

# O całkach rozwiązań równań różniczkowych, z sobą sprzężonych, rzędu 2-go, posiadających trzy punkty osobliwe.

Napisał

S. Kępiński.

Wniesiono na posiedzeniu dnia 2 lutego 1899; ref. czł. Witkowski.

W pracy: „O całkach rozwiązań równań różniczkowych etc.“ ogłoszonych w tomie XXV rozpraw Wydz. mat.-przyr. Akad. Umiej. w Krakowie (1896), określiłem przy pomocy rozwiązań równań różniczkowych z sobą sprzężonych pewne funkcje przestępne, posiadające niektóre wspólne własności z całkami hyperliptycznymi gatunku 3-go i dlatego nazwałem je także całkami gatunku 3-go rozwiązań równań różniczkowych.

Celem tej pracy jest z jednej strony te własności analogiczne bliżej rozwinać; do tego celu okazało się potrzebnem wprowadzić całki, posiadające wspólne własności z całkami hyperliptycznymi gatunku 1-go i 2-go, które analogicznie nazwałem całkami gatunku 1-go i gatunku 2-go. Z drugiej strony szło tu o zastosowanie tych funkcji w celu otrzymania związków dwuliniowych, które w inny sposób otrzymał L. Fuchs w pracy: „Über Relationen etc.“ (Crelle J. t. 76).

Dla prostoty ograniczyłem się obecnie do równań różniczkowych, posiadających tylko 3 punkty osobliwe. Rezultaty jednak otrzymane i metody tu używane stosują się z małemi zmianami do równań różniczkowych, posiadających dowolną liczbę punktów osobliwych.

## §. 1.

Jako podstawę rozumowania weźmiemy równania różniczkowe rzędu 2-go z sobą sprzężone, posiadające tylko trzy punkty osobliwe, wszystkie w skończonej odległości, t. j. równania kształtu <sup>1)</sup>

$$A_2 y'' + A_1 y' + A_0 y = 0, \quad (1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_2 = f_3(z)^2 &= (z - e_1)^2 (z - e_2)^2 (z - e_3)^2 = \\ &= (p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + z^3)^2 = a_0 + a_1 z + \dots + a_5 z^5 + z^6, \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{dA_2}{dz} = A_2', \quad (2)$$

$$\begin{aligned} A_0 = l_1' l_1'' (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)(z - e_2)(z - e_3) + l_2' l_2'' (e_2 - e_1)(e_2 - e_3)(z - e_1)(z - e_3) + \\ + l_3' l_3'' (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)(z - e_1)(z - e_2) + 3.2 z f_3(z) + a_5 f_3'(z). \end{aligned}$$

Jeżeli oznaczymy dla krótkości:

$$A_0 = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4,$$

to

$$c_4 = 3.2, \quad c_3 = 2.2 a_5, \dots \quad (3)$$

Liczby  $l_i'$ ,  $l_i''$  są tu wykładnikami, należącymi do punktu osobliwego  $e_i$  i są, jak wiadomo, związane z sobą równościami:

$$l_i' + l_i'' = -1, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Co się tyczy punktu w nieskończoności, to jest on dla całek  $y_1$ ,  $y_2$ , czyniących zadość równaniu (1), punktem pozornie osobliwym i mianowicie należą do niego wykładniki:

$$l' = 2, \quad l'' = 3.$$

Z uwagi na równości (3) możemy funkcji  $A_0$  nadać kształt inny, mianowicie:

$$A_0 = \frac{1}{5} \frac{d^2 A_2}{dz^2} + h_2, \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Por. wszędzie wyżej wspomnianą pracę „O całkach etc.“ rozdział III.  
Rozpr. Wydz. mat.-prz. T. XXXVII.

gdzie  $h_2$  jest funkcją stopnia drugiego:

$$h_2 = b_0 + b_1 z + b_2 z^2,$$

której współczynniki:

$$b_0 = c_0 - \frac{2}{5} a_2, \quad b_1 = c_1 - \frac{3 \cdot 2}{5} a_3, \quad b_2 = c_2 - \frac{3 \cdot 4}{5} a_4.$$

Niech dalej  $F_A^3$  przedstawia nam trzecią biegunową funkcji  $A_2$ , zaś  $F_h^1$  pierwszą biegunową funkcji  $h_2$ :

$$\begin{aligned} F_A^3 &= a_0 + \frac{a_1}{2} (z + \zeta) + \frac{a_2}{5} (z^2 + 3z\zeta + \zeta^2) + \frac{a_3}{20} (z^3 + 9z^2\zeta + 9z\zeta^2 + \zeta^3) + \\ &+ \frac{a_4}{5} z\zeta (z^2 + 3z\zeta + \zeta^2) + \frac{a_5}{2} z^2\zeta^2 (z + \zeta) + z^3\zeta^3, \\ F_h^1 &= b_0 + \frac{b_1}{2} (z + \zeta) + b_2 z\zeta, \end{aligned}$$

i niech  $y_i(z)$ ,  $v_k(\zeta)$  przedstawiają jakiegokolwiek dwa rozwiązania równania (1); wówczas całka

$$(8) \quad Q_{ik} = \int_{\nu}^{\xi} \int_{\eta}^{\xi} \frac{y_i v_k}{(z-\zeta)^3} \left[ F_A^3 + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 F_h^1 \right] dz d\zeta$$

jest całką, którą nazwałem całką gatunku trzeciego.

Całkę tę możemy jeszcze inaczej przedstawić. Mianowicie, jeżeli  $A_2$ ,  $M$ ,  $v$  przedstawiają funkcje otrzymane z funkcji  $A_2$ ,  $M$ ,  $y$  wskutek zastąpienia w tych ostatnich  $z$  przez  $\zeta$ , to, ponieważ<sup>1)</sup>:

$$(9) \quad \begin{aligned} F_A^3 + \frac{1}{2} (z-\zeta)^2 F_h^1 &= A_2 + \frac{1}{2} A_2' (\zeta-z) + \frac{1}{2} A_0 (\zeta-z)^2 - \frac{1}{2} M (\zeta-z)^2 \\ &= A_2 + \frac{1}{2} A_2' (z-\zeta) + \frac{1}{2} A_0 (z-\zeta)^2 - \frac{1}{2} M (z-\zeta)^2, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} M &= -\frac{1}{2} \left( \frac{a_3}{5} + b_1 \right) - \left( \frac{3}{5} a_4 + b_2 \right) z - a_5 z^2 - 2z^3 = \\ (10) \quad &= \frac{1}{2} (a_3 - c_1) + (2a_4 - c_2) z - a_5 z^2 - 2z^3 = \\ &= \frac{1}{3 \cdot 4} \frac{d^2 A_2(z)}{dz^2} - \frac{1}{2} \frac{d A_0(z)}{dz}, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Por. wyżej cytowaną pracę.

mieć będziemy:

$$Q_{ik} = -\frac{A_2}{2} \int \frac{y_i + y_i'(z-\zeta)}{(z-\zeta)^2} v_k d\zeta + \frac{1}{2} \iint M y_i v_k dz d\zeta \quad (11^a)$$

$$Q_{ik} = \frac{A_2}{2} \int \frac{v_k + v_k'(\zeta-z)}{(z-\zeta)^2} y_i dz - \frac{1}{2} \iint M y_i v_k d\zeta dz. \quad (11^b)$$

Tak w (11<sup>a</sup>), jak w (11<sup>b</sup>) możemy wskutek tego, że  $M$  (wzgl.  $M$ ) jest funkcją samego  $z$  (wzgl.  $\zeta$ ) uważać za iloczyn całek:

$$\frac{1}{2} \iint M y_i v_k dz d\zeta = \frac{1}{2} \int M y_i dz \cdot \int v_k d\zeta \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \iint M y_i v_k dz d\zeta = \int y_i dz \cdot \frac{1}{2} \int M v_k d\zeta.$$

Uzyskaliśmy tym sposobem zupełną zgodność z rozkładem całki eliptycznej gatunku trzeciego:

$$\begin{aligned} \iint \frac{F(z, \zeta)}{\sqrt{f(z)} \sqrt{f(\zeta)} (z-\zeta)^2} dz d\zeta &= \sqrt{f(z)} \int \frac{d\zeta}{(\zeta-z) \sqrt{f(\zeta)}} + \int \frac{M dz}{\sqrt{f(z)}} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}} \\ &= \sqrt{f(\zeta)} \int \frac{dz}{(z-\zeta) \sqrt{f(z)}} + \int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} \int \frac{M d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} f &= a_0 + a_1 z + \dots + a_4 z^4 \\ M &= \frac{1}{6} a_2 + \frac{1}{2} a_3 z + a_4 z^2, \end{aligned}$$

zaś  $\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$  nazywa się całką gatunku pierwszego,  $\int \frac{M dz}{\sqrt{f(z)}}$  całką gatunku drugiego, z których pierwsza jest wszędzie skończona, druga posiada tylko jeden punkt  $z = \infty$ , w którym staje się algebraicznie nieskończenie wielką.

Tą analogią powodowani możemy także w naszym przypadku nazwać całki

$$\int y_i dz, \quad i = 1, 2 \quad (13)$$

całkami gatunku pierwszego, zaś całki

$$(14) \quad \frac{1}{2} \int M y_i dz \quad i = 1, 2$$

całkami gatunku drugiego.

