Die Mathematik

als Lehrgegenstand des Gymnasiums.

Eine pädagogische Untersuchung

von

Joh. Karl Becker

Professor der Mathematik am Gymnasium zu Bruchsal.

Berlin,

Weidmannsche Buchhandlung.

1883.

Vorwort.

Obgleich jedermann einsieht, daß der heutige Gymnasialunterricht viel zu hohe Anforderungen an die Schüler stellt — wenigstens, wenn man von ihnen verlangt, daß sie auf alle Fächer den gleichen Fleiß verwenden sollen — und kaum jemand leugnet, daß dem endlich abgeholfen werden müsse, wenn die heranwachsende Generation der Gebildeten nicht körperlich immer mehr herabkommen soll, so haben doch alle Versuche, diese Abhilfe zu schaffen, bisher meistens nur dahin geführt, daß es entweder beim alten verblieben, oder gar die Anforderungen in dem einen oder anderen Fache noch mehr gesteigert worden sind.

Dies hat wohl zum Teil seinen Grund darin, daß die Fachgelehrten, deren Gutachten man eingeholt hat, meistens ihr eigenes Fach in erster Linie berücksichtigt wissen wollen und die Kürzungen bei den anderen Fächern erwarten.

Soll irgendwie abgeholfen werden, so ist jedenfalls das Wichtigste, daß von jeder Disziplin genau festgestellt werde, welchen Nutzen gerade ihr Studium denjenigen gewähre, welche sich einem gelehrten Berufe widmen wollen, und wieviel von dieser Disziplin unerläßlich, wenn der zukünftige Gelehrte keine empfindliche Lücke in seiner allgemeinen Bildung zeigen soll.

Alles was über dieses Minimum, das von jeder Disziplin dem Gymnasiallehrplan überwiesen werden muß, hinausgeht, dürfte dann dem Privatfleiße der Schüler überlassen bleiben, und was nicht jedem nützt, sollte zum fakultativen Lehrgegenstande gemacht werden, so daß, wenigstens in der Prima, jeder lernen kann, was ihm für seinen künftigen Beruf von Wichtigkeit ist, daß er aber nicht gezwungen wird, seine Kraft an Dingen zu verschwenden, die ihm von gar keinem oder nur problematischem Nutzen sind.

In den unteren und mittleren Klassen sollte man sich dagegen lediglich auf das Minimum in allen Disziplinen beschränken, um den Schülern noch Zeit zu lassen sowohl zur Ausbildung ihrer Körperkräfte, als auch ihrer besonderen Talente.

Es ist nun zwar gewiß schon sehr viel über den pädagogischen Wert jeder einzelnen Disziplin geschrieben und diskutiert worden. Dergleichen pflegt aber wenig gelesen und rasch wieder vergessen zu werden, so daß, wer sich in der einschlagenden Litteratur umsehen will, auch bei großer Mühe kaum finden wird, was er sucht. Mir ist es wenigstens nicht gelungen über den Bildungswert der Mathematik irgend eine Abhandlung ausfindig zu machen, die auch nur einigermaßen auf Gründlichkeit Anspruch machen dürfte, wenn ich die 1836 erschienene anonyme Abhandlung „über den Wert und Unwert der Mathematik", welche von einem schottischen Professor der Logik und Metaphysik, W. Hamilton, herrühren soll, ausnehme. Diese Abhandlung hat aber bei aller Gründlichkeit den Fehler großer Einseitigkeit und ihre Argumente gegen den Wert der Mathematik als Bildungsmittel treffen nur zu, wenn man unter Mathematik lediglich die Elemente des Euklid versteht, wie überhaupt des Verfassers Kenntnis von der Mathematik nicht über diese hinauszugehen scheint.

Obwohl ich überzeugt bin, daß das, was ich über diesen Gegenstand vorzubringen habe, gewiß auch schon anderwärts ausgesprochen ist — denn wer überhaupt ohne Voreingenommenheit und mit Sachkenntnis an diese Untersuchung herantritt, wird schwerlich zu sehr abweichenden Ergebnissen kommen können — so halte ich es doch für angezeigt, die Ergebnisse meiner Untersuchung öffentlich darzulegen. Wenn dadurch andere veranlaßt werden, die übrigen Disziplinen des Gymnasialunterrichts einer ähnlichen und ebenso unparteilichen Untersuchung zu unterziehen, so wäre damit immerhin ein Schritt zur Lösung der Überbürdungsfrage gethan.

Bruchsal, im Februar 1883.

Der Verfasser.

Einleitung.

Die Grammatik giebt uns, neben einigen Begriffen, feste Regeln und Vorschriften mit ihren Ausnahmen. Der Schüler hat sich dabei zunächst passiv zu verhalten: er hat die Regeln hinzunehmen, ebenso wie die Vokabeln, sie zu behalten und sich danach zu richten. Wie sie entstanden sind, und was ihnen ihre Berechtigung giebt, geht ihn nichts an. Das Auffassen der Regeln erfordert aber dieselbe geistige Thätigkeit, wie das Erfassen von durch Definitionen gegebenen Begriffen. Denn die Regel wird ebenso aus vielen einzelnen Fällen gewonnen wie der Begriff aus vielen einzelnen Vorstellungen. Schon die bloße Auffassung der grammatikalischen Regeln erfordert mithin auch von Seiten des Schülers Selbstthätigkeit, nämlich die Bethätigung des Abstraktionsvermögens. Sobald aber die Grammatik angewendet wird, sei es bei der Übersetzung aus einer fremden Sprache, sei es bei der Übertragung der Muttersprache in die fremde, wird die Selbstthätigkeit des Schülers in viel höherem Grade in Anspruch genommen, indem man von ihm verlangt, daß er in jedem einzelnen vorliegenden Falle die Regel erkenne, der derselbe zu subsumieren ist. Dazu ist erforderlich Aufmerksamkeit und Gedächtnis.

Der Gewinn, den der Schüler aus dem Studium der Grammatik und den lateinischen und griechischen Exerzitien zieht, besteht also darin, daß er sein Abstraktionsvermögen und sein Gedächtnis für abstrakte Begriffe und Regeln übt und eine Fertigkeit erlangt in derjenigen Form des Urteilens, durch welche in jedem einzelnen Falle, auf den sich eine bekannte Regel bezieht, diese Beziehung erkannt wird.

Die Pädagogen haben zur Genüge dargethan, daß und warum einerseits dieser Gewinn ein größerer ist, wenn man die lateinische und griechische Sprache zu Grund legt, als wenn man französische und englische

Grammatik treibt, und daß und warum andererseits Beschäftigung mit fremden Sprachen und ihrer Grammatik zur Ausbildung dieser Fertigkeiten zweckmäßiger ist als irgend welche andere Studien. Sie haben aber nicht dargethan, daß durch lateinische und griechische Grammatik und Exerzitien irgend ein anderer Gewinn für die s. g. formale Geistesbildung erzielt werde als der eben dargelegte, noch auch, daß die so erlangten geistigen Fertigkeiten das Ganze der formalen Bildung ausmachen.

Es ist überflüssig, auf das einzugehen, was durch das Studium der Alten an realem Gehalt für die Bildung gewonnen wird. Wenn man jedoch unter Bildung nicht bloß eine harmonische allseitige Ausbildung der uns gegebenen Fähigkeiten und Anlagen versteht, sondern von dem höher Gebildeten auch so viel Wissen verlangt, daß er seine Zeit und Umgebung versteht, und nicht bei jedem Schritte auf Unbekanntes und Unbegriffenes stößt, so ist klar, daß das Studium der Alten allein in keiner Weise ausreicht, ja daß es umsomehr in den Hintergrund treten sollte, je mehr unsere eigene Kultur fortschreitet, und je größer die Anforderungen werden, die an den gemacht werden müssen, der diesen Fortschritten der Kultur nicht fremd gegenüberstehen will.

Das hat man längst erkannt, und es sind überall zu den alten Sprachen neben der Muttersprache und ihrer Litteratur und wenigstens einer neuen Sprache die Realien als Lehrgegenstand der Gymnasien hinzugetreten und haben sich immer mehr Boden gewonnen; so daß man jetzt allenthalben über das zu viel und zu vielerlei klagt, und vergebens durch Verweisung auf die weise Regel „multum, non multa!" wieder abzuwerfen sucht, was man nicht zu bewältigen vermag.

Es ist nun keineswegs meine Absicht, mit neuen Vorschlägen hervorzutreten, obwohl das, was ich zum Gegenstande dieser Schrift gewählt habe, sehr nahe mit der Frage zusammenhängt, wie diesem allgemein gefühlten Übelstande einigermaßen abgeholfen werden könne.

Mein Thema beschränkt sich auf eine gründliche Erörterung der Frage:

> Welche Stellung hat unter den Lehrfächern des Gymnasiums speziell die Mathematik einzunehmen; wenn dieses seinen Zweck vollkommen erreichen soll, ohne die Schüler mehr als nötig zu belasten?

Diese Frage zerfällt zunächst in zwei:

1. Welchen Gewinn für die „formale Bildung" zieht man aus dem Unterrichte in der Mathematik speziell, und inwieweit ist gerade die Mathematik zur Erzielung dieses Gewinnes unerläßlich oder wenigstens zweckmäßiger als andere Disziplinen?

2. Welchen realen Gewinn für die Bildung ziehen wir aus dem Studium der Mathematik, und wieviel ist von dem mathematischen Wissen und Können unerläßlich, wenn wir in dem Verständnis unsrer gegenwärtigen Kultur nicht empfindliche Lücken haben wollen?

Die Beantwortung dieser Fragen führt dann auf die weiteren:

3. Welche Disziplinen der Mathematik erweisen sich demnach als unerläßlich oder wenigstens als zweckmäßig für den Lehrplan des Gymnasiums und in welcher Ausdehnung müssen sie im Gymnasium gelehrt werden?

4. In welcher Methode müssen diese einzelnen mathematischen Disziplinen gelehrt werden, damit

a) der Gewinn für die formale Bildung ein möglichst großer,

b) der Gewinn an notwendigem mathematischem Wissen und Können ausreichend und fest sei,

c) die Belastung der Schüler durch diese Disziplinen im richtigen Verhältnisse stehe zu dem erzielten Gewinne?

Und wie sind diese Disziplinen auf die einzelnen Klassen zu verteilen?

I.

Um die erste der obigen vier Fragen zu beantworten, ist es notwendig, zunächst nach den Lücken in der formalen Bildung zu fragen, die auch beim besten Unterrichte in den alten Sprachen und der passendsten Wahl der Exerzitien und Lesestücke noch verbleiben.

Wer bloß Sprachen, Litteratur und Geschichte treibt, hat nie wirkliche, d. h. anschaulich vorliegende Dinge, sondern Begriffe und durch die Sprache, also begrifflich, Mitgeteiltes zum Gegenstande seiner Gedanken, das zwar durch Zuhilfenahme der Phantasie auch anschauliche Form gewinnen, nie aber die Wirkung unmittelbarer Wahrnehmung haben kann.

Er lernt darum nicht *richtig sehen und beobachten*, die Dinge selbst vergleichen, ordnen und einteilen; er erhält keinen Einblick in das Gesetz der Kausalität, das alle Vorgänge in der Natur verkettet, und er sieht nicht, wie schon die bloße Form der Dinge geknüpft ist an Gesetze, nach denen sich ihre einzelnen Merkmale gegenseitig bedingen.

Soll also der Gymnasialunterricht für die geistige Bildung wirklich fruchtbar werden, und soll der Schüler nicht bloß zur Aufnahme und Wiedergabe fremder Gedanken befähigt werden, so muß der Sprachunterricht Hand in Hand gehen mit solchen Disziplinen, durch die er

Erstens die Dinge selbst richtig wahrnehmen, vergleichen, unterscheiden und ordnen lernt, was ihn befähigt, einerseits selbst Begriffe zu bilden und andererseits mitgeteilte Begriffe auf ihre Realität zu prüfen.

Zweitens soll er durch den Unterricht in Stand gesetzt werden *richtig zu beobachten, was um ihn vorgeht*: Dadurch wird er befähigt, *selbst* allgemeine Regeln aus beobachteten Einzelfällen zu abstrahieren und andere, welche ihm mitgeteilt worden, auf ihre Richtigkeit zu prüfen. Erst dann wird ihm der Sinn der Frage „*warum?*“ klar, den er beim Sprachstudium nur versteht, wenn man damit nach der Regel fragt, die in einem gegebenen Falle Anwendung findet.

Drittens soll er nachdenken lernen, sei es, um gemachte Wahrnehmungen zu erklären, d. h. ihren Zusammenhang ausfindig zu machen, sei es, um gewisse Zwecke zu erreichen oder Probleme zu lösen. Das Nachdenken, zu welchem auch die Stilübungen Anlaß geben, besteht meist nur in bloßem Besinnen auf die im Gedächtnis aufbewahrten Regeln, Vokabeln und die damit verbundenen Begriffe, ist also ganz anderer Art als das hier gemeinte: Schlüsse kommen dabei nur höchst selten zur Anwendung, und nur, wenn es sich um das Verständnis dessen handelt, was der Schriftsteller meint, kommen auch beim Sprachunterrichte reale Beziehungen in betracht. Man wird also dadurch weder Probleme lösen lernen, noch befähigt werden, wissenschaftliche Erklärungen zu geben oder anderen schwierigeren Zielen nachzustreben.

Versteht man unter Stilübungen Aufsätze, so ist das Gesagte allerdings nicht ganz richtig, wenn die Themata der Aufsätze solche sind, welche die Schüler zu eigenem Nachdenken veranlassen sollen. Gewöhnlich aber wird sich dabei herausstellen, daß das Ergebnis dieses eigenen Nachdenkens und der eigenen Beobachtung auch der besseren Schüler ein sehr dürftiges ist, wenn die Schüler nicht schon durch den Unterricht selbst länger gezwungen worden sind, in dieser Hinsicht selbstthätig zu sein. Soll demnach bei solchen Aufsätzen, die nicht aus bloßen Nacherzählungen oder Referaten über Gelesenes und Gehörtes bestehen, ein Ergebnis herauskommen, so muß der Lehrer selbst mit den Schülern erst das Thema gründlich durchsprechen, wobei sich diese wieder wesentlich passiv verhalten und erst selbstthätig werden, wenn es gilt, das Gehörte in der richtigen Form wiederzugeben. Da nun die Zeit, die der Lehrer des Deutschen auf derartige Beschäftigung der Schüler verwenden kann meist sehr knapp zugemessen, auch die Anzahl geeigneter Themata keineswegs groß ist, so werden auch die Aufsatzübungen die Befähigung zu eigenem Beobachten und zu selbständigem Urteilen und Nachdenken über reale Verhältnisse wenig fördern; während der Lehrer die größte Mühe hat, die Neigung zu leeren, aber schön klingenden Phrasen und blindem Nachsprechen fremder Urteile zu bekämpfen, sofern er nicht, was auch vorkommt, gerade diese Auswüchse befördern und großziehen will.

Es ist klar, daß zur Erreichung der eben aufgestellten Ziele zunächst die Naturwissenschaften herbeigezogen werden müssen, und zwar zuerst die beschreibenden und dann die erklärenden,*) entsprechend der Reihenfolge jener Ziele. Neben der Naturgeschichte dürfte zur Erreichung des ersten derselben ganz besonders auch der Zeichenunterricht hervorgehoben werden, indem er, namentlich, wenn er etwa mit der Naturgeschichte in Verbindung tritt, das wesentlichste Förderungsmittel einer klaren Anschauung und damit auch einer fruchtbaren Phantasie ist. Einzelne Partieen der Naturgeschichte verlangen zu ihrem vollen Verständnisse auch die Herbeiziehung der Mathematik, insbesondere der geometrischen Formenlehre, und die Physik setzt, wenn sie sich nicht auf sehr oberflächliche Betrachtungen beschränken soll, vollends ein ziemlich weitgehendes Pensum der Mathematik voraus.

Also tritt die Mathematik zunächst als Hilfswissenschaft auf, um die Naturwissenschaft möglich zu machen. Dann aber erweist sie sich auch selbst als ein vortreffliches Mittel zur Erreichung der oben aufgezählten Zwecke und liefert uns die Grundlage zum Verständnisse mancher Einrichtung, die geholfen hat, unseren heutigen Kulturzustand so weit, selbst über den des klassischen Altertums, zu erheben.

Es handelt sich nun zunächst darum, zu untersuchen, inwiefern schon die Mathematik allein, ohne Beihilfe der Naturwissenschaften, dazu beitragen kann,

1. daß der Schüler lerne, die Dinge selbst, nicht bloße Begriffe, richtig wahrzunehmen, zu vergleichen, zu unterscheiden und zu ordnen; selbst Begriffe zu bilden und mitgeteilte Begriffe auf ihre Realität zu prüfen;

2. daß er beobachten lerne, was um ihn vorgeht, und befähigt werde, selbständig aus beobachteten Einzelfällen allgemeine Regeln zu abstrahieren, und andere, welche ihm mitgeteilt werden, auf ihre Richtigkeit zu prüfen;

3. daß er nachdenken lerne.

---

*) Daß neuerdings Kirchhoff und, indem sie auf diesen verweisen, auch Helmholtz und Dubois-Raimond die Physik und Mechanik mit Recht den beschreibenden Naturwissenschaften beizählen, weil auch sie nur beschreiben, wie die Naturgesetze wirken und die Naturerscheinungen erfolgen, ist kein Grund, diese Unterscheidung fallen zu lassen. Denn die beschreibenden Naturwissenschaften im engeren Sinne geben uns nur die Beschreibung der Naturgegenstände, während Physik und Chemie uns die an denselben vorkommenden Veränderungen kennen lehren, und dieselben erklären, d. h. auf die ihnen zu Grund liegenden Naturgesetze zurückführen.

Übrigens sagt schon Schopenhauer: Nimmt man es streng, so ließe sich behaupten, daß alle Naturwissenschaft im Grunde nichts weiter leistet, als was auch die Botanik: nämlich das Gleichartige zusammenzubringen, zu klassifizieren.

ad 1.

Die Mathematik zerfällt in Arithmetik, mit welchem Namen man wieder Rechnen, allgemeine Arithmetik und Algebra zusammenfaßt, und Geometrie.

Die Arithmetik trägt allerdings nur insofern zur richtigen Wahrnehmung der Dinge bei, als sie uns befähigt, ihre Anzahl und Größe zu bestimmen. Das ist zwar nicht viel, aber doch weit mehr, als man gewöhnlich glaubt. Datiert doch die Entwickelung der Chemie zu einer Wissenschaft von dem Tage, an welchem Lavoisier zum erstenmal die Wage zur Hand genommen, um ausfindig zu machen, in welchem Gewichtsverhältnisse Sauerstoff und Wasserstoff im Wasser verbunden sind! So lange wir aber nur reine Arithmetik treiben, sie also nicht anwenden, lernen wir durch sie allerdings nicht die Dinge selbst richtig wahrnehmen, weil sie von den Dingen, welche gezählt und gemessen werden, ja ganz abstrahiert. Doch giebt auch sie Anlaß zur Bildung von Begriffen, und der Lehrer kann den Unterricht so einrichten, daß der Schüler selbst zur Bildung dieser Begriffe und zur Einteilung anderer Begriffe geführt wird.

