202/2009

Raport Badawczy
Research Report

RB/23/2009

Wyznaczanie mediany Kemeny'ego dla porządków częściowych z zastosowaniem binarnej macierzy porównań parami

H. Bury, D. Wagner

Instytut Badań Systemowych
Polska Akademia Nauk

Systems Research Institute
Polish Academy of Sciences

POLSKA AKADEMIA NAUK

Instytut Badań Systemowych

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Pracowni zgłaszający pracę:
Prof. dr hab. inż. Janusz Kacprzyk

Warszawa 2009

Wyznaczanie mediany Kemeny'ego dla porządków częściowych

z zastosowaniem binarnej macierzy porównań parami

Mediana Kemeny'ego jest jedną z metod wyznaczania oceny grupowej, która charakteryzuje się dobrymi (Nurmi, 1987, Davenport, 2004) właściwościami. Została ona sformułowana przez Kemeny'ego i Snella (Kemeny, Snell, 1962) i przez wiele lat z uwagi na złożoność obliczeniową (wyznaczanie mediany Kemeny'ego jest problemem NP-trudnym, (Davenport, 2004)) była rzadko stosowana. Rozwój algorytmów optymalizacji całkowitoliczbowej ułatwia jej praktyczne stosowanie.

Zazwyczaj przyjmowane są pewne założenia odnośnie postaci ocen ekspertów, jak również oceny grupowej. W większości metod zakłada się, że eksperci porównują wszystkie obiekty, tzn. rozważane są jedynie porządki liniowe, z elementami równoważnymi lub nie.

W praktyce tworzenia oceny grupowej zdarza się, że eksperci nie są mogą porównać niektórych obiektów i podają porządki częściowe dla rozważanych zbiorów obiektów. W pewnych przypadkach ocena grupowa również może mieć postać porządku częściowego. Uogólnienie metod wyznaczania oceny grupowej, które pozwoli na uwzględnienie takich sytuacji może być interesujące. Propozycję rozwiązania tego problemu podał Litvak (Litvak, 1982).

Przyjmujemy następujące określenia:

- *ekspert podaje porządek liniowy, jeżeli oceniane są wszystkie obiekty (możliwość występowania obiektów równoważnych jest dopuszczana lub nie),*
- *uporządkowanie obiektów – porządek liniowy obiektów,*

- *jeżeli ekspert nie jest w stanie porównać niektórych obiektów – podaje porządek częściowy (możliwość występowania obiektów równoważnych jest dopuszczana lub nie),*
- *opinia – podany przez eksperta porządek częściowy (np. w postaci graficznej jako diagram Hassego).*

1. Postać ocen podawanych przez ekspertów. Binarne macierze porównań parami

Niech $\mathcal{O}$ oznacza zbiór obiektów, $O_i \in \mathcal{O}$, i=1, ..., n oraz K = {1, ..., K} zbiór ekspertów dokonujących oceny. Opinie ekspertów mogą być podawane w skali porządku lub w skali liczbowej. W niniejszej pracy ograniczamy rozważania do tej pierwszej możliwości.

Oceny podawane w skali porządku mogą mieć dwojaką postać.

Po pierwsze mogą to być uporządkowania obiektów, przy czym zazwyczaj przyjmuje się, że obiekt uważany za najlepszy (w sensie wybranego kryterium/ kryteriów) jest umieszczony na pierwszym miejscu, zaś uważany za najgorszy na ostatnim. Obiekty równoważne, ujmowane w nawiasy, umieszczane są na tej samej pozycji, np.
$P = \{O_1, (O_2, O_3), O_4, O_5\}$. Ten zapis jest wygodny przy zapisie porządków liniowych.
Po drugie eksperci mogą porównywać obiekty parami podając tzw. macierze porównań parami.

Zakładamy, że wszystkie rozważane relacje między obiektami odnoszą się do przyjętego kryterium (kryteriów) ich porównywania. Dla uproszczenia zapisu w dalszych rozważaniach to założenie jest pomijane.

Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$O_i \succ^k O_j$, jeżeli zdaniem eksperta k obiekt O_i jest lepszy od O_j,

$O_i \approx^k O_j$, jeżeli zdaniem eksperta k obiekty O_i i O_j są równoważne,

$O_i \prec^k O_j$, jeżeli zdaniem eksperta k obiekt O_j jest lepszy od obiektu O_i,

$O_i \perp^k O_j$, jeżeli zdaniem eksperta k obiektu O_i nie można porównywać z obiektem O_j.

Przykładem porządku częściowego jest relacja ($\succ$, $\approx$, $\perp$) na zbiorze obiektów $\mathcal{O}$.

Wprowadzamy binarną macierz porównań parami zdefiniowaną następująco (dla uproszczenia zapisu indeks k oznaczający numer eksperta został pominięty).

$$\text{Jeżeli} \quad \begin{cases} O_i \succ O_j \\ O_i \approx O_j \\ O_i \prec O_j \\ O_i \perp O_j \end{cases}, \quad \text{to} \quad \begin{matrix} b_{ij} = 1, b_{ji} = 0 \\ b_{ij} = 1, b_{ji} = 1 \\ b_{ij} = 0, b_{ji} = 1 \\ b_{ij} = 0, b_{ji} = 0 \end{matrix} \tag{1}$$

Macierz B określa relację binarną ($\succ$, $\approx$, $\perp$) na zbiorze obiektów $\mathcal{O}$.

Korzyści wynikające z zastosowania binarnej macierzy porównań parami B dotyczą w głównej mierze badania przechodniości:

- sprawdzania przechodniości opinii eksperta opisanej za pomocą macierzy B,
- sformułowania warunków przechodniości oceny grupowej w zadaniu optymalizacji (problem ten zostanie omówiony w p.3,
- szukania ewentualnych cykli w macierzy rozkładu głosów ekspertów.

Opinia P jest przechodnia wtedy i tylko wtedy, gdy jej macierz binarna B spełnia warunek(Ross, Wright (1999))

$$B*B \leq B, \tag{2}$$

gdzie * oznacza iloczyn boole'owski macierzy.

Wyraz o współrzędnych (i, j) iloczynu boole'owskiego B*B ma postać

$b_{i1} \cdot b_{1j} \vee b_{i2} \cdot b_{2j} \vee \ldots \vee b_{ik} \cdot b_{kj} \vee \ldots \vee b_{in} \cdot b_{nj}$.

Z warunku (2) wynika, że powinny być spełnione nierówności

$$b_{i1} \cdot b_{1j} \vee b_{i2} \cdot b_{2j} \vee \ldots \vee b_{ik} \cdot b_{kj} \vee \ldots \vee b_{in} \cdot b_{nj} \leq b_{ij}, \text{ dla } i, j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Macierz rozkładu głosów ekspertów L_B (z zastosowaniem binarnych macierzy porównań parami) definiujemy analogicznie, jak klasyczną macierz rozkładu głosów ekspertów L (Bury, Wagner, 2008).

Niech $l_{B\,ij}$ – oznacza liczbę ekspertów, których zdaniem obiekt $O_i \succsim O_j$.

Na podstawie (1) mamy $b_{ij}^k = 1$, jeżeli $O_i \succ^k O_j$ lub $O_i \approx^k O_j$.

$$\text{Stąd } l_{Bij} = \sum_{k=1}^{K} b_{ij}^k . \tag{4}$$

Warto zauważyć, że w przypadku, gdy eksperci podają liniowe uporządkowania bez obiektów równoważnych, macierz L_B jest identyczna (z dokładnością do wyrazów na przekątnej głównej) z klasyczną macierzą rozkładu głosów ekspertów L.

Wprowadzamy funkcję boole'owską $B(x)$ określoną, jak następuje

$$B(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \geq 1 \\ 0 & \text{dla } x < 1 \end{cases} . \tag{5}$$

Binarną macierz rozkładu głosów ekspertów definiujemy jako

$$BL = [B(l_{B\,ij})]. \tag{6}$$

Badając przechodniość macierzy BL (6) można sprawdzić, czy zagregowana ocena grupowa (wyrażona za pomocą macierzy L_B) jest przechodnia, a jeżeli nie – czy występują w niej cykle.