Wprowadzenie tych nazw jest tem więcej uzasadnione, iż, jeżeli tylko założymy, aby wykładniki  $\nu_i$ ,  $\nu'_i$  były od siebie różne i co do bezwzględnej wartości mniejsze od jedności, całki

$$(15) \quad w_i^{\nu_i} = \int_y^x y_i dz$$

będą wszędzie skończone, zaś całki

$$(16) \quad Z_i^{\nu_i}(\infty) = \frac{1}{2} \int_y^x M y_i dz$$

będą posiadały jeden punkt  $z = \infty$ , w którym stawać się będą algebraicznie nieskończenie wielkimi.

Jakoż, przy powyższem założeniu co do liczb  $\nu_i$ , t. j.

$$(17) \quad \nu_i = -\frac{\mu_i}{\nu_i}, \quad 0 < \mu_i < \nu_i$$

pierwsza część twierdzenia jest jasna.

Co się tyczy drugiej części twierdzenia, tj. rozwinięcia  $\frac{1}{2} \int M y_i dz$  w okolicy punktu  $z = \infty$ , podstawmy  $z = \frac{1}{t}$ ; otrzymamy z równania (1) równanie:

$$t^2 A_2 \left(\frac{1}{t}\right) \frac{d^2 y}{dt^2} + \left[ 2t A_2 \left(\frac{1}{t}\right) - A'_2 \left(\frac{1}{t}\right) \right] t^2 \frac{dy}{dt} + A_0 \left(\frac{1}{t}\right) y = 0,$$

któremu czyni zadość w okolicy  $t = 0$  całka kształtu:

$$y = t^2 (m_0 + m_1 t + m_2 t^2 + \dots).$$

Podstawiając to wyrażenie w powyższe równanie, otrzymamy dla współczynników  $m_0, m_1, \dots$  wzory rekursyjne:

$$(18) \quad m_0 (c_2 - 2a_2) + m_1 a_2 + 2m_2 = 0, \dots$$

Wiedząc to, rozwińmy  $My dz$  na szereg w okolicy  $z = \infty$  czyli  $t = 0$ ; otrzymamy

$$\begin{aligned} -My \frac{dt}{t^2} &= \frac{2 + a_s t + (c_2 - 2a_4) t^2 + \frac{1}{2} (c_1 - a_3) t^3}{t^2} (m_0 + m_1 t + \dots) dt = \\ &= \frac{2m_0}{t^2} dt + \frac{2m_1 + m_0 a_s}{t^2} dt + \frac{2m_2 + m_1 a_s + m_0 (c_2 - 2a_4)}{t} dt + \dots \end{aligned}$$

Lecz współczynnik przy  $\frac{dt}{t}$  jest według (18) identycznie równy zeru; jest więc w okolicy  $z = \infty$  czyli  $t = 0$

$$\int My dz = - \int My \frac{dt}{t^2} = - \frac{m_0}{t^2} - \frac{2m_1 + m_0 a_s}{t} + \mathfrak{P}(t),$$

co było do okazania.

## §. 2.

Zamiast całki  $Z_i^{zv}(\infty)$  posiadającej jako punkt nieskończonościowy punkt w nieskończoności możemy wprowadzić do rozważania całkę posiadającą punkt nieskończonościowy w dowolnym punkcie  $t$  na płaszczyźnie  $z$ . Całkę tę oznaczymy odpowiednio przez

$$Z_i^{zv}(t).$$

Otrzymujemy ją, różniczkując  $Q_{ik}$  względem  $dw_k = v_k d\zeta$  dla  $\zeta = t$ :

$$Z_i^{zv}(t) = \int_y^x \frac{y_i}{(z-t)^2} [F_A^2 + \frac{1}{2} (z-t)^2 F_h'] dz. \quad (19)$$

Ażeby zbadać zachowanie się tej funkcji w oddzielnych punktach płaszczyzny n. p. w punkcie  $a$ , możemy sobie wyobrazić, że tak  $y$  jak i  $x$  znajdują się w okolicy tego punktu, t. j. innymi słowy: dzielimy tor całkowania na bardzo małe cząstki i bierzemy na uwagę element toru znajdujący się w okolicy punktu  $a$ .

Rozróżnić nam należy następujące przypadki:

1) Jeżeli punkt  $a$  jest różny od punktu  $t$ , to widoczna, że całka  $Z_i^{zv}(t)$  [przy założeniach (17)] będzie skończona.

2) Jeżeli  $x, y$  znajdują się w okolicy punktu  $a = t \geq e_i$ , to, rozwijając tak  $y_i(z)$  jak i  $F_A^s + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_h^t$  na szeregi, otrzymamy:

$$y_i(z) = y_i(t) + \frac{z-t}{1} y_i'(t) + \frac{(z-t)^2}{1 \cdot 2} y_i''(t) + \dots$$

$$F_A^s + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_h^t = A_z(t) + \frac{z-t}{2} A_z'(t) + \frac{(z-t)^2}{2} A_o(t) - \frac{(z-t)^3}{2} M(t),$$

skąd

$$\begin{aligned} y_i [F_A^s + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_h^t] &= [A_z y_i]_t + (z-t) [\frac{1}{2} A_z' y_i + A_z y_i']_t + \\ &+ \frac{(z-t)^2}{1 \cdot 2} [A_z y_i'' + A_z' y_i' + A_o y_i]_t + \\ &+ \frac{(z-t)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} [A_z y_i''' + \frac{3}{2} A_z' y_i'' + 3 A_o y_i' - 3 M y_i]_t + \dots \end{aligned}$$

Z uwagi na to, że współczynnik przy  $\frac{(z-t)^2}{1 \cdot 2}$  przedstawia lewą stronę równania (1), a więc jest identycznie równy zero, mieć będziemy:

$$\begin{aligned} Z_i^{xy}(t) &= -\frac{1}{2} [A_z y_i]_t \left[ \frac{1}{(x-t)^2} - \frac{1}{(y-t)^2} \right] - \\ (20) \quad &- \left[ \frac{1}{2} A_z' y_i + A_z y_i' \right]_t \left[ \frac{1}{x-t} - \frac{1}{y-t} \right] + \mathfrak{P}(x-t, y-t), \end{aligned}$$

gdzie  $\mathfrak{P}$  oznacza szereg, zawierający całkowite dodatnie potęgi  $x-t, y-t$ .

3) Jeżeli  $a = t = e_i$ , to, nazywając  $Y_1, Y_2$  całki należące do wykładników  $l_i', l_i''$ , mieć będziemy:

$$y = a Y_1 + b Y_2,$$

gdzie  $Y_1, Y_2$  są kształtu:

$$Y = (z-e_i)^{l_i'} (m_0 + m_1(z-e_i) + \dots), \quad l_i = -\frac{\nu_i}{\nu_i}, \quad 0 < \nu_i < \nu_i.$$

Funkeya  $F_A^s + \frac{1}{2}(z-e_i)^2 F_h^t$  redukuje się do:

$$F_A^s + \frac{1}{2}(z-e_i)^2 F_h^t = \frac{1}{2}(z-e_i)^2 [A_o(e_i) - M(e_i)(z-e_i)].$$

Podstawmy tu

$$z-e_i = u^{\nu_i}, \quad dz = \nu_i u^{\nu_i-1} du;$$

otrzymamy

$$Y [F'_a + (z - e_i) F'_h] \frac{dz}{(z - e_i)^s} = \frac{v_i}{2} u^{-\frac{\mu-1}{i}} [m_o A_o(e_i) + m_1 A_o(e_i) - \\ - m_o M(e_i) u^{\frac{\mu}{i}} + \dots] du,$$

skąd

$$\int_y^x Y [F'_a - \frac{1}{2} (z - e_i)^2 F'_h] \frac{dz}{(z - e_i)^s} = \frac{1}{2} \left[ \frac{m_o A_o}{l_i} \left\{ (x - e_i)^{\frac{l_i}{i}} - (y - e_i)^{\frac{l_i}{i}} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{m_1 A_o - m_o M}{1 + l_i} \left\{ (x - e_i)^{\frac{l_i+1}{i}} - (y - e_i)^{\frac{l_i+1}{i}} \right\} + \dots \right] \quad (21)$$

4) Jeżeli na koniec  $\alpha = t = \infty$ , to ponieważ

$$F'_a + \frac{1}{2} (z - t)^2 F'_h = A_2 - \frac{1}{2} A_2' (z - t) + \frac{1}{2} A_0 (z - t)^2 + \frac{1}{2} M (z - t)^2,$$

mamy

$$\lim_{t=\infty} \left[ \frac{F'_a + \frac{1}{2} (z - t)^2 F'_h}{(z - t)^s} \right] = \frac{1}{2} M,$$

tak iż nasza całka (19) przechodzi w całkę (16), którąśmy się poprzednio zajmowali i która dla  $x = \infty$  staje się nieskończenie wielką w stopniu drugim, podobnie jak  $Z_i^{xy}(t)$  dla  $x = t$ .