Schon die Thatsache, daß bei der Division durch 2 bei einigen Zahlen die Division aufgeht, bei andern 1 übrig bleibt, führt zur Unterscheidung gerader und ungerader Zahlen, und diese Unterscheidung macht der Schüler selbst, wenn auch der Lehrer ihm die entsprechenden Namen mitteilen muß. Später kommt hierzu die Unterscheidung teilbarer Zahlen und Primzahlen, und die Begriffe Multiplum und Teiler 2c. Freilich sind dies alles nur Zahlenbegriffe, die nur dem dienen, der damit zu thun hat: aber das Bilden der Begriffe beruht hier, wie in allen andern Gebieten im richtigen Vergleichen und Unterscheiden, und wer sich geübt hat, hier selbständig Begriffe zu bilden, wird es auch in andern Disziplinen fertig bringen, wenn er die dort vorhandenen sachlichen Schwierigkeiten überwunden hat. Immerhin ist der Gewinn, den wir in dieser Hinsicht aus der Arithmetik ziehen, kein sehr großer. Denn in der Arithmetik kommt es hauptsächlich nur auf die sorgsame Beachtung und fast mechanische, also gedankenlose Ausübung einfacher, aber sehr abstrakter, und darum inhaltsarmer Regeln an, so daß, abgesehen von dem mittelbaren Wert, den die Arithmetik, als Hilfswissenschaft, für die allgemeine Bildung hat, ihr Bildungswert in der That sich darauf reduzieren dürfte, „daß sie flatterhafte Schüler zur Aufmerksamkeit und sorgfältiger Beobachtung vorgeschriebener Regeln zwingt," was ja die extemporalia weit besser besorgen.

Größerer Wert muß dagegen auch in dieser Hinsicht der Geometrie zugestanden werden. Ihr Gegenstand, die Raumgebilde, sind zwar in gewissem Sinne auch Abstrakta und nicht wirkliche Dinge; aber sie unterscheiden sich von den übrigen abstrakten Begriffen dadurch, daß in ihnen gerade die wesentlichsten Elemente anschaulicher Vorstellungen festgehalten sind. Eine gerade Linie, ein Dreieck, ein Kreis sind zwar auch als Einzelvorstellungen keine vollständigen anschaulichen Vorstellungen, und können ohne Anwendung des Abstraktionsvermögens nicht für sich allein vorgestellt werden. Denn eine gerade Linie kann nur zur Anschauung kommen als Grenzlinie verschieden gefärbter Oberflächenteile, und wenn diese, oder auch nur die Verschiedenheit ihrer Färbung an der Grenze ganz verschwinden, bleibt auch von der Linie, die nichts ist als diese Grenze, nichts mehr übrig. Aber das Bild oder die Form der Linie lösen wir eben so leicht von der Gesamtanschauung los, in der wir es wahrnehmen, und erheben es zu einer besonderen Vorstellung, wie wir etwa die Vorstellung eines bestimmten Hundes aus den verschiedenen Anschauungsbildern loslösen und festhalten, die uns dieser Hund erweckt, wenn wir ihn von verschiedenen Standorten aus wahrnehmen. Und so gut ich die Vorstellung, die ich mir von meinem Hund Karo mache, obwohl ich sie nie in einer einzelnen Anschauung ganz vor mir habe, und mir jede solche Anschauung immer noch Daten giebt, von denen ich abstrahieren muß, doch noch eine anschauliche Vorstellung nennen kann, ganz ebenso gut kann ich die Vorstellung von einer geraden Linie als eine anschauliche Vorstellung auffassen, ja mit noch mehr Recht: denn in jeder Anschauung, in welcher ich sie wahrnehme, liegt sie ganz und vollständig vor.

Indem also die Geometrie uns veranlaßt, ihre Begriffe direkt den anschaulichen Vorstellungen zu entnehmen, lehrt sie uns auch die wirklichen Dinge wenigstens in bezug auf ihre räumlichen Eigenschaften zu vergleichen. Und wenn der Schüler nach und nach durch Abstraktion aus der Anschauung einerseits zu den Gattungsbegriffen Körper, Fläche, Linie, Vieleck, Winkel ꝛc., andererseits zu den Einzelvorstellungen Punkt, Kreis, Gerade, Kugel, rechter Winkel, Quadrat u. s. w. gelangt, lernt er grade so gut reelle Dinge wahrnehmen, unterscheiden, vergleichen und ordnen, und mitgeteilte Begriffe auf ihre Realität prüfen, wie durch Beschäftigung mit Naturgeschichte. Nur hat er den Vorteil, daß die Begriffe und Vorstellungen, um die es sich handelt, ihm jederzeit leicht zugänglich sind. Ganz besonders vorteilhaft für die Entwicklung des Vermögens, sich die Dinge räumlich vorzustellen, erweist sich die Stereometrie, welche in dieser Hinsicht sogar den Zeichenunterricht übertrifft, der wegen des allzulangen Verweilens an derselben Vorlage denen, die eine ungeschickte Hand besitzen, nicht gerade viele Objekte zur Ausbildung ihrer Raumanschauung liefert.

ad 2.

In viel höherem Grade entspricht die Mathematik der zweiten Forderung. Beide Disziplinen liefern reichliches Material, an dem die Schüler lernen können, eigene Beobachtungen zu machen und aus beobachteten Einzelfällen selbständig allgemeine Regeln zu abstrahieren.

Schon das Einmaleins liefert das Material, aus dem die Regel $ab = ba$ abstrahiert werden kann, und ein richtiger Unterricht in der allgemeinen Arithmetik wird den Schülern den sachlichen Grund dieser Regel so klar machen, daß sie, wenn sie denselben wieder vergessen haben, durch ruhiges Besinnen auf die Bedeutung der Formel ab selbständig den Grund ihrer Identität mit ba finden können.

Die ganze allgemeine Arithmetik, wenn sie richtig erfaßt wird, giebt ja nichts anderes als eine Anzahl Regeln, nach denen es gestattet ist, angedeutete Rechnungen durch andere zu ersetzen, und ihre wesentliche Aufgabe besteht ja darin, diese Regeln ausfindig zu machen und zu begründen. Wenn nun auch dabei der Schüler beim Erlernen sich meist passiv verhält, indem er die Regel weder selbständig beobachtet, noch begründet, sondern beides durch den Lehrer erfährt, so wird er doch, wenn er Regel und Begründung nur richtig erfaßt hat, und davon öfter Rechenschaft ablegt durch Reproduktion des Erlernten, allmählich so an diese Geistesthätigkeit gewöhnt, daß er bei richtiger Anleitung, gutem Willen und einiger Befähigung auch selbständig neue Regeln oder für bekannte neue Beweise wird ausfindig machen. Gerade bei dem ersten Unterrichte in der sogenannten Buchstabenrechnung zeigt sich dem aufmerksamen Lehrer deutlich die Lücke, welche der grammatikalische Unterricht läßt. Hat der Lehrer eine zu beweisende Regel mitgeteilt, so glaubt der Schüler seine Schuldigkeit vollkommen gethan zu haben, wenn er sich ihren Sinn klar gemacht hat, damit er sie nachher richtig anwenden kann. Daß man aber auch noch nach einer Berechtigung zur Aufstellung derselben, d. h. nach einem Beweise für ihre Richtigkeit fragen kann, ist ihm anfänglich ganz unbegreiflich, und was man darüber sagt, ganz unverständlich, weil man bisher nie etwas anderes von ihm verlangt hat, als daß er die Regeln, welche ihm die Grammatik in reichlicher Fülle mitteilt, recht klar erfasse und festhalte, damit er immer wisse, wo er sie anzuwenden habe, und weil er weiß, daß man mit der Frage „warum?" nie etwas anderes von ihm wissen wollte, als die richtige Regel. Hat der Lehrer also einen Versuch gemacht, den Schülern zu beweisen, daß $ab = ba$ ist, und frägt er dann etwa in der nächsten Stunde, um zu erfahren, ob sein Beweis verstanden ist: warum ist $ab = ba$? so werden ihm fast alle Schüler antworten: „weil es einerlei ist, welcher Faktor als Multiplikand, welcher als Multiplikator angesehen wird"; oder: „weil man Multiplikand und Multiplikator vertauschen darf". Seinen Beweis wird ihm aber vielleicht keiner wiederholen können, weil ihnen die Frage nach der Richtigkeit der Regel selbst schon so neu war, daß sie ihren Sinn gar nicht verstanden haben. Und von den schwächeren Schülern wird er noch Jahre lang, wenn er nach dem Grund einer Regel frägt, immer wieder die Regel selbst statt dieses Grundes vernehmen, gerade so wie in den geometrischen Beweisen viele Schüler immer wieder die Behauptung selbst zu ihrer Begründung herbeiziehen.

Von dem Gewinn, den die s. g. Buchstabenrechnung in dieser Hinsicht den Lernenden bringen kann, geht freilich meistens sehr viel verloren, weil man in der Regel damit beginnt, ehe die Schüler die nötige geistige Reife besitzen, und darum der Lehrer, um nicht geradezu Danaidenarbeit zu leisten, rasch über die Begründung der Regeln hinweggeht und sein Augenmerk nur auf genügende Fertigkeit in der mechanischen Anwendung der Regeln richtet, in der Hoffnung, das richtige Verständnis finde sich später schon von selbst — eine Hoffnung, die so trügerisch ist, wie das oft von oben herab empfohlene Verfahren selbst nachteilig. Denn welchen Gewinn soll derjenige aus der Fähigkeit ziehen, unverstandene Regeln mechanisch ausüben zu können, der später nie in der Lage sein wird, diese Fähigkeit zu verwerten? Und ist etwa derjenige, dem die Mathematik später als Hilfswissenschaft dient, mathematisch vorgebildet, welcher einen Teil ihrer Regeln gedächtnismäßig erlernt hat und anwenden kann, ohne sie zu verstehen? Wenn man aber glaubt, das Verständnis komme später von selbst, so irrt man wieder; denn wer gewöhnt ist, dergleichen Regeln gleich denen der Grammatik ohne Prüfung auf ihre Berechtigung anzuwenden, wird auch später nicht nach ihrem Grund fragen, und wenn er es wollte, würden ihn die Schwierigkeiten, die er findet, abhalten, selbständig nachzuholen, was die Schule versäumt hat, ihm zur rechten Zeit und in der richtigen Methode beizubringen.

Auch in dieser Hinsicht zeigt sich jedoch wieder die Geometrie als das ergiebigere und bessere Bildungsmittel. Denn hier handelt es sich nicht um bloße Regeln, nach denen etwas vorgeschrieben, oder man zu etwas berechtigt ist, und welche angewendet werden sollen: man lernt vielmehr, daß die Figuren, welche man nach und nach kennen lernt, sämtlich Eigenschaften besitzen, die sich gegenseitig bedingen, so daß die eine stets sowohl Grund als Folge der andern ist, und es handelt sich darum:

1. diese Beziehungen zwischen den Eigenschaften der Figuren wahrzunehmen und in der Form von Lehrsätzen richtig auszudrücken;

2. ihre Wahrheit und allgemeine Giltigkeit einzusehen und nachzuweisen;

3. sie benutzen zu lernen, sowohl zur Ausführung vorgeschriebener Konstruktionen als zur Ausfindigmachung der metrischen Verhältnisse vorliegender Gebilde.

Hierher gehört nun zunächst nur die erste dieser Aufgaben. Wird diese mit Rücksicht auf den zu erzielenden pädagogischen Gewinn gelöst, so kann der Schüler veranlaßt werden, durch Herstellung verschiedener Figuren mit bestimmten Eigenschaften selbst zu beobachten, welche neue Eigenschaften damit zugleich auftreten: er zeichne z. B. Dreiecke mit zwei gleichen Seiten, so wird er wahrnehmen, daß diesen immer gleiche Winkel gegenüber liegen. Er zeichne Dreiecke mit gleichen Winkeln, so wird er wahrnehmen, daß diesen immer gleiche Seiten gegenüberliegen. Er zeichne Dreiecke mit ungleichen Seiten, so wird er wahrnehmen, daß der größeren Seite auch ein größerer Winkel gegenüberliege. Er zeichne Dreiecke mit drei gleichen Seiten, so wird er wahrnehmen, daß dann auch die Winkel gleich werden, und zwar immer von derselben Größe, wie lang auch die Seiten seien. Er halbiere in einem Dreieck einen Winkel, der von gleichen Seiten eingeschlossen ist, und in einem andern einen von ungleichen Seiten gebildeten Winkel, so wird er wahrnehmen, daß im ersten Falle die Halbierungslinie auf der dritten Seite senkrecht steht und auch diese halbiert, was im andern Falle beides nicht zutrifft u. s. w., u. s. w. Man sieht also, daß in der elementaren Geometrie eine ganze Fülle von Material vorliegt, an dem der Schüler lernen kann, 1. selbständig beobachten, 2. das selbständig beobachtete in Form eines Satzes richtig auszudrücken.

ad 3.

Es ist natürlich, daß ich, um nun zu zeigen, inwiefern die Mathematik den Schüler befähige, nachdenken zu lernen, mit der Geometrie beginne, weil ich so nur den Faden da wieder aufzunehmen habe, wo ich ihn soeben verlassen. Hat der Schüler an einer oder mehreren Figuren gleicher Art erkannt, wie irgend eine Eigenschaft derselben mit einer andern verbunden ist, so wird er in einigen Fällen, wo schon die bloße Anschauung die unmittelbare Einsicht in die Notwendigkeit und damit in die Allgemeinheit dieser Verbindung gewährt, sich bei der gemachten Wahrnehmung beruhigen, während er bei andern, wo der innere Zusammenhang nicht so offen daliegt, einerseits nach einem Erkenntnisgrunde fragen wird, der ihm von der Notwendigkeit und Allgemeinheit der gemachten Wahrheit Gewißheit giebt, andererseits aber auch nach einem Sachgrund, der ihm den inneren Zusammenhang darlegt, und ihm dadurch die wirkliche Einsicht in diese Notwendigkeit gewährt. Wem es nur zu thun ist, sein Wissen zu vermehren, der wird sich schon begnügen, wenn er die nötige Gewißheit erlangt hat, während tiefere Naturen, die nach Einsicht streben und ihren Blick auf den Zusammenhang gerichtet haben, der die Dinge und auch ihre Eigenschaften verkettet, einen unangenehmen Eindruck empfangen, wenn sie bloß durch einen Erkenntnisgrund überführt werden, wo sie durch einen Sachgrund überzeugt sein wollten. Soll mithin der geometrische Unterricht auch diese Schüler zum Nachdenken anregen, so muß der Unterricht so erteilt werden, daß beim Beweise der Lehrsätze weniger Gewicht auf die Nachweisung der Wahrheit gelegt wird, als vielmehr auf die Darlegung der Gesetze, aus denen sich die wahrgenommene Beziehung sachgemäß ergiebt.

Als großen Irrtum, der immer noch sehr allgemeine Verbreitung, sowohl unter Mathematikern wie unter Nichtmathematikern hat, obwohl er doch oft genug aufgedeckt worden ist, muß ich jedoch wiederholt und mit Nachdruck die Ansicht bezeichnen, daß der Bildungswert der Geometrie wesentlich in ihren Beweisen liege, durch die der Schüler veranlaßt werde, streng logisch zu schließen, und dadurch folgerichtig zu denken, sodaß also die Geometrie gewissermaßen als praktische Logik erscheine. Nun ist allerdings richtig: Wenn man irgend eine Behauptung beweisen will, so ist es vor allem nötig, daß man die eigentliche Behauptung von dem, was man als bekannt voraussetzt, klar scheidet, und dann den

Weg sucht, der von dem Vorausgesetzten ausgehend durch eine Reihe richtiger Schlüsse zur Behauptung führt; und insofern man bei den geometrischen Beweisen die Euklidsche Form beibehält, gewöhnt man sich daran, so oft man etwas beweisen will, Voraussetzung und Behauptung streng zu unterscheiden. Das ist allerdings ein nicht zu leugnender Gewinn, der dem Schüler verbleibt, wenn er seinen Kursus elementarer Geometrie nach Euklids Methode mit Erfolg absolviert hat. Aber damit wird es dann auch sein Bewenden haben. Denn will er nun irgend etwas beweisen, was nicht in das Gebiet der Geometrie gehört, so wird er zwar leicht Voraussetzung und Behauptung präzisieren und auseinander zu halten verstehen. Ist ihm aber das gelungen, so hilft ihm sein ganzer Euklides mitsamt allen seinen Mausefallebeweisen nicht das allermindeste, um auch nur einen einzigen Schritt vorwärts zu kommen, und er wird finden, daß das Verfahren, das er jetzt einzuschlagen hat, von dem, das er bisher geübt fast toto genere verschieden ist.

In der Geometrie ist das Verfahren das folgende: Fügt man zu der Voraussetzung alle bereits bekannten und erwiesenen Sätze, so handelt es sich zunächst darum, zwei dieser Sätze so zu verbinden, daß sie als Ober- und Untersatz zu einem Schluß führen; zu dem gewonnenen neuen Satz muß man ebenso wieder einen andern unter den bekannten herbeiziehen, um daraus wieder einen neuen Schluß zu ziehen, u. s. f. bis man zuletzt die Behauptung als Schluß erhält. Das gelingt nun in einigen besonders günstigen Fällen wirklich. Z. B. Es sei zu beweisen: „Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleich groß sind, ist ein Rechteck". Es seien vorher bewiesen die Sätze: „In einem Rechtecke sind die Diagonalen gleich groß", und „In einem schiefwinkeligen Parallelogramme ist die den stumpfen Winkeln gegenüberliegende Diagonale die größere". Der Beweis wird nun sein: Hat ein Parallelogramm gleiche Diagonalen, so kann es nicht schiefwinkelig sein, weil in einem solchen die Diagonalen ungleich sind. Da aber ein Parallelogramm entweder schiefwinkelig oder rechtwinkelig sein muß, so kann es mithin nur rechtwinkelig sein.

Oder, um ein Beispiel mit längerer Schlußkette zu geben, sei zu beweisen:

„Ein Viereck ist ein Quadrat, wenn es gleich große, aufeinander senkrechte und einander halbierende Diagonalen hat".

Sind vorhergegangen die Sätze:

„Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine Diagonalen einander halbieren; ein Parallelogramm ist ein Rechteck, wenn es gleiche

Diagonalen hat; ein Parallelogramm ist ein Rhombus, wenn seine Diagonalen aufeinander senkrecht stehen". Stützt man sich ferner auf die Definition: „Ein Quadrat ist ein gleichseitiges und gleichwinkeliges Viereck" (also ein rechtwinkeliger Rhombus oder ein gleichseitiges Rechteck); so hat man den Beweis:

„Aus der Voraussetzung, daß die Diagonalen einander halbieren, und dem ersten obiger Sätze folgt, daß das Viereck ein Parallelogramm ist; hieraus und aus der Gleichheit der Diagonalen folgt mit Rücksicht auf den zweiten Satz, daß es ein Rechteck ist. Da es aber ein Parallelogramm ist und die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist es nach dem dritten Satze auch ein Rhombus, und mithin nach der Definition ein Quadrat".

Besteht der Beweis lediglich in einer solchen Schlußkette, wie sie hier vorgeführt, so kann er allerdings als Vorübung für ähnliche Schlußreihen gelten, die auch in anderen Gebieten vorkommen können. Was ist aber in jedem solchen Falle bewiesen? Gar nichts, als daß ein vorgelegtes Objekt einem durch seine Definition gegebenen Begriffe subordiniert ist, weil es dieser Definition entspricht, zwar nicht explicite aber doch implicite. Und insofern kann ein zukünftiger Jurist oder Mediziner in dergleichen Beweisen, wenn er sie selbständig ausführt, eine Vorübung sehen für das, was er in seinem späteren Berufe zu thun hat, wenn er entscheiden soll, welcher Rechtsfall, beziehungsweise, welche Krankheit vorliegt.

