, $\dot{q}_h$, ω_ν, γ_ν.

5. - Esempio.

Un'illustrazione ovvia di quanto precede è offerta da un solido pesante, liberamente girevole attorno ad un suo punto O, il quale punto si suppone costretto a percorrere una retta verticale (mediante vincolo privo d'attrito).

Si ha un sistema materiale S con quattro gradi di libertà, la cui posizione può pensarsi individuata dalla quota verticale q di O rispetto ad un sistema di assi fissi $\Omega\xi\eta\zeta$, con $\Omega\zeta$ verticale verso il basso, nonchè dall'orientazione (rispetto agli assi suddetti) di una terna solidale $Ox_1x_2x_3$, che riterremo costituita dagli assi principali d'inerzia relativi al punto O.

Essendo γ_1, γ_2, γ_3 i coseni direttori della verticale rispetto agli assi mobili, le componenti della velocità di O secondo tali assi valgono ordinatamente $\dot{q}\gamma_1$, $\dot{q}\gamma_2$, $\dot{q}\gamma_3$.

Il corpo ipotetico C, considerato precedentemente, è senz'altro identificabile collo stesso solido S: ci troviamo quindi nelle condizioni indicate al § 2.

Dalla ben nota espressione generale della forza viva di un solido in funzione delle sei caratteristiche (notando che, nel caso presente, ove si assuma O come centro di riduzione, esse sono $\dot{q}\gamma_1$, $\dot{q}\gamma_2$, $\dot{q}\gamma_3$, ω_1, ω_2, ω_3), si ha tosto

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{q}^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, A_\nu \omega_\nu^2 + M\dot{q}\Delta\,,$$

dove M è la massa del solido, A_ν il suo momento d'inerzia attorno all'asse Ox_ν, e

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{vmatrix},$$

c_1, c_2, c_3 designando le coordinate del baricentro G rispetto agli assi solidali.

Rappresenteremo con $\boldsymbol{d}$ il vettore $G - O$ di componenti c_1, c_2, c_3. La quota verticale di G vale manifestamente

$$q + \sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, c_\nu \gamma_\nu\,;$$

perciò, detto P il peso del corpo, la funzione delle forze rimane espressa da

$$U = P(q + \sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, c_\nu \gamma_\nu)\,.$$

Ne consegue

$$L = T + U = \frac{1}{2}\, M\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, A_\nu \omega_\nu^2 + M\dot{q}\Delta + P\left(q + \sum_{1}^{3}{}_{\nu}\, c_\nu\gamma_\nu\right).$$

Come si vede, L dipende da q, $\dot{q}$, ω_ν, γ_ν $(\nu = 1, 2, 3)$, oltre che dalle costanti M, A_ν, c_ν, P: si trova quindi soddisfatta l'ipotesi complementare del § 3.

Le (5) dànno

$$\Gamma_\nu = Pc_\nu + M\dot{q}\,\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_\nu} = Pc_\nu + M\dot{q}(\omega_{\nu+1}c_{\nu+2} - \omega_{\nu+2}c_{\nu+1})\,,$$

donde apparisce che il vettore $\mathbf{\Gamma}$ non è altro che

$$\boldsymbol{Pd} + M\dot{q}\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{d}\,.$$

Siccome $\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{d}$ rappresenta la velocità relativa $\boldsymbol{w}$ del baricentro G rispetto ad un sistema di assi paralleli agli assi fissi coll'origine in O, si può anche scrivere, più semplicemente,

$$\mathbf{\Gamma} = P\boldsymbol{d} + M\dot{q}\boldsymbol{w}\,.$$

Si sa, dalla teoria dei sistemi rigidi, che le derivate parziali della forza viva rapporto alle caratteristiche ω_ν coincidono colle componenti del momento delle quantità di moto rispetto al centro di riduzione: il punto O, nel caso nostro. Perciò il vettore $\mathbf{\Omega}$, definito dalle (6), si identifica qui col momento risultante delle quantità di moto del sistema rispetto ad O.