Możemy więc wypowiedzieć następujące twierdzenie:

Całka gatunku drugiego  $Z_i^{xy}(t)$  jest wszędzie skończona z wyjątkiem, gdy jeden, albo oba krańce  $x, y$  schodzą się z punktem  $t$ . I w takim razie, a) jeżeli  $t \geq e_i$  (skończone albo nieskończenie wielkie) całka powyższa staje się nieskończenie wielką w stopniu drugim; b) jeżeli zaś  $t = e_i$ , to całka  $Z_i^{xy}$  staje się nieskończenie wielką, tak jak rozwiązanie odpowiednie  $y_i$  równania różniczkowego (1).

### §. 3.

Zastanówmy się obecnie nadtem, jakim zmianom ulegają nasze całki gatunku 1-go i 2-go przy dowolnych obiegach jednego z krańców n. p.  $x$ .

Ponieważ całki gatunku pierwszego są wszędzie skończone, więc posiadają jako punkty osobliwe na płaszczyźnie zmiennej tylko punkty



punkty rozgałęzienia  $e_i$ . I mianowicie z uwagi na to, że rozwiązania  $y_1, y_2$  przy obiegu zmiennej  $z$  około punktu  $e_i$  ulegają podstawieniom:

$$(22) \quad A_i(y) \quad \begin{cases} y_1' = \alpha_i y_1 + \beta_i y_2 \\ y_2' = \gamma_i y_1 + \delta_i y_2 \\ \alpha_i \delta_i - \beta_i \gamma_i = 1 \end{cases} \quad i = 1, 2, 3,$$

otrzymamy przy tymże obiegu podstawienia dla  $w_1, w_2$ :

$$(23) \quad A_i(w) \quad \begin{cases} w_1' = \alpha_i w_1 + \beta_i w_2 + p_i \\ w_2' = \gamma_i w_1 + \delta_i w_2 + q_i \end{cases}.$$

Stałe  $p_i, q_i$  nazwiemy stałymi (modułami) peryodyczności, albo wprost peryodami częściowymi całek gatunku pierwszego. Natomiast peryody całek  $w_i$  (zupełne) określimy w podobny sposób, jak się to dzieje w teorii funkcji algebraicznych. A więc wyobrazimy sobie powierzchnię Riemann'a zbudowaną dla funkcji  $y_1, y_2$ , t. j. powierzchnię, na której owe funkcje są jednowartościowe. Powierzchnia ta będzie, w ogóle mówiąc, nieskończenie wieloliściowa i będzie posiadała w punktach  $e_i$   $\nu_i$ -krotne punkty rozgałęzienia (jeżeli jak poprzednio  $l_i^{(k)} = \frac{\nu_i^{(k)}}{\nu_i}$ ).

Owoż, przez peryody całek  $w_i$  będziemy rozumieli wartość tych całek, wziętych po torach zamkniętych na odpowiedniej powierzchni Riemann'a, nie dających się ściągnąć do jednego punktu.

Między peryodami częściowymi  $p_i$  i  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) istnieją związki liniowe, które otrzymamy, całkując  $y dz$  po krzywej  $K$  (n. p. kole) otaczającej wszystkie punkty osobliwe. Jest to tor zamknięty na powierzchni Riemann'a, ale pozwalający się ściągnąć do jednego punktu.

Otrzymamy:

$$(24) \quad \begin{cases} p_1 + \alpha_1 p_2 + \beta_1 q_2 + \delta_1 p_3 - \beta_2 q_3 = 0 \\ q_1 + \gamma_1 p_2 + \delta_1 q_2 - \gamma_2 p_3 + \alpha_2 q_3 = 0, \end{cases}$$

Zauważmy jeszcze, że jeżeli dolne krańce  $w_i$  (t. j.  $y$ ) obierzemy w punkcie n. p.  $e_3$ , to  $p_3 = q_3 = 0$  i wzory (24) redukują się do:

$$(24') \quad \begin{cases} p_1 + \alpha_1 p_2 + \beta_1 q_2 = 0 \\ q_1 + \gamma_1 p_2 + \delta_1 q_2 = 0. \end{cases}$$

Obok toru  $K$  zamkniętego na powierzchni Riemann'a i dającego się ściągnąć do jednego punktu istnieją wprawdzie jeszcze trzy inne,

posiadające tężsamą własność, mianowicie wiązadła wychodzące z punktu  $y$  i okrążające  $v_i$  razy punkty rozgałęzienia  $e_i$ , — można jednak okazać, że całkowanie po takich torach doprowadza do identyczności.

Jakoż, niech  $Y_1, Y_2$  przedstawiają całki należące do punktu  $e_i$ , t. j. całki, które przy obiegu  $z$  około  $e_i$  ulegają podstawieniom:

$$S_i) \quad \begin{aligned} Y_1' &= e^{2\pi i l' / i} Y_1 \\ Y_2' &= e^{2\pi i l'' / i} Y_2 \end{aligned} \quad \zeta_i^{(k)} = \frac{v_i^{(k)}}{v_i}$$

Wówczas rozwiązania nasze  $y_1, y_2$  (raz stałe obrane) wyrażają się przez:

$$B_i) \quad \begin{aligned} y_1 &= a Y_1 + b Y_2 \\ y_2 &= c Y_1 + d Y_2, \end{aligned}$$

gdzie dla równań z sobą sprzężonych

$$a d - b c = 1.$$

Stąd wynika, że przy obiegu około  $e_i$  rozwiązania  $y_1, y_2$  ulegają podstawieniom:

$$A_i = B_i S_i B_i^{-1},$$

t. j.

$$A_i(y) \left\{ \begin{aligned} y_1' &= (a d e^{2\pi i l' / i} - b c e^{2\pi i l'' / i}) y_1 - a b (e^{2\pi i l' / i} - e^{2\pi i l'' / i}) y_2 \\ y_2' &= c d (e^{2\pi i l' / i} - e^{2\pi i l'' / i}) y_1 - (b c e^{2\pi i l' / i} - a d e^{2\pi i l'' / i}) y_2. \end{aligned} \right.$$

Ogólnie więc po  $r$  obiegach otrzymamy

$$A_i^r(y) \left\{ \begin{aligned} y_1' &= (a d e^{r 2\pi i l' / i} - b c e^{r 2\pi i l'' / i}) y_1 - a b (e^{r 2\pi i l' / i} - e^{r 2\pi i l'' / i}) y_2 \\ y_2' &= c d (e^{r 2\pi i l' / i} - e^{r 2\pi i l'' / i}) y_1 - (b c e^{r 2\pi i l' / i} - a d e^{r 2\pi i l'' / i}) y_2. \end{aligned} \right.$$

Jeżeli zatem  $v_i$  — razy powtórzmy podstawienie  $A_i(w)$ , otrzymamy równości:

$$p_i \sum_{r=0}^{r=v-1} (a d e^{r 2\pi i l' / i} - b c e^{r 2\pi i l'' / i}) - q_i \sum_{r=0}^{r=v-1} a b (e^{r 2\pi i l' / i} - e^{r 2\pi i l'' / i}) = 0$$

$$p_i \sum_{r=0}^{r=v-1} c d (e^{r 2\pi i l' / i} - e^{r 2\pi i l'' / i}) - q_i \sum_{r=0}^{r=v-1} (b c e^{r 2\pi i l' / i} - a d e^{r 2\pi i l'' / i}) = 0,$$

czyli

$$a(d p_i - b q_i) \sum_{r=0}^{r=\nu-1} e^{r 2\pi i i'} - b(c p_i - a q_i) \sum_{r=0}^{r=\nu-1} e^{i 2\pi i i'} = 0$$

$$c(d p_i - b q_i) \sum_{r=0}^{r=\nu-1} e^{r 2\pi i i''} - b(c p_i - a q_i) \sum_{r=0}^{r=\nu-1} e^{i 2\pi i i''} = 0.$$

Lecz tak  $e^{2\pi i i'} = e^{\frac{2\pi i}{\nu} \cdot \nu i'}$ , jak też  $e^{2\pi i i''} = e^{\frac{2\pi i}{\nu} \cdot \nu i''}$  są pierwiastkami stopnia  $\nu_i$ -go z jedności, skąd wynika, że

$$\sum_{r=0}^{r=\nu-1} e^{r 2\pi i i'} = 0, \quad \sum_{r=0}^{r=\nu-1} e^{r 2\pi i i''} = 0.$$

Istotnie więc całkowania powyżej wspomnianych wiązań prowadzą do identyczności.

#### §. 4.

Uwagi, któreśmy w poprzednim ustępie wypowiedzieli nad całkami gatunku pierwszego, stosują się wprost także do całek gatunku drugiego. Istotnie, punkty rozgałęzienia  $e_i$  pozostają dla całek  $Z_i^{\nu}(\zeta)$  też same, a obok nich zjawia się tylko punkt nieskończonościowy  $\infty$ , w którym jednakowoż całki  $Z_i$  stają się nieskończenie wielkimi tak, jak funkcje wymierne; obieg zatem kranca np.  $\alpha$  około takiego punktu nie zmienia wartości całek.

