8.

SUR LE VRAI NOMBRE DES COVARIANTS ÉLÉMENTAIRES D'UN SYSTÈME DE DEUX FORMES BIQUADRATIQUES BINAIRES.

[*Comptes Rendus*, LXXXIV. (1877), pp. 1285—1289.]

DANS une récente Communication que j'ai eu l'honneur d'adresser à l'Académie, j'ai remarqué que ma méthode pour obtenir les *grundformen* d'un système de deux formes biquadratiques ne donne raison qu'à supposer l'existence de 28 invariants et covariants élémentaires, tandis que M. le professeur Gordan en a fourni une Table de 30. J'ai appris qu'outre M. Salmon, qui a adopté les conclusions de M. Gordan sans examen, M. le professeur Bertini pense aussi, de son côté, en avoir confirmé la justesse. Il importe donc dans le plus haut degré au progrès de l'Algèbre que ce point ne puisse rester douteux; c'est pourquoi j'ai pris la liberté d'exposer dans les *Comptes rendus* la preuve concluante que deux des formes données par M. Gordan sont superflues, c'est-à-dire qu'elles ne sont en effet que des combinaisons algébriques d'autres formes contenues dans sa Table.

On me présente deux corps qu'on affirme être des corps simples: sans me donner la peine de démontrer (comme il sera facile dans le cas actuel) l'impossibilité qu'il en existe de tels possédant les caractères qu'on leur attribue; je vais démontrer l'erreur de cette affirmation, en effectuant pour ainsi dire leur décomposition sous les yeux mêmes du lecteur.

Le travail de cette décomposition sera beaucoup abrégé par la considération suivante. Quand le premier terme d'un covariant quelconque est donné, le covariant lui-même est donné; car, en vertu de l'équation différentielle partielle à laquelle chaque covariant satisfait, de ce premier terme découlent tous les autres au moyen d'opérations explicites de différentiation et d'addition exclusivement. Ainsi, pour prouver qu'un covariant donné est la somme d'autres covariants, il suffit de démontrer que le coefficient du premier terme de l'un est la somme des coefficients des premiers termes des autres.

Or servons-nous en général du symbole ijk pour désigner le coefficient de x^k dans un covariant élémentaire dont l'ordre, par rapport aux coefficients d'une forme biquadratique binaire donnée, est i, par rapport aux coefficients d'une autre forme semblable j, et dont le degré, relatif aux variables x, y, est k.

Posons

$$a,\ 4b,\ 6c,\ 4d,\ e, \qquad \alpha,\ 4\beta,\ 6\gamma,\ 4\delta,\ \epsilon$$

pour les coefficients des deux formes biquadratiques données.

Alors, en suivant les prescriptions données par M. Gordan lui-même, on trouvera facilement les valeurs suivantes pour les invariants et covariants fondamentaux dont l'existence n'est pas douteuse, c'est-à-dire

$$1\,.\,1\,.\,2 = a\delta - 3b\gamma + 3c\beta - d\alpha, \qquad 1\,.\,1\,.\,4 = a\gamma - 2b\beta + c\alpha,$$

$$1\,.\,1\,.\,0 = a\epsilon - 4b\delta + bc\gamma - 4d\beta + e\alpha, \qquad 1\,.\,1\,.\,6 = a\beta - b\alpha,$$

$$1\,.\,0\,.\,4 = a,$$

$$1\,.\,2\,.\,2 = a\,(\gamma\delta - \beta\epsilon) + b\,(\alpha\epsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2) + 3c\,(\beta\gamma - \alpha\delta) + 2d\,(\alpha\gamma - \beta^2),$$

$$0\,.\,1\,.\,4 = \alpha,$$

$$2\,.\,1\,.\,2 = \alpha\,(be - cd) - \beta\,(ae + 2bd - 3c^2) + 3\gamma\,(ad - bc) - 2\delta\,(ac - b^2).$$