Posto, per brevità,

$$\boldsymbol{M} = M\dot{q}\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{\gamma}\,,$$

la (7) diviene

$$\mathfrak{M} = \mathbf{\Omega} \wedge \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{d} \wedge P\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{M}\,.$$

Il secondo addendo è manifestamente il momento del peso $P\boldsymbol{\gamma}$, applicato in G, rispetto al punto O. Basta quindi scrivere la (10) sotto la forma

$$\text{(10')} \qquad \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{\Omega} = \boldsymbol{d} \wedge P\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{M}\,,$$

per riconoscervi compendiate le equazioni di EULERO (che varrebbero se O fosse fisso) col termine addizionale $\boldsymbol{M}$: in esso si rispecchia l'influenza della mobilità di O sul moto di rotazione del corpo.

Le equazioni di tipo lagrangiano [(9) dello schema generale] si riducono presentemente ad una sola: ed è

$$M \frac{d}{dt}(\dot{q} + \Delta) - P = 0 .$$

Scrivendola

$$\ddot{q} = \frac{P}{M} - \frac{d\Delta}{dt}, \tag{9'}$$

ravvisiamo nel termine $-d\Delta/dt$ l'accelerazione perturbatrice (rispetto a quella normale della gravità $P/M = g$), che si riscontra nella caduta di O, per effetto della rotazione del solido. Mediante le (10') e (11), si possono eliminare da $d\Delta/dt$ le derivate delle ω_ν, γ_ν, rimanendo così caratterizzata la perturbazione mediante lo stato di moto del sistema.

6. - Osservazione d'indole generale concernente la interpretabilità di qualche componente di Ω come momento delle quantità di moto di S.

Nel § 1 abbiamo supposto, astrattamente, che la posizione del sistema materiale S dipenda, in modo univoco, da certi parametri q e dalla orientazione di un corpo (fittizio) C, senza però fare alcuna ulteriore ipotesi sulle modalità di quest'ultima corrispondenza.

Può in particolare accadere che la corrispondenza fra la posizione di S (per valori generici attribuiti alle q) e l'orientazione di C abbia qualche aspetto prossimo all'identità: sia tale, per es., che ad una rotazione elementare di C attorno ad un asse determinato — diciamo Ox_3 per fissare le idee — corrisponda una identica rotazione d'insieme del sistema S.

In tal caso, ove si consideri il passaggio del sistema S dalla posizione che gli compete nell'istante t a quella che va ad occupare nell'istante $t + dt$, è chiaro che la velocità $\boldsymbol{v}$ di un generico punto P del sistema si può scindere in due addendi, uno dei quali è il contributo che si avrebbe qualora C ruotasse esclusivamente attorno all'asse Ox_3, rimanendo inalterate le q, mentre il secondo, $\boldsymbol{v}^*$, è dovuto a variazione delle q e rotazione attorno ad un asse perpendicolare ad Ox_3.

Il primo addendo, detto $\boldsymbol{u}_3$ il vettore unitario corrispondente all'asse Ox_3, vale

$$\omega_3 \boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O) .$$

Si ha, in conformità,

$$\boldsymbol{v} = \omega_3 \boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O) + \boldsymbol{v}^*,$$

dove — ed è questa la circostanza essenziale — $\boldsymbol{v}^*$ non dipende da ω_3, ma soltanto dalle altre due componenti ω_1, ω_2 di $\boldsymbol{\omega}$ (oltre che dalle $\dot{q}$ e dalla posizione del sistema).

Ne consegue

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \omega_3} = \boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O).$$

Ciò posto, ove sia m la massa dell'elemento circostante a P, si ha, per definizione,

$$T = \tfrac{1}{2} \sum m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v},$$

il sommatorio intendendosi esteso a tutti gli elementi materiali del sistema.