Aber wo giebt die Geometrie wirklich Gelegenheit zu solchen Schlüssen und Schlußreihen? Man blättere irgend eines der gebräuchlicheren Lehrbücher durch, um danach zu suchen: es wird meistens ganz vergeblich sein. Wenn ich gleichwohl, weniger in meinem Lehrbuche als bei meinem Unterrichte, häufig solche Schlußreihen vorbringe, so hat dies vielleicht seinen Grund darin, daß ich seiner Zeit unter der Leitung des Herrn Prof. Jhering an Girtanners Rechtsfällen diese Art zu schließen geübt habe.

Nur, wenn in einer Reihe von Urteilen einem Objekte implicite alle diejenigen Merkmale zugeschrieben sind, durch welche es einem bestimmten Begriffe subsumiert wird, läßt sich durch bloßes Schließen die Übereinstimmung zwischen dem so bestimmten und dem durch Definition gegebenen Begriffe darthun. D. h. durch bloßes Schließen erfährt man nichts, was nicht schon in den Sätzen, aus denen man die Schlüsse gezogen hatte, enthalten war, also nichts Neues. Das ist eine alte Sache, und unser großer Kant hat sie für jeden, der richtig lesen kann und will, bereits vor mehr als hundert Jahren klar und unzweifelhaft dargethan. Da aber die Geometrie uns sehr viel Neues lehrt, so ist es klar, daß in ihr solche Schlußketten, durch welche wir in Stand gesetzt werden, richtig zu urteilen, nur ausnahmsweise vorkommen. Denn die Geometrie ist, wie Kant erwiesen hat, keine Wissenschaft aus Begriffen, sondern aus der Konstruktion von Begriffen.

In allen Fällen, wo ein Lehrsatz nicht eine bloße Folgerung anderer schon bekannter Lehrsätze ist, es also nur darauf ankommt, zu zeigen, daß und warum diese ihn eigentlich schon enthalten, bedarf es zunächst der Darstellung einer Figur, welche die Voraussetzung enthält, und dann des Herbeiziehens von Hilfslinien oder anderer Erweiterungen dieser Figur, durch welche es erst möglich ist an dem einzelnen anschaulich vorliegenden Objekte neue Beziehungen wahrzunehmen, auf die man durch bloßes Schließen niemals gekommen wäre, die aber in Verbindung mit der Voraussetzung eine mit der Behauptung endigende Schlußkette erst möglich machen.

Handelt es sich z. B. um den Lehrsatz: „In einem Parallelogramme sind die einander gegenüberliegenden Seiten einander gleich"; so wird man durch bloßes Schließen aus dem Vorausgesetzten und dem Bekannten niemals auf die Behauptung geführt werden. Denn daraus folgt nur, daß je zwei benachbarte Winkel Supplemente sind, als innere Gegenwinkel zweier Parallelen mit einer dritten Geraden; woraus dann wieder, auf Grund des Satzes, daß zwei Größen, die mit einer dritten gleich viel ausmachen, selbst gleich sein müssen, die Gleichheit je zweier gegenüberliegenden Winkel folgt. Aber auf die Gleichheit der Seiten führt kein Schluß, man mag überlegen, so viel man will. Erst, wenn man eine Diagonale zieht, die doch nicht zu dem Begriffe des Parallelogrammes gehört, und dann wahrnimmt, daß die dadurch entstehenden Dreiecke, wegen der Gleichheit der Wechselwinkel an Parallelen in der Diagonale als gemeinsamer Seite und den anliegenden Winkeln übereinstimmen, erhält man das Material, das zu dem verlangten Schlusse führt.

Dieses Herbeiziehen von Hilfslinien ist aber weitaus das Wichtigste an jedem solchen geometrischen Beweise, und eben das, wodurch die geometrische Beweismethode als eine ganz eigentümliche charakterisiert wird, die in keinem andern Gebiete Anwendung finden kann. Geometrische Beweise wird derjenige leicht fassen und auch selbständig auffinden, der sich hinreichend geübt hat, in vorliegenden Figuren diejenigen Abhängigkeitsgesetze wahrzunehmen, durch welche deren einzelne Bestimmungsstücke sich gegenseitig bedingen; der sich also bei jeder Figur der ihm darüber bekannten Lehrsätze erinnert: wenn er zugleich gelernt hat, aus gegebenen Prämissen die richtigen Schlüsse zu ziehen und Erfindungsgabe genug besitzt, um die vorliegende Figur durch Herbeiziehung der richtigen Hilfslinien so zu erweitern, daß sie ihm das Material zu seiner Schlußkette liefert.

Wer seinen Kursus elementarer Geometrie mit Erfolg durchgemacht und nicht bloß eine Anzahl komplizierter geometrischer Beweise verstanden und behalten, sondern auch oft und mit Erfolg versucht hat, selbständig neue Beweise für bekannte oder neue Sätze ausfindig zu machen, wird hinreichend befähigt sein — um seine weiteren geometrischen Studien mit gleichem Erfolge fortzusetzen. Wagt er sich aber auf irgend ein anderes, der Geometrie fremdes Gebiet, wo er weder Konstruktionen, noch seine ihm bekannten geometrischen Lehrsätze in Anwendung zu bringen vermag, so wird er ebenso wenig ausrichten können als einer, der von Geometrie gar nichts versteht. Er hat nur den Vorteil, daß er vielleicht schneller den Schluß wird ziehen können, wenn man ihm die Prämissen giebt, oder auch leichter imstande sein wird, die Übereinstimmung eines durch die nötigen Merkmale bestimmten Begriffes mit seiner Definition durch eine Schlußreihe nachzuweisen, sobald er die dazu nötigen Kenntnisse besitzt. Er wird sich aber bald überzeugen, daß damit sehr wenig gewonnen ist, da bei allen Untersuchungen das Wichtigere und Schwierigere in dem Auffinden der Prämissen besteht, die zu einem Schlusse führen, nicht in dem Ziehen des Schlusses aus diesen Prämissen, daß es also wesentlich nur darauf ankomme, *richtig zu beobachten* und das Beobachtete in richtigen *Urteilen* festzuhalten, und die überall sich darbietenden Quellen von Irrtümern zu vermeiden.

Die meisten Irrtümer entstehen aber nicht durch *falsche* Schlüsse aus *richtigen* Prämissen, sondern durch *richtige* Schlüsse aus *falschen* Prämissen, und demnach ist das *Urteil*, *welches als Prämisse dient* und die dazu erforderliche richtige *Beobachtung*, nicht der *Schluß* die Hauptsache bei einer Gedankenverbindung. Nun ist aber das Material der Geometrie ein solches, daß bei einiger Aufmerksamkeit Irrtümer fast ausgeschlossen sind, und Hamilton hat darum nicht ganz unrecht, wenn er das Studium des Euklides als Vorübung im richtigen Denken damit vergleicht, daß einer schwimmen lernen wollte durch Vorübungen in einer Wanne mit Quecksilber, in der das Untersinken unmöglich ist.

Dazu kommt noch ein anderer Umstand, den ich am besten an dem eingangs erwähnten Beispiele klar machen kann. Handelt es sich um den Satz, daß im Parallelogramme die gegenüberliegenden Seiten gleich groß sind, so ist es nötig, daß man ein Parallelogramm sich vorstelle, um darin die Diagonale zu ziehen und die Kongruenz der dadurch erhaltenen Dreiecke zu erkennen. Greift man nun aber einmal zur Anschauung, so lehrt diese auch sofort unmittelbar, daß Parallele zwischen Parallelen immer gleich sind, weil die Länge einer Strecke zwischen einem Punkt und einer Geraden nur von ihrer Neigung gegen diese und von dem Abstand zwischen Punkt und Gerade abhängt, und weil die bloße Anschauung uns sofort vollkommen überzeugt, daß ein Punkt eine Parallele zu einer Geraden beschreibt, wenn er sich in der Ebene fortbewegt, ohne seinen Abstand von der Geraden zu ändern.

Jeder unbefangene und klar sehende Schüler, dem man diesen Satz beweisen will, wird diesen Beweis darum für überflüssig halten, und da dergleichen Sätze, die auch ohne Beweis einleuchten und gleichwohl zum Teil sogar mit sehr komplizierten Mausefallebeweisen den Schülern bewiesen werden, sehr groß ist, so wird gerade bei den Schülern, welche mit einem guten Anschauungsvermögen begabt sind, die Geometrie als eine ganz unnütze Quälerei erscheinen; ein Grund, der es vielen Lehrern der Geometrie sehr schwer macht, die so nötige Aufmerksamkeit der Schüler zu erzwingen, und auch ein Grund, warum vielen dieser Unterricht so widerwärtig ist, und ein Grund mehr, warum die Geometrie als Vorübung zu folgerichtigem Nachdenken von sehr fraglichem Werte sein dürfte, wenn man den Hauptwert auf die Beweise legt.

Ganz anders gestaltet sich jedoch die Sache, wenn man das größere Gewicht auf die Anwendung der erlernten Sätze zur Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben und zu geometrischen Berechnungen legt, und diese Probleme so wählt, daß der Schüler dabei möglichst selbstthätig sein kann. An Gelegenheit zu Irrtümern der verschiedensten Art wird es ihm da nicht fehlen, und unter richtiger Anleitung wird er nach und nach lernen, sorgfältiger zu beobachten, richtiger zu sondern und zu ordnen, zu vergleichen und zu kombinieren, vorsichtig zu urteilen u. s. w. D. h. er wird alle die geistigen Thätigkeiten üben und ausbilden, die eben das ausmachen, was man nachdenken nennt. Die positiven Kenntnisse freilich, ohne die alles Nachdenken erfolglos ist, muß er sich natürlich immer erst neu erwerben, sobald er auf ein anderes Gebiet übergeht.

Aber auch als die einzige Wissenschaft, die neben der Physik im Gymnasium mit einer wenigstens relativen Vollständigkeit absolviert werden kann, ist die elementare Geometrie für die Schüler des Gymnasiums von bleibendem Werte, wenn die Behandlung wirklich eine wissenschaftliche ist, der Schüler also in ihr ein Beispiel erhält, wie ein Gegenstand wissenschaftlich behandelt werden soll. „Wissenschaft" aber, sagt Schopenhauer, „bedeutet ein System von Erkenntnissen, d. h. ein Ganzes von verknüpften Erkenntnissen, im Gegensatze des bloßen Aggregats" — und „die Vollkommenheit einer Wissenschaft als solcher, d. h. der Form nach, besteht darin, daß so viel wie möglich Subordination und wenig Coordination der Sätze sei." Diesen Vorzug besitzt nun die alte Euklidsche Geometrie keineswegs. Denn die ganze Verbindung, in welcher die Sätze Euklids zueinander stehen, besteht darin, daß bei den Beweisen der folgenden die früheren vorausgesetzt werden, was aber von dem, was man Subordination der Sätze im wissenschaftlichen Sinne nennt, sehr wesentlich verschieden ist.

Inzwischen hat uns jedoch Steiner den Weg gezeigt, wie auch die Geometrie ganz in dem Sinne Schopenhauers (obgleich er denselben nicht kennt) zu einer vollkommenen Wissenschaft werden kann, ohne von der Strenge Euklids etwas einzubüßen, und auch ohne der Anschaulichkeit Abbruch zu thun.

In meiner als Anhang beigefügten Programmabhandlung „zur Reform des geometrischen Unterrichts" glaube ich gezeigt zu haben, daß und inwiefern die Form, welche ich der Geometrie in meinem Lehrbuche gegeben habe, den Forderungen Steiners vollkommen entspricht, ohne daß ich nötig hatte, die Geometrie in projektivische zu verwandeln, ja ohne überhaupt sehr viel Neues und Eignes hinzuzuthun. Es ist überhaupt nicht einzusehen, warum nicht auch die Geometrie des Maßes und der Form für sich allein einer ächt wissenschaftlichen Behandlung fähig sein soll, und warum es zu dem Zweck nötig wäre, sie gleich anfangs mit der projektivischen Verwandtschaftslehre zu verquicken, wodurch nur die Fülle des Stoffes in einer Weise vermehrt wird, daß eine Verwirrung der Begriffe bei den Schülern, namentlich im Anfange, unvermeidlich.

Was nun die Arithmetik betrifft, so dürfte durch ihr Studium die Fähigkeit des Nachdenkens umsomehr gefördert werden, je mehr man beim Unterrichte Gewicht darauf legt, daß der Schüler

1. die Regeln, die er übt und anwendet, auch begreift und ihren Zusammenhang darlegen kann;

2. daß er möglichst viel Gelegenheit erhalte, die erlernten Regeln praktisch, also zur Lösung von Textaufgaben aus Geometrie und Physik, sowie aus dem gewöhnlichen Leben anzuwenden. Nur seien diese Aufgaben keine förmlichen Rätselaufgaben und Kunststücke, sondern solche, die der Schüler ohne Anleitung selbständig durch eigenes Nachdenken lösen kann.

II.

Welchen Wert das mathematische Wissen und Können als solches besitzt, ist leichter darzuthun und weniger bestritten. Dennoch sind diejenigen, welche z. B. ein bayrisches Gymnasium durchgemacht haben, wo die Naturwissenschaften auf dem Lehrplane fast ganz fehlen, und die mathematische Geographie fast die einzige Disziplin ist, in der die Mathematik zur Anwendung kommt, leicht geneigt, der Mathematik außer ihrem angeblichen Werte für die formale Bildung (und der ist oft ein sehr geringer) allen realen Wert abzusprechen. In der That kann man ja ein ganz guter Jurist, Theologe, Philologe, Historiker, Ästhetiker u. dgl. werden, ohne von den Gesetzen, welche die Natur beherrschen, etwas zu kennen, und ohne von den vielen Einrichtungen des täglichen Lebens, die aus der Kenntnis und Benutzung dieser Gesetze und der Anwendung der Mathematik hervorgegangen sind, irgend etwas zu verstehen. „Man kann ja doch nicht alles wissen", sagte mir ein bayrischer Theologe, „warum soll man also gerade Physik, Chemie u. dgl. lernen?" So gut ich mir eine Speise munden lasse, ohne mich um ihre Zubereitung zu bekümmern, oder mich der Kleider und Möbel und alles Komforts bediene, ohne mich darum zu erkundigen, wie das alles hergestellt wird, und woher es kommt: ebenso gut kann ich freilich mich auch des Telegraphen und der Eisenbahn, des elektrischen Lichtes und der Gasbeleuchtung, meiner Augen und Ohren und der sie unterstützenden Instrumente 2c. bedienen, ohne darüber belehrt zu sein, worauf die Wirksamkeit aller dieser Erfindungen und Einrichtungen beruht. Und wenn man dabei vollends in Amt und Würde ist, und im Bewußtsein seiner klassischen Bildung auf den blos realistisch gebildeten Techniker stolz herabsieht, warum sollte man da eine Lücke in seinem Wissen fühlen oder in dieser Lücke eine Schwäche erkennen?

Wer freilich auf diesem Standpunkte steht, und den für hoch gebildet hält, der zwar mit Sprachen, Schriften, Gebräuchen und Sitten des klassischen Altertums vertraut ist, aber in dem, was ihn selbst täglich umgiebt, ein völliger Fremdling, der von den Ergebnissen der die Natur erforschenden Wissenschaften so wenig sich angeeignet hat, daß er jedem Kurpfuscher und Schwindler, jedem Irrtum und Aberglauben wehrlos preisgegeben ist, der wird nur konsequent sein, wenn er mit den Naturwissenschaften auch gleich die Mathematik aus dem Gymnasium hinauswirft; denn was sie an sachlichem Inhalt uns liefert, ist viel weniger wissenswert als was uns die Naturwissenschaften lehren, und der Gewinn für die formale Bildung kann kaum in Frage kommen, wenn man bedenkt, daß jede Wissenschaft ihre eigene Methode hat und die Mathematik direkt nur den exakten Naturwissenschaften vorarbeitet. Thatsächlich ist es doch sicher, daß der Erfolg in der Mathematik beim Studium aller s. g. Geisteswissenschaften ganz irrelevant ist, und oft der die besten Fortschritte macht, an dem der Mathematiker gänzlich verzweifelte, und umgekehrt der beste Mathematiker hinter andern oft sehr zurücksteht, wenn es sich z. B. um Geschichtsforschung und ähnliche Disziplinen handelt.

Will man aber, daß der Abiturient des Gymnasiums nicht bloß die Reife erlangt hat, die unbedingt notwendig ist, um das Studium der erwählten Berufswissenschaft mit Erfolg in Angriff nehmen zu können, sondern verlangt man von ihm, daß er, ehe er zum speziellen Berufsstudium übergeht, sich so viel reales Wissen und Können angeeignet hat, als unbedingt nötig ist, um den gegenwärtigen Stand unserer Kultur einigermaßen zu verstehen, und sich selbst leicht weitere Belehrung verschaffen zu können, wo ein eingehenderes Wissen ihm wünschenswert oder notwendig erscheint, so wird man die Beibehaltung resp. Einführung sowohl der Naturwissenschaften (natürlich nicht in ihrer ganzen Ausdehnung) als der Mathematik, und der letzteren mehr noch als Hilfswissenschaft für die Physik und andere Disziplinen als wegen ihres Wertes für die formale Bildung befürworten müssen. Ihr eigener Wissensgehalt kommt erst in dritter Linie in Betracht, denn was sie lehrt, ist seiner selbst wegen nur dem Mathematiker von Interesse; jeden anderen interessirt es nur, insofern es mit anderem Wissen in Verbindung gebracht, darauf angewendet wird, oder insofern man daraus einen praktischen Nutzen ziehen kann.

Dennoch gewinnen einzelne Partieen derselben auch für sich selbst ein Interesse, indem sie erfreuen durch den klaren wissenschaftlichen Zusammenhang ihrer einzelnen Erkenntnisse und dadurch als Vorbild dienen können für die wissenschaftliche Bearbeitung anderer Gegenstände. In dieser Hinsicht zeichnet sich ganz besonders die durch Steiner, Poncelet, Chasles, von Staudt u. a. zu dem höchsten Grad der Vollkommenheit gebrachte projektivische Geometrie (Geometrie der Lage) aus, neben der die ganz unwissenschaftliche Form der alten Euklidschen Geometrie so recht grell hervortritt.

Weil nun die reiferen Schüler, welche diese Disziplinen studieren, mit viel mehr Freudigkeit und rascherem Erfolge darin arbeiten, insbesondere auch, namentlich wenn die Scheidung zwischen Planimetrie und Stereometrie von Anfang an fallen gelassen wird, ihren Formensinn und ihr räumliches Anschauungsvermögen dabei weit besser ausbilden, als bei den zeitraubenden, ermüdenden und leicht zu vergessenden Euklidschen Beweisen oder den weitläuftigen Rechnungen der analytischen Geometrie, so ist in neuerer Zeit vielfach das Bestreben zu Tage getreten, diese Disziplin und ihre Methode in das Gymnasium einzuführen und die alte Geometrie, so weit sie sich nicht in projektivische umwandeln läßt, so viel wie möglich zu verdrängen. Dabei pflegt man aber zu vergessen, daß bei allen Vorzügen der wissenschaftlichen Form der reale Inhalt dieser Disziplin ein ganz gleichgültiger ist, und daß auch ihr praktischer Nutzen ein sehr einseitiger.