2. Odległości między uporządkowaniami

Definicja

Odległość między parą obiektów (O_i, O_j) w danej opinii P^{k_1} i parą obiektów (O_i, O_j) w opinii P^{k_2} wyrażona przy użyciu macierzy B ma postać

$$d_{B\,ij}(P^{k_1}, P^{k_2}) = \left|b_{ij}^{k_1} - b_{ij}^{k_2}\right| + \left|b_{ji}^{k_1} - b_{ji}^{k_2}\right| \tag{7}$$

Definicja

Odległość między opiniami P^{k_1} i P^{k_2} definiowana przy użyciu macierzy binarnej B ma postać

$$d_B(P^{k_1}, P^{k_2}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}^{n}\left(\left|b_{ij}^{k_1} - b_{ij}^{k_2}\right| + \left|b_{ji}^{k_1} - b_{ji}^{k_2}\right|\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|b_{ij}^{k_1} - b_{ij}^{k_2}\right| + \left|b_{ji}^{k_1} - b_{ji}^{k_2}\right|\right). \tag{8}$$

Definicja

Odległość d_B danej opinii P od zbioru opinii podanych przez ekspertów $P^{(k)} = \{P^1, P^2, \ldots, P^K\}$ dana jest zależnością

$$d_B(P^{(k)}, P) = \sum_{k=1}^{K} d_B(P^k, P) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left(\left|b_{ij}^{k} - b_{ij}\right| + \left|b_{ji}^{k} - b_{ji}\right|\right). \tag{9}$$

Mediana Kemeny'ego (dla binarnej macierzy porównań parami) jest to opinia P_B, której odległość $d_B(P^{(k)}, P)$ od zbioru $P^{(k)}$ opinii podanych przez ekspertów jest najmniejsza.

Zadanie wyznaczania mediany Kemeny'ego można sformułować następująco:

znaleźć taką opinię P_B opisaną za pomocą macierzy B, że

$$\min_B d_B(P^{(k)}, P) \to P_B. \tag{10}$$

Rozwiązanie tego zadania wymaga sformułowania warunku przechodniości szukanej opinii P.

Zakładając, że w opinii P mogą występować obiekty równoważne lub takie, których nie można porównać, odległość (8) między opiniami P^k i P można zapisać jako

$$d_B(P^k,P)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j\in I_1}\left(\left|b_{ij}^k-1\right|+\left|b_{ji}^k\right|\right)+\sum_{i,j\in I_1^*}\left(\left|b_{ij}^k\right|+\left|b_{ji}^k-1\right|\right)+\sum_{i,j\in I_2}\left(\left|b_{ij}^k-1\right|+\left|b_{ji}^k-1\right|\right)+\sum_{i,j\in I_3}\left(\left|b_{ij}^k\right|+\left|b_{ji}^k\right|\right)\right], \quad (11)$$

gdzie

I_1 – zbiór par indeksów (i, j) takich, że w opinii P $O_i \succ O_j$,

I_1^* – zbiór par indeksów (i, j) takich, że w opinii P $O_i \prec O_j$,

I_2 – zbiór par indeksów (i, j) takich, że w opinii P $O_i \approx O_j$,

I_3 – zbiór par indeksów (i, j) takich, że w opinii P $O_i \perp O_j$.

Ze sposobu określenia zbiorów I_1 oraz I_1^* wynika, że jeżeli $(i, j) \in I_1$, to $(j, i) \in I_1^*$.

