16.

SUR LA THÉORIE DES FORMES ASSOCIÉES DE MM. CLEBSCH ET GORDAN.

[*Comptes Rendus*, LXXXVI. (1878), pp. 448—450.]

DANS le Traité de Clebsch sur les formes binaires, on trouve un théorème très-remarquable sur ce qu'il appelle les *formes associées*, et sur le système le plus simple des formes associées.

Je me bornerai à l'exposition et à la généralisation de cette dernière. Voici le théorème comme on le trouve dans le travail de M. Clebsch : Soient Q un quantic binaire quelconque du degré i, f un invariant ou covariant quelconque de Q. En choisissant convenablement le chiffre μ, $Q^\mu f$ sera une fonction entière et rationnelle de i invariants et covariants, constants et connus de Q, dont le premier sera Q et les autres successivement de l'ordre 2 et 3 dans les coefficients de Q. Si l'on examine de près ce théorème avec l'aide de la conception et des propriétés des différentiants, voici à quoi il équivaut : Prenons la forme $x^i + px^{i-1} + qx^{i-2} + \ldots + l$.

On sait bien qu'une fonction symétrique quelconque de ses racines sera une fonction rationnelle et entière des i coefficients donnés. Mais, si l'on se borne à une fonction symétrique des *différences* des racines, on peut ajouter (et voilà en quoi consiste essentiellement ce théorème de M. Clebsch ou de M. Gordan) qu'elle sera une fonction rationnelle et entière de $i-1$ fonctions alternativement de l'ordre 2 et de l'ordre 3 des coefficients, dont chacune sera elle-même une fonction des différences des racines.

C'est par une analyse assez compliquée que MM. Clebsch et Gordan établissent leur théorème. Je le déduis par un calcul tout à fait élémentaire et presque instantané en me servant seulement de l'équation partielle différentielle qui sert à définir les invariants et les différentiants et avec ce grand avantage que, avec son aide, je passe immédiatement à l'extension du théorème au cas de système de quantics. Voici en effet le résultat auquel j'arrive avec cette méthode.

Soit $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_\lambda$ un système de quantics binaires. Prenons $(\lambda - 1)$ jacobiens indépendants quelconques des Q combinés en paires qu'on peut nommer $J_1, J_2, \ldots, J_{\lambda-1}$ et de plus prenons les a formes associées dans leur forme la plus simple qui appartiennent à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\lambda$ prises séparément. Alors, je dis que, f étant un invariant ou covariant quelconque du système des Q, on aura, en choisissant convenablement les chiffres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$, $Q_1{}^{\mu_1} Q_2{}^{\mu_2} \ldots Q_\lambda{}^{\mu_\lambda} f$ une fonction rationnelle et entière des formes associées propres à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\lambda$ et des quantités $J_1, J_2, \ldots, J_{\lambda-1}$.

J'ajouterai encore un théorème que je crois être nouveau et qui se déduit immédiatement de ce dernier.

Soient $a_1, b_1, \ldots; a_2, b_2, \ldots; a_\lambda, b_\lambda$ les deux premiers coefficients de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\lambda$ et prenons la forme linéaire $a_k x + b_k y$ (k étant choisi arbitrairement), que je nommerai u. Soit un invariant ou un covariant quelconque du système exprimé comme fonction de u et de y, alors tous les coefficients de F seront des différentiants en x, ce que M. Cayley nomme des *semi-invariants*. Ainsi, par exemple, si l'on prend le covariant bien connu

$$(ac - b^2)\, x^2 + (ad - cb)\, xy + (bd - c^2)\, y^2$$

appartenant à un seul quantic $(a, b, c, d)(x, y)^3$, on peut le mettre sous la forme

$$\frac{1}{a^2}\{(ac - b^2)(ax + by)^2 + (a^2 d - 3abc + 2b^3)(ax + by)\, y - (ac - b^2)^2 y^2\},$$

où, en supposant $a = 1$, tous les coefficients deviennent des fonctions des différences des racines de $(1, b, c, d)(x, y)^3 = 0$.

La preuve de ces théorèmes sera donnée dans l'*American Journal of Mathematics* publié à Baltimore (États-Unis de l'Amérique), qui doit paraître prochainement.