Jeżeli więc przez  $P_i, Q_i$  będziemy rozumieli peryody częściowe całek  $Z_i$ , to przy obiegach zmiennej  $z$  ulegają podstawieniu:

$$(25) \quad A_i(Z) \quad \begin{cases} Z_1' = \alpha_i Z_1 + \beta_i Z_2 + P_i \\ Z_2' = \gamma_i Z_1 + \delta_i Z_2 + Q_i \end{cases}$$

i między tymi peryodami istnieją związki liniowe:

$$(26) \quad \begin{cases} P_i + \alpha_i P_2 + \beta_i Q_2 + \delta_i P_3 - \beta_2 Q_3 = 0 \\ Q_i + \gamma_i P_2 + \delta_i Q_2 - \gamma_2 P_3 + \alpha_2 Q_3 = 0 \end{cases}$$

albo, jeżeli dolny kraniec  $y$  przyjmiemy w punkcie  $e_3$ :

$$(26') \quad \begin{cases} P_3 = Q_3 = 0 \\ P_i + \alpha_i P_2 + \beta_i Q_2 = 0 \\ Q_i + \gamma_i P_2 + \delta_i Q_2 = 0 \end{cases}.$$

O tych peryodach częściowych  $P_i$  i  $Q_i$  okażemy, że są one niezależne od wartości  $t$ .

Mianowicie z uwagi, że

$$F_A^2 + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_h' = A_z - \frac{1}{2} A_z'(z-t) + \frac{1}{2} A_o(z-t)^2 + \frac{1}{2} M(z-t)^2,$$

wynika

$$Z_i(t) = \int \frac{y_i dz}{(z-t)^2} [F_A^2 + \frac{1}{2}(z-t)^2 F_h'] = -\frac{A_z y_i + y_i'(z-t)}{2(z-t)^2} + \frac{1}{2} \int M y_i dz,$$

gdzie  $M$  jest funkcją samego  $z$ .

Jeżeli więc przez  $t'$  oznaczymy inny punkt nieskończonościowy, to mieć będziemy

$$\begin{aligned} Z_i(t) - Z_i(t') &= -\frac{A_z}{2} \left[ \frac{y_i + y_i'(z-t)}{(z-t)^2} - \frac{y_i + y_i'(z-t')}{(z-t')^2} \right] \\ &= -\frac{A_z(t-t')}{2} \frac{y_i(2z-t-t') + y_i'(z-t)(z-t')}{(z-t)^2(z-t')^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Mamy więc twierdzenie:

Różnica dwu całek gatunku drugiego  $Z_i(t)$  i  $Z_i(t')$ , posiadających różne punkty nieskończonościowe  $t$  i  $t'$  wyraża się liniowo i jednorodnie przez funkcją  $y_i$  i jej pochodną  $y_i'$ .

Z tego twierdzenia wynika bezpośrednio jako wniosek, twierdzenie:

Nietylko parametry  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , co jest oczywiste, ale także peryody częściowe  $P_i$ ,  $Q_i$  niezależą od parametru  $t$ .

## §. 5.

W ustępie 1-ym mieliśmy rozkład funkcji  $Q_{ik}$ : (11<sup>a</sup>), (11<sup>b</sup>). Rozkład ten możemy obecnie, korzystając z powyższego twierdzenia, zastąpić przez inny.

Jakoż z uwagi że według (8) i (19) jest:

$$Q_{ik} = \int_{\eta}^{\xi} Z_i^{(k)}(\zeta) v_k d\zeta,$$

albo

$$Q_{ik} = - \int_y^x Z_k^{(i)}(z) y_i dz,$$

mamy:

$$Q_{ik} = \int_{\eta}^{\xi} [Z_i^{\tau y}(\zeta) - Z_i^{\tau y}(\tau)] v_k d\zeta + Z_i^{\tau y}(\tau) \int_{\eta}^{\xi} v_k d\zeta$$

albo

$$Q_{ik} = - \int_y^x [Z_k^{\xi \eta}(z) - Z_k^{\xi \eta}(t)] y_i dz - Z_k^{\xi \eta}(t) \int_y^x y_i dz,$$

to jest

$$(28^a) \quad Q_{ik} = \int_{\eta}^{\xi} (\text{funkcja wym. } y_i, y_i', z \dots) d\zeta + Z_i^{\tau y}(\tau) w_k^{\xi \eta}$$

$$(28^b) \quad Q_{ik} = \int_y^x (\text{funkcja wym. } v_k, v_k', \xi \dots) dz - Z_k^{\xi \eta}(t) w_i^{\tau y}$$

## §. 6.

Aby zbadać zachowanie się funkcji  $Q_{ik}$  w oddzielnych punktach, postąpimy podobnie, jak w ustępie 2-gim. Przyjmiemy więc, że krańce  $x, y$  znajdują się w okolicy n. p. punktu  $a$ , zaś  $\xi, \eta$  w okolicy punktu  $b$ . Rozróżnimy tu następujące przypadki:

1) Jeżeli  $a \geq b$ , to  $Q_{ik}$  wyraża się przez szereg potęgowy argumentów  $x - a, y - a, \xi - b, \eta - b$ .

2) Niech  $a = b \geq e$ . W tym przypadku weźmy na uwagę funkcją.

$$\Phi(z, \zeta) = [F_A^a + \frac{1}{2}(z - \zeta)^2 F_h^a] y_i v_k - A_2 v_i v_k - [A_2 v_i v_k + \frac{1}{2} A_2' v_i v_k](z - \zeta).$$

Z równości (9) wynika dalej, że

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = [\frac{1}{2} A_2' + (z - \zeta)(A_0 + \dots)] y_i v_k + [A_2 + (z - \zeta)(\frac{1}{2} A_2' + \dots)] y_i' v_k - [A_2 v_i v_k + \frac{1}{2} A_2' v_i v_k],$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = [\frac{1}{2} A_2' + (\zeta - z)(A_0 + \dots)] y_i v_k + [A_2 + (\zeta - z)(\frac{1}{2} A_2' + \dots)] y_i v_k' - (A_2 v_i v_k)' + A_2 v_i' v_k + \frac{1}{2} A_2' v_i v_k + (\zeta - z)[A_2 v_i' v_k + \dots],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = [A_2 + (z - \zeta)(\frac{1}{2} A_2' + \dots)] y_i'' v_k + 2[\frac{1}{2} A_2' + (z - \zeta)(A_0 + \dots)] y_i' v_k + [A_0 + (z - \zeta)(-3M + \dots)] y_i v_k,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \zeta} = [A_2 + (z - \zeta) (\frac{1}{2} A_2' + \dots)] y_i' v_k' + [\frac{1}{2} A_2' + (z - \zeta) (A_0 + \dots)] y_i v_k' + \\ + [\frac{1}{2} A_2' + (\zeta - z) (A_0 + \dots)] y_i' v_k + [\frac{1}{2} A_2'' - A_0 + (z - \zeta) A_0' + \dots] y_i v_k - \\ - [A_2 v_i''' v_k + A_2 v_i' v_k' + \frac{3}{2} A_2' v_i' v_k + \frac{1}{2} A_2' v_i v_k' + \frac{1}{2} A_2'' v_i v_k],$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = [A_2 + (\zeta - z) (\frac{1}{2} A_2' + \dots)] y_i v_k'' + 2 [\frac{1}{2} A_2' + (\zeta - z) (A_0 + \dots)] y_i v_k' + \\ + [A_0 + (z - \zeta) (-3M + \dots)] y_i v_k + A_2 (v_i'' v_k - v_i v_k'') + A_2' (v_i' v_k - v_i v_k') + \\ + (\zeta - z) (A_2 v_i''' v_k + \dots),$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = (A_2 y_i''' + \frac{3}{2} A_2' y_i'' + 3 A_0 y_i'' - 3 M y_i) v_k + (z - \zeta) (\dots),$$

i t. d.

Mamy więc dla  $z = \zeta$ 

$$[\Phi(z, \zeta)]_{z=\zeta} = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_{z=\zeta} = 0 \quad \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right]_{z=\zeta} = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right]_{z=\zeta} = (A_2 v_i'' + A_2' v_i' + A_0 v_i) v_k = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \zeta} \right]_{z=\zeta} = - (A_2 v_i'' + A_2' v_i' + A_0 v_i) v_k = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} \right]_{z=\zeta} = (A_2 v_k'' + A_2' v_k' + A_0 v_k) v_i + A_2 (v_i'' v_k - v_i v_k'') + \\ + A_2' (v_i v_k - v_i v_k') = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} \right]_{z=\zeta} = (A_2 v_i''' + \frac{3}{2} A_2' v_i'' + 3 A_0 v_i' - 3 M v_i) v_k = \\ = \frac{v_k}{A_2} \left[ (2 A_2 A_0 + \frac{A_2^2}{2} - A_2 A_2'') v_i' + \frac{1}{2} (A_2' A_0 + A_2 A_0' - \frac{1}{2} A_2 A_2''') v_i \right]$$

i t. d.

Ponieważ równania powyższe zachodzą bez względu na wartość  $a$ , dla której  $z = \zeta = a$ , zatem funkcya  $\Phi(z, \zeta)$  jest podzielna przez  $(z - \zeta)^2$ , t. j.:  $\Phi(z, \zeta) = (z - \zeta)^2 P_1(z, \zeta)$ ;

$P_1(z, \zeta)$  można rozwinąć w okolicy punktu  $a$  na szereg potęgowy argumentów  $z - a, \zeta - a$ .

