12.

SUR LES INVARIANTS.

[*Comptes Rendus*, LXXXV. (1877), pp. 992—995, 1035—1039, 1091—1092.]

La théorie que j'ai exposée dans mes dernières Communications à l'Académie repose sur le théorème suivant. Commençons par le cas d'une seule quantique du degré i, fonction des variables x et y, soit $(a, b, c, \ldots, l)(x, y)^i$. Je nomme différentiant de cette quantique une fonction rationnelle et entière quelconque, qui retient sa valeur quand on substitue pour les coefficients de la quantique donnée les coefficients de la quantique qu'on obtient en substituant $x + hy$ pour x. Alors le nombre de ces différentiants de l'ordre j dans les coefficients et du poids w par rapport à x sera égal à la différence entre deux nombres dont l'un est le nombre de combinaisons de j quelconques des chiffres $0.1.2....i$ (répétées autant de fois qu'on veut) dont la somme est w, moins le nombre de combinaisons pareilles pour lesquelles la somme est $(w-1)$. Nommons l'opérateur $a\dfrac{d}{db} + 2b\dfrac{d}{dc} + 3c\dfrac{d}{dd} + \ldots = \Omega$. La condition nécessaire et suffisante pour que D soit un différentiant est que ΩD soit identiquement zéro. De là on déduit facilement que le nombre des D linéairement indépendants, dont le poids est w et l'ordre s, soit $D\,(w : i, j)$, ne peut pas être moins que la différence dont j'ai parlé plus haut, soit la différence $(w : i, j) - \{(w-1);\ i, j\}$. Si les équations contenues dans l'identité $\Omega D = 0$ sont indépendantes, la valeur de $D(w : i,\ j)$ sera égale à

$$(w : i,\ j) - \{(w-1)\,;\ i,\ j\}\,;$$

si elles ne sont pas indépendantes, ce nombre sera *plus grand* que

$$(w : i,\ j) - \{(w-1)\,;\ i,\ j\}.$$

Dans une Communication que je viens d'envoyer au *Journal de M. Borchardt*, j'ai réussi à donner une démonstration rigoureuse de l'égalité de $D(w : i,\ j)$ à la différence citée qu'on peut nommer $\Delta(w : i,\ j)$; car, si cette égalité n'était pas vraie pour toutes les valeurs de w, en commençant par la plus grande possible, c'est-à-dire $\dfrac{ij}{2}$ ou $\dfrac{ij-1}{2}$, alors on aurait pour cette valeur *maxima* de w

$$D(w : i, j) + D\{(w-1) : i, j\} + D\{(w-2) : i, j\} + \ldots + D(0 : i, j) > (wi, j),$$

laquelle inégalité ne peut pas avoir lieu, comme je le démontre par une méthode très-belle et très-facile. C'est à M. Cayley qu'on doit l'énoncé de la proposition $D(w:i,j)=\Delta(w:i,j)$; mais ce grand géomètre n'avait réussi qu'à démontrer rigoureusement l'inégalité $D(w:i,j)=$ ou $>\Delta(w:i,j)$.

On avait même exprimé des doutes sur la vérité de la proposition, désormais mise à l'abri de toute objection, $D(w:i,j)=\Delta(w:i,j)$. Passons au cas de plusieurs quantiques $(a, b, c\ldots)(x, y)^i$, $(a, b, c\ldots)(x, y)^{i'}, \ldots$. J'ai étendu la méthode de M. Cayley à ce cas plus général. Par un procédé analogue au sien pour le cas d'une seule quantique, j'établis la proposition

$$D(w:i,j:i',j':\ldots) = \text{ou} > (w:i,\, j:i',j':\ldots) - \{(w-1):i,j:i',j':\ldots\},$$

où le premier membre de l'équation signifie le nombre de différentiants, linéairement indépendants, appartenant au système de quantiques donné de l'ordre $j, j', \ldots$, dans les quantiques successives et du poids w par rapport à x: $(n:i,j:i',j':\ldots)$, signifiant, pour une valeur quelconque de n, le nombre des combinaisons de j des chiffres $(0, 1, 2, 3, \ldots, i)$, de j' des chiffres $(0, 1, 2, \ldots, i'), \ldots$, dont la somme réunie est égale à n. Alors, par une méthode précisément identique avec celle que j'applique au cas d'une seule quantique, je démontre que l'inégalité

