XV.

SUR UNE CLASSE DE ds^2 À TROIS VARIABLES

« Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences de Paris », t. CXXIV (1897), pp. 1434-1438.

On ne connaît jusqu'ici, faisait remarquer il y a quelques mois M. Appell, aucun type de force vive, dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique, et qui ne soit pas réductible par un choix convenable des variables aux formes de M. Staeckel ou de M. Painlevé.

Je vais indiquer une classe assez étendue de forces vives (ou, ce qui est le même, de ds^2) à trois variables, qui ne sont pas réductibles à la forme de M. Staeckel, ni à la forme

$$(1) \qquad [\varphi(x_1, x_2) + \psi(x_3)][\mathcal{T}_1(x_1, x_2, x_1', x_2') + \mathcal{T}_2(x_3, x_3')]$$

(forme de M. Painlevé), quoique leurs géodésiques admettent une intégrale quadratique.

Prenons des variables canoniques x_i', p_i $(i = 1, 2, 3)$, et cherchons les forces vives $H \equiv \sum_{rs}^{3}{}_{1} a^{(rs)} p_r p_s$, telles que $H_1 \equiv 2p_1p_2 =$ const. soit une intégrale pour les géodésiques. En exprimant que le crochet (HH_1) s'annule identiquement, on trouve pour les $a^{(rs)}$ des équations qui s'intègrent immédiatement et donnent

$$(2) \qquad \begin{cases} a^{(11)} = \varphi x_1^2 + \varphi_1 + \mathcal{P}, \quad a^{(22)} = \varphi x_2^2 + \varphi_2 x_2 + \mathcal{Q}, \quad a^{(33)} = \varphi_3, \\ a^{(23)} = \psi x_2 + \varphi_4, \qquad a^{(13)} = -\psi x_1 + \varphi_5, \\ a^{(12)} = -\varphi x_1 x_2 - \dfrac{1}{2}(\varphi_2 x_1 + \varphi_1 x_2) + \varphi_6, \end{cases}$$

où l'on désigne par φ, ψ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_6$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ des fonctions de la variable x_3.

Il s'agit de prouver que [les $a^{(rs)}$ ayant les valeurs (2)] $H \equiv \sum_{rs}^{3}{}_{1} a^{(rs)} p_r p_s$

www.rcin.org.pl

ne peut pas, en général, acquérir la forme (1): il suffira évidemment de développer la démonstration pour un cas particulier de (2); je prendrai

$$H \equiv (cx_1^2 + \varphi)p_1^2 + (cx_2^2 + \psi)p_2^2 + p_3^2 - 2cx_1x_2p_1p_2\,,$$

c étant une constante.

Faisons voir avant tout que les géodésiques de H n'admettent (lorsque les fonctions φ et ψ de x_3 demeurent indéterminées) aucune intégrale quadratique distincte de $H = \text{const.}$, $H_1 = \text{const.}$ Pour cela, nous partons de l'hypothèse que $H_2 \equiv \sum_{rs}^{3}{}_{1} a^{(rs)} p_r p_s = \text{const.}$ soit une intégrale. On doit avoir $(HH_2) \equiv 0$, c'est-à-dire (*)

$$\text{(3)} \qquad \frac{\partial \alpha^{(33)}}{\partial x_3} = 0\,,$$

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial \alpha^{(13)}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(x_1\,\Delta\alpha^{(33)} - \varphi\,\frac{\partial \alpha^{(33)}}{\partial x_1}\right),$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial \alpha^{(23)}}{\partial x_3} = \frac{1}{2}\left(-\,x_2\,\Delta\alpha^{(33)} - \psi\,\frac{\partial \alpha^{(33)}}{\partial x_2}\right),$$