On comprend que dans ce qui précède j'aie réduit chaque expression à sa forme numérique la plus simple. Le signe algébrique est disponible à volonté, et j'ai attribué à chacune le signe le plus commode pour mettre en évidence le rapport numérique qui lie le produit de chaque couple à la forme 2 . 2 . 6 dite *élémentaire* par M. Gordan, dont la valeur (voir *Salmon's Lessons on higher Algebra*, 3e édition, p. 206) est obtenue de la manière suivante. Dans la *hessienne* d'une des formes données pour x, y, écrivez x_1, y_1, dans l'autre x_2, y_2. Multipliez ces deux hessiennes ainsi modifiées ensemble et opérez sur ce produit avec le symbole $\left(\dfrac{d}{dx_1}\dfrac{d}{dy_2} - \dfrac{d}{dx_2}\dfrac{d}{dy_1}\right)^2$, et, dans le résultat, remplacez x_1, x_2 par x; y_1, y_2 par y; c'est la méthode de M. Gordan pour obtenir sa forme 2 . 2 . 6, traduite dans le langage des hyperdéterminants. Moins 6 fois ce résultat pris dans sa forme arithmétique réduite (et affectée d'un signe algébrique convenable) sera la somme des quatre produits précédents, comme on le verra par la Table ci-jointe, où l'on remarquera que la somme des chiffres de chaque colonne sera égale à zéro.

La manière de comprendre cette Table s'explique d'elle-même. Par exemple, la seconde ligne enseigne que le produit 1 . 1 . 0 par 1 . 1 . 6 sera égal à

$$[a^2\beta\epsilon - ab\alpha\epsilon - 4ab\beta\delta + 6ac\beta\gamma \ldots],$$

et de même pour les autres lignes. La dernière ligne montre que la forme de l'ordre 2 dans chaque système de coefficients et du degré 6 en x et y, citée par M. Gordan comme un covariant fondamental calculé selon la règle donnée par lui, aura le coefficient de x^6 égal à

$$ac\alpha\delta - ac\beta\gamma - b^2\alpha\delta + b^2\beta\gamma - ad\alpha\gamma + ad\beta^2 + bc\alpha\gamma - bc\beta^2.$$

A.—Table *pour effectuer la décomposition de la forme dite élémentaire du type* 2 . 2 . 6 *de M. Gordan*

	$a a \beta \epsilon$	$a a \gamma \delta$	$a b a \epsilon$	$a b \beta \delta$	$a b \gamma \gamma$	$a c a \delta$	$a c \beta \gamma$	$b b a \delta$	$b b \beta \gamma$	$a d a \gamma$	$a d \beta \beta$	$b c a \gamma$	$b c \beta \beta$	$a e a \beta$	$b d a \beta$	$c c a \beta$	$b e a a$	$c d a a$
1 . 1 . 2 × 1 . 1 . 4		−1		+2	+3	−1	−3		−6	+1		+3	+6		−2	−3		+1
1 . 1 . 0 × 1 . 1 . 6	1		−1	−4			6	4			−4	−6		1	4		−1	
1 . 0 . 4 × 1 . 2 . 0	−1	1	1	2	−3	−3	3			2	−2							
0 . 1 . 4 × 2 . 1 . 2						−2		2		3		−3		−1	−2	3	1	−1
−[2 . 2 . 6] de Gordan sextuplé						6	−6	−6	6	−6	6	6	−6					

B.—Table *pour effectuer la décomposition de la forme dite élémentaire du type* 2 . 2 . 4 *de M. Gordan*