Was liegt daran, ob diese Punkte auf einer Geraden, einem Kreise oder einem Kegelschnitte liegen, oder jene Geraden durch einen Punkt gehen oder einen Kreis oder Kegelschnitt berühren? Welches Interesse bieten ferner die verschiedenen s. g. verwandtschaftlichen Beziehungen, welche man zwischen verschiedenen Figuren herstellen kann und der Lagen, in welche dieselben zu einander gebracht werden können für denjenigen, den nicht sein Beruf oder besondere Liebhaberei auf dergleichen führt? Anderes erfährt man aber nicht aus der projektivischen Geometrie, und Nutzen ziehen daraus nur Ingenieur und Mechaniker. Jeder andere hätte also als Gewinn aus diesem Studium nichts als eine etwas größere Fertigkeit in der Darstellung von Kegelschnitten und vielleicht ein etwas mehr ausgebildetes räumliches Vorstellungsvermögen. Dieser Gewinn steht aber in keinem Verhältnisse zu dem dazu nötigen Aufwande von Fleiß und Kraft, namentlich, wenn deshalb andere, nützlichere Disziplinen gekürzt werden sollen.

Die Fanatiker der projektivischen Geometrie vergessen dabei ferner, daß die Geometrie des Maßes und der Form, welche nicht bloß ihres Inhaltes wegen ein weit wichtigeres Hilfsmittel für die Physik ist, sondern auch ein viel reicheres Material liefert für das eigene Nachdenken des Schülers, zwar manche Berührungspunkte mit der Geometrie der

Lage hat, im Ganzen aber davon vollständig unabhängig ist und dieser also nicht untergeordnet werden kann, ohne daß man ihr Gewalt anthue; daß man also nicht das vergebliche Unternehmen versuchen soll, zu vereinigen, was nicht zusammengehört, statt den Prinzipien nachzuforschen, nach welchen auch die Geometrie des Maßes und der Form in einer Weise entwickelt werden kann, die sie als Wissenschaft auf die gleiche Stufe der Vollkommenheit bringt, den die Geometrie der Lage erreicht hat.

III.

Fassen wir das Ergebnis der beiden vorhergehenden Abschnitte zusammen, so wird es sich in der folgenden Weise formulieren lassen:

1. Der Wert des Studiums der Mathematik für die formale Geistesbildung zeigt sich nach vier Richtungen:

a) Sie trägt dazu bei, unser räumliches Anschauungsvermögen auszubilden (gilt wesentlich von der Stereometrie).

b) Sie liefert reichliches Material, an dem der Schüler lernen kann, selbständig Begriffe zu bilden, Beobachtungen zu machen, und aus beobachteten Einzelfällen allgemeine Regeln zu abstrahieren.

c) An ihren Beweisen übt der Schüler die Fähigkeit, Voraussetzung und Behauptung streng zu scheiden und zu formulieren und aus gegebenen Prämissen den richtigen Schluß zu ziehen.

d) Ihre Probleme bieten ein reiches Material zum eigenen und selbständigen Nachdenken.

Dieser Gewinn läßt sich zwar mehr oder weniger auch aus anderen Disziplinen, ganz besonders aus den Naturwissenschaften ziehen. Das Material der Mathematik hat aber vor jedem anderen den Vorzug, daß es immer zur Verfügung steht und meistens leichter zu übersehen ist, darum also das geeignetste für die allmähliche Ausbildung dieser Geistesthätigkeiten.

2. Das Studium der Naturwissenschaften, insbesondere der instruktivsten und wichtigsten Zweige derselben, setzt mehr oder weniger mathematische Kenntnisse und Fertigkeiten voraus, und wird also erst zugänglich, wenn mathematische Studien vorhergegangen sind.

3. Der reale Wissensgehalt, den uns die Mathematik bietet, ist zwar an und für sich für jeden Nichtmathematiker von geringem Interesse,

und Sonne etwas eingehender kennen gelernt haben, als dies z. B. gegenwärtig in einem Teile unserer badischen Gymnasien möglich ist, wo die „mathematische Geographie" vor der Mathematik gelehrt wird, also unmöglich mathematische Geographie sein kann. Mir erscheint etwa die Ausdehnung und Auswahl des physikalischen Lehrstoffs, wie sie Jochmann giebt, für die Gymnasien die geeignete, und dürfte nur ein kurzer Abriß der anorganischen Chemie beigefügt werden. Nur ist bei der jetzigen Einrichtung in vielen Gymnasien, die den wissenschaftlichen Unterricht in der Physik auf zwei wöchentliche Stunden in den beiden obersten Jahreskursen beschränkt, kaum die Hälfte dieses Stoffes zu bewältigen, und es wäre deshalb zu wünschen, daß die seit einigen Jahren den badischen Gymnasien ins Belieben gestellte Änderung eine allgemeine würde, wonach der naturgeschichtliche Unterricht in der Tertia abgeschlossen und der physikalische in der Sekunda begonnen wird. Bei dieser Einrichtung empfiehlt es sich dann wieder, in der Sekunda diejenigen Partieen zu behandeln, welche der Beihilfe der Mathematik mehr entbehren können, also auch die Prinzipien der Chemie, die mehr mathematischen Partieen sowie die mathematische Geographie und die Anfangsgründe der populären Astronomie (etwa so weit sie Jochmann vorträgt) der Prima zu überweisen, auf deren Lehrplan auch die Anthropologie eine passendere Stellung hätte als auf dem der Obersekunda. (Dagegegen würde ich die einstündige Logik und s. g. Psychologie auf dem Lehrplane der Prima gerne vermissen.) Bei allen diesen Disziplinen dürfte der Grundsatz maßgebend sein: es kommt im Gymnasium nicht auf vollständige Begründung und Durchführung physikalischer Theorien an, sondern nur auf klare Darlegung der Erscheinungen und Gesetze selbst, und zwar mit dem Zwecke, daß der Lernende dadurch verstehen lerne, was er täglich sieht und selber thut. Demnach sollten alle sehr allgemeinen Untersuchungen, und insbesondere solche, die höhere Mathematik beanspruchen, ferne bleiben; auch solche Gebiete, die ohne Herbeiziehung schwieriger Theorien und Rechnungen nicht verständlich sind, wie die doppelte Strahlenbrechung und verwandte Erscheinungen, dürften nur beiläufig erwähnt werden, als Gebiete, die dem Spezialstudium überlassen bleiben müssen.

Aber, wenn man hier auch weises Maß hält, so kann man doch z. B. schon die Erscheinung der Lichtbrechung und die darauf beruhenden wichtigen Instrumente nicht eigentlich verstehen, ohne eingehende mathematische Erörterungen, und dasselbe gilt von den Gesetzen der Mechanik, wenn man auch allgemeine Erörterungen möglichst ausschließt. Der Kundige wird darum zugeben, daß dem Studium dieser Disziplinen mindestens vorhergegangen sein müssen: die gewöhnliche Planimetrie, die ebene Trigonometrie, Kenntnis und Gebrauch des Descartesschen Coordinatensystems, und von der Stereometrie wenigstens soviel als nötig, um Schwerpunktsbestimmungen und Volumenberechnungen einfacher Körper ausführen zu können. Soll dann in Oberprima noch mathematische Geographie, und was man gewöhnlich aus der Astronomie daran anzuknüpfen pflegt, vorgetragen werden; so sollte in der Unterprima auch noch sphärische Trigonometrie vorhergegangen sein.

Analytische Geometrie, projektivische Geometrie und Infinitesimalrechnung können dagegen ganz gut entbehrt werden.

Neben den physikalischen Wissenschaften sollten aber den Abiturienten, ehe sie zu ihren Berufswissenschaften übergehen, noch gewisse andere wichtige und weitgreifende Einrichtungen bekannt und wenigstens in ihren Grundlagen verständlich sein, welche aus der Mathematik allein hervorgegangen sind, nämlich diejenigen, welche man unter dem Namen des Versicherungswesens zusammenfaßt. Die Grundlagen dieser Institute sind aber die Zinses-Zins- und Rentenrechnung, sowie die Wahrscheinlichkeitsrechnung, und deshalb sollten auch diese Disziplinen, soweit sie elementar sind, und deren Voraussetzungen, also die Progressionen und die Kombinationslehre einen wesentlichen Bestandteil des mathematischen Pensums der Gymnasien bilden.

Weniger wichtig dagegen erscheinen die Anwendungen der Kombinationslehre auf die allgemeine Arithmetik, ferner die Kettenbrüche und die diophantischen Gleichungen, das Rechnen mit komplexen Zahlen, die höhere Algebra, die Potenzreihen und die Determinanten.

Doch dürfte es sich immerhin empfehlen, daß der Lehrer auch von diesen Disziplinen das eine oder andere Kapitel vornehme, namentlich insofern es durch die dabei in Anwendung kommende Methode instruktiv ist (so sollten die Schüler wenigstens die Bernoullische Induktionsmethode kennen lernen); denn gerade diese höheren und vielleicht weniger praktischen Partieen der Mathematik sind bei richtiger Behandlung oft von um so größerem pädagogischen Werte. Auch sollte es solchen Schülern, die besondere Vorliebe für Mathematik mitbringen oder deren späterer Beruf ein weitgehendes mathematisches Studium wünschenswert macht, möglich gemacht werden, sich schon im Gymnasium diese Kenntnisse zu erwerben. Ich habe darum denjenigen Teilen meines Lehrbuches, welche für die oberen Klassen bestimmt sind, auch Kapitel aus der projektivischen Geometrie und solchen Partieen der elementaren Mathematik beigefügt, die oben als entbehrlich bezeichnet worden sind, ohne beim Unterrichte selbst weiter darauf einzugehen, als zulässig ist.

Beschränken wir uns also auf diejenigen Disziplinen, welche für das Studium der Physik und mathematischen Geographie und für das Verständnis des Versicherungswesens unentbehrlich sind, so können wir auch noch in diesen selbst den Lehrstoff mehr oder weniger ausdehnen, und es wird dabei das Augenmerk darauf zu richten sein, daß nichts weggelassen werde, was zu dem angegebenen Zwecke unentbehrlich ist. Andererseits wird man aber die Beschränkung nicht so weit treiben dürfen, daß dadurch der pädagogische Wert des Unterrichts vermindert wird, oder der wissenschaftliche Zusammenhang und die Vollständigkeit Einbuße erleidet.

Immerhin wird es aber zweckmäßig sein, nicht zu viel des Wissensstoffes zu bringen, damit man mehr Zeit gewinne für die Anwendung, eingedenk der Mahnung eines alten bewährten Lehrers: „Die Mathematik muß man nicht bloß wissen, man muß sie auch können“.

IV.

Es bleibt nun noch ein näheres Eingehen auf die Methode, in welcher die einzelnen Disziplinen zu lehren sind, und auf die Verteilung des mathematischen Lehrstoffes auf die einzelnen Klassen.

Von einem Eingehen auf den elementaren Rechenunterricht kann hierbei abgesehen werden, da hier wohl kaum noch große Differenzen obwalten. Sollten aber hier noch Streitfragen bestehen, so müßte ich deren Schlichtung anderen überlassen, da mir eigene Erfahrung hier abgeht.

Mehr Anlaß zu Erörterungen giebt die allgemeine Arithmetik, in welcher die Methoden schon sehr auseinander gehen. In unseren badischen Gymnasien beginnt dieser Unterricht in der Untertertia. Wenn man jedoch die Programme der einzelnen Anstalten vergleicht, so zeigt sich eine sehr große Verschiedenheit, sowohl in der Behandlung, wie in der Auswahl und in der Verteilung des Stoffes auf die verschiedenen Klassen. Es würde darum sehr weit führen, diese Verschiedenheiten alle aufzuführen und die Vorzüge und Nachteile der oft mehr durch Zufall und Gewohnheit entstandenen als aus reiflicher Überlegung hervorgegangenen Lehrgänge und Methoden zu erörtern.

Ich will darum versuchen, meinen eigenen Lehrgang, der durch mein Lehrbuch auch anderen zugänglich gemacht ist, in seinen Prinzipien darzulegen und zu begründen, wenn auch nichts weiter dabei erreicht sein sollte, als daß diejenigen, die besseres vorzuschlagen haben, damit hervortreten und es begründen.

Zuvor möchte ich jedoch bemerken, daß ich mir keineswegs einbilde, noch die Meinung zu verbreiten beabsichtige, die Methode, welche ich in meinem Buche und bei meinem Unterrichte befolge, sei neu. Dies ist durchaus nicht der Fall, obwohl ich in Baden fast durchgängig andere Methoden befolgt sehe. Sie ist vielmehr zunächst dadurch entstanden, daß ich, so lange ich unterrichte, meinen Unterricht in der Arithmetik an die Aufgabensammlung von Heis anzulehnen pflegte, nach welcher ich seiner Zeit selbst gelernt habe; und wer mein Lehrbuch Paragraph für Paragraph mit dieser Sammlung vergleicht, wird finden, daß sein Gang nur in wenigen Punkten von demjenigen verschieden ist, den Heis bei der Bearbeitung seiner Sammlung voraussetzt. Liegt also ein Verdienst darin, so ist es nicht das meinige, sondern das von Heis.

Wer die 24 ersten Paragraphen von Heis' Aufgabensammlung einer gründlichen Durchsicht unterzieht, der kann sich leicht überzeugen, daß es ihm sehr wesentlich darauf ankam, dem Schüler klar zu machen, daß es sich bei der Buchstabenrechnung nicht um Auswertung, sondern um Transformation, d. h. um Umwandlung angedeuteter Rechnungen (Formeln) in andere handelt, und daß ihr Zweck zunächst der ist, zu lehren, wie man irgend wie angegebene Rechnungsvorschriften durch einfachere und kürzere ersetzen kann. Er hat dabei nur den Fehler begangen, daß die an der Spitze der einzelnen Paragraphen stehenden Fragen so gestellt sind, als handelte es sich um Rechnungsvorschriften, nicht um bloße Zulassungen oder Berechtigungsscheine, wenn dieser Ausdruck hier gestattet ist.

Ein Lehrer, der sich das Buch vor dem Gebrauch gründlich angesehen hat, kann zwar nicht zweifelhaft sein, wie Heis die gestellten Fragen beantwortet haben will, wenn er die voranstehenden Gleichungen richtig deutet. Wer aber nach irgend einer anderen durch Gewohnheit überkommenen Methode oder nach einem zufällig vorgefundenen Lehrbuche unterrichtet, in welchem die „vier Spezies der Buchstabenrechnung" dargelegt sind, und Heis' Aufgabensammlung nur als solche benutzt, unbekümmert um das derselbe zu Grunde liegende System (auf das doch im Titel aufmerksam gemacht ist), der wird, durch diese Fragestellung irregeleitet, den Schüler zu Antworten veranlassen, die nicht in Heis' Sinne sind und den Schüler in Verwirrung bringen, wenn er nun die vermeintlichen Vorschriften auf die folgenden Aufgaben anwenden will, wo oft ganz anderes verlangt wird.

Einige Beispiele mögen deutlicher machen, was ich meine.

An der Spitze des §. 12 stehen die Gleichungen

$$a - (b - c) = a - b + c = a + c - b = c + a - b.$$

Damit sind kurz alle Sätze in einen Ausdruck zusammengefaßt, die hier in Anwendung kommen sollen. Dann folgen die Fragen:

1) Wie wird eine Differenz von einer Zahl subtrahiert?

2) Wie wird eine Zahl zu einer Differenz addiert? Wie wird von einer Summe eine Zahl subtrahiert, welche größer ist als einer der Summanden?

Diese Fragen sind geeignet, gleich von vorneherein den Schüler zu verwirren, wenn der Lehrer nicht zuvor den ganzen Inhalt der darüber stehenden Gleichungen klar gemacht hat. Denn zunächst wird der Schüler durch die Form der Fragen auf die Annahme geführt, es handle sich um Vorschriften. Giebt er dementsprechend auf die erste Frage die Antwort: „Eine Differenz wird von einer Zahl subtrahiert, indem man den Minuend abzählt und dann den Subtrahend addiert, oder indem man den Subtrahend addiert, und dann den Minuend subtrahiert, und ist der Lehrer mit dieser Antwort zufrieden, so veranlaßt er dadurch den Schüler in Zukunft oft eine kürzere Rechnung durch eine längere zu ersetzen, weil er meint, es sei das Vorschrift. Richtig kann diese Frage eigentlich gar nicht beantwortet werden, weil sie nicht richtig gestellt ist. Aus den voranstehenden Gleichungen ergiebt sich: Statt eine Differenz zu subtrahieren kann (darf) man den Minuend subtrahieren und den Subtrahend addieren, und zwar in beliebiger Ordnung. Die richtige Fragestellung wäre also: „Durch welche Rechnung kann die Subtraktion einer Differenz ersetzt werden?"

Ebenso verhält es sich mit den Fragen, die den §. 14 einleiten, dessen Gegenstand die Anwendung der Gleichungen

$$(p \pm q)\,n = pn \pm qn, \quad m\,(a \pm b) = ma \pm mb$$

sind. Sämtliche Fragen sind so gestellt, als handle es sich um Vorschriften, während z. B. die erste dieser Gleichungen doch nur aussagt:

„Statt eine Summe zu multiplizieren kann man die einzelnen Summanden multiplizieren und die Ergebnisse addieren“.

„Statt eine Differenz zu multiplizieren kann man Minuend und Subtrahend multiplizieren, und das zweite Ergebnis vom ersten subtrahieren“.

„Statt zwei Produkte mit gleichem Multiplikator zu addieren (subtrahieren) kann man die Multiplikanden addieren (subtrahieren), und das Ergebnis mit dem gemeinschaftlichen Multiplikator multiplizieren“.

Richtig gestellt müßten also die Fragen heißen:

„Was kann man thun, statt eine Summe (Differenz) zu multiplizieren“?

„Durch welche Rechnung kann man die Addition (Subtraktion) zweier Produkte ersetzen, wenn der Multiplikand (Multiplikator) derselbe ist“?

Ein recht eklatantes Beispiel, zu welchen Begriffsverwirrungen solche unrichtige Fragestellungen und unexakte Formulierung von Regeln selbst Erwachsene geführt werden können ist mir in Zürich vorgekommen. Ich hatte dort einen Schüler zu unterrichten, der vorher von einem ehemaligen bayrischen Offizier Privatunterricht hatte. Dieser hatte sich kurz vorher erst selbst das nötige Wissen aus einem Lehrbuche geholt oder erneuert, und die darin erörterten Regeln gewissenhaft als Vorschriften genommen; darunter auch die Regel: „Man zieht die Quadratwurzel aus einem Bruche aus, indem man sie aus Zähler und Nenner auszieht, und die Ergebnisse dividiert“. Genau nach dieser Vorschrift hatte mein Schüler dann nach Angabe dieses Lehrers die Quadratwurzeln aus einer Reihe von Brüchen, wie $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ u. s. w. ausgezogen. Ich habe mich mit eigenen Augen überzeugt, daß in seinem Hefte wirklich die Quadratwurzeln aus 2 und 3 auf 5 bis 6 Stellen ausgezogen und die Ergebnisse dann auf ebenso viel Stellen dividiert waren, um $\sqrt{\frac{2}{3}}$ zu erhalten, und daß sein Lehrer dies gut geheißen hat.