Stąd

$$\sum_{i,j\in I_1^*}\left(\left|b_{ij}^k\right|+\left|b_{ji}^k-1\right|\right)=\sum_{i,j\in I_1}\left(\left|b_{ji}^k\right|+\left|b_{ij}^k-1\right|\right). \quad (12)$$

Odległość $d_B(P^k,P)$ przybiera postać

$$\begin{aligned} d_B(P^k,P) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{i,j\in I_1}\left(\left|b_{ij}^k-1\right|+\left|b_{ji}^k\right|\right)+\sum_{i,j\in I_1}\left(\left|b_{ij}^k-1\right|+\left|b_{ji}^k\right|\right)+\sum_{i,j\in I_2}\left(\left|b_{ij}^k-1\right|+\left|b_{ji}^k-1\right|\right)+\sum_{i,j\in I_3}\left(\left|b_{ij}^k\right|+\left|b_{ji}^k\right|\right)\right] \\ &= \sum_{i,j\in I_1}\left(\left|b_{ij}^k-1\right|+\left|b_{ji}^k\right|\right)+\frac{1}{2}\left[\sum_{i,j\in I_2}\left(\left|b_{ij}^k-1\right|+\left|b_{ji}^k-1\right|\right)+\sum_{i,j\in I_3}\left(\left|b_{ij}^k\right|+\left|b_{ji}^k\right|\right)\right] \end{aligned}. \quad (13)$$

Wprowadzamy pomocnicze zmienne binarne x_{ij}, z_{ij} oraz y_{ij} określone następująco.

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{jeżeli w uporządkowaniu P obiekt } O_i \succ O_j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie}\end{cases}, \quad (14)$$

$$z_{ij}=\begin{cases}1 & \text{jeżeli w uporządkowaniu P obiekt } O_i \approx O_j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie}\end{cases}, \quad (15)$$

$$y_{ij}=\begin{cases}1 & \text{jeżeli w uporządkowaniu P obiekt } O_i \perp O_j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie}\end{cases}. \quad (16)$$

Odległość $d_B(P^{(k)},P)$ można zapisać jako

$$d_B(P^{(k)},P)=\sum_{k=1}^{K}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|b_{ij}^{k}-1\right|+\left|b_{ji}^{k}\right|\right)x_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|b_{ij}^{k}-1\right|+\left|b_{ji}^{k}-1\right|\right)z_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left|b_{ij}^{k}\right|+\left|b_{ji}^{k}\right|\right)y_{ij}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left(\left|b_{ij}^{k}-1\right|+\left|b_{ji}^{k}\right|\right)x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left|b_{ij}^{k}-1\right|z_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left|b_{ij}^{k}\right|y_{ij}= \tag{17}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}br_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}be_{ij}z_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}bc_{ij}y_{ij}$$

Współczynniki br_{ij} be_{ij}, bc_{ij} są definiowane następująco

$$br_{ij}=\sum_{k=1}^{K}\left(\left|b_{ij}^{k}-1\right|+\left|b_{ji}^{k}\right|\right), \tag{18}$$

$$be_{ij}=\sum_{k=1}^{K}\left|b_{ij}^{k}-1\right|, \tag{19}$$

$$bc_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left|b_{ij}^{k}\right|,\ i,\ j=1,\ \ldots,\ n. \tag{20}$$

Macierze BR=[br_{ij}], BE=[be_{ij}], BC=[bc_{ij}] stanowią odpowiedniki macierzy strat [r_{ij}], [e_{ij}] definiowanych na podstawie klasycznych macierzy parami (Bury, Wagner, 2008) .

3. Sformułowanie zadania optymalizacji

Zadanie minimalizacji odległości można zapisać następująco:

$$\min_{x_{ij},y_{ij},z_{ij}} d_B(P^{(k)},P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}br_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}be_{ij}z_{ij}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}bc_{ij}y_{ij}\,. \tag{21}$$

Macierz B=[b_{ij}] oraz zmienne x_{ij}, z_{ij}, y_{ij} i, j = 1, ..., n są powiązane następującymi zależnościami.

$$\forall_{i=1,\ldots,n}\ \forall_{j=1,\ldots,n,\,j\neq i}\quad b_{ij}=x_{ij}+z_{ij}, \tag{22}$$

$$x_{ij}+x_{ji}+z_{ij}+y_{ij}=1, \tag{23}$$

$$x_{ij}+x_{ji}\le 1,\ z_{ij}=z_{ji},\ y_{ij}=y_{ji}\,.\ x_{ii}=0,\quad y_{ii}=0,\quad z_{ii}=1,\quad b_{ii}=1 \tag{24}$$

Warunek (23) oznacza, że między obiektami O_i oraz O_j zachodzi jedna z relacji ($\succ$, $\prec$, $\approx$, $\perp$).

