

XII.

SULLA TEORIA DEI MOTI DEL POLO NELLA IPOTESI
DELLA PLASTICITÀ TERRESTRE

«Atti Acc. Sc. di Torino», vol. XXX, 1895, pp. 729-743.

1. In una Nota presentata nella seduta del 5 maggio scorso ⁽¹⁾ ho accennato ad uno studio sulle perturbazioni prodotte dalla plasticità terrestre sui moti del polo di rotazione dovuti ai movimenti interni. Mi permetto ora di esporre brevemente alcune considerazioni preliminari su questo soggetto, riserbandomi di ritornarvi più diffusamente in appresso. Supporrò in questo primo studio, che i moti interni siano stazionarii, prescindendo dalle variazioni periodiche dei moti stessi che esaminerò in seguito, ed ammetterò che, quando il polo d'inerzia non coincide con quello istantaneo di rotazione, l'effetto dovuto alla plasticità consista in questo: *che il primo tende ad avvicinarsi all'altro*. Ritorrerò poi sulla legge con cui può suppersi che accada questo avvicinamento.

Per le notazioni usate mi riferirò alla Nota già citata.

2. Riprendiamo in esame i risultati che si ottengono allorché si trascura la plasticità terrestre.

Ammesso che i moti interni siano stazionari, le formole (4) e (5) della Nota suddetta si riducono a

$$\begin{cases} p = -\frac{\beta_0}{\rho} + C_1 \cos \rho t - C_2 \sin \rho t \\ q = \frac{\alpha_0}{\rho} + C_1 \sin \rho t + C_2 \cos \rho t \\ \frac{M_1}{A} = -\frac{\beta_0}{\omega} \\ \frac{M_2}{A} = \frac{\alpha_0}{\omega} \end{cases}$$

da cui segue, posto $c_1 = C_1/\omega$, $c_2 = C_2/\omega$,

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\dot{p}}{\omega} = \frac{M_1}{A\rho} + c_1 \cos \rho t - c_2 \sin \rho t \\ \frac{\dot{q}}{\omega} = \frac{M_2}{A\rho} + c_1 \sin \rho t + c_2 \cos \rho t. \end{cases}$$

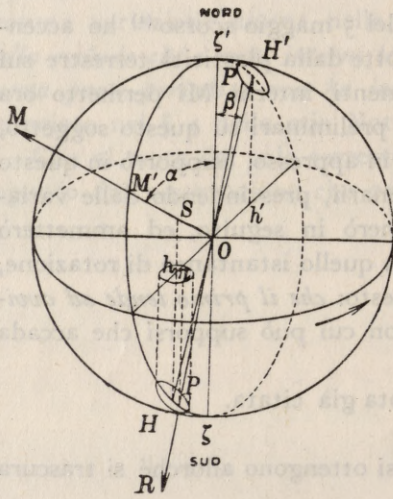
(1) *Sui moti periodici del polo terrestre*, in «Atti Acc. di Torino», vol. XXX; pp. 547-561. [In questo vol.: X, pp. 141-151].

Abbiamo poi

$$\rho = \frac{C-A}{A} \omega + \frac{M_3}{A}.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che M_3 sia negativo, cioè che i moti interni abbiano la componente della coppia di quantità di moto nel senso dell'asse terrestre, di segno contrario alla coppia di quantità di moto della terra. Vedremo poi quali modificazioni debbono apportarsi alle formule se si verificasse il caso opposto.

In questa ipotesi, assumendo come positiva una rotazione che avviene nel verso delle lancette di un orologio, se conduciamo pel centro della terra come origine i due segmenti OR e OM che rappresentano rispettivamente la rotazione terrestre e l'asse dei moti interni e li prolunghiamo nel senso positivo, avremo che, mentre il primo incontrerà l'emisfero australe, l'altro incontrerà quello boreale.



Ciò premesso se stacciamo nel verso positivo della direzione OR un segmento OP eguale ad 1, questo si proietterà in π sul piano dell'equatore, e le proiezioni di $O\pi$ sugli assi ξ e η saranno rispettivamente p/ω , q/ω . Analogamente, staccando sulla direzione OM un segmento OS eguale ad $OM/A\rho$, il punto S proiettato sul piano dell'equatore in h sarà tale che le proiezioni di Oh sugli assi ξ e η risulteranno eguali a $M_1/A\rho$, $M_2/A\rho$.