Bei Heis kann jedoch die unexakte Fragestellung nur dann verwirren, wenn der Lehrer selbst die Sammlung nicht genauer angesehen und das ihr zu Grund liegende System nicht herausgefunden hat. Die Unterabteilung A. des zweiten Abschnittes von Heis' Aufgabensammlung hat z. B. die Überschrift: „Anwendung der Sätze von Produkten und Quotienten“. In vielen Lehrbüchern zerfällt dieser Stoff in Kapitel mit den Überschriften: Multiplikation mit Monomen und Polynomen, Division mit Monomen und Polynomen, Rechnung mit Buchstabenbrüchen u. s. w.; und diejenigen, welche nach solchen Büchern unterrichtet werden, müssen notwendig zu der Meinung geführt werden, als handle es sich wirklich um eine besondere Art von Rechnungen (Buchstabenrechnung), und als wäre die Hauptsache, daß man lerne, wie diese Rechnungen ausgeführt werden („wie man's macht"). Das, was man da eigentlich mache, und zu welchem Zwecke, und mit welcher Berechtigung, das geht an den meisten spurlos vorüber, und das Fazit des ganzen Unterrichtes ist für alle diejenigen, welche nicht später Anwendung davon machen, meistens gleich Null, wenn nicht ein negatives. Denn das Erlernen und Üben von Regeln, deren Sinn und Zweck man nicht versteht, kann doch nur als eine geistestötende Beschäftigung angesehen werden.

Heis dagegen macht schon in der Überschrift, die er diesem Kapitel giebt, darauf aufmerksam, daß es sich nicht um Rechnungsvorschriften, sondern um die Resultate von Rechnungen (Produkte, Quotienten) handelt, und um **Lehrsätze**, welche uns teils ermöglichen, diese Resultate auf verschiedene Weise zu erhalten, teils zeigen, wie man die Rechnungen mit diesen Resultaten durch andere Rechnungen ersetzen kann.

Beginnt man mit der allgemeinen Arithmetik in Untertertia, wo ein großer Teil der Schüler weder reif genug zur Erfassung eines so abstrakten Gegenstandes noch auch hinreichend geübt im praktischen Rechnen, um dieses ganz außer Übung lassen zu dürfen, so ist es notwendig, daß man sehr langsam vorwärts gehe und die Abstraktion nicht weiter treibe als unerläßlich. Ganz verkehrt ist es darum gleich anfangs mit dem abstrakten Begriff der Größe zu beginnen und die Buchstabenrechnung aus diesem Begriffe zu deduzieren. Der Schüler soll zwar, wenn er in die Tertia eintritt auch mit Brüchen rechnen können. Es ist aber keineswegs nötig die abstrakten Sätze über die Rechenoperationen gleich anfangs für beliebige Zahlen darzuthun, so daß jeder Satz erst durch eine ganze Reihe von Beweisen festgestellt werden muß, ehe man an seine Anwendung denken kann, und der Lehrer, wenn er vorwärts kommen will, bei den Schülern entweder auf das Verständnis oder auf die Fertigkeit in der Anwendung verzichten muß. Ich setze darum, mit Heis, im ganzen ersten Jahre voraus, daß die Buchstaben nur ganze positive Zahlen bedeuten, unbekümmert darum, ob dadurch das Rechnen mit Brüchen wieder vergessen wird oder nicht: eine Repetition an richtiger Stelle wird diesen Schaden bald wieder ausgleichen.

Der Anfang muß mit einer Klarstellung der Begriffe und der Bedeutung der fünf ersten Grundrechenoperationen und der dabei in betracht kommenden Zahlen gemacht werden. Man wird immer finden, daß zwar alle ganz gut rechnen können, aber nur wenige wissen, was eigentlich addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren heißt, was eine Summe, ein Produkt, ein Quotient, Minuend, Subtrahend, Multiplikand, Multiplikator, Dividend, Divisor 2c. sei. Hand in Hand mit der Feststellung dieser Grundbegriffe (immer unter der Voraussetzung, daß es sich um ganze Zahlen handelt) geht dann die Erläuterung des Gebrauchs der Buchstaben, der Bedeutung der Klammern und des Begriffes der Formel, sowie des Sinnes und Zweckes der s. g. Buchstabenrechnung. Sind diese wenigen notwendigen Grundbegriffe, zu denen aber keineswegs der Begriff der Größe gehört, festgestellt und Eigentum der Schüler, so folgen die kaum eines Nachweises bedürfenden Sätze über Addition und Subtraktion (Heis §. 7 bis 13). Der Schüler wird diese Sätze um so leichter fassen und festhalten, wenn man ihm zeigt, daß sie nur in Form von Regeln aussprechen, was er längst praktisch geübt hatte, und wenn man ihm Gelegenheit giebt zu zeigen, wie dadurch oft lange Rechnungen in kurze umgewandelt werden können. Z. B. Statt $7395 - 97 + 9727 - 98$ kann man setzen: $7395 - 200 + 5 + 9727 = 7200 + 9727 = 16927$.

Die Rechnung $87768 - 8989 - 7768$ ergiebt sich sofort durch Änderung der Reihenfolge der Subtrahenden.

Die Summe der Zahlen 1 bis 100 erhält man durch die Bemerkung, daß die Summe aus der ersten und letzten, der zweiten und vorletzten, der dritten und drittletzten u. s. w. jedesmal 101 beträgt, daß die ganze Summe also durch die Rechnung $101 \cdot 50$ gefunden wird. Und dergl. mehr.

Daran reihen sich dann die Sätze über Multiplikation von Summen, Differenzen und Produkten und über Addition und Subtraktion von Produkten.

Die Beweise können immer an Zahlenbeispielen geführt werden, ebensogut, wie die geometrischen Beweise an bestimmten Figuren.

Z. B. der Satz: $(a + b)m = am + bm$ wird vollständig begriffen, wenn man für m eine beliebige kleine ganze Zahl setzt, etwa $m = 5$. Der Beweis lautet dann ausführlich:

$(a + b) \cdot 5$ bedeutet eine Summe von 5 Summanden, die alle $= a + b$ sind, also soviel wie

$$(a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b) + (a + b).$$

Da man nun statt einer Summe nacheinander die einzelnen Summanden addieren kann, und in jeder Summe die Reihenfolge der Summanden beliebig geändert werden darf, so ist dies wieder soviel als $a + a + a + a + a + b + b + b + b + b$. Da ferner $a + a + a + a + a = a \cdot 5$ und man, statt nacheinander die 5 Summanden b zu addieren, auch ihre Summe addieren kann, so ist diese Formel wieder identisch mit $a \cdot 5 + b \cdot 5$.

Hat man diesen Beweis von mehreren Schülern reproduzieren lassen, und zwar jedesmal für einen anderen Wert von m, so werden wohl alle aufmerksamen Schüler begriffen haben, daß der Satz für jeden beliebigen anderen Wert von m ebenso richtig ist, da sich ja nichts ändert als die Anzahl der Summanden $(a + b)$.

Ich halte es aber für wesentlich, daß diese Beweise sämtlich so oft reproduziert werden, bis sie vollständig und ins kleinste Detail von den Schülern begriffen sind. Dies kann umsomehr festgehalten werden, als es sich in diesem Abschnitte eigentlich nur um drei Beweise handelt, nämlich um die der Gleichungen

$$(a + b) m = am + bm,$$
$$(a - b) m = am - bm,$$
$$(ab) m = (am) b.$$

Alles übrige sind einfache Folgerungen, wobei außer dem schon bei den Grundbegriffen zu erledigenden Satze $ab = ba$ nur noch der selbstverständliche Satz in Anwendung kommt, daß, wenn zwei Zahlen gleich sind, jede durch die andere ersetzt werden kann; d. h. aus $(a + b) m = am + bm$ folgt auch $am + bm = (a + b) m$ u. s. w.

Können die Schüler aus jedem dieser Sätze seine sämtlichen Folgerungen ableiten und richtig formulieren, so muß man sofort zur Anwendung schreiten, und zwar auf's schriftliche und mündliche Zahlenrechnen, damit den Schülern gleich anfangs der Nutzen dieser Sätze ad oculos demonstriert werde. Als Beispiele will ich hier hersetzen: Für $36 \cdot 25 + 36 \cdot 35$ kann man setzen $36 \cdot (25 + 35) = 36 \cdot 60$; für $998 \cdot 25$ kann man setzen $(1000 - 2) \cdot 25 = 25000 - 50$ u. s. w. (Vergl. Heis Aufg. § 14 und 15.)

Erst wenn diese Sätze (§ 12, 13 und 14 meiner Arithmetik) vollständig verstanden sind, und auch ihr Wert für das praktische Rechnen begriffen ist, soll man zur Multiplikation von Polynomen mit Polynomen weiterschreiten.

Dabei soll man aber nicht bloß sein Augenmerk darauf richten, daß die Schüler den Mechanismus dieses Verfahrens sich sicher aneignen und einige Fertigkeit darin erlangen, sondern man muß ihnen auch beständig vor Augen halten, daß man zwar aus Gründen, die ihnen erst später klar werden können, diese Operationen einüben muß, daß dadurch aber nur in seltenen Fällen für die vorgelegten Formeln einfachere, vielmehr meistens viel weitläuftigere Formeln erhalten werden, daß also der so eingeübte Mechanismus dem Zwecke der Buchstabenrechnung nur mittelbar dient. Damit jedoch der Schüler, eben weil er nicht einsehen kann, wozu es nützen soll, die Rechnung $(a+b)(c+d)$ durch die dreimal längere $ac+ad+bc+bd$ zu ersetzen, das ganze Verfahren nicht für etwas Überflüssiges ansehe, so muß man nicht verfehlen an zahlreichen Beispielen zu zeigen: 1. daß die im allgemeinen längere Formel bisweilen auch zu kürzerer Rechnung führt; 2. daß insbesondere kürzere Rechnungsvorschriften erhalten werden können, wenn z. B. bei der Addition oder Subtraktion von Produkten aus Polynomen die angedeuteten Produkte durch die ausgeführten ersetzt werden; 3. daß ein Nutzen der Multiplikation zweier Polynome oder Binome schon in dem dadurch gelieferten Nachweis der Identität der gegebenen und der gefundenen Formel liegt. (Denn wenn ich weiß, daß $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$, so kann ich auch $ac+ad+bc+bd$ durch $(a+b)(c+d)$ ersetzen.) Vergl. § 17 meines Lehrbuches.

Als spezielle Ergebnisse der Multiplikation mit Binomen sind ganz besonders eingehend zu erörtern und anzuwenden die Sätze, welche durch die Gleichungen

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ausgedrückt sind, und es dürfte sich eine recht häufige Anwendung derselben auch zur Abkürzung längerer Multiplikationsaufgaben, wie

$$(a+b+c)(a+b-c),\quad (a+b+c+d)(a-b+c-d),$$
$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \text{ u. dgl.}$$

sehr empfehlen, ehe zur Division vorgeschritten wird.

Ist der Inhalt dieses Abschnittes (§ 15, 16 und 17 meines Lehrbuches) den Schülern geläufig, so lasse ich die Sätze über die Division von Summen, Differenzen und Produkten, Multiplikation, Division, Reduktion und Erweiterung von Quotienten, Division durch ein Produkt, Addition und Subtraktion von Quotienten (§ 19 bis 23) folgen.

Den wesentlichsten Inhalt dieses Abschnittes bilden die Gleichungen:

$$(a \pm b) : m = (a : m) \pm (b : m)$$
$$(ab) : c = (a : c)\, b = b\, (a : c)$$
$$(a : b) : c = (a : c) : b = a : (bc),$$

welche sämtlich auf Grund der Definition der Division zu beweisen sind. Z. B. „$(a \pm b) : m$ heißt: die Zahl suchen, welche mit m multipliziert das Produkt $a \pm b$ ergiebt; nun ist aber $[(a : m) \pm (b : m)]\, m = (a : m)\, m \pm (b : m)\, m = a \pm b$; also ist $(a : m) \pm (b : m)$ die gesuchte Zahl".

Ehe zur Division von Polynomen durch Polynome weiter geschritten wird, ist es zweckmäßig, den Begriff der negativen Zahlen einzuführen, und den Begriff der Multiplikation so zu erweitern, daß er auch einen Sinn hat, wenn der Multiplikator negativ ist. Früher damit zu kommmen, halte ich jedoch für unpädagogisch. Will man Knaben für einen ohnedies schon so sehr abstrakten Gegenstand, wie die Buchstabenrechnung, interessieren, so muß man die Abstraktion nicht weiter treiben als unbedingt notwendig ist, und die Begriffe erst dann erweitern, wenn der Lehrstoff diese Erweiterung verlangt. Ich kann darum von der Belehrung, die mir Herr Hoppe in seiner Rezension meines Lehrbuches über diesen Punkt zu teil werden läßt, keinen Gebrauch machen. Ein anderer Rezensent, Herr Killing (in Hoffmanns Zeitschrift) vermißt bei meinen „sonst trefflichen Erläuterungen der positiven und negativen Größen" die Vorführung der „entgegengesetzten Richtungen". Dieser Tadel beruht jedoch auf einem Übersehen des Herrn Rezensenten. Denn der Abschnitt beginnt mit den Worten: „Wenn ich drei Schritte rückwärts gehe, so gehe ich um drei Schritte weniger als gar keinen Schritt vorwärts". Damit ist doch der Gegensatz der Richtungen hervorgehoben.

Zu weiteren Bemerkungen giebt mir dieses Kapitel ebenso wenig Anlaß wie das über die Division von Polynomen mit Polynomen. Ich habe mich hier ganz an Heis angeschlossen, und wüßte gar nicht, wie dieser Gegenstand anders behandelt werden sollte.

Mit diesem Kapitel glaube ich das erschöpft zu haben, was in einer mäßig stark besetzten und nicht ungewöhnlich schwach begabten Untertertia bei zwei wöchentlichen Stunden in Jahresfrist durchgenommen werden kann, so daß es nach Ablauf dieser Frist auch „sitzt" und bleibendes Eigentum der Schüler geworden ist.

Das Pensum der Obertertia beginne ich mit den notwendigsten Sätzen aus der Lehre von der Teilbarkeit der Zahlen (meinem zweiten Kapitel), dem sich dann das Verfahren zur Aufsuchung des gemeinschaftlichen Teilers zweier Polynome und das Zerlegen von Polynomen in Faktoren, (soweit dies hier möglich) anschließt. Ich hätte auch hier nichts beizufügen, wenn nicht die in diesem Abschnitte gelegentlich ausgeführten Divisionen und die später bei Gelegenheit der Dezimalbrüche auch vorkommenden Multiplikationen Herrn Killing Anlaß gegeben hätten zu folgender Belehrung:

„Mit dem hier gelehrten Mechanismus des Ziffernrechnens können wir uns nicht befreunden. Zunächst gewährt es schon einige Vorteile, bei der Multiplikation mit der höchsten Stelle des Multiplikators, und nicht, wie hier, mit der niedrigsten zu beginnen. Noch wichtiger ist es, die Subtraktion als Addition auszusprechen, und dennoch bei der Division nicht die Partialprodukte, sondern nur die Differenzen hinzuschreiben. Nachdem diese Methode so oft empfohlen ist, kann man es einem neuen Werke kaum noch als Vorzug anrechnen, wenn es sich derselben bedient. Wesentliche Erleichterung verschafft sie auch beim Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Teilers und beim Ausziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln. In allen diesen Fällen ist der im vorliegenden Werke gezeigte Mechanismus viel zu weitschweifig."

Darauf habe ich zunächst zu erwidern, daß in meinem Lehrbuche die vier Spezies mit ganzen Zahlen ausdrücklich vorausgesetzt werden, weil sie darin gar nicht gelehrt werden. Es ist also ganz unmöglich, daß Herr Killing durch den hier gelehrten Mechanismus befriedigt werden konnte. Was er im Übrigen über die hauptsächlich in Österreich übliche Rechnungsmethode sagt ist ganz gut und mir keineswegs neu. Nur glaube ich, daß die Vorzüge, die darin liegen sollen, daß man beim Multiplizieren mit der höchsten Ziffer beginne, statt mit der niedersten, lediglich in der Vorliebe (um nicht zu sagen Einbildung) des Herrn Rezensenten beruhen. Ich selbst habe mich mit dieser Methode seiner Zeit so weit vertraut gemacht, daß ich sie bei meinen eigenen Rechnungen gewöhnlich in Anwendung bringe, wenn ich Papier sparen will. Da ich aber mein Buch zunächst für meinen eigenen Gebrauch in der Schule geschrieben habe, so mußte ich das Ziffernrechnen in der Weise voraussetzen, wie ich es bei meinen Schülern vorfand, die in allen Anstalten, an denen ich unterrichtet habe, nach der althergebrachten Methode rechnen gelernt hatten. Ich selbst habe mich im Anfange darüber gewundert, daß man in diesem Punkte beim Alten geblieben, und als Grund für diesen Konservatismus in dem sonst so sehr zum Fortschritt geneigten Baden

den folgenden in Erfahrung gebracht: Was man bei der österreichischen Methode des Subtrahierens und Dividierens *wirklich* spart, ist nur Raum und so viel Zeit, als das Hinschreiben der Teilprodukte erfordert. Wenn man aber einen Fehler gemacht hat, so kann man ihn nicht leicht durch rasche Durchsicht der gemachten Rechnung finden, sondern muß die Rechnung noch einmal ganz von vorne anfangen, wodurch wieder verloren geht, was gewonnen war. Auch kann nie einer rasch kontrolieren, was ein anderer nach österreichischer Methode gerechnet hat. Der Vorteil ist also mindestens ein zweifelhafter. *Pädagogisch* ist aber *die alte Methode vorzuziehen*, weil sie leichter zu fassen ist. Ich habe allerdings an meinen österreichischen Schülern in Zürich seiner Zeit gefunden, daß sie eine größere mechanische Fertigkeit im Rechnen besaßen als diejenigen, welche nach der alten Methode rechnen gelernt hatten; bei den meisten war aber diese Fertigkeit auf Kosten des Verständnisses erzielt worden, und das ist ein sehr zweifelhafter Gewinn. Dies die Gründe, warum ich meine Beispiele nach der alten Methode ausgeführt habe, trotz der vielen Empfehlungen, die die neue für sich hat. Es ist weder immer alles *gut*, was *neu* ist, noch alles *nachahmenswert*, was *viel empfohlen* wird.

Da aber der Mechanismus des Rechnens nicht aus dem Buche, sondern in der Schule durch den Lehrer gelehrt werden soll, so wird der Umstand, daß die paar Rechenexempel, die in meinem Buche ausgeführt sind, nach der alten Methode ausgeführt sind, keinen Lehrer hindern, mein Buch zu benutzen und doch nach der neuen Methode rechnen zu lassen, wenn er diese vorzieht: Wer aber auf Selbstunterricht angewiesen ist und dazu sich meines Buches bedient, der wird hoffentlich, auch wenn er nach der neuen Methode rechnen gelernt hat, die nach alter Manier ausgeführten Beispiele verstehen, sonst müßte man ihm raten, die Selbstbelehrung aufzugeben.