Mamy więc

$$[F_1^2 + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 F_1^1] y_i v_k = A_2 v_i v_k + [A_2 v_i' v_k + \frac{1}{2} A_2' v_i v_k] (z - \zeta) + \\ + P_1(z, \zeta) (z - \zeta)^2. \quad (29^a)$$

Przemieniając w tej równości z sobą  $z$  i  $\zeta$ , a następnie wskaźniki  $i$  z  $k$ , otrzymamy wzór:

$$(29^b) \quad [F_A^s + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_h^t] y_i v_k = A_2 y_i y_k + [A_2 y_i y_k' + \frac{1}{2} A_2' y_i y_k] (\zeta - z) + P_2(z, \zeta) (\zeta - z)^2.$$

Mnożąc równość (29<sup>a</sup>) przez  $\frac{dz \cdot d\zeta}{(z-\zeta)^2}$  i całkując, otrzymamy:

$$(30) \quad \iint \frac{y_i v_k}{(z-\zeta)^2} [F_A^s + \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_h^t] dz d\zeta = \\ = - \int \frac{\frac{1}{2} A_2 v_i v_k + (z-\zeta) [A_2 v_i' v_k + \frac{1}{2} A_2' v_i v_k]}{(z-\zeta)^2} d\zeta + \iint P_2(z, \zeta) dz d\zeta.$$

Zanim wykonamy całkowanie względem  $\zeta$ , rozróżnić nam potrzeba kilka przypadków:

1)  $i = k$ .

Wówczas ułamek stojący po prawej stronie możemy tak napisać:

$$\frac{\frac{1}{2} A_2 v_i v_k + (z-\zeta) [A_2 v_i' v_k + \frac{1}{2} A_2' v_i v_k]}{(z-\zeta)^2} d\zeta = \\ = \frac{A_2 v_i^2 + (z-\zeta) [2 A_2 v_i v_i' + A_2' v_i^2]}{2(z-\zeta)^2} d\zeta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{A_2 v_i}{(z-\zeta)} d\zeta.$$

Jest więc dla  $i = k$

$$(31) \quad \iint \frac{y_i v_i}{(z-\zeta)^2} [F_A^s - \frac{1}{2}(z-\zeta)^2 F_h^t] = - \frac{1}{2} \frac{A_2 v_i^2}{z-\zeta} + \iint P_2(z, \zeta) dz d\zeta$$

W tym więc przypadku funkcja  $Q_i$  nie ma punktu logarytmicznego.

2) Inaczej się rzecz przedstawia, jeżeli  $i \geq k$ .

Jak wiadomo jest dla równań z sobą sprzężonych przy  $i \geq k$

$$y_i y_i' - y_i' y_k = \frac{c}{A_2}, \quad [c = \text{stała}]$$

Owóż, umówmy się tak dobrać (unormować) całki  $y_i$ , aby

$$(32) \quad y_1 y_2' - y_1' y_2 = + \frac{1}{A_2}.$$

Takie unormowanie jest widocznie zawsze możliwe. Wówczas mamy, dodając i odejmując w liczniku (30):  $\frac{1}{2} A_2 (v_1' v_2' - v_1' v_2) = + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{1}{2} A_2 v_1 v_2 + (z - \zeta) [A_2 v_1' v_2 + \frac{1}{2} A_2' v_1 v_2]}{(z - \zeta)^2} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{A_2 v_1 v_2 + (z - \zeta) [A_2 v_1 v_2' + A_2 v_1' v_2] + A_2' v_1 v_2}{(z - \zeta)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{z - \zeta} = \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{A_2 v_1 v_2}{z - \zeta} + \frac{1}{2} \frac{\partial \log (z - \zeta)}{\partial \zeta}, \end{aligned}$$

zaś

$$\frac{1}{2} \frac{A_2 v_1 v_2 + (z - \zeta) [A_2 v_2' v_1 + \frac{1}{2} A_2' v_1 v_2]}{(z - \zeta)^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{A_2 v_1 v_2}{z - \zeta} - \frac{1}{2} \frac{\partial \log (z - \zeta)}{\partial \zeta}$$

Jest więc

$$\begin{aligned} \iint \frac{y_i v_k}{(z - \zeta)^3} [F_A^3 + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 F_h^3] dz d\zeta &= - \frac{1}{2} \frac{A_2 v_1 v_2}{z - \zeta} + \\ &+ \frac{(-1)^i}{2} \log (z - \zeta) + \iint P_1^{(i)}(z, \zeta) dz d\zeta \end{aligned} \quad (32')$$

dla  $i \geq k = 1, 2$ .

Wychodząc ze wzorów (29<sup>b</sup>) znajdziemy w podobny sposób:

$$\iint \frac{y_i v_i}{(z - \zeta)^3} [F_A^3 + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 F_h^3] dz d\zeta = - \frac{1}{2} \frac{A_2 y_i^2}{z - \zeta} + \iint P_2(z, \zeta) dz d\zeta, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{y_i v_k}{(z - \zeta)^3} [F_A^3 + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2 F_h^3] dz d\zeta &= - \frac{1}{2} \frac{A_2 y_i y_k}{z - \zeta} + \frac{(-1)^i}{2} \log (z - \zeta) + \\ &+ \iint P_2^{(i)}(z, \zeta) dz d\zeta. \end{aligned} \quad (34)$$

Stąd w kształcie więcej symetrycznym:

$$\iint \frac{y_i v_i}{(z - \zeta)^3} [F_A^3 + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2] dz d\zeta = - \frac{1}{4} \frac{A_2 y_i^2 + A_2 v_i^2}{z - \zeta} + \iint P dz d\zeta \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \iint \frac{y_i v_k}{(z - \zeta)^3} [F_A^3 + \frac{1}{2} (z - \zeta)^2] dz d\zeta &= - \frac{1}{4} \frac{A_2 y_i y_k + A_2 v_i v_k}{z - \zeta} + \\ &+ \frac{(-1)^i}{2} \log (z - \zeta) + \iint P dz d\zeta \end{aligned} \quad (36)$$



Wprowadzając na koniec krańce  $x, y; \xi, \eta$ , możemy wypowiedzieć następujące twierdzenie:

W okolicy dowolnego punktu  $a \geq e_i$  przedstawić można funkcję  $Q_{ik}$  w następujący sposób:

$$(37) \quad Q_{ii} = \text{Szereg potęg całkowitych arg. } (x-a, y-a, \xi-a, \eta-a; x-\xi, y-\xi, x-\eta, y-\eta)$$

$$Q_{ik} = \frac{(-1)^i}{2} \log \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)} + \text{Szereg potęg całkowitych } (x-a, y-a, \xi-a, \eta-a; x-\xi, \dots, y-\eta).$$

Stąd

$$Q = Q_{21} - Q_{12} = \log \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\eta)(y-\xi)} + \text{Szereg potęgowy } (x-a, \dots, \eta-a).$$

## §. 7.

Przy pomocy wzorów (11<sup>a</sup>), (11<sup>b</sup>) albo (27), (28<sup>a</sup>) i (28<sup>b</sup>) można wyprowadzić związki dwuliniowe, istniejące <sup>1)</sup> między peryodami całek pierwszego i drugiego gatunku.

W tym celu należy wziąć dwa tory  $L$  i  $\Lambda$  zamknięte na powierzchni Riemann'a, należące do rozwiązań  $y_1, y_2$  (§. 3), które niepozwalają się ściągnąć do jednego punktu i wykonać całkowanie wzdłuż toru  $L$  n. p. względem zmiennej  $z$ , zaś wzdłuż toru  $\Lambda$  względem zmiennej  $\zeta$ .

Ponieważ na takich torach tak  $y_i$  jak  $y_i'$  (wzgl.  $v_k, v_k'$ ) wracają do swych pierwotnych wartości, zatem we wyrażeniach (11<sup>a</sup>), (11<sup>b</sup>) albo (28<sup>a</sup>), (28<sup>b</sup>) pierwsze wyrazy po prawych stronach stają się równe zeru. I mianowicie, jeżeli naprzód wykonamy całkowanie po torze  $L$ , a następnie po torze  $\Lambda$ , to według (28<sup>a</sup>)

$$Q_{ik}^{\Lambda} = Z_i^{\Lambda} w_k^{\Lambda} + C^2);$$

jeżeli zaś przebiegniemy naprzód tor  $\Lambda$ , a potem tor  $L$ , to

$$Q_{ik}^{\Lambda L} = Z_k^{\Lambda} w_i^L - C,$$

<sup>1)</sup> Por. Fuchs: Über Relationen etc. Crelle's J. t. 76; oraz pracę tegoż autora: Über Relat. etc. Sitzungsberichte der kön. preuss. Ak. der Wiss. t. 54. str. 1113.

<sup>2)</sup> Argumenty  $t$  i  $\tau$  w całkach  $Z$  możemy opuścić, gdyż według §. 4. ich peryody nie zależą od tych argumentów.

gdzie  $C$  jest stałą, którą oznaczymy w dalszym ciągu.