Ograniczenia dla zadania optymalizacji

Podstawowym ograniczeniem jest nierówność (3) zapewniająca przechodniość opinii P.

Mamy n^2 warunków przechodniości (3) dla każdego b_{ij}.

Dla i=j (wyrazy na przekątnej głównej macierzy B) $b_{ii}=1$ i nierówność (3) jest spełniona zawsze. Zostaje $n^2 - n$ warunków.

Aby alternatywa (3) była spełniona dla każdego b_{ij}, w szczególności dla $b_{ij} = 0$, musi być spełniona koniunkcja warunków

$$\underset{i,j,i\neq j}{\forall} b_{ik} \cdot b_{kj} \leq b_{ij}, \; k=1,\ldots, n. \tag{25}$$

Ze względu na fakt, że dla k=i (i analogicznie dla k=j) nierówność $b_{ii} \cdot b_{ij} = b_{ij} \leq b_{ij}$ jest spełniona zawsze, zostaje (n-2) warunków $\underset{i,j,i\neq j}{\forall} b_{ik} \cdot b_{kj} \leq b_{ij}$, $k=1,\ldots, n$, $k \neq i$, $k \neq j$.

Dla każdego z n(n-1) elementów b_{ij} macierzy B poza przekątną główną mamy (n-2) warunków. Razem jest n(n-1)(n-2) warunków przechodniości.

Następnym krokiem jest zastąpienie iloczynu $\underset{i,j,i\neq j}{\forall} b_{ik} \cdot b_{kj} \leq b_{ij}$, $k=1,\ldots, n$, $k \neq i$, $k \neq j$ kombinacją liniową $(b_{ik}+b_{kj}-1)$.

W tabelach przedstawiono wartości odpowiednio iloczynu $b_{ik} \cdot b_{kj}$ oraz sumy $b_{ik}+b_{kj}-1$:

$b_{ik} \cdot b_{kj}$

b_{kj} \ b_{ik}	0	1
0	0	0
1	0	1

$b_{ik}+b_{kj}-1$

b_{kj} \ b_{ik}	0	1
0	-1	0
1	0	1

Wartości wyrażeń różnią się jedynie dla $b_{ik} = b_{kj} = 0$. W tym przypadku nierówność $b_{ik} \cdot b_{kj} \leq b_{ij}$ jest spełniona dla każdego b_{ij}.

Zadanie wyznaczania mediany Kemeny'ego przybiera postać:

$$\min_{B} d_B(P^{(k)}, P) = \min_{B, x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}} d_B(P^{(k)}, P) = \min_{B, x_{ij}, z_{ij}, y_{ij}} \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} br_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} be_{ij}z_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} bc_{ij}y_{ij} \right) \tag{26}$$

z ograniczeniami

$$\forall_{i=1,\dots,n} \; \forall_{j=1,\dots,n, j\neq i} \; \forall_{k=1,\dots,n, k\neq i, k\neq j} \; b_{ik} + b_{kj} - 1 \leq b_{ij} \tag{27}$$

oraz (22)÷(24).

Zadanie jest rozwiązywane za pomocą pakietu CPLEX.

Analogiczne zadanie (dla klasycznej macierzy porównań parami) jest kłopotliwe do właściwego sformułowania z uwagi na trudność zapewnienia przechodniości rozwiązań.

Warto zauważyć, że jeżeli w opiniach ekspertów nie ma obiektów nieporównywalnych rozwiązania i wartości odległości d_A i d_B otrzymywane przy użyciu klasycznej macierzy porównań parami A oraz binarnej macierzy porównań parami B są jednakowe (Bury, Wagner, 2009a).