Für das Aufsuchen des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen kann allerdings ein etwas übersichtlicherer Mechanismus (auch mit Beibehaltung der alten Divisionsmethode) gegeben werden, als der in meinem Buche. Sei z. B. der gemeinschaschaftliche Teiler von 34969 und 32079 zu suchen, so giebt dies folgende Rechnung:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & 1 & & 11 & & 10 & \\ 34969 & : & 32079 & : & 2890 & : & 289 \\ 32079 & & 2890 & & & & \\ \cline{3-3} & & 3179 & & & & \\ & & 2890 & & & & \end{array}$$

über Quotienten ganzer Zahlen nachgewiesen werden, was jedoch keineswegs ausschließt, daß zugleich auch die früher gelernte Begründung dieser Teile des Bruchrechnens wiederholt werde. Diesem Gegenstande sind in meinem Lehrbuche die Paragraphen 46 u. 47 gewidmet, denen dann eine Anzahl Beispiele über Reduktion, Addition und Subtraktion von numerischen wie von Buchstabenbrüchen beigefügt sind, welche Gelegenheit geben, viele der früher erlernten Regeln und Sätze in Anwendung zu bringen und dadurch gegenwärtig zu erhalten. Immerhin thut man wohl, wenigstens noch doppelt so viele Beispiele hinzuzufügen.

Dann folgt die Ausdehnung des Dezimalsystems auf die gebrochenen Zahlen: Begriff, Zweck und Bedeutung der Dezimalbrüche, deren Addition und Subtraktion, die Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche und der periodischen Dezimalbrüche in gemeine und was damit zusammenhängt (§ 48 bis 50).

Jetzt erst ist es am Platz, auch den Begriff der Multiplikation so zu erweitern, daß es einen Sinn hat, wenn der Multiplikator ein Bruch ist. Ich habe mich hier unbedenklich der sehr verbreiteten und bequemen Definition bedient:

„a mit b multiplizieren heißt aus der Zahl a ebenso eine neue Zahl bilden, wie b aus der positiven Einheit gebildet wird".

Erst kürzlich habe ich aus einer Rezension eines Lehrbuchs der Arithmetik, die Herr Erler geliefert hat, ersehen, daß man diese Definition anfechten kann. Herr E. macht nämlich dazu die Bemerkung, diese Definition sei falsch. „Denn 8 kann aus der Einheit gebildet werden, indem man sie zweimal als Summand setzt und diese Summe dann mit 3 potenziert. Nach der obigen Definition gäbe dann

$$3 \cdot 8 = (3 + 3)^3 = 6^3 = 216".$$

Dagegen läßt sich allerdings nur einwenden, daß man auf diese Weise die Zahl 8 zwar aus der Einheit auf Umwegen erhalten kann, aber nicht ihrem Begriffe nach erhält, und daß dem Sinne der Definition gemäß unter dem „Erhalten aus der Einheit" die direkte Herstellung aus Einheiten zu verstehen ist. Da überdies ein Schüler auf dieser Stufe diese Definition nur in dem Sinne verstehen kann, wie sie gemeint ist, so wird man höchstens noch nötig haben, hinter den Worten „wie b" noch „unmittelbar" oder „direkt" beizufügen, um den Schüler vor Konfusion zu bewahren.

Immerhin kann dem Freunde präziser Ausdrücke wegen dieses

Einwandes jene Definition als bedenklich erscheinen. Dann weiß ich aber keine andere Fassung für die Definition der Multiplikation, als etwa die folgende:

„a mit b multiplizieren heißt diejenige Zahl suchen, welche sich zu a verhält, wie b zur positiven Einheit“.

Oder, wenn man den Begriff des Verhältnisses noch nicht herbeiziehen will:

„a mit b multiplizieren heißt diejenige Zahl suchen, welche gleich b wird, wenn man a zur positiven Einheit nimmt“.

Keine dieser Definitionen scheint mir jedoch faßlich genug für Obertertianer. Ich bleibe darum nach wie vor bei der früheren mit der nötigen Erläuterung, wie das „Erhalten aus der Einheit“ zu verstehen sei. Wer das nicht will, thut besser, auf eine allgemeine Definition der Multiplikation zu verzichten, und sich mit der speziellen für die Multiplikation mit einem Bruch zu begnügen: „a mit $\frac{p}{q}$ multiplizieren heißt a durch q dividieren und das Ergebnis mit p multiplizieren“.

Ist auf irgend eine Weise die Bedeutung der Multiplikation mit einem Bruche festgestellt, so ist es leicht auf Grund des Früheren einerseits zu beweisen, daß auch der Rest der Sätze der allgemeinen Arithmetik für gebrochene Zahlen richtig bleibt, und andererseits das Multiplizieren und Dividieren mit Brüchen auf diese Sätze zurückzuführen. Dieser Aufgabe sind die Paragraphen 51 u. 52 meines Lehrbuches gewidmet, denen wieder eine größere Anzahl von Übungsbeispielen beigefügt ist.

In den drei folgenden Paragraphen schließt sich dann die Multiplikation und Division mit Dezimalbrüchen (resp. deren Wiederholung), die Abkürzungen, die diese Operationen zulassen, wenn man sich mit einem angenäherten Resultate begnügt, und die Umwandlung eines Buchstabenbruches in eine Reihe durch Division an.

Soll alles gründlich durchgenommen und dabei stets auf ein Festhalten und Auffrischen des Früheren Bedacht genommen werden, so wird nach Absolvierung dieser beiden Kapitel der größte Teil des Jahreskursus abgelaufen sein.

Der Rest der Zeit kann dann auf Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten verwendet werden, mit welchen dann in der Untersekunda noch längere Zeit fortgefahren werden muß.

Diesen Gleichungen habe ich, als speziellen Fall, die Proportionen beigefügt, und zwar nicht bloß die viergliedrigen, sondern auch die mehrgliedrigen, obwohl der Gebrauch des Divisionszeichens dabei leicht zu Irrtümern führen kann, und viele sie überhaupt für überflüssig halten.

Ich habe immer gefunden, daß sowohl die Ähnlichkeitslehre als die Trigonometrie sich viel übersichtlicher gestalten und die Rechnungen und Ableitungen ungezwungener und einfacher erscheinen, wenn man sich dieses Hilfsmittels bedient. So ist z. B. $a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ leichter in Worten zu merken und zu behalten als $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$; und aus der ersteren Proportion ergiebt sich ungezwungener z. B. $(a+b):c = (\sin\alpha + \sin\beta) : \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} : 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$;

oder $(a+b+c):(a+b-c)$

$$= (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma):(\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma)$$

$$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2},$$

als aus der entsprechenden Gleichung. Und dergl. mehr.

Natürlich muß mit Nachdruck darauf aufmerksam gemacht werden, daß bei solchen Proportionen nicht wie bei viergliedrigen das Zeichen : als Divisionszeichen genommen werden darf, da, wenn

$$a:b = a_1 : b_1,$$

$(a:b):c$ nur dann $= (a_1:b_1):c_1$ sein kann, wenn $c = c_1$ ist.

Den Proportionen habe ich das arithmetische, geometrische und harmonische Mittel zweier und mehrer Zahlen angereiht, und bei der Gelegenheit auch den Satz abgeleitet

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2,$$

aus dem hervorgeht, daß bei geringer Verschiedenheit zweier Zahlen (Größen) statt ihres geometrischen Mittels mit sehr kleinem Fehler ihr arithmetisches gesetzt werden darf, das jedoch immer etwas zu groß ist.

Führt nun die Aufsuchung des geometrischen Mittels notwendig zur Ausziehung der Quadratwurzel, so giebt dieser Satz zugleich ein einfaches Mittel zur näherungsweisen Bestimmung derselben.

Soll z. B. die Quadratwurzel aus 5 ausgezogen werden, so ergiebt sich aus der Bemerkung, daß $5 = 2 \cdot 2\frac{1}{2}$ also $\sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 2\frac{1}{2}}$ schon die erste Annäherung $\frac{1}{2}\left(2 + 2\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$. Da nun $\frac{9}{4} \cdot \frac{20}{9} = 5$, so folgt daraus die oft schon hinreichend genaue Näherung $\sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{4} + \frac{20}{9}\right) = \frac{161}{72} = 2\frac{17}{72}$.

In meinem Lehrbuche ist zwar diese Methode des Quadratwurzelausziehens nicht gelehrt; seit einigen Jahren bildet sie jedoch bei meinem Unterrichte den Übergang zu der gewöhnlichen Methode des Ausziehens der Quadratwurzel aus Zahlen. Dem schließe ich dann nur noch den Nachweis der Irrationalität der Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen, die nicht Quadratzahlen sind, und die Sätze aus der Wurzellehre an, die sich in den Gleichungen

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

ausdrücken lassen, um dann wieder auf solche Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten überzugehen, bei denen Quadratwurzeln vorkommen und wegzuschaffen sind.

Die Quadratwurzeln aus Polynomen können verschoben werden bis die quadratischen Gleichungen Anlaß dazu geben. Die Kubikwurzeln können ganz entbehrt werden; Bildungswert kann doch wohl der Einübung dieses langweiligen Mechanismus nicht zugeschrieben werden, und eine Anwendung davon würde erst bei der Stereometrie gemacht werden. Wird aber diese gelehrt, so können die Schüler bereits den Gebrauch der Logarithmentafel, der alles Wurzelausziehen entbehrlich macht. Alle übrigen Sätze über Potenzen und Wurzeln können im Zusammenhange nach Absolvierung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten in der Obersekunda vorgenommen werden, ehe man zu den Logarithmen übergeht.

Ich beginne damit gewöhnlich den algebraischen Unterricht in dieser Klasse, damit das Rechnen mit Logarithmen genügend geübt ist, wenn die Trigonometrie bis zur Berechnung der Dreiecke vorgeschritten ist.

In der Untersekunda lasse ich den Gleichungen ersten Grades mit Wurzelgrößen die rein quadratischen und eine Anzahl Textaufgaben folgen, die geeignet sind, den Nutzen und Gebrauch der Gleichungen zu zeigen und das Nachdenken zu üben. Möglichst suche ich dabei Geometrie und Physik herbeizuziehen, soweit sie bei den Schülern vorausgesetzt werden können, und scheue mich auch nicht, geeignete Partieen aus der Physik, die den Schülern noch unbekannt sind, einzuschalten, wenn sie leicht faßlich gemacht werden können und passende Beispiele abgeben zur Anwendung des Gelernten.

Bei der Übung und Anwendung der Gleichungen gehe ich stets von dem Grundsatze aus, daß die Schüler in der Schule lernen müssen, und gebe daher nur wenige häusliche Aufgaben auf, die sich meistens auf Repetition des in der Schule Gelernten beschränken. Bei den Textaufgaben fand ich es besonders gut, stets einige freiwillig zur Überlegung aufzugeben, und denjenigen Schülern, die dann solche Aufgaben gut an der Tafel lösen und erklären konnten, gute Noten zu geben. Es zeigt sich dann, daß ein viel größerer Prozentsatz solche Aufgaben selbständig zu lösen vermag, als man gewöhnlich glaubt. Freilich werden manche bei der häuslichen Überlegung fremde Hilfe in Anspruch nehmen; wenn sie aber dadurch in stand gesetzt werden, nachher in der Stunde das Gelernte selbständig zu reproduzieren, so ist schon viel gewonnen. Giebt man aber dergleichen Aufgaben als schriftliche Hausaufgaben, so wird man auf einen nennenswerten Erfolg kaum zählen können, da die Schüler außer den mathematischen mehr noch sprachliche Schwierigkeiten darin finden, ihrem Gedankengang auch den richtigen sprachlichen Ausdruck zu geben, und die Versuchung zu gedankenlosem Abschreiben viel zu groß ist. Auch wird dadurch das Maß an häuslichem Fleiß überschritten, das die Mathematik am Gymnasium in Anspruch nehmen darf.

Sind die Gleichungen mit einer Unbekannten lange genug geübt, so folgen naturgemäß die mit zwei und mehreren Unbekannten und dann die unrein quadratischen mit einer Unbekannten. Muß man in der Untersekunda nicht noch einen Teil des Pensums der vorhergehenden Klasse durchnehmen und ist das Pensum der beiden Tertia wirklich Eigentum der Schüler, so kann dieses ganze Pensum ohne Schwierigkeit in einer nicht zu zahlreichen Untersekunda gut absolviert werden.

Doch möge man sich hüten, noch mehr erzielen zu wollen, und etwa bei Gelegenheit der Gleichungen ersten Grades mit mehreren Unbekannten auch noch die Determinanten einzuschalten. Das ist ein für das Gymnasium ganz und gar überflüssiger Ballast. Wer nicht wenigstens analytische Geometrie treibt, für den haben sie nicht den geringsten Wert. Das vollständige Auflösen der Gleichungen mit mehreren Unbekannten ist fast immer ohne Anwendung der Determinanten viel zu haben, da man ferner leicht geneigt ist, den Wert einer Disziplin, die man selbst nicht kennt, aus den Erfolgen zu beurteilen, den man damit erzielt, so halte ich es nicht für ganz überflüssig — um diese Disziplin der Prima zu erhalten — sie ganz hier vorzutragen:

Kurze Darstellung der Kombinationslehre.

1. Sind n verschiedene Gegenstände (Elemente) irgend welcher Art gegeben, so kann man die Frage stellen, auf wieviel verschiedene Arten dieselben in anderer Reihenfolge aufgezählt (geordnet) werden können und diese sämtlichen Reihenfolgen heißen die **Permutationen** der n Elemente. Die n Elemente **permutieren** heißt also, alle Permutationen bilden.

Hat man alle Permutationen von n Elementen gebildet, und kommt nun noch ein $(n+1)$tes Element dazu, so können offenbar alle Permutationen der nunmehr $n+1$ Elemente erhalten werden, wenn man diesem $(n+1)$ten Elemente in jeder der vorhandenen Permutationen der n übrigen der Reihe nach alle möglichen Stellen zuweist, nämlich: **vor** dem ersten, **vor** dem zweiten, **vor** dem dritten u. s. w., endlich **vor** dem nten und zuletzt noch **hinter** dem nten, also $n+1$ verschiedene Stellen, was ebenso vielen verschiedenen Permutationen der $n+1$ Elemente entspricht, die aus **jeder** Permutation der n übrigen Elemente erhalten werden können. D. h. **die Anzahl der Permutationen von $n+1$ Elementen ist $(n+1)$mal größer als die von n Elementen.**

Z. B. die drei Buchstaben a, b, c lassen die Permutationen zu:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Tritt nun noch als viertes Element der Buchstabe d hinzu, so erhält man auf die angegebene Weise die 24 Permutationen:

dabc	dacb	dbac	dbca	dcab	dcba
adbc	adcb	bdac	bdca	cdab	cdba
abdc	acdb	badc	bcda	cadb	cbda
abcd	acbd	bacd	bcad	cabd	cbad.

Da nun ein Element nur **eine** Permutation darstellt, zwei Elemente, also 2 oder $1 \cdot 2$, so lassen drei Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3$, vier Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ u. s. w., n Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots\cdots n$ d. h. so viele Permutationen zu, als das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n Einheiten zählt. Dies Produkt wird symbolisch ausgedrückt durch $n!$

2. Sind von den n Elementen p unter sich gleich, und macht man dieselben zuerst durch beigefügte Zeichen verschieden, so ist die Anzahl der Permutationen der nun verschiedenen Elemente $= n!$ Wischt man jetzt in allen Permutationen bei den ursprünglich gleichen Elementen die Unterscheidungszeichen weg, so werden jedesmal alle die unter sich gleich, welche bloß unterschieden sind durch die Stellung der gleichen Elemente unter sich, also je $p!$; d. h. die Anzahl der wirklich verschiedenen ist nun noch $\frac{n!}{p!}$

Beispiele sind zwar keineswegs beim Unterrichte, wohl aber hier überflüssig.

Sind von den $n - p$ übrigen Elementen wieder q unter sich gleich, so ist die Allzahl aller *verschiedenen* Permutationen $\frac{n!}{p!\,q!}$. U. s. w. Sind insbesondere alle $n - p$ übrigen Elemente wieder gleich, so ist die Permutationszahl $\frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ (Daß sprachlich das Wort „Permutation" eigentlich nicht dem Sinne entspricht, den hier das Herkommen damit verbunden hat, wird hoffentlich die Auffassung des damit verbundenen Begriffes nicht erschweren, wiewohl Lehrer der Realwissenschaften oft Mühe haben, die Aufmerksamkeit fast ausschließlich sprachlich gebildeter Schüler auf sachliche Definitionen zu konzentrieren, da dieselben meist glauben, den Sinn aus dem Worte herausklauben zu können.)

3. Sind n verschiedene Elemente gegeben, so kann man fragen: auf wieviele verschiedene Arten können von diesen je 2, je 3 u. s. w., je r herausgenommen werden, wobei zwei dieser Zusammenstellungen als verschieden angesehen werden, wenn nur ein Element der einen nicht in der anderen enthalten ist, ohne daß auf die Reihenfolge gesehen wird. Diese Zusammenstellungen heißen dann nach der Zahl ihrer Elemente *Kombinationen* 2*ter*, 3*ter*,... r*ter Klasse*. Sieht man außerdem noch auf die Reihenfolge, so werden die Zusammenstellungen *Variationen* genannt.

Die *Variationen* r*ter Klasse* von n Elementen bestehen also aus den *Kombinationen* r*ter Klasse* dieser Elemente mit deren sämtlichen Permutationen. *Die Anzahl der letzteren ist mithin* r!*mal größer als die der ersteren.*

Hat man alle Variationen r*ter* Klasse von n Elementen gebildet, so erhält man alle Variationen $(r+1)$ter Klasse, wenn man jeder der Reihe nach die $n-r$ nicht darin enthaltenen Elemente beifügt; denn jede neue Variation $(r+1)$ter Klasse beginnt entweder mit einer anderen Variation $r$ter Klasse, oder, wenn sie mit derselben beginnt, so muß ihr ein anderes $(r+1)$tes Element folgen. Also ist die Anzahl der Variationen $(r+1)$ter Klasse $(n-r)$mal größer als die $r$ter Klasse*). Z. B.

Alle Variationen 2ter Klasse der vier Elemente 1, 2, 3, 4 sind offenbar:

12, 21, 13, 31, 14, 41, 23, 32, 24, 42, 34, 43.

Daraus ergeben sich dann die Variationen 3ter Klasse derselben Elemente:

123 213 132 312 142 412 231 321 241 421 341 431
124 214 134 314 143 413 234 324 243 423 342 432

Da nun die Anzahl der Variationen 1ter Klasse n ist, so ist die 2ter Klasse $n(n-1)$, die 3ter Klasse $n(n-1)(n-2)$ u. s. w., die $n$ter Klasse also $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$.

Bezeichnet endlich $\binom{n}{r}$ die Anzahl der Kombinationen $r$ter Klasse, so ist mithin

$$\binom{n}{r}=\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

4. Die Kombinationen $r$ter Klasse von n Elementen können geschieden werden in diejenigen, die das erste Element enthalten und die übrigen. Die ersteren bestehen aus diesem ersten Elemente und allen Kombinationen $(r-1)$ter Klasse der $(n-1)$ übrigen Elemente: ihre Anzahl ist also $\binom{n-1}{r-1}$; die letzteren sind nur Kombinationen $r$ter Klasse der $n-1$ übrigen Elemente, ihre Anzahl ist also $\binom{n-1}{r}$, und mithin ist

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}\cdots\cdots(1.)$$

*) Diese direkte Ableitung der Anzahl der Variationen $r$ter Klasse von n Elementen ist in meinem Lehrbuche nicht gegeben, kam auch nicht beim Unterrichte vor. Als ich jedoch bei der Repetition meinen jetzigen Oberprimanern den Versuch empfahl, die Anzahl der Variationen direkt zu bestimmen, brachte mir einer derselben diese Ableitung als das Ergebnis eigenen Nachdenkens.