	$a a \gamma \epsilon$	$a a \delta \delta$	$a b \beta \epsilon$	$a b \gamma \delta$	$a c a \epsilon$	$a c \beta \delta$	$a c \gamma \gamma$	$b b a \epsilon$	$b b \beta \delta$	$b b \gamma \gamma$	$a d a \delta$	$a d \beta \gamma$	$b c a \delta$	$b c \beta \gamma$	$a e a \gamma$	$a e \beta \beta$	$b d a \gamma$	$b d \beta \beta$	$c c a \gamma$	$c c \beta \beta$	$b e a \beta$	$c d a \beta$	$c e a a$	$d d a a$
1 . 1 . 2 × 1 . 1 . 2		1		−6		6				9	−2			−18			6			9		−6		1
1 . 1 . 0 × 1 . 1 . 4	−1		2	4	−1		−6		−8			4	4	12	−1			−8	−6		2	4	−1	
0 . 2 . 0 × 2 . 0 . 4					1	−4	3	−1	4	−3														
2 . 0 . 0 × 0 . 2 . 4															1	−1	−4	4	3	−3				
1 . 0 . 4 × 1 . 2 . 0	1	−1	−2	2	1	2	−3				−2	2			1	−1								
0 . 1 . 4 × 2 . 1 . 0					1			−1			−2		2		1		2		−3		−2	2	1	−1
−[2 . 2 . 4] de Gordan doublé					−2	−4	6	2	4	−6	6	−6	−6	6	−2	2	−4	4	+6	−6				

Je passe à la considération de la forme 2.2.4, et, comme dans le cas précédent, je me sers du symbole *ijk* pour représenter le coefficient principal dans le covariant dont les ordres et le degré sont i, j, k.

On trouvera

$$1.1.2 = a\delta - 3b\gamma + 3c\beta - d\alpha,$$

$$1.1.0 = -a\epsilon + 4b\delta - 6c\gamma + 4d\beta - e\alpha, \qquad 1.1.4 = a\gamma - 2b\beta + c\alpha,$$

$$0.2.0 = \alpha\epsilon - 4\beta\delta + 3\gamma^2, \qquad 2.0.4 = ac - b^2,$$

$$2.0.0 = ae - 4bd + 3c^2, \qquad 0.2.4 = \alpha\gamma - \beta^2,$$

$$1.0.4 = a,$$

$$1.2.0 = e(\alpha\gamma - \beta^2) - 2d(\alpha\delta - \beta\gamma) + c(\alpha\epsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2) - 2b(\beta\epsilon - \gamma\delta) + a(\gamma\epsilon - \delta^2),$$

$$0.1.4 = \alpha,$$

$$2.1.0 = \epsilon(ac - b^2) - 2\delta(ad - bc) + \gamma(ae + 2bd - 3c^2) - 2\beta(be - cd) + \alpha(ce - d^2).$$

Finalement la forme de M. Gordan, dont le coefficient principal est représenté par [2.2.4], s'obtient tout à fait comme la forme correspondant à [2.2.6] dans le cas précédent, avec la seule exception que l'opérateur différentiel sur le produit des hessiennes sera la puissance quatrième au lieu de la puissance deuxième du symbole $\frac{d}{dx_1}\frac{d}{dy_2} - \frac{d}{dx_2}\frac{d}{dy_1}$. Cette opération donnera

$$(b^2 - ac)(\alpha\epsilon + 2\beta\delta - 3\gamma^2) + (\beta^2 - \alpha\gamma)(ae + 2bd - 3c^2) + 3(ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma)$$

pour valeur de [2.2.4], ou plutôt je préférerai considérer cette fonction comme la valeur de $-$[2.2.4]. Alors on trouvera que 2 fois [2.2.4] sera la somme des six produits précédents, comme on le voit par la Table ci-contre, où l'on remarquera que la somme de chaque colonne donne la somme zéro, comme dans le cas précédent.

J'ajouterai seulement que cette preuve éclatante de l'insuffisance de la méthode de M. Gordan et de son école, pour séparer les formes véritablement élémentaires des formes superflues qui s'y rattachent (insuffisance reconnue par M. Gordan lui-même de la manière la plus loyale dans son discours inaugural prononcé à Erlangen), n'ôte rien à la valeur immense du service qu'il a rendu à l'Algèbre, en ayant le premier démontré l'existence d'une limite au nombre de ces formes.