Sformułowanie zadania optymalizacji binarnej (26) z ograniczeniami (27) i (22)÷(24) umożliwia uwzględnienie dodatkowych warunków narzuconych na postać oceny grupowej, np. dla porządków liniowych $\forall_{i,j=1,\dots,n} \; y_{ij} = 0$, przy braku elementów równoważnych $\forall_{i,j=1,\dots,n, i\neq j} \; z_{ij} = 0$.

4. Przykłady obliczeniowe

Przykład 4.1.

Pięciu ekspertów podało liniowe uporządkowania czterech obiektów (bez obiektów równoważnych).

P^1: O_2, O_1, O_4, O_3

P^2: O_1, O_2, O_4, O_3

P^3: O_3, O_2, O_1, O_4

P^4: O_4, O_1, O_3, O_2

P^5: O_1, O_3, O_2, O_4

Macierz rozkładu głosów ekspertów $L=[l_{ij}]$ – wyznaczona na podstawie klasycznych macierzy porównań parami A^k – ma postać:

L=	O_1	O_2	O_3	O_4	$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}$
O_1	0	3	4	4	11
O_2	2	0	2	4	8
O_3	1	3	0	2	6
O_4	1	1	3	0	5

Warto zauważyć, że obiekt O_1 jest zwycięzcą w sensie Condorceta.

Binarne macierze porównań parami mają postać (pominięto oznaczenia obiektów)

B^1

1	0	1	1
1	1	1	1
0	0	1	0
0	0	1	1

B^2

1	1	1	1
0	1	1	1
0	0	1	0
0	0	1	1

B^3

1	0	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1
0	0	0	1

B^4

1	1	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	1	1	1

B^5

1	1	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
0	0	0	1

Po dodaniu do siebie macierzy B^k otrzymujemy

$L_B = \sum_k B^k =$

	O_1	O_2	O_3	O_4	$\sum_{j=1}^{n}[l_{Bij}] - m$ [1]
O_1	5	3	4	4	11
O_2	2	5	2	4	8
O_3	1	3	5	2	6
O_4	1	1	3	5	5

Macierz binarna BL ma postać

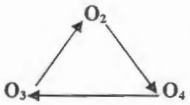
	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1	1	1	1	1
O_2	0	1	0	1
O_3	0	1	1	0
O_4	0	0	1	1

Warunek przechodniości macierzy BL (**2**) można przedstawić graficznie:

	O_1	O_2	O_3	O_4
O_1				
O_2			$\otimes$	
O_3				$\otimes$
O_4		$\otimes$		

Symbol $\otimes$ oznacza, że dla danego elementu macierzy BL nie jest spełniony warunek (3).

Z macierzy rozkładu głosów ekspertów mamy $O_2 \prec O_3 \prec O_4 \prec O_2$:



Macierze strat $BR=[br_{ij}]$, $BE=[be_{ij}]$, $BC=[bc_{ij}]$ mają postać

[1] Suma wyrazów wiersza macierzy L_B jest pomniejszona o m – wartość elementu na przekątnej głównej.

$$[br_{ij}]=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 4 & 4 \end{bmatrix} \qquad [be_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad [bc_{ij}]=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Macierz $[br_{ij}]$ jest identyczna (z dokładnością do wyrazów na przekątnej głównej) z macierzą strat $[r_{ij}]$, wyznaczaną na podstawie macierzy A^k.

Zadanie wyznaczanie mediany Kemeny'ego było rozwiązywane dwojako.

W zbiorze porządków liniowych, dla małych n (n=3, 4, 5) zastosowano metodę przeglądu zupełnego (Bury, Wagner, 20096). Otrzymano dwa rozwiązania:

O_1, O_2, O_4, O_3 lub O_1, O_3, O_2, O_4;

ich odległość od zbioru uporządkowań podanych przez ekspertów wynosi 20.

Rozwiązaniem zadania optymalizacji (26) z ograniczeniami (27) i (22)÷(24) w dziedzinie porządków częściowych jest ocena

$$\begin{tikzcd} & O_2 \arrow[r] & O_4 \\ O_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & O_3 & \end{tikzcd}$$

Odległość od zbioru uporządkowań podanych przez ekspertów również wynosi 20.