Allora le formule (I) potranno interpretarsi nella maniera seguente: *Il punto π descrive attorno al centro h una circonferenza ruotando colla velocità angolare uniforme ρ .*

* 3. Si costruisca ora una sfera di centro O e di raggio unitario. Essa incontrerà l'asse OM nel punto M' e l'asse OR nel punto P. Siccome questo punto si scosta pochissimo dal polo d'inerzia ζ , così potremo approssimativamente ritenere che esso descriva una circonferenza il cui centro sia il punto H della sfera avente per proiezione h sul piano dell'equatore.

Volendo ora considerare tutti gli elementi nell'emisfero boreale, tracciamo sulla sfera i punti diametralmente opposti a ζ , H, P che denoteremo rispettivamente con ζ' , H' , P' . Evidentemente i quattro punti P' , H' , ζ' , M' apparterranno tutti all'emisfero boreale.

Chiamiamoli rispettivamente: *il polo di rotazione, il centro del moto polare, il polo d'inerzia, il centro dei moti interni.*

Sia h' la proiezione di H' sul piano dell'equatore; avremo

$$Oh' = Oh,$$

quindi

$$\text{sen } H'\zeta' = Oh = OS \text{ sen } M'\zeta'$$

da cui segue

$$(2) \quad \frac{\text{sen } H'\zeta'}{\text{sen } M'\zeta'} = OS = \frac{OM}{A\rho} = \frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}{(C-A)\omega + M_3} = \varepsilon.$$

Ponendo

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2},$$

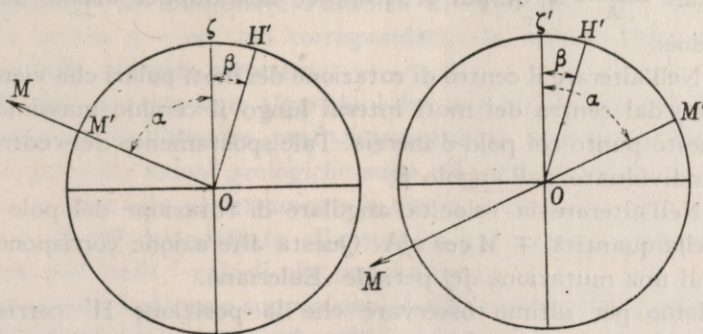
avremo

$$M_3 = -M \cos M'\zeta'$$

onde

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{M}{(C-A)\omega - M \cos M'\zeta'} \\ \rho = \frac{(C-A)\omega - M \cos M'\zeta'}{A} \end{array} \right.$$

Noi abbiamo fin qui supposto che M_3 fosse negativo, e perciò il punto d'intersezione di OM colla sfera è risultato nell'emisfero boreale. Se invece M_3 fosse positivo, prolunghiamo MO dalla parte del punto O finché non



incontri la superficie sferica nell'emisfero boreale nel punto che seguirà a chiamarsi il centro dei moti interni e s'indicherà sempre con M' ; mentre nel caso precedente il punto ζ' risultava intermedio fra M' e H' , ora M' e H' giaceranno dalla stessa parte di ζ' . Chiamiamo rispettivamente α e β gli archi $\zeta'M'$ e $\zeta'H'$ e contiamoli a partire da ζ' ; avremo allora che le (2) e (3) si scriveranno

$$\frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } \alpha} = \mp \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{M}{(C-A)\omega \mp M \cos \alpha}$$

$$\rho = \frac{(C-A)\omega \mp M \cos \alpha}{A}$$

in cui dovrà prendersi il segno superiore, oppure quello inferiore, secondoche siamo nel primo o secondo caso.

Potremo dunque riassumere le leggi trovate per il moto del polo, quando non si tenga conto della plasticità terrestre, e si suppongano stazionarii i moti interni, nei termini seguenti:

1° Il centro dei moti interni, il polo d'inerzia e il centro dei moti polari appartengono ad uno stesso cerchio massimo della sfera.