$$D(w:i,j:i',j':\ldots) + D\{(w-1):i,j:i',j':\ldots\} + \ldots$$
$$+ D(0:i,j:i',j':\ldots) > (w:i,j:i',j':\ldots),$$

où w représente la valeur maxima du poids w, ne peut pas avoir lieu et que conséquemment, pour *toutes* les valeurs de w,

$$D(w:i,j:i',j':\ldots) = \Delta(w:i,j:i',j':\ldots).$$

Donc la théorie de la construction de la fonction génératrice dont je me suis servi reste aujourd'hui sur une base inattaquable. Mais, même en l'absence de cette démonstration nouvellement trouvée, l'évidence de sa vérité, fondée sur l'improbabilité *a priori* d'aucune dépendance sur les autres équations de condition données par la formule $\Omega D = 0$, conjointe avec l'accord parfait des résultats obtenus, en les supposant indépendants, avec les résultats qu'on obtient par d'autres méthodes pour tous les cas où l'on pouvait faire la comparaison, suffisait provisoirement comme démonstration *morale* de la vérité supposée. Or, chose bien remarquable, une difficulté de même nature revient quand on se sert de la fonction génératrice non pas en l'appliquant au calcul du nombre des dérivées invariantes linéairement indépendantes d'un type donné, mais en déduisant par son moyen l'échelle des dérivées élémentaires (*grundformen*). En un mot, la difficulté qui, aujourd'hui, a disparu quant à la formation de la fraction génératrice subsiste encore quand on passe à l'interprétation de cette fraction qui conduit à l'échelle de *grundformen*, mais avec une certaine différence. Quant à la proposition qui vient d'être nouvellement démontrée, la difficulté autrefois consistait à démontrer l'absence de rapports syzygétiques quelconques. Mais, dans l'application dont je parle, on admet par nécessité l'existence de certains de ces rapports, qui *se révèlent* comme conséquence de la loi élémentaire de toute combinaison algébrique d'invariants. L'hypothèse que l'on fait, c'est qu'il n'existe pas de tels rapports (pour ainsi dire *cachés*) en dehors de ceux dont l'existence est apparente.

Si l'on voulait nier l'exactitude de cette hypothèse, voici ce qui arriverait: les formes élémentaires (*grundformen*) obtenues en l'admettant ne cesseraient pas de subsister comme telles; seulement il y aurait la possibilité (pour ainsi dire métaphysique) de l'existence d'autres en plus. Prenons, par exemple, le cas de deux biquadratiques. M. Gordan en a donné 30, dont j'ai démontré que 2 sont superflues: il en reste donc 28. La méthode de M. Gordan ne suffit pas pour démontrer que ce nombre n'est pas encore assujetti à une réduction au-dessous de 28; mais ma méthode, au contraire, quoique laissant provisoirement peser un doute métaphysique sur l'existence de plus de 28, n'en laisse aucun sur la certitude qu'au moins ces 28 subsistent. Donc on est assuré que les 28 en question forment l'échelle fondamentale. La méthode de M. Gordan assure qu'il n'y a pas plus que 28, la méthode anglaise qu'il n'y a pas moins que 28 invariants et covariants élémentaires; donc le nombre est 28, ni plus ni moins. On comprend que l'incertitude dont je parle dans l'application de la méthode anglaise n'est que provisoire et, pour ainsi dire, métaphysique; l'évidence, à dire vrai, est accablante et ne peut laisser subsister aucun doute moral que les rapports syzygétiques cachés ou latents, dont j'ai parlé, n'ont aucun lieu dans la sphère de réalité. Cependant il semble bon de confirmer ce *postulatum*, en donnant encore des exemples, comme je vais le faire, de la conformité des résultats auxquels il conduit avec ceux qu'on obtient par d'autres méthodes. De plus, on doit se rappeler que chacune de mes fractions génératrices donne encore des résultats en dehors de la formation de l'échelle fondamentale, qu'on ne sait pas obtenir par la méthode de M. Gordan ni par aucune autre méthode connue. Elle donne absolument, et sans suggestion à aucun doute métaphysique, le nombre total des invariants, covariants, etc., les mouvements indépendants de degrés et d'ordres donnés, et, une fois la vérité absolue de la conclusion quant à l'échelle fondamentale pour un cas donné étant ou admise ou prouvée par l'évidence, elle donne en même temps et immédiatement tous les rapports syzygétiques qui peuvent lier ensemble les formes qui entrent dans l'échelle fondamentale. Bien plus, non-seulement les *grundformen* ne sont pas indépendantes, mais les équations qui les lient, en général, ne seront pas non plus indépendantes. Voici la vraie idée de ces rapports successifs:

On commence avec les *grundformen*. Alors il y aura des fonctions algébriques, qu'on peut nommer des *syzygants* du premier rang et qui auront la propriété de s'évanouir quand on substituera aux *grundformen* leurs valeurs comme fonctions des coefficients des quantités données. De même il y aura des fonctions algébriques de ces syzygants qu'on peut nommer des syzygants du second rang, qui auront la propriété de s'évanouir quand on substituera pour les syzygants du premier rang leurs valeurs comme fonctions des *grundformen*, et ainsi de suite, de sorte qu'il y aura une succession de syzygants de rangs de plus en plus élevés, et pour les syzygants de chaque rang il y aura une échelle fondamentale finie. Je crois que l'indice des rangs ascendants ne va jamais à l'infini. Sous ce point de vue, on voit que les formes fondamentales (*grundformen*) elles-mêmes peuvent être regardées comme des syzygants du rang zéro. Or ma fraction génératrice donne le moyen d'obtenir l'échelle fondamentale pour les syzygants d'un rang quelconque. Le procédé pour l'obtenir dans les cas du rang zéro et du rang unité est aussi simple pour l'un que pour l'autre. Quant aux syzygants de rang supérieur, le calcul peut être un peu plus compliqué, et je ne me suis pas permis jusqu'à présent d'entrer dans ce calcul. Il est singulier de remarquer l'inversion de rôles qui a lieu entre les deux problèmes, l'un de trouver les formes élémentaires et les syzygants successifs qui en découlent, l'autre de trouver le nombre total de formes dérivées d'un type donné. On aurait pensé *a priori* que la solution du premier problème serait nécessaire pour arriver à la solution du second. Mais, en réalité, la marche de l'investigation est toute contraire. Grâce à l'initiative admirable pour tout jamais de M. Cayley, dans son second Mémoire sur les *Quantics*, on sait comment résoudre d'un seul coup le second problème et de la forme même de cette solution on fait découler pas à pas la solution du premier.

Je vais donner les fractions génératrices pour trois nouveaux cas pour lesquels on peut comparer les résultats quant à l'échelle fondamentale avec des résultats déjà connus. Ces trois cas seront: (1) celui d'un système contenant une forme linéaire et une forme cubique; (2) d'un système contenant une forme quadratique et une forme cubique; (3) d'un système de deux cubiques. Dans une Communication prochaine, je donnerai la théorie qui s'applique aux cas d'un nombre indéfini de formes linéaires et d'un nombre indéfini de formes quadratiques. Entre ces cas il existe un lien vraiment surprenant. Je n'ai pas besoin de dire que, par rapport aux considérations qui limitent l'horizon des recherches de l'école allemande en matière de formes algébriques, ces deux cas n'offrent à peine aucune prise pour construire une théorie, ou pour mieux dire la théorie qu'on construit s'épuise en quelques mots; au contraire, selon les idées constituantes de la méthode anglaise, ces deux cas mènent à une théorie très-étendue et à des recherches du plus haut intérêt. En effet, le premier cas est celui de la théorie des rapports syzygétiques de fonctions des différences d'un nombre quelconque donné de quantités, théorie qui doit réagir puissamment sur celles de formes de degrés quelconques; de plus, dans le traitement de l'un et l'autre cas, j'aurai occasion de donner une solution de certains problèmes de l'Algèbre ordinaire de la plus grande beauté, en faisant appel à des principes algébriques que je crois être d'un genre tout à fait nouveau.