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial \alpha^{(11)}}{\partial x_3} = 2x_1(\Delta + c)\alpha^{(13)} - 2\,\varphi\,\frac{\partial \alpha^{(13)}}{\partial x_1} + \varphi'\alpha^{(33)},$$

$$\text{(7)} \qquad \frac{\partial \alpha^{(22)}}{\partial x_3} = -\,2x_2(\Delta - c)\alpha^{(23)} - 2\,\psi\,\frac{\partial \alpha^{(23)}}{\partial x_2} + \psi'\alpha^{(33)}\,,$$

$$\text{(8)} \qquad x_1(\Delta + 2c)\alpha^{(11)} - \varphi\,\frac{\partial \alpha^{(11)}}{\partial x_1} + \varphi'\alpha^{(13)} = 0\,,$$

$$\text{(9)} \qquad -\,x_2(\Delta - 2c)\alpha^{(22)} - \psi\,\frac{\partial \alpha^{(22)}}{\partial x_2} + \psi'\alpha^{(23)} = 0\,,$$

$$\text{(10)} \qquad -\,2x_2\,\Delta\alpha^{(12)} + x_1(\Delta - 2c)\alpha^{(22)} - 2\psi\,\frac{\partial \alpha^{(12)}}{\partial x_2} - \varphi\,\frac{\partial \alpha^{(22)}}{\partial x_1} + \psi'\alpha^{(13)} = 0,$$

$$\text{(11)} \qquad 2x_1\,\Delta\alpha^{(12)} - x_2(\Delta + 2c)\alpha^{(11)} - 2\varphi\,\frac{\partial \alpha^{(12)}}{\partial x_1} - \psi\,\frac{\partial \alpha^{(11)}}{\partial x_2} + \varphi'\alpha^{(23)} = 0\,,$$

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial \alpha^{(12)}}{\partial x_3} = -\,x_2(\Delta + c)\alpha^{(13)} + x_1(\Delta - c)\alpha^{(23)} - \psi\,\frac{\partial \alpha^{(13)}}{\partial x_2} - \varphi\,\frac{\partial \alpha^{(23)}}{\partial x_1}\,,$$

où j'ai écrit φ', ψ', au lieu de $\partial\varphi/\partial x_3$, $\partial\psi/\partial x_3$; Δ, au lieu de $-\,cx_1\,\partial/\partial x_1 + cx_2\,\partial/\partial x_2$.

(*) Nelle formule (6), (7), quali figurano nell'originale, si trova una svista di calcolo che è stata corretta. [N. d. R.].

www.rcin.org.pl

Des équations (4), (6), (8) on déduit que $\alpha^{(33)}$ est une constante. En effet, dérivons la (8) par rapport à x_3, ayant égard aux valeurs (4), (6) de $\partial\alpha^{(13)}/\partial x_3$, $\partial\alpha^{(11)}/\partial x_3$; il viendra

$$\mathcal{P}''\alpha^{(13)} + 2[x_1(\Delta + c)]^2\,\alpha^{(13)} - 2\mathcal{P}x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1}$$

$$- 2\mathcal{P}\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)\alpha^{(13)}] + 2\mathcal{P}^2\frac{\partial^2\alpha^{(13)}}{\partial x_1^2} - \mathcal{P}\mathcal{P}'\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1}$$

$$+ \mathcal{P}'x_1(\Delta + 2c)\alpha^{(33)} + \frac{1}{2}\mathcal{P}'\left(x_1\Delta\alpha^{(33)} - \mathcal{P}\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1}\right) = \mathcal{P}'\frac{\partial\alpha^{(11)}}{\partial x_1}\,.$$

Convenons de représenter par $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{C}_i$, $\mathcal{D}_i$, $\mathcal{E}_i$ des polynomes à coefficients constants en $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$, ..., $\mathcal{P}^{(i)}$; par W_i des expressions différentielles en $\alpha^{(33)}$, dont les coefficients dépendent de $\mathcal{P}$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre i. Il est aisé de vérifier que, lorsqu'on élimine $\partial\alpha^{(11)}/\partial x_1$ entre la dernière équation et sa dérivée par rapport à x_3, le résultat est de la forme

$$\mathcal{A}_3\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_2[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + \mathcal{C}_2x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1} +$$

$$+ \mathcal{D}_2\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)]\alpha^{(13)} + \mathcal{E}_2\frac{\partial^2\alpha^{(13)}}{\partial x_1^2} + W_2 = 0\,,$$

où $\mathcal{A}_3$ *n'est pas indépendent de* $\mathcal{P}'''$.