Rozwiązanie to jest zgodne z twierdzeniem podanym przez Truchona (Truchon, 1998), dotyczącym sytuacji, kiedy ze względu na występowanie cyklu w ocenach ekspertów ocena grupowa ma charakter porządku częściowego.

W omawianym przykładzie odległość rozwiązań od zbioru opinii ekspertów była taka sama zarówno dla porządku liniowego, jak i częściowego. Następny przykład pokazuje, że nie zawsze jest to prawdą.

Przykład 4.2.

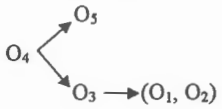
Pięciu ekspertów podało następujące oceny pięciu obiektów, w nawiasach ujęto obiekty równoważne.

P^1: O_2, O_1, O_3, O_4, O_5

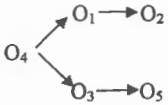
P^2: $(O_1, O_5), O_3, O_2, O_4$

P^3: O_1, O_2, O_3, O_4, O_5

P^4:



P^5:



Macierz rozkładu głosów ekspertów L_B ma postać

L_B=

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	$\sum_{i=1}^{n}[l_{Bij}]-m$
O_1	5	4	3	3	3	13
O_2	2	5	2	3	2	9
O_3	1	2	5	3	3	9
O_4	2	2	2	5	4	10
O_5	1	1	1	1	5	4

Macierz binarna BL=*B*(LB) jest przechodnia.

Macierze strat BR=[br_{ij}], BE=[be_{ij}], BC=[bc_{ij}] mają postać

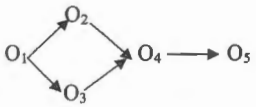
$$[br_{ij}]=\begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 5 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 6 & 5 & 2 \\ 7 & 6 & 7 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad [be_{ij}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad [bc_{ij}]=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Mediana Kemeny'ego w zbiorze porządków liniowych wyznaczona za pomocą przeglądu ma postać:

O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 lub O_1, O_3, O_2, O_4, O_5.

Odległość każdego z tych uporządkowań od zbioru uporządkowań podanych przez ekspertów wynosi 35.

Rozwiązaniem zadania optymalizacji (26) z ograniczeniami (27) i (22)÷(24) w dziedzinie porządków częściowych jest ocena



Odległość od zbioru opinii ekspertów wynosi 34.

Następny przykład ilustruje sytuację, kiedy opinie ekspertów mają charakter uporządkowań z obiektami równoważnymi, istnieje zwycięzca w sensie Condorceta a w ocenie grupowej występuje cykl.

Przykład 4.3.

Siedmiu ekspertów podało uporządkowania zbioru siedmiu obiektów. Obiekty równoważne ujęto w nawiasach.

P^1: $O_1, (O_2, O_3), (O_4, O_5), O_6, O_7$

P^2: $O_4, (O_1, O_2), O_5, (O_3, O_7), O_6$

P^3: $O_4, O_2, O_1, O_5, O_7, O_3, O_6$

P^4: $O_1, O_7, O_3, O_4, O_6, O_2, O_5$

P^5: $O_1, O_6, O_2, O_5, O_7, O_3, O_4$

P^6: $O_6, O_1, O_2, O_7, O_4, O_5, O_3$

P^7: $O_5, O_1, O_2, O_6, O_4, O_7, O_3$

Macierz rozkładu głosów ekspertów L wyznaczona za pomocą klasycznych macierzy porównań parami ma postać (ze względu na występowanie obiektów równoważnych zastosowano zapis połówkowy (Bury, Wagner, 2009b))

L=	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}$
O_1	0	5.5	7	5	6	6	7	36.5
O_2	1.5	0	5.5	4	6	4	6	27
O_3	0	1.5	0	3	2	4	1.5	12
O_4	2	3	4	0	4.5	4	4	21.5
O_5	1	1	5	2.5	0	4	5	18.5
O_6	1	3	3	3	3	0	4	17
O_7	0	1	5.5	3	2	3	0	14.5

Obiekt O_1 jest zwycięzcą w sensie Condorceta.