Deriviamo T rapporto ad ω_3, ricordando da un lato la (6) e dall'altro l'espressione testè ricavata per $\partial\boldsymbol{v}/\partial\omega_3$. Si ha tosto

$$\Omega_3 = \sum [m\boldsymbol{v} \times \{\boldsymbol{u}_3 \wedge (P - O)\}] = \boldsymbol{u}_3 \times \sum [(P - O) \wedge m\boldsymbol{v}].$$

Il coefficiente di $\boldsymbol{u}_3$ nel prodotto scalare testè scritto si presenta come il momento risultante $\boldsymbol{K}$ delle quantità di moto del sistema S rispetto al punto O. Si ha quindi

$$\Omega_3 = K_3,$$

rappresentandosi ovviamente con K_ν $(\nu = 1, 2, 3)$ le componenti del vettore $\boldsymbol{K}$ secondo gli assi $Ox_1x_2x_3$.

Di qua il teorema: Ogniqualvolta una rotazione elementare dell'ipotetico corpo rigido C, attorno ad un asse qualsiasi passante per O, corrisponde ad una identica rotazione d'insieme del sistema S, la componente del vettore $\boldsymbol{\Omega}$ rispetto all'asse di rotazione coincide col momento risultante, rispetto allo stesso asse, delle quantità di moto di S.

In quest'enunciato è detto *asse qualsiasi passante per O*, mentre la dimostrazione formale testè esposta contempla l'asse coordinato Ox_3 (solidale con C). È chiaro tuttavia:

1) che, se si tratta di un altro asse qualsiasi, supposto pure solidale col corpo, basta assumerlo (come è certo lecito, non essendosi fatta alcuna speciale ipotesi sulla terna $Ox_1x_2x_3$) quale asse Ox_3 per accertare che la conclusione sussiste;

2) che, se anche l'asse in questione è concepito variabile col tempo rispetto a C (per es. fisso rispetto agli assi $O\xi\eta\zeta$), basta aver riguardo alla posizione da esso occupata nel corpo nell'istante generico che si considera. Infatti la precedente dimostrazione fa intervenire *soltanto* la distribuzione delle velocità ad un dato istante: è quindi inessenziale l'ipotesi che sia solidale con C l'asse attorno a cui C ed S ammettono rotazioni elementari identiche, c. d. d.

Va da sè che se, per tre direzioni indipendenti, vale l'eguaglianza delle componenti di $\mathbf{\Omega}$ e di K, si ha addirittura

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{K} :$$

tale è il caso dell'esempio riferito al § 5.

7. - Modificazione della funzione lagrangiana.

L'ipotesi, introdotta fin dal principio, che il sistema S possegga $n+3$ gradi di libertà, implica che la forma quadratica T negli $n+3$ argomenti $\dot{q}_h$, ω_ν sia irriducibile.

Ne viene che le $n+3$ derivate parziali $\partial T/\partial\dot{q}_h$, $\partial T/\partial\omega_\nu$, considerate quali funzioni lineari ed omogenee nelle $\dot{q}_h$, ω_ν, riescono indipendenti. Perciò le equazioni

$$(12) \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} = p_h, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(6) \qquad \frac{\partial T}{\partial \omega_\nu} = \Omega_\nu, \qquad (\nu = 1, 2, 3),$$

sono complessivamente atte a definire le $n+3$ quantità $\dot{q}_h$, ω_ν in funzione lineare dei secondi membri p_h, Ω_ν, i coefficienti dipendendo in modo qualunque dalla configurazione del sistema, ossia (§ 3) dalle q_h e dalle γ_ν.

Poniamo (con ovvia estensione del procedimento di HAMILTON)

$$(13) \qquad H = \sum_1^n{}_h\, p_h \dot{q}_h + \sum_1^3{}_\nu\, \Omega_\nu \omega_\nu - L ,$$

ciò che, in base alle (12) e (6) (per essere T omogenea di secondo grado negli argomenti $\dot{q}_h$, ω_ν, ed $L = T + U$), equivale a

$$(13') \qquad H = T - U .$$

Risguardiamo tale H quale funzione degli argomenti p_h, Ω_ν, q_h, γ_ν, immaginandovi sostituite le $\dot{q}_h$, ω_ν, che figurano nella formula di definizione, mediante le loro espressioni desunte dalle (12), (6).