2° Chiamando rispettivamente α e β le distanze contate sulla sfera fra il polo d'inerzia e i due centri dei moti interni e dei moti polari, si ha

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \mp \varepsilon = \frac{\mp M}{(C-A)\omega \mp M \cos \alpha}.$$

3° Il polo di rotazione descrive una circonferenza attorno al centro dei moti polari colla velocità angolare

$$\rho = \frac{(C-A)\omega \mp M \cos \alpha}{A}.$$

Queste leggi esprimono in modo manifesto quali sono gli effetti prodotti dai moti interni sul moto del polo. Infatti, se i primi non esistessero, il polo descriverebbe una circonferenza attorno al polo d'inerzia colla velocità angolare $\frac{C-A}{A}\omega$; quindi si riconosce una duplice azione dei moti interni, e cioè:

1° Nell'alterare il centro di rotazione dei moti polari che viene respinto o (attratto) dal centro dei moti interni lungo il cerchio massimo che congiunge questo punto col polo d'inerzia. Tale spostamento del centro dei moti polari è individuato dall'angolo β ;

2° Nell'alterare la velocità angolare di rotazione del polo che viene variata della quantità $\mp M \cos \alpha / A$. Questa alterazione corrisponde evidentemente ad una mutazione del periodo Euleriano.

Facciamo per ultimo osservare che la posizione H' corrisponde ad un polo permanente di rotazione, vale a dire i moti interni fanno sì che il polo d'inerzia cessi dall'essere un polo permanente di rotazione e trasportano la proprietà di essere un polo permanente di rotazione dal punto ζ' al punto H' .

4. Dopo esserci in tal modo formato una idea dell'effetto dei moti interni, quando si trascuri la plasticità terrestre, veniamo ad esaminare le perturbazioni che questa produce nei moti del polo. A tal fine immaginiamo proiettata la superficie della terra dal centro O sulla sfera. Se ammettiamo di considerare i fenomeni durante un intervallo di tempo non lunghissimo, potremo supporre che, anche quando la terra per la sua plasticità sopporti delle deformazioni, non si alteri la configurazione dei mari e dei continenti della sfera, mentre rispetto a questi cambierà di posizione l'immagine del polo d'inerzia; così la plasticità della terra ci si manifesterà soltanto in quanto ammetteremo che l'immagine terrestre sulla sfera rimanga fissa, mentre l'immagine del polo d'inerzia sia un punto suscettibile di muoversi sulla sfera.

La ipotesi che i moti interni siano permanenti si tradurrà dicendo che il centro dei moti interni è un punto fisso della sfera e $M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ si conserva costante.

Faremo anche la supposizione che i tre punti H' , P' , ζ' si conservino sempre vicinissimi fra loro, tantoché possano trascurarsi le potenze delle loro distanze superiori alla prima. Ricordiamo a questo proposito che tutta l'analisi della precedente Nota vale appunto in questo ordine di approssimazione.

Finalmente ammetteremo che la influenza della plasticità si faccia sentire nella maniera seguente: che il polo d'inerzia tenda costantemente ad avvicinarsi al polo di rotazione e vi tenda con tanto maggiore velocità quanto maggiore è la distanza fra questi due punti, in modo che *il polo d'inerzia si muova in ogni istante nella direzione dell'arco di cerchio massimo che lo congiunge alla posizione occupata in quell'istante dal polo di rotazione, con una velocità proporzionale alla distanza fra questi due punti.*

Chiameremo *coefficiente di plasticità* il rapporto μ fra la velocità del polo d'inerzia e la detta distanza. Esso avrà un valore positivo, che lasceremo indeterminato, avremo cioè $\infty > \mu > 0$; ma facciamo notare fin da ora il significato dei due casi limiti fra tutti quelli possibili; vale a dire se $\mu = 0$, ciò corrisponderà all'ammettere l'assenza di plasticità nella terra; se ammetteremo invece $\mu = \infty$, ciò corrisponderà alla ipotesi della adattabilità immediata dello sferoide terrestre.

Questi due casi non sono altro che i due casi limiti immaginati e sapientemente discussi dall'illustre prof. SCHIAPARELLI, nell'esame da lui fatto della influenza delle azioni geologiche sulla rotazione terrestre. Il caso intermedio non corrisponde perfettamente a quello immaginato dal prof. SCHIAPARELLI; la modificazione fatta alla sua ipotesi venne introdotta soltanto per rendere più facili i calcoli che seguiranno.