Macierz rozkładu głosów ekspertów L_B wyznaczona za pomocą binarnych macierzy porównań parami ma postać

L_B=	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	$\sum_{j=1}^{n}[l_{Bij}]-m$
O_1	7	6	7	5	6	6	7	**37**
O_2	2	7	6	4	6	4	6	28
O_3	0	2	7	3	2	4	2	13
O_4	2	3	4	7	5	4	4	22
O_5	1	1	5	3	7	4	5	19
O_6	1	3	3	3	3	7	4	17
O_7	0	1	6	3	2	3	7	15

Binarna macierz porównań parami ma postać

$$BL = \begin{array}{c|ccccccc} & O_1 & O_2 & O_3 & O_4 & O_5 & O_6 & O_7 \\ \hline O_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ O_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ O_3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ O_4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ O_5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ O_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ O_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Warunek przechodniości macierzy BL można przedstawić następująco

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7
O_1							
O_2							
O_3							$\otimes$
O_4							
O_5							
O_6			$\otimes$				
O_7						$\otimes$	

Z macierzy rozkładu głosów ekspertów mamy cykl $O_3 \prec O_7 \prec O_6 \prec O_3$.

Rozwiązaniem zadania optymalizacji (26) z ograniczeniami (27) i (22)÷(24)) w dziedzinie porządków częściowych jest opinia

$$\begin{tikzcd} & & & & O_6 \\ O_1 \arrow[r] & O_2 \arrow[r] & O_4 \arrow[r] & O_5 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & & & O_7 \arrow[r] & O_3 \end{tikzcd}$$

odległość od zbioru uporządkowań podanych przez ekspertów wynosi 84.

W dziedzinie porządków liniowych rozwiązaniem jest uporządkowanie

O_1, O_2, O_4, O_5, O_7, O_3, O_6; odległość od zbioru uporządkowań podanych przez ekspertów wynosi 84.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono koncepcję binarnej macierzy porównań parami oraz jej zastosowanie do wyznaczania mediany Kemeny'ego w sytuacji, gdy w opiniach ekspertów nie wszystkie obiekty są porównywane. W przypadku, gdy eksperci podają porządki liniowe, wyniki otrzymywane za pomocą klasycznych oraz binarnych macierzy porównań parami są zgodne. Ponadto, zastosowanie binarnych macierzy porównań parami umożliwia badanie przechodniości opinii ekspertów, oceny grupowej, jak również sformułowanie zadania wyznaczania mediany Kemeny'ego jako zadania optymalizacji całkowitoliczbowej.

Literatura

Bury H., Wagner D., (2008), Group Judgement With Ties. Distance-Based Methods. In: Aschemann H. (Ed.): *New Approaches in Automation and Robotics*. I-Tech Education and Publishing, Vienna, Austria, ss. 153-172.

Bury H., Wagner D., 2009a, Ocena grupowa dla porządków częściowych. Wyznaczanie odległości, Studia i Materiały Polskiego Stowarzyszenia Zarządzania Wiedzą, no 22, Bydgoszcz 2009, pp.43-52.

Bury H., Wagner D., 2009b, Group judgement with ties. Position-based approach, Badania Operacyjne i Decyzje, przyjęte do druku .

Davenport A., Kalagnanam J., 2004, A computational study of the Kemeny rule for preference aggregation. In Proc. 19th AAAI, pp 697–702.

Kemeny J.G., Snell L.J., (1962), Preference Ranking: An Axiomatic Approach. In J.G. Kemeny and L.J. Snell, *Mathematical Models in the Social Sciences*, New York, Ginn.

Litvak B.G., (1982), *Ekspertnaja informacija. Mietody poluczienija i analiza*, Radio i Swjaz, Moskwa.

Nurmi H., 1987, Comparing voting systems, Kluwer, Dordrecht/ Boston/ Lancaster, Tokio.

Ross K.A., Wright C.R.B., (1999), *Matematyka dyskretna*, PWN Warszawa, wyd. 2.

Truchon M., 1998, "An Extension of the Condorcet Criterion and Kemeny Orders," Cahier de recherche 9813, Département d'économique, Université Laval, October 1998.