Commençons par le cas d'un système composé d'une forme linéaire et d'une cubique. Le dénominateur de la fraction génératrice sous la forme canonique sera

$$(1-b^4)(1-b^2a^2)(1-ba^3)(1-ax)(1-b^2x^2)(1-bx^3),$$

où a est le symbole pour la fonction linéaire, et b pour la cubique. Ainsi il y aura six formes fondamentales primaires: L'invariant et la hessienne de la cubique, les deux formes données, leur résultant (typifié par ba^3) et le résultant de la hessienne et la forme linéaire typifiée par b^2a^2.

Le numérateur est

$$\begin{aligned} &1 + a^3b^3 && + (-ab^3 - a^4b^6)\,x^4 \\ &+ (a^2b + ab^2 + a^2b^3 - a^4b^3)\,x && + (b^3 - a^2b^3 - a^3b^4 - a^4b^5)\,x^3 \\ &+ (ab + ab^3 - a^3b^3 - a^3b^5)\,x^2. && \end{aligned}$$

Les termes positifs ne perdent rien en étant assujettis au tamisage. Il reste donc sept formes fondamentales secondaires:

1 invariant typifié par............	3 . 3 . 0		
3 covariants linéaires	2 . 1 . 1	1 . 2 . 1	2 . 3 . 1
2 covariants quadratiques	1 . 1 . 2	1 . 3 . 2	
1 covariant cubique	0 . 3 . 3		

ce dernier appartenant à la cubique prise séparément.

Prenons, en deuxième lieu, le système composé d'une quadratique et d'une cubique. Le symbole a appartiendra à la première, b à la seconde.

La fraction génératrice, sous sa forme canonique, aura pour dénominateur

$$(1-a^2)(1-b^4)(1-ab^2)(1-a^3b^2)(1-ax^2)(1-bx^3)(1-b^2x^2)$$

et pour numérateur

$$\begin{aligned} &(1 + a^3b^4) \\ &+ (ab + a^2b + ab^3 + a^2b^3)\,x \\ &+ (ab^2 + a^2b^2 + a^3b^2 + a^2b^4 - a^4b^4 - a^3b^6)\,x^2 \\ &+ (ab + b^3 - a^2b^3 - ab^4 - a^2b^5 - a^3b^5)\,x^3 \\ &+ (-a^2b^4 - a^3b^4 - a^2b^6 - a^3b^6)\,x^4 \\ &+ (-ab^3 - a^4b^7)\,x^5. \end{aligned}$$

Le produit constant de chaque couple conjugué est, comme on voit, $-a^4b^7x^5$, et le rapport, qui est toujours constant entre les termes conjugués qui figurent dans la partie sans x, et la partie qui multiplie la plus haute puissance de x de ces fractions génératrices, est $-ab^3$.

Ainsi on a sept formes fondamentales primaires : les deux invariants des formes données, prises séparément ; deux autres invariants dont l'ordre, dans les coefficients de la quadratique et de la cubique, respectivement, est pour l'un (1, 2) et pour l'autre (3, 2), les deux formes données elles-mêmes et la hessienne de la cubique.

Quant au numérateur, on voit que les seuls coefficients positifs qui disparaissent sous le tamisage sont : $a^2b^2x^2$, $a^3b^2x^2$, $a^2b^4x^2$. Il reste les sept formes fondamentales secondaires, figurées par ces nombres :

1 invariant		3 . 4 . 0		
4 covariants linéaires	1 . 1 . 1	2 . 1 . 1	1 . 3 . 1	2 . 3 . 1
1 covariant cubique		1 . 2 . 2		
2 covariants cubiques		1 . 1 . 3	0 . 3 . 3	

ce dernier appartenant à la cubique donnée, prise séparément.