Setzt man diese Betrachtung fort, so kann man unter den übrigen Kombinationen rter Klasse wieder diejenigen ausscheiden, welche das zweite Element enthalten, und deren Anzahl ist $\binom{n-2}{r-1}$, da sie bestehen aus diesem Element und den Kombinationen $(r-1)$ter Klasse aller Elemente außer dem ersten und zweiten. Ebenso ergiebt sich die Anzahl derjenigen, welche das erste und zweite Elemente **nicht**, aber das dritte enthalten $\binom{n-3}{r-1}$ u. s. w. D. h.

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\cdots\cdots+\binom{r-1}{r-1}\cdots(2)$$

Z. B. Die Kombinationen 3ter Klasse der sechs Elemente 1, 2, 3, 4, 5, 6 lassen sich in folgende Gruppen stellen:

123	234	345	456
124	235	346	
125	236	356	
126	245		
134	246		
135	256		
136			
145			
146			
156			

Setzt man a für $r-1$ und $a+n$ für $n-1$ und liest die Gleichung (2) rückwärts, so erhält sie die Gestalt:

$$\binom{a}{a}+\binom{a+1}{a}+\binom{a+2}{a}+\cdots+\binom{a+n}{a}$$
$$=\binom{a+n+1}{a+1}\cdots(3)$$

5. Setzt man bei den Kombinationen und Variationen voraus, daß jedes Element beliebig oft vorhanden und in jeder Zusammenstellung rter Klasse auch 2, 3$\cdots$ bis rmal vertreten sein kann, so erhält man **Kombinationen** und **Variationen mit Wiederholung**, deren Anzahl natürlich von derjenigen ohne Wiederholung verschieden ist.

Hat man die Kombinationen rter Klasse von nElementen mit Wiederholung sämtlich gebildet, und setzt zu ihnen noch einmal das erste Element hinzu, so hat man offenbar alle Kombinationen $(r+1)$ter

Klasse derselben Elemente, welche das erste Element enthalten. Setzt man dann ferner zu dem zweiten Elemente alle Kombinationen rter Klasse aller vorhandenen Elemente außer dem ersten, so erhält man alle diejenigen Kombinationen $(r+1)$ter Klasse der vorhandenen Elemente, welche das erste Element nicht, aber das zweite enthalten. Ebenso bestehen die Kombinationen $(r+1)$ter Klasse, welche die beiden ersten Elemente nicht, aber das dritte enthalten aus diesem dritten Elemente und den Kombinationen rter Klasse aller Elemente außer dem ersten und zweiten u. s. w.

Bedient man sich also des Symbols $\underset{r}{C}(n)$, um die Anzahl aller Kombinationen rter Klasse mit Wiederholung von n Elementen zu bezeichnen, so läßt sich unser Ergebnis ausdrücken in der Gleichung:

$$\underset{r+1}{C}(n) = \underset{r}{C}(n) + \underset{r}{C}(n-1) + \underset{r}{C}(n-2) + \cdots\cdots + \underset{r}{C}(1)$$

Z. B. Die sämtlichen Kombinationen 2ter Klasse mit Wiederholung der 5 Elemente 1, 2, 3, 4, 5 sind:

11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 33, 34, 35, 44, 45, 55.

Daraus erhält man nach der obigen Anleitung die Kombinationen 3ter Klasse derselben Elemente in folgenden Gruppen:

111, 112, 113, 114, 115, 122, 123, 124, 125, 133, 134, 135, 144, 145, 155.

222, 223, 224, 225, 233, 234, 235, 244, 245, 255.

333, 334, 335, 344, 345, 355.

444, 445, 455.

555.

Nun ist offenbar:

$\underset{1}{C}(n) = n$, also:

$$\underset{2}{C}(n) = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2};$$

also:

$$\underset{3}{C}(n) = \binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{2}{2} = \binom{n+2}{3}; \text{ mithin:}$$

$$\underset{4}{C}(n) = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} + \binom{n}{3} + \binom{n-1}{3} + \cdots + \binom{3}{3} = \binom{n+3}{4}$$

u. s. w.

Allgemein:

$\underset{r}{C}(n) = \binom{n+r-1}{r}$. D. h. die Anzahl der Kombinationen rter Klasse mit Wiederholung von n Elementen ist gerade so groß, wie die Anzahl der Kombinationen rter Klasse ohne Wiederholung von r — 1 Elementen mehr.

6. Sind die Variationen rter Klasse von n Elementen mit Wiederholung gegeben, so erhält man alle Variationen (r + 1)ter Klasse, wenn man dieselben der Reihe nach alle erst zu dem ersten, dann zu dem zweiten u. s. w., endlich zum nten Elemente setzt: die Anzahl der Variationen (r + 1)ter Klasse ist also nmal größer als die rter Klasse. Da nun die Anzahl der Variationen 1ter Klasse mit Wiederholung von n Elementen offenbar = n ist, so ist die zweiter Klasse n^2, die dritter n^3 u. s. w., die rter also n^r.

Z. B. die Variationen 2ter Klasse mit Wiederholung der 4 Elemente 1, 2, 3, 4 sind:

11, 12, 13, 14
21, 22, 23, 24
31, 32, 33, 34
41, 42, 43, 44.

Die Variationen dritter Klasse derselben Elemente mit Wiederholung sind:

111, 112, 113, 114	211, 212, 213, 214
121, 122, 123, 124	221, 222, 223, 224
131, 132, 133, 134	231, 232, 233, 234
141, 142, 143, 144.	241, 242, 243, 244.
311, 312, 313, 314	411, 412, 413, 414
321, 322, 323, 324	421, 422, 423, 424
331, 332, 333, 334	431, 432, 433, 434
341, 342, 343, 344.	441, 442, 443, 444.

Das ist das Ganze der Kombinationslehre, soweit sie im Gymnasium in betracht kommt. Ich habe hier der Kürze wegen jede Nummer mit einer allgemeinen Betrachtung begonnen, und dann zur Erläuterung ein Beispiel folgen lassen. Beim Unterricht selbst gehe ich jedoch den umgekehrten Weg: Ich beginne mit Beispielen und leite aus diesen die allgemeine Regel ab. Dadurch wird der Schüler mit der Methode der Induktion vertraut, welche doch aller wissenschaftlichen Forschung zu Grunde liegt, und gerade die Kombinationslehre ist zur Einführung in diese Methode geeigneter, als irgend eine andere mathematische Disziplin.

Unter den Anwendungen der Kombinationslehre sind besonders die elementaren Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorzuheben, die schon deshalb nicht auf dem Lehrplane des Gymnasiums fehlen sollten, weil sie neben der Rentenrechnung die Grundlage des Versicherungswesens bilden, also einer Reihe der wichtigsten Institutionen unserer heutigen Kultur.

Die Anwendung auf die Bildung der Potenzen von Binomen und Polynomen ist zwar ebenfalls sehr instruktiv, wenn sie richtig gelehrt wird, kann aber doch vom Lehrplane abgesetzt werden, wenn man die Algebra mit den quadratischen Gleichungen abzuschließen für gut findet. Eine ausführliche Behandlung der auf Kunstgriffen beruhenden allgemeinen Auflösung der kubischen und biquadratischen Gleichungen dürfte bei genauer Prüfung wohl als überflüssig erscheinen. Dagegen würde ich nur ungern die allgemeinen Grundprinzipien der höheren Algebra mit Einschluß der derivierten Funktionen und ihrer Benutzung, einerseits zur Bestimmung der Maximal- und Minimalwerte einer algebraischen Funktion, andererseits zur näherungsweisen Auflösung numerischer Gleichungen (Methode von Newton und Horner) vermissen. Ich kenne keinen Teil der elementaren Mathematik, welcher mehr zum Nachdenken anregt, und besser zu wissenschaftlichen Studien vorbereitet als gerade diese Disziplin, und ich habe sie darum mit besonderer Vorliebe für mein Pensum der Prima ausgearbeitet, was nicht ausschließt, daß sich manches besser geben läßt, als es dort gegeben ist.

Soll aber diese Disziplin auf dem Lehrplane des Gymnasiums beibehalten bleiben, so darf man auch das Binomialtheorem (für ganze Exponenten), und was damit zusammenhängt, nicht ausschließen.

Unter den Gründen, welche man für die Einführung der analytischen Geometrie in den Gymnasiallehrplan vorgebracht hat, befindet sich auch der, daß der Gebrauch des Descartes'schen Koordinatensystems zur Veranschaulichung der Abhängigkeit einer veränderlichen Größe von einer anderen bei vielen wissenschaftlichen Studien, insbesondere auch bei dem Studium der Physiologie sehr förderlich ist, und es darum sehr wünschenswert sei, daß schon das Gymnasium diesen Gebrauch kennen lehre. Dazu ist aber die Anwendung der Koordinatenmethode auf Probleme über die Gerade und die Kegelschnitte und die Diskussion der Gleichung zweiten Grades mit zwei Variabeln nicht nötig, und man wird hinreichend mit dem gewünschten Gebrauche des Koordinatensystems vertraut, wenn man sich desselben bedient, um eine elementare Theorie der ganzen algebraischen Funktionen, insbesondere ihrer Maximal- und Minimalwerte zu veranschaulichen, wie ich dies in § 45 meines Pensums der Prima versucht habe. Nur kann man früher damit beginnen, z. B. schon bei den quadratischen Gleichungen und den sich an dieselben anschließenden Maximal- und Minimalaufgaben.

Wenn man, um der sogenannten neueren oder projektivischen Geometrie Platz zu machen, diese Anfangsgründe der Funktionenlehre vom Lehrplane des Gymnasiums absetzen will, so sollte man doch bedenken, daß die Lehren der projektivischen Geometrie, so interessant sie für den Liebhaber immerhin sein mögen, der großen Mehrzahl der Schüler des Gymnasiums von gar keinem nennenswerten Nutzen sind, während die Untersuchung der Abhängigkeit veränderlicher Größen von einander in allen Gebieten der technischen und der Naturwissenschaften von der größten Bedeutung ist.

Was nun die Geometrie betrifft, so muß ich zunächst verweisen auf das sub I u. II über die Methode Gesagte, und dann auch auf meine Programmabhandlung „zur Reform des geometrischen Unterrichts“, welche zu diesem Zwecke dieser Abhandlung als Anhang beigefügt ist. Ich kann mich dann beschränken auf die Verteilung des Lehrstoffes für die einzelnen Klassen und auf einige Detail-Erörterungen, zu welchen diese Detailierung des Stoffes Anlaß bietet.

Der streng wissenschaftliche Unterricht in der Geometrie mit seinen Definitionen und Demonstrationen sollte nach meinem Dafürhalten erst in der Obertertia begonnen werden (in Würtemberg beginnt er sogar erst in der Sekunda), da die Schüler doch die nötige geistige Reife mitbringen müssen, wenn sie so abstrakte Definitionen und ganze Schlußreihen erfassen sollen. Dagegen wäre es sehr wünschenswert, daß diesem Unterrichte ein in Quarta beginnender in 2 wöchentlichen Stunden zu erteilender propädeutischer Kursus vorausginge, in welchem die Schüler die wichtigsten geometrischen Formen und räumlichen Beziehungen, und zwar sowohl die dreidimensionalen, als die ebenen, kennen und darstellen lernen, und ihnen auch so viel über das Ausmessen von Flächen und Körpern beigebracht wird, als ein guter Schüler einer guten Elementarschule erlernt hat, wenn er dieselbe verläßt.

Auch dem Quartaner kann man schon die Fläche als die Grenze eines Körpers, die Linie als die Grenze einer Fläche, und den Punkt als Grenze einer Linie definieren, und den Unterschied zwischen gerader und krummer Linie, sowie zwischen ebener und krummer Fläche begrifflich klar machen. Nur soll man sich bei den Definitionen nicht lange verweilen und sich begnügen mit der richtigen anschaulichen Auffassung.

Sind diese Begriffe klar, so kann der Winkel und der Drehungsabstand zwischen seinen Schenkeln, damit zugleich der Kreis und dessen Benutzung zur Messung der Winkel vorgenommen werden.

Daran schließt sich der Begriff des Senkrechtstehens, und zwar sowohl der Geraden auf einer anderen, als auch der Geraden auf einer Ebene und zweier Ebenen aufeinander, an. (In der neueren Mode, die Worte senkrecht und lotrecht durch „normal“ zu ersetzen, kann ich nur eine ganz zwecklose Neuerung sehen.) Auch die Neben- und Scheitelwinkelpaare, sowie die Flächenwinkel und ihre Neigungswinkel können hier durchgenommen werden und als Beispiele zu Begriffsbildungen dienen. Dann folgen naturgemäß die parallelen Geraden und das Ziehen derselben mit Hilfe von Winkeldreieck und Lineal oder auch mit Hilfe des Zirkels.

Dabei können zwei Gerade etwa als parallel definiert werden, wenn sie mit derselben dritten in derselben Ordnung dieselben Winkel bilden, wobei dann die Anschauung lehrt, daß sie sich nicht schneiden. Aber auch die Parallelität einer Geraden gegen eine Ebene und zweier Ebenen zu einander sollte hier durchgenommen werden, soweit dies mit bloßem Verweisen auf die Anschauung möglich ist.

Dann folgen die geschlossenen ebenen Figuren mit geradliniger Begrenzung: die verschiedenen Formen der Drei- und Vierecke, die regelmäßigen Vielecke, auch die regelmäßigen Sternvielecke, und ihre Konstruktion mit Hilfe des Transporteurs. Hier hat der Lehrer reiches Material, das Beobachtungsvermögen der Schüler zu entwickeln und zu üben, indem er ihre Aufmerksamkeit lenkt auf die anschaulich zu erkennenden Eigenschaften der verschiedenen Figuren und deren Abhängigkeit von einander, ohne auf das „Warum?“ näher einzugehen.

Auch die punktweise Konstruktion von Kegelschnitten und anderen krummen Linien als geometrische Örter kann hier durchgenommen werden. Dann erst sollte die Berechnung der ebenen Vielecke und etwa auch die Verwandlung der Drei- und Vierecke in Rechtecke, des Rechteckes in ein Quadrat, zweier Quadrate in eines, mittels der Schere, soweit es ohne eigentlichen Beweis verständlich gemacht werden kann, vorgenommen werden.

Aber auch die wichtigsten Körperformen sollten hier betrachtet nnd von den Schülern selbst aus ihren auf Karton zu zeichnenden Netzen angefertigt werden, etwa in der Reihenfolge: Würfel, quadratische Säule, gerade Säulen von verschieden geformten Grundflächen, reguläre Pyramiden, die fünf regulären Polyeder, Rotationscylinder und Rotationskegel. Andere Körper, wie die Kugel und unregelmäßige mehrseitige Pyramiden oder Prismatoide können zwar von den Schülern nicht hergestellt, aber doch vorgezeigt und betrachtet werden.

Ein Lehrbuch braucht diesem Unterrichte nicht zu Grunde gelegt zu werden, da es sich hauptsächlich nur um die Erwerbung anschaulicher Kenntnisse handelt, und der Schüler die Formen, welche er kennen gelernt hat, auch selbst darstellt. Wenn er die nebenbei gewonnenen Begriffsbestimmungen und die in Sätzen ausgedrückten Ergebnisse seiner Beobachtungen auch wieder vergißt, so hat dies nicht viel zu bedeuten, da dies ja alles bei dem wissenschaftlichen Unterrichte wiederkommt.

Je nachdem ein solcher propädeutischer Unterricht vorhergegangen ist, oder nicht, wird man bei dem wissenschaftlichen Unterrichte rascher oder langsamer vorwärtsgehen können. Nach meinem Dafürhalten und meinen Erfahrungen in der Schweiz, wo ich den wissenschaftlichen Unterricht später begann, aber einen solchen propädeutischen Kursus voraussetzen konnte, wird man mein „Pensum der Tertia und Untersekunda" in Obertertia und Untersekunda allein mit besserem Erfolge absolvieren können, wenn in Quarta und Untertertia ein solcher propädeutischer Kursus vorausgegangen ist, als jetzt in den beiden Tertia und Untersekunda, da entweder gar kein geometrischer Anschauungs- und Rechenunterricht oder ein sehr dürftiger (einstündiger in Quinta und Quarta — und „eine Stunde ist keine Stunde" gilt gewiß für untere Klassen) vorausgegangen ist.

Auch abgesehen von dieser Frage scheint es mir nicht am Platze, für jeden Jahreskursus das Pensum ganz genau abzugrenzen, da es weniger darauf ankommt, was in jeder Klasse durchgenommen wird, als darauf, daß das Durchgenommene auch Eigentum der Schüler geworden ist, und die Klassen doch nach Anzahl und Befähigung der Schüler sehr differieren. Dagegen sollte eine bestimmte Reihenfolge der durchzunehmenden Pensa immerhin festgesetzt werden.

Zu beginnen hat nun jedenfalls der wissenschaftliche Unterricht mit einer gründlichen Feststellung der Grundbegriffe. Aber auch hier kann man zu weit gehen. So halte ich es entschieden für einen pädagogischen

Mißgriff gleich im Anfang das s. g. Prinzip der Zeichen in die Geometrie einzuführen, und von positiven und negativen Strecken, positiven und negativen Winkeln zu sprechen. Das Erste, was die Schüler kennen zu lernen haben, sind die Figuren, deren Eigenschaften und Größe. Bei einer Figur kann aber eine gerade Strecke nur nach Länge und Lage, und ein Winkel nur als Figur oder auch als Drehungsabstand in Betracht kommen, und der Gegensatz zwischen positiven und negativen Strecken, positiven und negativen Winkeln tritt erst hervor, wenn man die Strecke als zurückgelegten Weg, den Winkel als ausgeführte Drehung aufzufassen Anlaß hat, welchen Anlaß aber die Betrachtung der Figuren als solche, also nach Form und Größe, gewiß nicht giebt. Die Wege zwischen verschiedenen Punkten und deren Summen, die möglichen Drehungen zwischen verschiedenen Strahlen eines Büschels und deren Summen, sind kein Gegenstand, für den man Tertianer zu interessieren vermag. Die Form und die Größe allein geben schon hinreichend Stoff zu einem gründlichen Unterrichte, und es ist sicher nicht pädagogisch richtig, gleich anfangs Begriffe hinzuzubringen, die damit nicht das mindeste zu thun haben, und nur geeignet sind, die Schüler zu verwirren.

In meinem Lehrbuche ist darum im ganzen ersten Buche von der Richtung der Strecke und dem Drehungssinne des Winkels abgesehen, und nur die Größe in betracht gezogen. Auch ist der Winkel nicht als „Richtungsunterschied", sondern als „das Gebilde aus zweien in einem gemeinsamen Endpunkte zusammentreffenden Strecken" definiert, was nicht hindert, die Größe der Drehung des einen Schenkels durch die Winkelfläche bis zum anderen als Größe des Winkels anzusehen, und das Messen des Winkels auf den Kreis zurückzuführen.