Avremo da un lato

$$\delta H = \sum_1^n {}_h \left(\frac{\partial H}{\partial p_h}\,\delta p_h + \frac{\partial H}{\partial q_h}\,\delta q_h\right) + \sum_1^3 {}_\nu \left(\frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}\,\delta \Omega_\nu + \frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}\,\delta \gamma_\nu\right).$$

D'altro lato la materiale differenziazione della (13), tenute sempre presenti le (12) e (6) [sotto la forma $p_h = \partial L/\partial \dot{q}_h$, $\Omega_\nu = \partial L/\partial \omega_\nu$], dà

$$\delta H = \sum_1^n {}_h \left(\dot{q}_h \delta p_h - \frac{\partial L}{\partial q_h}\,\delta q_h\right) + \sum_1^3 {}_\nu \left(\omega_\nu \delta \Omega_\nu - \frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu}\,\delta \gamma_\nu\right).$$

Il confronto delle due espressioni di δH, dacchè gli incrementi δp_h, δq_h, $\delta \Omega_\nu$, $\delta \gamma_\nu$ si possono assumere ad arbitrio ([7]), fornisce le relazioni

$$\dot{q}_h = \frac{\partial H}{\partial p_h}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_h} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \qquad (h = 1, 2, \ldots, n); \tag{15}$$

$$\omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}, \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{17}$$

che possono naturalmente considerarsi come altrettante identità, in virtù delle (12) e (6). Più particolarmente le (14) e (16) si identificano colle risolventi delle stesse (12) e (6) rapporto alle $\dot{q}_h$, ω_ν; le (15) e (17) esprimono (in modo comprensivo, a mezzo della funzione H) il risultato della sostituzione delle $\dot{q}_h$, ω_ν tratte dalle (12) e (6) in $\partial L/\partial q_h$, $\partial L/\partial \gamma_\nu$.

8. - Forma canonico-euleriana delle equazioni del moto.

La funzione hamiltoniana H, costruita nel modo ora detto, basta da sola a dedurre le equazioni del moto di S sotto l'aspetto di sistema di

([7]) A dir vero, le γ_ν designano coseni direttori e sono quindi legate dalla relazione $\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1$. Nulla vieta però di risguardare *provvisoriamente*, nella definizione (13) di H e nelle (6) e (12), le tre γ come indipendenti, e con ciò i loro incrementi come arbitrarî. Le (14), (15), (16) e (17) risultano, così, necessarie conseguenze delle (6) e (12), qualunque siano le γ (nonchè le q, p, Ω): in particolare, quindi, se si torna ad attribuire alle γ il loro effettivo significato di coseni direttori.

prim'ordine nei $2n+6$ argomenti

$$p_h\,,\quad q_h\,,\quad \Omega_\nu\,,\quad \gamma_\nu\,,$$

esprimendo altresì le Γ_ν, ω_ν quali combinazioni in termini finiti degli argomenti indicati.

Lo si constata ovviamente, trasformando le (9) e (10) mercè le (14), ..., (17).

Anzi tutto la definizione (5) delle Γ_ν, in virtù delle (17), si scrive

$$\Gamma_\nu = -\frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu}\,. \qquad (\nu = 1, 2, 3). \tag{18}$$

Si intende, poi, che tali Γ_ν e le Ω_ν si ritengono ancora compendiate nei due vettori $\mathbf{\Gamma}$ ed $\mathbf{\Omega}$; mentre le

$$\omega_\nu = \frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu}\,, \qquad (\nu = 1, 2, 3), \tag{16}$$

individuano il vettore $\boldsymbol{\omega}$. Con ciò seguita a valere la definizione (7) di $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M} = \mathbf{\Omega}\wedge\boldsymbol{\omega} + \mathbf{\Gamma}\wedge\boldsymbol{\gamma}\,, \tag{7}$$

e il gruppo (euleriano)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{\Omega} = \mathfrak{M}\,, \tag{10}$$

non richiede ulteriore modificazione formale.