Riassumendo le diverse supposizioni fatte, avremo che il problema della rotazione terrestre si presenta nei termini seguenti:

Si hanno quattro punti situati sulla sfera: M' (centro dei moti interni) ζ' (polo d'inerzia), H' (centro dei moti polari), P' (polo di rotazione) che seguono nel loro moto le seguenti leggi:

1° M' è un punto fisso della sfera;

2° M' , ζ' , H' appartengono ad uno stesso cerchio massimo e

$$\frac{\text{sen } \zeta' H'}{\text{sen } \zeta' M'} = \mp \varepsilon = \frac{\mp M}{(C - A) \omega \mp M \cos \zeta' M'};$$

3° P' ruota in ciascun istante attorno ad H' colla velocità angolare

$$\rho = \frac{(C - A) \omega \mp M \cos \zeta' M'}{A};$$

4° ζ' si muove in ogni istante nel senso $\zeta' P'$ con una velocità eguale al prodotto di μ per $\zeta' P'$.

5. Mediante le precedenti quattro condizioni si potrebbe porre immediatamente in equazione il problema; ma noi vogliamo trasformarlo ancora per renderlo accessibile ad un'analisi del tutto elementare.

A tale scopo passiamo dalla rappresentazione sferica della terra alla sua rappresentazione piana mediante una proiezione stereografica.

Sceghieremo come piano di proiezione il piano tangente alla sfera in M' , e come centro di proiezione il punto M'' diametralmente opposto ad M' .

Se prendiamo come coordinate dei punti sulla sfera la colatitudine θ e la longitudine φ relative al polo M' , il quadrato dell'elemento lineare sulla sfera sarà

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2$$

e nella rappresentazione stereografica

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^4 \frac{1}{2} \theta} (d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2)$$

d'onde

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta}$$

vale a dire gli archi infinitesimi della sfera sono alterati colla rappresentazione stereografica nel rapporto $1/\cos^2 \frac{1}{2} \theta$.

Ora la ipotesi fatta, che siano trascurabili le potenze degli archi $\zeta'H'$, $H'P'$, $P'\zeta'$ superiori alla prima, equivale a considerare gli archi stessi come infinitesimi; potremo dunque ritenere che nella proiezione stereografica le loro lunghezze si sono alterate nel rapporto $1/\cos^2 \frac{1}{2} \alpha$. Chiamando dunque ζ_1, H_1, P_1 le rispettive proiezioni stereografiche di ζ', H', P' , avremo

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\zeta' H'}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}$$

Ora sappiamo che

$$\frac{\text{sen } \zeta' H'}{\text{sen } \alpha} = \mp \varepsilon,$$

quindi sostituendo al $\text{sen } \zeta' H'$ l'arco $\zeta' H'$ sarà

$$\zeta' H' = \mp \varepsilon \text{ sen } \alpha$$

e perciò

$$\zeta_r H_r = \frac{\mp \varepsilon \operatorname{sen} \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = \mp 2 \varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha.$$

Ma

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \zeta_r M',$$

dunque

$$\frac{\zeta_r H_r}{\zeta_r M'} = \mp \varepsilon.$$

Inoltre dalla similitudine nelle parti infinitesime che si ha in ogni rappresentazione stereografica potremo ricavare che il punto P_r ruota lungo una circonferenza attorno al centro H_r colla velocità angolare ρ , quindi le leggi del moto del polo allorché si trascura la plasticità terrestre che abbiamo enunciate nel § 3, si trasformeranno nelle seguenti:

1° *Le proiezioni stereografiche M_r, ζ_r, H_r del centro dei moti interni, del polo d'inerzia e del centro dei moti polari sono allineati e*

$$\frac{\zeta_r H_r}{\zeta_r M'} = \mp \varepsilon;$$

2° *La proiezione stereografica P_r del polo di rotazione descrive una circonferenza attorno ad H_r colla velocità angolare ρ .*

Per procedere ora a determinare le leggi del movimento, nella ipotesi della plasticità, trasformiamo le espressioni di ε e di ρ .