Rozróżnić nam należy obecnie dwa przypadki.

1) Jeżeli nietylko tory  $L$  i  $\Lambda$  na powierzchni Riemann'a nie przecinają się z sobą, ale także ich rzuty (ślady) na ten sam liść nie mają z sobą żadnego punktu wspólnego, to wtedy:

$$C = 0, \quad Q_{ik}^{L, \Lambda} = Q_{ik}^{\Lambda, L},$$

t. j. wartość  $Q_{ik}$  nie zależy od porządku całkowania i dla takich torów otrzymujemy związek dwuliniowy:

$$Z_i^L w_i^\Lambda + Z_i^\Lambda w_i^L = 0.$$

2) Jeżeli jednak owe rzuty torów  $L$  i  $\Lambda$  przecinają się z sobą, to wartość  $Q_{ik}$  może zależeć od porządku całkowania i  $C$  może być różne od zera. Jak bowiem widzieliśmy, całka  $Q_{ik}$   $i \geq k$  w okolicy punktu  $z = \zeta$  (t. j. właśnie w okolicy punktu przecięcia się rzutów torów  $L$  i  $\Lambda$ ) posiada w swym rozwinięciu wyraz, będący połową logarytmu stosunku podwójnego podziału punktów  $(x, y, \xi, \eta)$ .

Wyraz taki, zawierający logarytm stosunku podwójnego podziału, zależy od tego, w jakim porządku przebiegamy tory  $(y, x)$  i  $(\eta, \xi)$ ; mianowicie mamy następujące twierdzenie <sup>1)</sup>:

Jeżeli  $x$  i  $\xi$  przebiegają tory przecinające się, to, jeżeli tor drugi, t. j. później przebieżony, przekracza tor pierwszy od strony lewej ku prawej, wartość logarytmu stosunku podwójnego podziału  $(x, y, \xi, \eta)$  jest o  $2\pi i$  większa, niż w przypadku przeciwnym (kiedy tor drugi przekracza pierwszy od strony prawej ku lewej).

Inne wyrazy wspomnianego rozwinięcia całki  $Q_{ik}$  zawierają całkowite potęgi argumentów, a więc nie zależą od porządku całkowania.

Jeżeli zatem część toru  $L$ , leżąca na  $m$ -tym, liściu krzyżuje się z częścią toru  $\Lambda$ , leżącą na  $n$ -tym liściu powierzchni Riemann'a, i jeżeli  $y_i$  posiada na  $m$ -tym liściu wartość

$$y_i = a_{i_1}^{(m)} y_1 + a_{i_2}^{(m)} y_2,$$

wówczas dla tego punktu skrzyżowania się torów  $L$  i  $\Lambda$  jest:

$$y_i v_i = a_{i_1}^{(m)} a_{k_1}^{(n)} y_1 v_1 + a_{i_1}^{(m)} a_{k_2}^{(n)} y_1 v_2 + a_{i_2}^{(m)} a_{k_1}^{(n)} y_2 v_1 + a_{i_2}^{(m)} a_{k_2}^{(n)} y_2 v_2.$$

<sup>1)</sup> Por. Burkhardt: Beiträge zur Theorie der hyp. Sigmafunct., Mathem. Ann. t. 32, str. 397.

Stąd wynika, że wartości początkowe całek

$$Q_{ik}^{L \Lambda} \text{ i } Q_{ik}^{\Lambda L}$$

spowodowane zmianą porządku całkowania w tym punkcie krzyżowania się torów  $L$  i  $\Lambda$  wzrosną po obiegu torów  $L$  i  $\Lambda$  ( $\Lambda, L$ ) bez względu na znak  $\sigma$

$$(a_{ik}^{(m)} a_{kz}^{(n)} - a_{iz}^{(m)} a_{ki}^{(n)}) \pi i$$

i że o tę wielkość będą się różniły wartości powyższych całek.

Dla zupełnego rozwiązania zadania należałoby, podobnie jak się to dzieje w teorii całek Abelowych, wyszukać tak zwane tory kanoniczne. W tym względzie może w wielu przypadkach oddać wielkie usługi odtworzenie płaszczyzny Riemann'a na płaszczyznę zmiennej  $\eta$  związanej ze zmienną  $z$  równaniem:

$$\eta = \frac{y_2(z)}{y_1(z)}.$$

Rzecz tę bliżej wyjaśnimy na następującym przykładzie. Weźmy równanie różniczkowe:

$$A_2 y'' + A_2' y' + A_0 y = 0,$$

gdzie

$$A_2 = z^2(z-1)^2, \quad A_0 = \frac{1}{16}(3-35z+35z^2).$$

Równanie to posiada rozwiązania algebraiczne:

$$y_1 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{1-\sqrt{z}}}{z^{\frac{3}{4}}(1-z)^{\frac{3}{4}}}, \quad y_2 = \sqrt{2} \frac{\sqrt{1+\sqrt{z}}}{z^{\frac{3}{4}}(1-z)^{\frac{3}{4}}}.$$

Rozwiązania  $y_1, y_2$  przy obiegu zmiennej  $z$  około punktów osobliwych  $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = \infty$  ulegają podstawieniom:

$$A_1) \quad \begin{cases} y_1' = -iy_1 \\ y_2' = iy_2 \end{cases} \quad A_2) \quad \begin{cases} y_1' = iy_2 \\ y_2' = iy_1 \end{cases} \quad A_3) \quad \begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

i są tak dobrane, że

$$A_2 (y_1 y_2' - y_2 y_1') = +1.$$

Całkami pierwszego gatunku są

$$w_1 = \int y_1 dz, \quad w_2 = \int y_2 dz,$$

zaś całkami gatunku drugiego, mającemi punkt nieskończonościowy n. p. w nieskończoności ( $t = \infty$ )

$$Z_1 = -\frac{3}{16} \int (z - \frac{1}{2}) y_1 dz, \quad Z_2 = -\frac{3}{16} \int (z - \frac{1}{2}) y_2 dz.$$

Do rozwiązań  $y_1, y_2$  należy ośmioliściowa powierzchnia Riemann'a, nazwijmy ją  $R_1$ . Dla bliższego jej zbadania odwzorujemy ją przy pomocy funkcji

$$\eta = \frac{y_2}{y_1} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}}$$

czyli funkcji

$$z = \left( \frac{1 - \eta^2}{1 + \eta^2} \right)^2$$

na powierzchnię Riemann'a dwulściową  $R_2$ , posiadającą jako punkty rozgałęzienia

$$\eta = \pm 1, \pm i, 0, \infty.$$

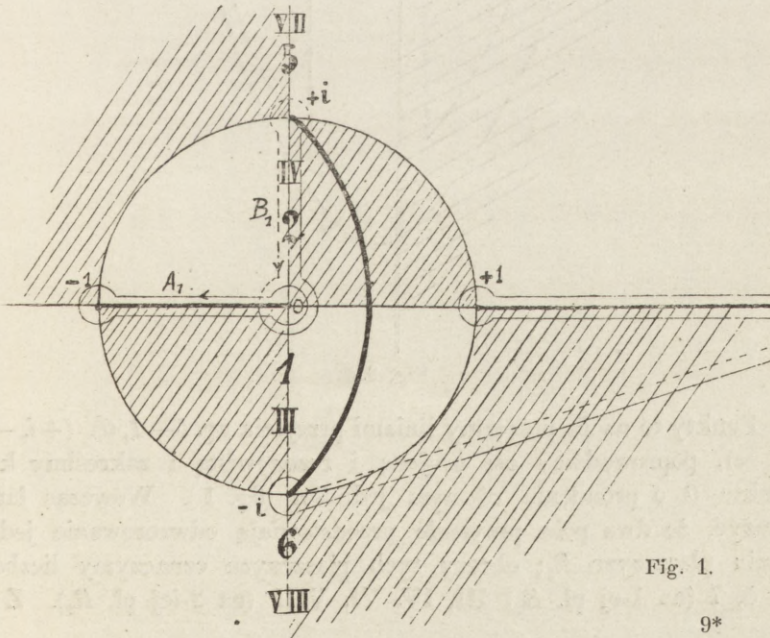


Fig. 1.

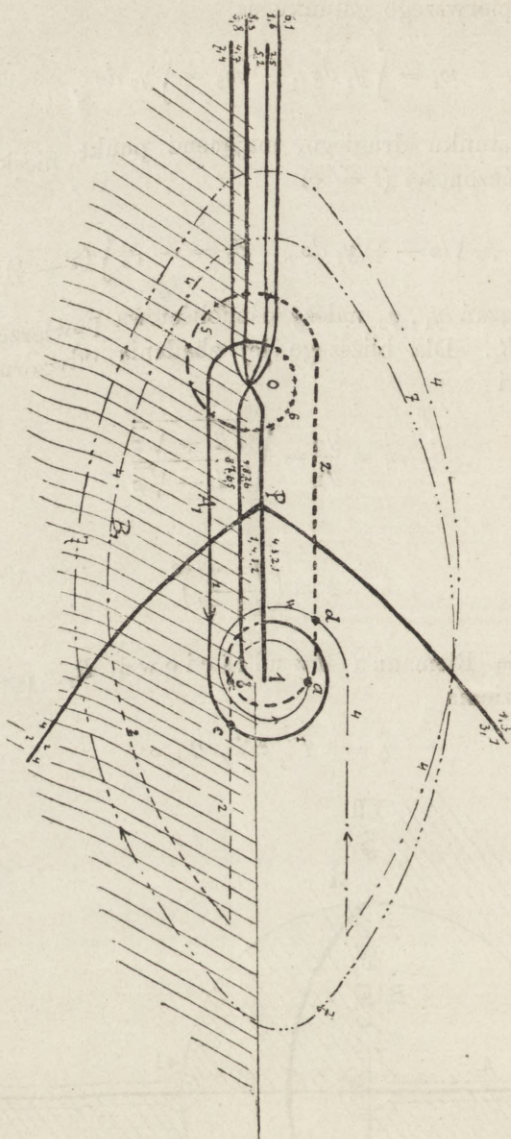


Fig. 2.