Comme dernier cas prenons le système composé de deux cubiques binaires ayant a et b pour leurs symboles.

Le dénominateur de la fraction génératrice canonique sera

$$\begin{aligned}&(1-a^4)(1-b^4)(1-ab)(1-ab^3)\\ &\quad\times(1-a^3b)(1-ax^3)(1-a^2x^2)(1-bx^3)(1-b^2x^2)\end{aligned}$$

donnant neuf formes fondamentales primaires dont les invariants et les hessiennes des cubiques données constituent 6 et en outre les trois invariants ayant pour symboles $ab : ab^3 : a^3b$. Son numérateur sera

$$\begin{aligned}&1+a^2b^2+a^3b^3+a^5b^5\\
&+(ab^2+a^2b+ab^4+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+a^3b^4+a^4b^3)\,x\\
&+(ab+ab^3+a^2b^2+a^3b+a^4b^4-a^5b^7-a^7b^5)\,x^2\\
&+(a^3+a^2b+ab^2+b^3-a^4b-ab^4-ab^6-2a^3b^4-2a^4b^3-a^6b-2a^5b^6-2a^6b^5)\,x^3\\
&+(ab-ab^5-a^2b^4-a^3b^3-a^4b^2-a^5b-a^2b^6-2a^3b^5-2a^4b^4\\
&\quad-2a^5b^3-a^6b^2-a^3b^7-a^4b^6-a^5b^5-a^6b^4-a^7b^3+a^7b^7)\,x^4\\
&+(-2a^2b^3-2a^3b^2-a^2b^7-2a^4b^5-2a^5b^4\\
&\quad-a^7b^2-a^4b^7-a^7b^4+a^5b^8+a^6b^7+a^7b^6+a^8b^5)\,x^5\\
&+(-ab^3-a^3b+a^4b^4+a^5b^7+a^6b^6+a^7b^5+a^7b^7)\,x^6\\
&+(a^4b^5+a^5b^4+a^5b^6+a^6b^5+a^4b^7+a^7b^4+a^6b^7+a^7b^6)\,x^7\\
&+(a^3b^3+a^5b^5+a^6b^6+a^8b^8)\,x^8.\end{aligned}$$

On remarquera que le produit constant général pour les termes conjugués est ici $+a^8b^8x^8$; bien entendu que chaque terme précédé par un coefficient, disons k, doit être compté comme k termes avec le coefficient unité dont chacun aura été conjugué. On remarquera aussi le rapport constant de $1 : a^3b^3$ entre les quatre termes au commencement et les coefficients des quatre à la fin, et de plus le produit constant partiel pour ces deux groupes, c'est-à-dire a^5b^5 pour l'un, et conséquemment $a^{11}b^{11}$ pour l'autre. Ces trois théorèmes, le produit constant général, le produit constant pour la partie qui symbolise ces invariants et le rapport constant entre les termes de cette partie et les coefficients en nombre égal à la fin, sont des caractères permanents pour toutes les fractions génératrices dont on se sert dans le calcul des invariants, et qu'on peut démontrer *a priori*.

En soumettant les termes positifs au tamisage, on trouvera sans peine que les seuls qui restent seront les suivants:

a^2b^2, a^3b^3.

ab^2x, a^2bx, ab^4x, a^4bx, a^3b^2x, a^2b^3x, a^3b^4x, a^4b^3x,

abx^2, ab^3x^2, $a^2b^2x^2$, a^3bx^2.

a^3x^3, a^2bx^3, ab^2x^3, b^3x^3.

abx^4.

Donc il y a 19 formes fondamentales secondaires, *savoir*:

2 invariants	typifiés par	2.2.0 3.3.0
8 covariants linéaires...	„	1.2.1 2.1.1 1.4.1 4.1.1 3.2.1 2.3.1 3.4.1 4.3.1
4 covariants quadratiques	„	1.1.2 1.3.2 2.2.2 3.1.2
4 covariants cubiques...	„	3.0.3 2.1.3 1.2.3 0.3.3
1 covariant biquadratique	„	1.1.4.