Posto $\zeta_r M' = D$, avremo

$$D = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha,$$

quindi

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2}.$$

Ne segue che

$$(3') \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \frac{M}{(C-A)\omega \mp M \left(\frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)} \\ \rho = \frac{(C-A)\omega \mp M \left(\frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)}{A} \end{array} \right.$$

Possiamo dunque enunciare le quattro leggi del § 4, valide nella ipotesi della plasticità sotto una nuova forma, che è la seguente:

Si hanno quattro punti M', ζ_r, H_r, P_r , in un piano:

1° M' è un punto fisso;

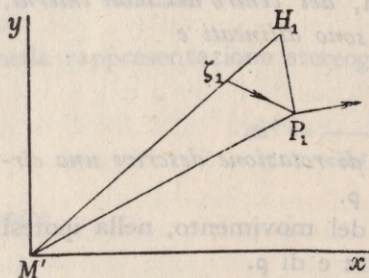
2° M', ζ_1, H_1 sono in linea retta e, posto $\zeta_1 M' = D$

$$\frac{\zeta_1 H_1}{D} = \frac{\mp M}{(C-A)\omega \mp M \left(\frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)};$$

3° P_1 ruota in ciascun istante intorno ad H_1 colla velocità angolare

$$\rho = (C-A)\omega \mp M \left(\frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right);$$

4° ζ_1 si muove in ogni istante nel senso $\zeta_1 P_1$ colla velocità $\mu \delta$ essendo $\delta = \zeta_1 P_1$.



Quest'ultima legge si ottiene tenendo conto che, colla rappresentazione stereografica, le velocità dei punti restano alterate nello stesso rapporto degli archi infinitesimi adiacenti.

6. Poniamo ora in equazione il problema. Prendiamo perciò nel piano della rappresentazione stereografica due assi fissi x, y colla origine in M' , e chiamiamo rispettivamente $x, y; x_1, y_1; x_2, y_2$ le coordinate dei punti P_1, ζ_1, H_1 . La condizione seconda del paragrafo precedente si esprimerà scrivendo

$$(4) \quad \frac{x_2 - x_1}{-x_1} = \frac{y_2 - y_1}{-y_1} = \mp \varepsilon.$$

La condizione 3ª sarà

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\rho(y_2 - y) \\ \frac{dy}{dt} = \rho(x_2 - x), \end{cases}$$

da cui si ricava che il senso della rotazione sarà individuato dalla scelta della orientazione rispettiva degli assi x, y . Finalmente la condizione 4ª si scriverà

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \mu(x - x_1) \\ \frac{dy_1}{dt} = \mu(y - y_1). \end{cases}$$

Dalle (4) segue

$$x_2 = (1 \pm \varepsilon) x_1, \quad y_2 = (1 \pm \varepsilon) y_1;$$

quindi le (5) diverranno

$$(5') \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\rho [(1 \pm \epsilon) y_1 - y] \\ \frac{dy}{dt} = \rho [(1 \pm \epsilon) x_1 - x]. \end{cases}$$

Da queste equazioni seguirà, ponendo $\Delta^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = 2 \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) = 2 \rho (1 \pm \epsilon) (x_1 y - y_1 x).$$

Si osservi che ρ è piccola e $(x_1 y - y_1 x)$ è il doppio dell'area del triangolo $M' P_1 \zeta_1$, quindi è piccola dello stesso ordine della distanza $\zeta_1 P_1$, perciò i cambiamenti di grandezza di Δ^2 e quindi di D^2 saranno piccoli. Oltre a ciò nelle espressioni (3') trovate per ϵ e ρ , il termine

$$M \left(\frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2} \right)$$

è piccolo rispetto a $(C - A) \omega$; dunque esaminando il moto durante un tempo non lunghissimo, possiamo approssimativamente trascurare le variazioni di grandezza di ϵ e ρ ed assumerle in conseguenza costanti.

Le quattro equazioni (5') e (6) si riducono allora ad equazioni lineari a coefficienti costanti.

7. Per integrarle si ponga

$$\begin{aligned} x &= C e^{zt} & , & & y &= K e^{zt} \\ x_1 &= C_1 e^{zt} & , & & y_1 &= K_1 e^{zt} \end{aligned}$$

con C, C_1, K, K_1 costanti.