Des dérivations répétées permettent, en employant toujours la formule (4), d'éliminer

$$\frac{\partial^2\alpha^{(13)}}{\partial x_1^2}\,,\quad \frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)]\alpha^{(13)}\,,\quad x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1}\,,\quad [x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)}$$

et donnent successivement

$$\mathcal{A}_4\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_3[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + \mathcal{C}_3x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1}$$

$$+ \mathcal{D}_3\frac{\partial}{\partial x_1}[x_1(\Delta + c)]\,\alpha^{(13)} + W_3 = 0\,,$$

$$\mathcal{A}_5\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_4[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + \mathcal{C}_4x_1(\Delta + 2c)\frac{\partial\alpha^{(13)}}{\partial x_1} + W_4 = 0\,,$$

$$\mathcal{A}_6\alpha^{(13)} + \mathcal{B}_5[x_1(\Delta + c)]^2\alpha^{(13)} + W_5 = 0\,,$$

$$\mathcal{A}_7\alpha^{(13)} + W_6 = 0\,,$$

chaque $\mathcal{A}_i$ contenant assurément la dérivée d'ordre i de $\mathcal{P}$.

www.rcin.org.pl

Dérivons encore une fois l'équation $\alpha^{(13)} = - W_6/\mathcal{A}_7$; il viendra, à cause de (4),

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}_7^2\left(x_1 \Delta\alpha^{(33)} - \mathcal{P}\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1}\right) = -\mathcal{A}_7\frac{\partial W_6}{\partial x_3} + \frac{\partial\mathcal{A}_7}{\partial x_3}W_6 .$$

Comme $\alpha^{(33)}$ est indépendent de x_3, les coefficients des diverses $\mathcal{P}^{(i)}$ doivent s'annuler séparément, ce qui exige, par exemple, $W_6 = 0$; il reste alors

$$x_1\Delta\alpha^{(33)} - \mathcal{P}\frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1} = 0 , \quad \text{d'où} \quad x_1\Delta\alpha^{33)} = 0 , \quad \frac{\partial\alpha^{(33)}}{\partial x_1} = 0 .$$

$\alpha^{(33)}$ est donc une constante.

D'après cela, en appliquant aux équations (4), (6), (8) (dont la première se réduit à $\partial\alpha^{(13)}/\partial x_3 = 0$) un procédé tout à fait analogue, mais bien plus simple, on obtient $\alpha^{(13)} = 0$; de même, les (5), (7), (9) conduisent à $\alpha^{(23)} = 0$. Dès lors, on achève sans peine la détermination des $\alpha^{(rs)}$ et l'on trouve que H_2 se présente nécessairement comme une combinaison linéaire (à coefficients constants) de H, H_1.

Observons maintenant que les invariants algébriques du couple H, H_1, c'est-à-dire les racines

$$\frac{cx_1x_2 \pm \sqrt{(cx_1^2 + \mathcal{P})(cx_2^2 + \mathcal{Q})}}{c\mathcal{Q}x_1^2 + c\mathcal{P}x_2^2 + \mathcal{P}\mathcal{Q}} , \; 0$$

de l'équation

$$\begin{vmatrix} -\mathcal{S}\,(cx_1^2 + \mathcal{P}) & 1 + \mathcal{S}\,cx_1x_2 & 0 \\ 1 + \mathcal{S}\,cx_1x_2 & -\mathcal{S}\,(cx_2^2 + \mathcal{Q}) & 0 \\ 0 & 0 & -\mathcal{S} \end{vmatrix} = 0 .$$

sont distinctes.

Nous pouvons désormais démontrer que H n'est pas réductible à la forme (1). En effet, lorsqu'une force vive admet une telle forme, ses géodésiques possèdent une intégrale quadratique du type indiqué par M. Painlevé [1], et alors deux des invariants algébriques coïncident, pendant que les intégrales $\lambda H + \mu H_1$ de notre cas donnent lieu à des invariants distincts ou coïncidents tous les trois, si $\mu = 0$.

La force vive H n'est pas non plus réductible à la forme de M. Staeckel, car à une telle forme correspondent trois intégrales quadratiques indépendantes et nous avons prouvé qu'il y en a deux seulement.

Je termine en remarquant qu'on pourrait, sans aucune difficulté, généraliser ce résultat dans plusieurs directions.

(21 juin 1897).

---

(1) « Comptes Rendus », 1er février, 1897.

www.rcin.org.pl