Punkty te na  $R_2$  połączmy liniami przejścia np.  $(-1, 0)$ ,  $(+i, -i)$ ,  $(+1, \infty)$ , poprowadźmy osi urojona i rzeczywistą i zakreślmy koło z punktu  $0$  o promieniu równym jednostki (fig. 1.). Wówczas łatwo zauważyć, że dwa pola przyległe przedstawiają odwzorowanie jednej z ośmiu płaszczyzn  $R_1$ ; obrazy tych płaszczyzn oznaczymy liczbami 1, 2, 5, 7 (na 1-ej pł.  $R_2$ ) III, IV, VI, VIII (na 2-ej pł.  $R_2$ ). Z tej

powierzchni  $R_2$ , będącej odwzorowaniem  $R_1$ , możemy teraz wnieść o budowie powierzchni  $R_1$  (fig. 2.). Mamy mianowicie na powierzchni  $R_1$  ośm linii przejścia: dwie idące z punktu  $0$  do punktu  $1$  i łączące z sobą jedna liście:  $1 z 2$ ,  $2 z 3$ ,  $3 z 4$ ,  $4 z 1$ ; druga liście:  $5 z 8$ ,  $8 z 7$ ,  $7 z 6$ ,  $6 z 5$ ; -- następnie cztery linie przejścia idące z punktu  $0$  do punktu  $\infty$  i łączące z sobą: jedna liście:  $1 z 6$  i  $6 z 1$ , druga:  $2 z 5$  i  $5 z 2$ , trzecia:  $3 z 8$  i  $8 z 3$ , czwarta:  $4 z 7$  i  $7 z 4$ , i na koniec dwie linie przejścia wychodzące z punktu  $P$  do nieskończoności i łączące z sobą jedna liście:  $1 z 3$  i  $3 z 1$ , druga liście:  $2 z 4$  i  $4 z 2$ . Zauważmy dalej, że torom zamkniętym na powierzchni  $R_2$  odpowiadają naturalnie znowu tory zamknięte na powierzchni  $R_1$ ; w szczególności n. p. torom  $A_1, B_1$  na  $R_2$ , przebieżonym w kierunku strzałek (fig. 1.), odpowiadają tory  $A_1, B_1$  na  $R_1$ , przebieżone w kierunku strzałek (fig. 2.). Te dwa tory ostatnie (na  $R_1$ ), a raczej ich rzuty przecinają się z sobą w czterech punktach  $a, b, c, d$  i mianowicie w punktach  $a$  i  $d$  tor  $B_1$  przekracza tor  $A_1$  od strony prawej ku lewej (pl), zaś w punktach  $b$  i  $c$  tor  $B_1$  przekracza  $A_1$  od strony lewej ku prawej (lp). Jeżeli się nadto umówimy, aby wartości rozwiązań  $y$  rozprzestrzenione na 1-ym liściu powierzchni  $R_1$  nazwać wprost  $y_1(z)$ ,  $y_2(z)$  [wzgl.  $v_1(\zeta)$ ,  $v_2(\zeta)$ ] jako f. zm.  $\zeta$ ] i aby zmienna  $z$  przebiegała tor  $A_1$ , zaś zmienna  $\zeta$  tor  $B_1$ , to owe rozwiązania i ich iloczyny mieć będą następujące wartości w punktach  $a, b, c, d$ :

		$y_1$	$y_2$	$v_1$	$v_2$	$y_1 v_1$	$y_1 v_2$	$y_2 v_1$	$y_2 v_2$
pl	$a$	$-i y_1$	$+i y_2$	$+v_1$	$+v_2$	$-i y_1 v_1$	$-i y_1 v_2$	$+i y_2 v_1$	$+i y_2 v_2$
lp	$b$	$-i y_1$	$+i y_2$	$-i v_1$	$+i v_2$	$-y_1 v_1$	$+y_1 v_2$	$+y_2 v_1$	$-y_2 v_2$
lp	$c$	$+y_1$	$+y_2$	$-i v_1$	$+i v_2$	$-i y_1 v_1$	$+i y_1 v_2$	$-i y_2 v_1$	$+i y_2 v_2$
pl	$d$	$-i y_1$	$+i y_2$	$+i v_1$	$-i v_2$	$+y_1 v_1$	$-y_1 v_2$	$-y_2 v_1$	$+y_2 v_2$

Z tej tabelki i ze wzorów (37) widoczna, że całki  $Q_{ii}$  w żadnym z punktów  $a, b, c, d$  nie posiadają w swych rozwinięciach wyrazu zawierającego logarytm stosunku podwójnego podziału. Stąd wynika, że wartości końcowe <sup>1)</sup> tych całek są równe początkowym i że

<sup>1)</sup> t. j. po obiegu torów  $A, B$ .

$$Q_{ii}^{A_1 B_1} = Q_{ii}^{B_1 A_1},$$

skąd znowu według (11<sup>a</sup>, 11<sup>b</sup>) lub (28<sup>a</sup>, 28<sup>b</sup>) otrzymujemy:

$$Z_i^{A_1 B_1} w_i + Z_i^{B_1 A_1} w_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Inaczej się rzecz przedstawia przy funkcjach  $Q_{12}$  i  $Q_{21}$ . Funkcje te posiadają według powyższej tabelki w swych rozwinięciach w okolicy punktów  $a, \dots, d$  wyrazy zawierające logarytmy, a więc np.  $Q_{12}^{A_1 B_1}$  wzrośnie z powodu przecięcia się torów  $A_1, B_1$  w punkcie

$$\begin{array}{llll} a & o & (-i) & (-\frac{1}{2}) & (-2\pi i) = -i\pi i \\ b & " & (+1) & (-\frac{1}{2}) & (+2\pi i) = -\pi i \\ c & " & (+i) & (-\frac{1}{2}) & (+2\pi i) = -i\pi i \\ d & " & (-1) & (-\frac{1}{2}) & (-2\pi i) = -\pi i \end{array}$$

Jest więc ostatecznie

$$Q_{12}^{A_1 B_1} - Q_{12}^{B_1 A_1} = +(1-i) 2\pi i.$$

Podobnie znajdziemy dla funkcji  $Q_{21}$ :

w punkcie	$a$	różnicę	$(+i) \frac{1}{2} (-2\pi i) = -i\pi i$
	$b$	"	$(+1) \frac{1}{2} (+2\pi i) = \pi i$
	$c$	"	$(-i) \frac{1}{2} (+2\pi i) = -i\pi i$
	$d$	"	$(-1) \frac{1}{2} (-2\pi i) = \pi i$

tak iż

$$Q_{21}^{A_1 B_1} - Q_{21}^{B_1 A_1} = -(1-i) 2\pi i.$$

Stąd wynikają według (11<sup>a,b</sup>) albo (28<sup>a,b</sup>) następujące związki

$$\begin{aligned} Z_1^{A_1 B_1} w_2 + Z_2^{B_1 A_1} w_1 &= +(1+i) 2\pi i \\ Z_2^{A_1 B_1} w_1 + Z_1^{B_1 A_1} w_2 &= -(1-i) 2\pi i. \end{aligned}$$

Odejmując od siebie te dwie równości, otrzymamy związek:

$$(Z_2^{B_1 A_1} w_1 - Z_2^{A_1 B_1} w_1) + (Z_1^{A_1 B_1} w_2 - Z_1^{B_1 A_1} w_2) = +4\pi i$$

nie różniący się zasadniczo od związku dwuliniowego między peryodami całek hyperliptycznych, zwykle używanego.

Podobne związki moglibyśmy otrzymać także dla innych torów powierzchni  $R_2$  lub  $R_1$ .

### §. 8.

W poprzedzającym ustępie zajmowaliśmy się związkami dwuliniowymi między peryodami (zupełnymi) całek pierwszego i drugiego gatunku; jak widzieliśmy, wyprowadzenie tych związków może przedstawiać wielkie trudności.

Zamiast jednak peryodów (zupełnych) możemy wprowadzić do rozważania pewne peryody częściowe, dla których wyprowadzenie odpowiednich związków dwuliniowych nie przedstawia żadnych trudności. Nadto okaże się, że związki te są z małą zmianą identyczne ze związkami otrzymanymi przez L. Fuchs'a (l. c.).