Les résultats sont en parfait accord avec le résumé de M. Salmon, fondé sur les travaux de MM. Clebsch et Gordan: *Lessons on Higher Algebra*, 3e édition, p. 186, qui se trouvent ainsi pleinement confirmés, de sorte qu'on sait *apodictiquement* que rien de superflu ne peut être contenu dans leur Table des *Grundformen* pour ce cas-ci.

Ici, il est nécessaire de faire une remarque très-importante sur une omission d'un certain procédé, qui, dans ma méthode, doit précéder celui de tamisage. Cette omission n'a aucune importance pour les cas que nous avons considérés, car les circonstances qui rendent nécessaire l'application de ce procédé additionnel n'existent pas pour ces cas-là, et il semble souvent ne pas arriver que dans le cas où il y a un très-grand nombre de formes comprises dans le système donné, lequel nombre, apparemment, croît avec les degrés de ces formes. C'est dans l'étude des systèmes de formes linéaires ou quadratiques que ce phénomène, dont je vais parler, s'était présenté pour la première fois, et seulement quand ce système ne comprend pas moins de quatre formes. Dans toutes les huit fractions génératrices que j'ai données dans cette Note et dans mes Communications précédentes, on trouvera facilement que, si l'on développe ces fractions en séries, les coefficients positifs ne subiront pas une diminution quelconque. Mais, quand cela arrive, c'est-à-dire quand un tel coefficient ou disparaît, ou subit une diminution, alors il faut substituer, au lieu du coefficient dans le numérateur, le chiffre diminué (qui peut être zéro, mais, comme je l'ai démontré dans l'article* cité, destiné au *Journal de Crelle*, jamais négatif). Donc, comme règle générale (quoique presque jamais nécessaire dans la pratique), il faut soumettre chaque coefficient à cet examen, auquel je donne le nom de *triage*. Voici donc le tableau complet de mes procédés pour arriver à l'échelle des formes invariantes des dérivées fondamentales :

(1) Formation de la fraction génératrice dans sa forme crue dont le développement donnerait une série allant vers l'infini dans deux directions qu'on pourrait nommer série *bivergente* ;

(2) Retranchement de la partie contenant des indices négatifs et substitution d'une fraction génératrice réduite, dont le développement en série sera *univergent* ;

(3) Multiplication du numérateur et du dénominateur de la fraction réduite par un facteur commun propre à mettre le dénominateur sous une forme telle, que chaque facteur, comme $1 - a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots x^\lambda$, qu'il contient, correspondra à un covariant ou invariant, dont le type est $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, laquelle condition sera satisfaite si, en faisant le développement en série, le terme $a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots x^\lambda$ ne se trouve pas aboli. La fraction est alors canonique ;

(4) Triage appliqué à la diminution ou suppression des coefficients positifs du numérateur, quand cela est nécessaire ;

(5) Tamisage appliqué aux coefficients ainsi triés.

Il est bon aussi de remarquer que, sans former la fonction génératrice, on peut appliquer ma méthode à la solution complète par des méthodes purement arithmétiques du problème suivant, qui, en effet, est la partie laissée incomplète dans la théorie de M. Gordan :

Étant donnés les types d'une assemblée de formes entre lesquelles sont composées toutes les GRUNDFORMEN *d'un système de formes données, on désire éliminer toutes celles qui sont superflues.*

C'est ainsi que j'ai mis à l'épreuve les résultats donnés par M. Gundelfinger, pour le cas d'un système composé d'une forme cubique et une forme biquadratique, car j'ai reculé, pour le moment, devant le travail énorme qui serait nécessaire pour former la fraction génératrice applicable à ce cas, et, comme résultat de cet examen (sauf la possibilité d'erreurs d'Arithmétique), je crois pouvoir affirmer que, sur les soixante-quatre *grundformen* prétendues, deux sont superflues, mais que les autres soixante-deux restent bonnes. Je compte revenir sur ce cas spécial dans une autre Communication que j'espère avoir l'honneur de faire à l'Académie sur ce sujet.

[* p. 218 below.]