Il gruppo (lagrangiano) (9) diviene invece, attese le (15) e la definizione (12) delle p_h (che equivale a $p_h = \partial L/\partial \dot{q}_h$),

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}\,, \qquad (h = 1, 2, ..., n), \tag{19}$$

cui vanno associate le

$$\frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h}\,, \qquad (h = 1, 2, ..., n), \tag{14}$$

e la formula (vettoriale) di POISSON

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma}\wedge\boldsymbol{\omega}\,. \tag{11}$$

Complessivamente, il sistema

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (\mathrm{I}_a) & \dfrac{dp_h}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \dfrac{dq_h}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_h}, \quad (h=1, 2, \ldots, n), \\ (\mathrm{I}_b) & \dfrac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \mathfrak{M}, \\ (\mathrm{I}_c) & \dfrac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} = \boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}, \end{cases}$$

costituito, come si vede, dalle (19), (14), (10) ed (11), definisce le derivate dei $2n+6$ argomenti p_h, q_h, Ω_ν, γ_ν in funzione degli argomenti stessi. Le (18), (16) e (7) assicurano che i secondi membri si esprimono esclusivamente per mezzo della H..

9. - Integrali di tipo generale posseduti dal sistema (I).

La (I_c) implica $\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\gamma} = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = \text{cost.}$, il che è già sottointeso (colla specificazione che la costante abbia il valore 1) nell'interpretazione delle γ_ν quali coseni direttori. A prescindere da questa identità geometrica, due sono gli integrali effettivi ammessi in ogni caso dal sistema (I): l'integrale delle forze vive che, a norma della (13′), assume la forma:

$$H = \text{cost.}\,; \tag{20}$$

e l'integrale

$$\Omega \times \boldsymbol{\gamma} = \text{cost.} \tag{21}$$

Il primo membro è la componente Ω_ζ di $\boldsymbol{\Omega}$ secondo l'asse fisso $O\zeta$. Ogniqualvolta sono applicabili le considerazioni del § 6, si tratta del corrispondente integrale del momento delle quantità di moto (o delle aree).

Ecco la verificazione diretta dell'esistenza dei due integrali. Si ha in primo luogo

$$\frac{dH}{dt} = \sum_1^n{}_\nu \left(\frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{dp_h}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{dq_h}{dt} \right) + \sum_1^3{}_\nu \left(\frac{\partial H}{\partial \Omega_\nu} \frac{d\Omega_\nu}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \gamma_\nu} \frac{d\gamma_\nu}{dt} \right).$$

Il primo sommatorio è nullo, in conseguenza delle (I_a); il secondo, attese le (16) e (18), si scrive

$$\sum_1^3{}_\nu \left(\omega_\nu \frac{d\Omega_\nu}{dt} - \Gamma_\nu \frac{d\gamma_\nu}{dt}\right) = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \omega - \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} \times \boldsymbol{\Gamma} .$$

Sostituendo per $d\boldsymbol{\Omega}/dt$ e $d\boldsymbol{\gamma}/dt$ le loro espressioni (I_b), (I_c), risulta

$$\frac{dH}{dt} = \mathfrak{M} \times \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\Gamma} .$$

Il secondo membro è identicamente nullo, in virtù della (7); e quindi $dH/dt = 0$.

Quanto al prodotto scalare $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\gamma}$, la sua derivata è

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\boldsymbol{\gamma}}{dt} ,$$

ossia, per le (I_b) e (I_c),

$$\mathfrak{M} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\gamma} \wedge \boldsymbol{\omega}) ,$$

che va pure a zero in forza della (7), c. d. d.