Jakoż, zauważmy naprzód, że różnica całek drugiego gatunku  $Z_i(t)$  i  $Z_i(t')$  jest dla  $x = e_n$  ( $e_n$  jest punktem osobliwym) według wzoru (27) równa zero:

$$[Z_i(t) - Z_i(t')]_{x=e_n} = 0.$$

Jeżeli więc jako tor całkowania  $L$  i  $\Lambda$  (§. 7.) weźmiemy wiązadła wychodzące z punktów osobliwych  $e_{n-1}$  i  $e_{n+1}$  i okrążające punkt  $e_n$ , to dla takich torów jest owa różnica całek gatunku drugiego także równa zero. Dla krótkości oznaczymy tor  $e_{n-1} e_n e_{n+1}$  przez  $L_n$ , zaś tor  $e_{n+1} e_n e_{n-1}$  przez  $\Lambda_n$ ;

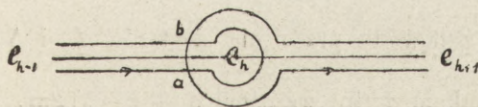


Fig. 3.

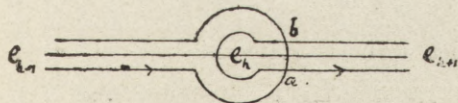


Fig. 4.

Mamy więc:

$$[Z_i(t) - Z_i(t')]_{L_n} = 0 \quad \text{i} \quad [Z_i(t) - Z_i(t')]_{\Lambda_n} = 0.$$



Stąd wynika według (11<sup>a, b</sup>) lub (28<sup>a, b</sup>):

$$Q_{ik}^{L \Lambda h} = Z_i^{L h} w_k^{\Lambda h} + C$$

zaś

(39)

$$\bar{Q}_{ik}^{\Lambda L h} = -Z_k^{\Lambda h} w_i^{L h} - C,$$

gdzie  $C$  jest stałą.

Jeżeli  $Y_1, Y_2$  przedstawiają, jak zawsze rozwiązania równania różniczkowego, należące do punktu  $e_h$ , i jeżeli przez  $\bar{Q}_{ik}$  oznaczymy funkcją  $Q_{ik}$  utworzoną dla tych właśnie rozwiązań  $Y_1, Y_2$ , to widoczne jest, że

$$(40) \quad \bar{Q}_{ii}^{L \Lambda h} - \bar{Q}_{ii}^{\Lambda L h} = 0.$$

Co się tyczy funkcji  $\bar{Q}_{12}$  i  $\bar{Q}_{21}$ , zauważmy, że tor  $L_h$  i  $\Lambda_h$  przecinają się z sobą w 2 punktach  $a, b$  (por. fig. 3, 4). Jeżeli w punkcie  $a$  mamy wartości  $Y_1, Y_2$  wzgl.  $\Upsilon_1, \Upsilon_2$  i jeżeli na  $L_h$  zmienia się  $x$ , na  $\Lambda_h$  zmienia się  $\xi$ , to w punkcie  $b$  mamy wartości rozwiązań następujące:

na fig. 3.:  $e^{2\pi i l'' h} Y_1, e^{2\pi i l'' h} Y_2, \Upsilon_1, \Upsilon_2$ , na fig. 4.:  $Y_1, Y_2, e^{-2\pi i l'' h} \Upsilon_1, e^{-2\pi i l'' h} \Upsilon_2$

Ponieważ  $l'_h + l''_h = -1$ , zatem tak na (fig. 3.), jak też na (fig. 4.) iloczyny  $Y_1 Y_2, Y_2 Y_1$  mają w punkcie  $b$  wartości:

$$e^{2\pi i l'' h} Y_1 Y_2, \quad e^{2\pi i l'' h} Y_2 Y_1.$$

Jeżeli więc  $Y_1, Y_2$  są tak dobrane, że

$$A_2(Y_1 Y_2' - Y_2 Y_1') = +1,$$

to całka  $\bar{Q}_{12}^{L \Lambda h}$  z powodu przecięcia się torów  $L_h$  i  $\Lambda_h$

w punkcie  $a$  (lp) wzrośnie o  $+(-\frac{1}{2})2\pi i$ ,

„  $b$  (pl) „ o  $-e^{2\pi i l'' h}(-\frac{1}{2})2\pi i$ , i t. d.,

a więc cała różnica wynosi ostatecznie

$$(40') \quad \bar{Q}_{12}^{L \Lambda h} - \bar{Q}_{12}^{\Lambda L h} = + (1 - e^{2\pi i l'' h}) \pi i.$$

Podobnie postępując, znajdziemy

$$(40'') \quad \bar{Q}_{21}^{L \Lambda h} - \bar{Q}_{21}^{\Lambda L h} = - (1 - e^{2\pi i l'' h}) \pi i.$$

Mamy zatem według wzorów (39, 40, 40', 40')

$$\begin{aligned} \bar{Z}_i^L w_i^{\Lambda} + \bar{Z}_i^{\Lambda} w_i^L &= 0 \quad i = 1, 2 \\ \bar{Z}_1^L w_2^{\Lambda} + \bar{Z}_2^{\Lambda} w_1^L &= + (1 - e^{2\pi i l''}) \pi i \\ \bar{Z}_2^L w_1^{\Lambda} + \bar{Z}_1^{\Lambda} w_2^L &= - (1 - e^{2\pi i l''}) \pi i \end{aligned} \quad (41)$$

gdzie całki  $\bar{w}$  i  $\bar{Z}$  są utworzone przy pomocy rozwiązań  $Y$ .

Ogólnie więc, jeżeli  $y_1, y_2$  oznaczają rozwiązania dowolne (ale raz stałe obrane) i jeżeli

$$y_i = a_i^{(h)} Y_1 + a_i^{(h)'} Y_2,$$

to mamy następujące związki:

$$\begin{aligned} Z_1^L w_1^{\Lambda} + Z_1^{\Lambda} w_1^L &= - a_{11}^{(h)} a_{12}^{(h)} (e^{2\pi i l''} - e^{-2\pi i l''}) \pi i \\ Z_2^L w_2^{\Lambda} + Z_2^{\Lambda} w_2^L &= - a_{21}^{(h)} a_{22}^{(h)} (e^{2\pi i l''} - e^{-2\pi i l''}) \pi i \\ Z_1^L w_2^{\Lambda} + Z_2^{\Lambda} w_1^L &= - [-1 + e^{2\pi i l''} + a_{11} a_{22} (e^{2\pi i l''} - e^{-2\pi i l''})] \pi i \\ Z_2^L w_1^{\Lambda} + Z_1^{\Lambda} w_2^L &= + [1 - e^{2\pi i l''} + a_{11} a_{22} (e^{2\pi i l''} - e^{-2\pi i l''})] \pi i. \end{aligned} \quad (42)$$

Wzory te (42) przedstawiają żądane związki dwuliniowe między peryodami częściowymi:  $w_i^L, w_i^{\Lambda}, Z_i^L, Z_i^{\Lambda}$  całek pierwszego i drugiego gatunku.

Ze związków (42) bardzo jest już łatwo otrzymać związki Fuchs'a. Istotnie zauważmy, że całki:

$$\begin{aligned} w_1^L &= (1 - e^{2\pi i l''}) w_1^{L-h}, & w_2^L &= (1 - e^{2\pi i l''}) w_2^{L-h} \\ w_1^{\Lambda} &= (1 - e^{2\pi i l''}) w_2^{\Lambda-h}, & w_2^{\Lambda} &= (1 - e^{2\pi i l''}) w_1^{\Lambda-h} \end{aligned}$$

gdzie

$$w_i^{L-h} = \int_{e^{-1}}^e d\bar{w}_i, \quad \text{i t. d.}$$

i podobnie

$$\bar{Z}_1^L = (1 - e^{2\pi i l''}) \bar{Z}_1^{L-h}, \quad \text{i t. d.}$$

Mamy zatem ze wzorów (41) związki:

$$(41') \quad \begin{aligned} \bar{Z}_i^{h-i} w_i^{e} \bar{w}_i^{e} w_{h+1}^{e} + \bar{Z}_i^{h} w_i^{e} \bar{w}_i^{e} w_{h-i}^{e} &= 0 \quad i = 1, 2 \\ \bar{Z}_1^{h-i} w_1^{e} \bar{w}_2^{e} w_{h+1}^{e} + \bar{Z}_2^{h} w_1^{e} \bar{w}_1^{e} w_{h-i}^{e} &= + \frac{\pi i}{1 - e^{2\pi i/h}} \\ \bar{Z}_2^{h-i} w_1^{e} \bar{w}_1^{e} w_{h+1}^{e} + \bar{Z}_1^{h} w_1^{e} \bar{w}_2^{e} w_{h-i}^{e} &= - \frac{\pi i}{1 - e^{2\pi i/h}} \end{aligned}$$

które są rzeczywiście zgodne ze wzorami Fuchs'a, jeżeli zauważymy, że w tych ostatnich trzeba zastąpić rozwiązanie  $V_2$  przez  $-V_2$ .

Z tych wzorów (41') można wreszcie otrzymać wzory (42') odpowiadające wzorom (42) w ten sam sposób, w jaki wyprowadziliśmy wzory (42) ze wzorów (41).