Sostituendo nelle (6) e (5') i precedenti valori di x, y, x_1, y_1 , otterremo

$$(7) \quad \begin{cases} C_1(z + \mu) - C\mu = 0 \\ K_1(z + \mu) - K\mu = 0 \\ Cz + K_1\rho(1 \pm \epsilon) - K\rho = 0 \\ -C_1\rho(1 \pm \epsilon) + C\rho + Kz = 0; \end{cases}$$

perciò z sarà una radice della equazione di quarto grado

$$\begin{vmatrix} z + \mu & , & -\mu & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & z + \mu & , & -\mu \\ 0 & , & z & , & \rho(1 \pm \epsilon) & , & -\rho \\ -\rho(1 \pm \epsilon) & , & \rho & , & 0 & , & z \end{vmatrix} = 0$$

che sviluppata diviene

$$(8) \quad z^4 + 2\mu z^3 + (\mu^2 + \rho^2) z^2 + 2\rho^2 \mu \epsilon z + \mu^2 \rho^2 \epsilon^2 = 0.$$

Chiamando z', z'', z''', z^{IV} le quattro radici, e $C_1^{(i)}, C^{(i)}, K_1^{(i)}, K^{(i)}$ un sistema di valori per C_1, C, K_1, K che soddisfano le (7), avremo

$$(9) \quad \begin{cases} x = \sum_1^4 M_i C^{(i)} e^{z^{(i)} t} \\ y = \sum_1^4 M_i K^{(i)} e^{z^{(i)} t} \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} x_1 = \sum_1^4 M_i C_1^{(i)} e^{z^{(i)} t} \\ y_1 = \sum_1^4 M_i K_1^{(i)} e^{z^{(i)} t} \end{cases}$$

in cui le M_i sono costanti arbitrarie.

8. L'equazione (8) si risolve facilmente. Posto infatti $\mp \varepsilon = \varepsilon'$ essa si scriverà

$$z^2 (z + \mu)^2 + \rho^2 (z + \mu \varepsilon')^2 = 0$$

d'onde

$$z (z + \mu) \pm i \rho (z + \mu \varepsilon') = 0$$

e quindi si avranno le quattro radici date da

$$z' = \frac{-\mu + u - i(\rho - v)}{2}$$

$$z'' = \frac{-\mu + u + i(\rho - v)}{2}$$

$$z''' = \frac{-\mu - u - i(\rho + v)}{2}$$

$$z^{IV} = \frac{-\mu - u + i(\rho + v)}{2}$$

essendo

$$u = \sqrt{\frac{V(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16 \mu^2 \rho^2 \varepsilon' (1 - \varepsilon') + \mu^2 - \rho^2}{2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{V(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16 \mu^2 \rho^2 \varepsilon' (1 - \varepsilon') + \rho^2 - \mu^2}{2}}$$

in cui i radicali sono presi nel loro valore assoluto.

9. Esaminiamo in particolare i due casi limiti considerati precedentemente.

Supponiamo che sia $\mu = 0$ (ossia che manchi la plasticità) allora la equazione (8) diverrà

$$z^4 + \rho^2 z^2 = 0.$$

Due radici sono nulle, due altre divengono eguali a $\pm i\rho$. Il moto è dunque periodico col periodo $2\pi/\rho$, cioè quello euleriano variato nel rapporto esaminato nella Nota precedente.

Consideriamo invece il caso $\mu = \infty$. La equazione (8) diverrà, dividendola per μ^2 , quindi facendo $1/\mu = 0$,

$$z^2 + \rho^2 \varepsilon^2 = 0,$$

ossia due delle radici diventano ∞ e le altre due $\pm i\rho\varepsilon$. Il moto è dunque periodico col periodo $2\pi/\rho\varepsilon = 2\pi A/M$. In questo caso le (6) danno

$$x = x_1, \quad y = y_1,$$

vale a dire il polo d'inerzia coincide sempre con quello di rotazione, onde le (5') divengono

$$\frac{dx}{dt} = -\rho\varepsilon y = -\frac{M}{A} y, \quad \frac{dy}{dt} = \rho\varepsilon x = \frac{M}{A} x$$

d'onde

$$x = N_1 \cos\left(\frac{M}{A} t + N\right), \quad y = N_1 \sin\left(\frac{M}{A} t + N\right)$$

N_1 ed N essendo due costanti arbitrarie. Il polo di rotazione descrive dunque una circonferenza attorno al centro dei moti interni colla velocità angolare M/A .