Sowohl der Form, als großenteils dem Inhalte nach schien es mir zweckmäßig, insofern immer noch dem Euklid zu folgen, als ich meistens den Lehrsatz, sofern er nicht eine bloße Konsequenz eines vorhergehenden, dem Beweise voranstellte, und mich auf solche Sätze beschränkte, die sich auf Form und Größe der Figuren und deren Lage in der Ebene beziehen. Die Hauptsache ist doch immer, daß der Schüler die vorgetragenen Theoreme verstehe und behalte. Dazu ist aber nötig, daß sie im Buche deutlich hervorgehoben sind als Lehrsätze. Und damit Schüler und Lehrer auch eine Übersicht haben über die Ausdehnung des ganzen Stoffes, schien es mir auch nützlich, sie mit fortlaufenden Nummern zu versehen. Ferner wird ein Schüler einer geometrischen Betrachtung mit viel mehr Lust und Aufmerksamkeit folgen, wenn er weiß, wo der Lehrer hinaus will, was also bewiesen (resp. gefunden) werden soll. Darum ist es, wenigstens beim elementaren Unterrichte, zweckmäßig, den Lehrsatz an die Spitze der Betrachtung zu stellen, und nicht erst damit zu schließen, wie dies jeder erproben kann, der z. B. versucht, ganz nach Schlömilchs Geometrie des Maßes, in der Tertia eines Gymnasiums zu unterrichten. Mich hat meine Erfahrung aus einem der entschiedensten Gegner der Euklidschen Methode, wenigstens in diesem Punkte, wieder zu einem Anhänger derselben gemacht. Wenn jedoch aus einem Lehrsatze durch einfache Schlüsse eine Reihe bemerkenswerter Konsequenzen gezogen werden können, so wäre es dagegen verkehrt, die so zu erlangenden Lehrsätze ebenfalls zuerst auszusprechen und dann erst ihren Beweis folgen zu lassen. Denn der Schüler soll doch auch lernen und merken, zu welchen weiteren Konsequenzen und Anwendungen jeder neu erlernte Lehrsatz Anlaß giebt.

Was ferner den Stoff anbetrifft, so ist doch zunächst die Geometrie des Maßes und der Form wichtiger, als die der Lage, und es ist zweckmäßiger, erst die Figuren selbst zu betrachten, ehe man von ihrer kongruenten oder ähnlichen Abbildung und den Beziehungen zwischen Original und Projektion handelt. D. h. es ist kein Grund vorhanden, die Geometrie des Maßes und der Form mit der projektivischen Geometrie zu verbinden, oder gar, wie Herr Fiedler wünscht, die gesamte Geometrie in projektivische Geometrie zu verwandeln.

Es kann nur verwirren, wenn man gleich anfangs von Strahlenbüscheln und Parallelscharen spricht, Vielecke und Vielseite unterscheidet, das Vieleck bloß als Gebilde aus Geraden und Punkten definiert, und dann doch von seiner Fläche spricht, positive und negative Fläche unterscheidet, Punkte und gerade Linien perspektivisch aufeinander bezieht u. dergl. m. Was soll sich ein Tertianer dabei denken, wenn „Dreiseit“ und „Dreieck“ einander gegenübergestellt werden und er dann lernen soll:*)

In einem Dreieck sind die Gegenwinkel gleicher Seiten einander gleich.	In einem Dreiseit sind die Gegenseiten gleicher Winkel einander gleich.

Muß damit der Schüler nicht zur Meinung verleitet werden,

*) Lehrbuch der Elementar-Geometrie von J. Henrici und P. Treutlein. I. S. 24.

Dreieck und Dreiseit seien wirklich zweierlei und das eine gelte nur vom Dreieck, das andere nur vom Dreiseite?

Hat es nun auch keinen Zweck, mehr aus der Geometrie der Lage in die Elementargeometrie herüberzunehmen, als auch schon zum besseren Verständnis der Eigenschaften der Figuren und der sich in denselben aussprechenden Gesetze erforderlich ist, so darf man in dem Bestreben, auseinander zu halten, was nicht zusammengehört, doch wieder nicht zu weit gehen. Die Beziehungen der Symmetrie gegen Punkt und Gerade (centrische und symmetrische Figuren), die Relationen zwischen Strahlenbüschel und Parallelschar, die Begriffe von Centrum, Durchmesser, konjugierten Durchmesserpaaren, harmonischen Punkt- und Strahlenpaaren gehören zweifellos auch in die Elemente.

In meinem Lehrbuche habe ich den Grundbegriffen ein Kapitel angereiht, dessen Inhalt durch die Überschrift „ebene Figuren aus zwei und drei Geraden" angedeutet ist. Um über den ganzen Inhalt Lesern, die mein Buch nicht besitzen, einen deutlichen Begriff zu geben, wird es genügen, das Inhaltsverzeichnis der 15 Paragraphen, in die es geteilt ist, hierher zu setzen:

§. 10. Begriff des Winkels; konvexe, konkave und flache Winkel.

§. 11. Winkel und Kreisbogen. Centriwinkel und zugehöriger Bogen. Kongruenz von Kreisen und Kreissektoren.

§. 12. Durchmesser und Halbkreis. Messen des Winkels mittelst des Transporteurs.

§. 13. Nebenwinkel, Scheitelwinkel. Winkel über einer Geraden und um einen Punkt herum.

§. 14. Winkel zweier Geraden mit einer dritten. Kennzeichen der Parallelität zweier Geraden.

§. 15. Folgerungen aus dem Vorhergehenden. Winkelsumme des Dreiecks. Satz vom Außenwinkel.

§. 16. Strecken von einem Punkte in der Fläche des Dreiecks nach den Ecken. Bemerkung über die Bestandteile eines Lehrsatzes und das Verfahren beim Beweise.

§. 17. Abhängigkeit zwischen Seiten und Winkeln eines Dreiecks; das gleichschenkelige und das ungleichseitige Dreieck.

§. 18. Symmetrie zweier Punkte gegen eine Gerade. Symmetrische Figuren. Symmetrisch gleiche Figuren. Gleichwendigkeit und Gegenwendigkeit kongruenter Figuren.

Ich habe zwar in meinem Pensum der Obersekunda der Trigonometrie noch zwei Kapitel aus der projektivischen Geometrie beigefügt, jedoch mich überzeugt, daß ich nur einige Abschnitte daraus beim Unterrichte verwenden kann, und zwar meist erst in der Prima, wenn ich dafür auf eine Betrachtung der Kegelschnitte verzichte. Alles übrige muß dem Privatfleiße solcher Schüler überwiesen werden, welche für Geometrie besondere Vorliebe und vorwiegendes Talent besitzen. Auch in der Trigonometrie thut man wohl, sich auf das Dreieck zu beschränken.

Was nun das Pensum der Prima betrifft, so glaube ich, daß man den geometrischen Unterricht dort nicht weit über das gewöhnliche Pensum der Stereometrie ausdehnen dürfe. Doch möchte ich wegen der Anwendung auf mathematische Geographie und Physik eher auf die Kegelschnitte verzichten als auf die sphärische Trigonometrie, und eher auf die Elemente der projektivischen Geometrie als auf die wichtigsten Sätze über die Kegelschnitte.

Einer detaillierten Feststellung des mathematischen Pensums der Prima sollte meiner Meinung nach die Prüfung einer Frage vorhergehen, die man gegenwärtig nur hier und da verstohlen aussprechen hört, deren Erörterung man aber noch nicht für „opportun" zu halten scheint. Es ist dies die Frage: „Soll nicht in der Prima der gesamte mathematische Unterricht fakultativ gemacht werden, so daß diejenigen, welche Mathematik treiben, dafür vom lateinischen und griechischen Stil befreit würden, und vice versa, ohne dadurch an der nachherigen Berufswahl gehemmt zu sein?"

Die Schüler der Prima sind zum größten Teil doch schon so weit entwickelt, daß ihr Geist eine bestimmte Richtung angenommen hat, und sie schon arbeiten mit Rücksicht auf ihren zukünftigen Beruf. Warum soll man nun solchen Schülern, die sich s. g. Geisteswissenschaften widmen wollen, weitergehende mathematische Studien zumuten, von denen sie weder Anwendung machen, noch sonst einen Nutzen haben (denn wenn man Mathematik wider Willen studiert, so kann doch unmöglich der Nutzen für die geistige Entwickelung von Belang sein; man müßte denn den Nutzen darin sehen, daß man sich zeitig gewöhnt, auch solche Pflichten zu erfüllen, die man ungern erfüllt — wodurch man freilich dem Mathematiker des Gymnasiums schon mehr die Stellung eines Zuchtmeisters, als die eines Lehrers aufbürden würde. Andererseits ist es ein Unrecht, daß man denjenigen, deren zukünftige Berufswahl eine gründlichere mathematische Vorbildung erfordert, die Gelegenheit, sich dieselbe schon am Gymnasium zu erwerben, lediglich deshalb entzieht, damit sie ihren lateinischen und griechischen Stil vervollkommnen, wovon sie doch später ebensowenig Gebrauch machen, als die Philologen von der Mathematik. Noch ist zu Gunsten dieser Änderung zu sagen, daß man mit solchen Primanern, die Interesse für mathematische Studien mitbringen in zwei Jahren noch gar manches durchnehmen könnte, was ihnen auch für ihre formelle Geistesbildung von großem Werte wäre. Denn gerade den höheren Partieen der Mathematik kommt auch in viel höherem Grade diese bildende Kraft zu.

Aber auch wenn eine solche Änderung zustande käme — was mir schon deshalb wenig wahrscheinlich, weil es nun einmal menschlich ist, zum Natürlichen und Naheliegenden erst dann zu greifen, wenn man alles andere durchprobiert hat — so würde ich es nicht für angezeigt halten, das Pensum der Prima genau zu begrenzen. Denn es kommt doch hier weit mehr auf die Entwickelung und Ausbildung des mathematischen Denkvermögens als auf eine größere oder geringere Summe mathematischen Wissens an.

Anhang.

Zur Reform des geometrischen Unterrichts.

Zuerst erschienen als

Beilage zum Jahresbericht des Großherzoglichen Gymnasiums zu Wertheim für das Schuljahr 1879—1880.

Seit dem Anfange dieses Jahrhunderts hat man von sehr verschiedenen Standpunkten aus Versuche gemacht, die Geometrie aus den starren Formen zu befreien, in die sie durch Euklides gezwängt worden ist. Alle diese Versuche gingen, wie neuerdings wieder hervorgehoben wurde*), von der Thatsache aus, daß der Erfolg des geometrischen Unterrichts nach der Methode des Euklides in allen Schulen ein verhältnismäßig geringer ist, und auch die besten Schüler „nicht den Eindruck eines wohlgeordneten Ganzen davon trugen, sondern vielmehr nur eine Fülle leicht verlierbarer Einzelnheiten". In der That ist nicht anzunehmen, daß der geringe Erfolg der großen Seltenheit der Begabung für die Geometrie zuzuschreiben sei. Denn wenn man auch zugiebt, daß die Geometrie ebenso wie jede andere Wissenschaft oder Kunst, die eine besondere Art geistiger Thätigkeit erfordert, auch eine entsprechende Beschaffenheit der Organe dieser Thätigkeit also eine besondere Beanlagung voraussetzt**), so wird man doch Herrn Fiedler Recht geben müssen, wenn er sagt, es sei nicht einzusehen, warum die Anlage und das Interesse gerade für diese Richtung des menschlichen Denkens so

*) In dem Aufsatze: Zur Reform des geometrischen Unterrichts. Von Wilh. Fiedler. (Vierteljahrsschrift der Züricher Naturforschenden Gesellschaft, Jahrgang 1877, S. 82—97.)

**) „Aber, wenn man es genau betrachtet", läßt Natalie in Göthes Wilhelm Meister den Abbé sagen, „so wird jede, auch nur die geringste Fähigkeit uns angeboren, und es giebt keine unbestimmte Fähigkeit".

vielen sonst gut begabten Köpfen fehle. „Ist doch“, sagt Herr Fiedler, „der Mensch zur Orientierung im Raume sinnlich ebenso reich wie fein ausgerüstet, und ist ihm doch diese Orientierung selbst ein erstes und unumgängliches Lebenserfordernis! Und das wissenschaftliche Denken in dem Gebiete dieser Orientierung sollte unter denen, welche überhaupt wissenschaftlicher Durchbildung und Arbeit zugewendet und für dieselbe ausgerüstet sind, nur so wenigen adäquat sein?“ Es ist also angezeigt gewesen, die Ursache dieser Erscheinung in der Methode zu suchen, und viele haben sich die Verbesserung der Methode der Geometrie zum Ziele gesetzt. Wenn nun aber auch, ungeachtet der größten Rührigkeit auf diesem Felde seit fast 70 Jahren, noch keine Methode dadurch allgemeine Anerkennung gefunden hat, daß sie stets und überall die wünschenswerten Erfolge erzielt, so ist es doch eine entschiedene Verkennung des Geleisteten, wenn Herr Professor Fiedler sagt, das Übel sei auch heute noch dasselbe und es sei eine unbestrittene Erfahrung der Pädagogen, „daß gute Erfolge in der Geometrie sehr selten sind unter den Schülern aller Schulen“. Ich glaube die Erfahrungen und die Überzeugung einer großen Anzahl meiner Kollegen auszusprechen, wenn ich dieser durch keine einzige Thatsache unterstützten Behauptung des Herrn Fiedler die folgende entgegensetze: „Wenn heutzutage ein Lehrer in der Geometrie weniger gute Erfolge erzielt als seine Kollegen bei denselben Schülern in anderen Fächern, so liegt dies entweder daran, daß er sich die bisher gemachten Fortschritte und Verbesserungen in der Methode nicht angeeignet hat, oder in Gründen, die mit der Methode nichts zu thun haben“. Auch früher hat es immer einzelne Lehrer der Mathematik gegeben, die in ihrer Disziplin mindestens dieselben Erfolge erzielten, wie ihre Kollegen in anderen Disziplinen, und dadurch bewiesen, daß bei der Mathematik überhaupt und der Geometrie insbesondere mehr als bei anderen Fächern auf die Persönlichkeit des Lehrers ankommt, was auch Herr Schrader in seiner Gymnasialpädagogik mit Recht hervorhebt. Um nur ein Beispiel anzugeben, zitiere ich August Wiegand. Derselbe sagt in seiner Autobiographie*) von seinem Lehrer, dem rühmlichst bekannten nassauischen Oberschulrat Dr. Johann Heinrich Traugott Müller: „Man denke sich die Stellung eines Mathematikers eines Gymnasiums in damaliger Zeit (1829), eines Lehrers, der kein

*) Wie mirs erging. Autobiographische Skizzen von Dr. August Wiegand. Halle 1870.

Ordinariat hatte, dessen Fach man für's unvermeidliche Übel (von Lehrer- und Schüler-Seite) hielt und versuche zu begreifen, wie Müller sich an einer ziemlich verwilderten Schule fast allein in Respekt zu setzen wußte; wie ers möglich machte, daß, während die Leistungen in anderen Fächern höchst mittelmäßig waren, in der Mathematik ganz Erstaunliches geleistet wurde (Schüler Müllers, die Mathematik studierten, zählen nach Dutzenden)". Waren aber vor 50 Jahren Lehrer der Mathematik, die Erfolge aufweisen konnten wie Traugott Müller, noch eine große Seltenheit, so ist doch inzwischen die Verbesserung der Methode so fortgeschritten, daß bei der allerdings noch nicht überall hingedrungenen Kenntnis dieser Fortschritte nur einiges pädagogisches Geschick dazu gehört, um auch in der Geometrie ganz gute Erfolge zu erzielen. Neben der noch sehr verbreiteten Unkenntnis dessen, was von den verschiedensten Seiten für die Verbesserung der Methode des geometrischen Unterrichts bereits geleistet worden ist, und neben der Macht der Gewohnheit, welche die Meisten an dem bisher befolgten Gange des Unterrichts mit Zähigkeit festhalten läßt, sind es freilich noch einige tief eingewurzelte und von in hohem Ansehen stehenden pädagogischen Autoritäten gehegte und genährte Vorurteile, welche sehr oft die Erzielung der gewünschten Erfolge erschweren oder ganz unmöglich machen. Es ist nun meine Absicht, einerseits zu zeigen, daß in der That für die Verbesserung der Methode des Unterrichts in der Geometrie, wenigstens soweit derselbe in den Bereich des Gymnasiallehrplans gehört, fast alles geleistet ist, was man billigerweise verlangen kann, und andererseits die nachteilige Wirkung der erwähnten Vorurteile und anderer Hemmnisse, welche der Erzielung besserer Erfolge im Wege stehen, soweit darzulegen, als es die knappen Grenzen eines Schulprogamms und die kurze Spanne Zeit, die mir für dasselbe noch zugemessen ist, möglich machen.

Man hat der Geometrie des Euklides hauptsächlich zwei Vorwürfe gemacht: 1) Sie giebt kein innerlich zusammenhängendes Ganze, sondern eine Fülle von Sätzen, die nur dadurch äußerlich verbunden sind, daß der Beweis für die Richtigkeit eines folgenden Satzes die Anerkennung der früheren voraussetzt. 2) Sie giebt überall nur Erkenntnisgründe, wo man Realgründe sucht; d. h. es wird immer nur gezeigt (oder besser, man wird überall durch eine lange und schwer zu verfolgende und noch schwerer zu behaltende künstliche Schlußkette überführt, zuzugeben), daß ein Lehrsatz richtig ist, während man nirgends Einsicht in den inneren Zusammenhang der in den einzelnen Sätzen lichkeit beruhenden metrischen Relationen behandelt und, wie auch einige Rezensenten mit Recht hervorheben, wenig neues bietet, weil es von der Darstellung dieses Kapitels bei Baltzer oder Spieker fast nur in der Auswahl und wohl auch in der Reihenfolge der Sätze sich unterscheiden dürfte. Nur die Einführung des Begriffes des Durchmessers und der konjugierten Durchmesser und die dadurch herbeigeführte Änderung in dem Ausdrucke für manche Beziehungen wird man mir wohl als eigene Zuthat zu diesem Kapitel zuschreiben müssen, und ich glaube immerhin damit gerade nichts Nebensächliches geleistet zu haben. Im Übrigen hat ja Steiner gerade für dieses Kapitel so deutlich den Weg gezeigt, daß es fast unmöglich war, ihn nicht zu gehen.

Was die Anordnung des Stoffes in diesem letzten Kapitel betrifft, so dürfte vielleicht der §. 46, welcher die Cyklometrie behandelt, besser hinter den vier folgenden Paragraphen stehen, welche sich mehr an das vorhergehende anschließen. Da jedoch jeder Paragraph ein für sich abgeschlossenes Ganze bildet, so daß von §. 41 an ganz gut eine beliebige Änderung in der Reihenfolge der Paragraphen möglich wäre, ohne daß dadurch der Zusammenhang eine Störung erlitte, so zog ich vor, die vier letzten Paragraphen ans Ende zu stellen, weil sie zwar ganz wissenswerte und instruktive Dinge enthalten, aber doch solche, die man, wenn die Klasse eine Beschränkung des Lehrstoffs erfordert, dem Privatstudium der Einzelnen überlassen kann, während die vorhergehenden nur Unentbehrliches bringen. Sonst wüßte ich jedoch, abgesehen von einigen Versehen, beim besten Willen nichts zu ändern, ohne den Zusammenhang zu stören, obwohl Herr Erler, der mathematische Universalreferent der Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Hirschfelder und Kern einem Auszuge aus dem Inhaltsverzeichnis dieses Kapitels weiter nichts beizufügen wußte, als die Worte: „Vergebens bemühen wir uns hierin ein wohlgeordnetes Ganze zu erblicken“.

Überhaupt scheint Herr Erler zu einer eingehenderen Lektüre meines Buches keine Zeit gehabt zu haben, da ihm das Rezensionsexemplar erst zukam, als er (nach seiner eigenen Angabe) gerade eben mit dem mühsamen Geschäft eines Referates über fünf neue Lehrbücher fertig geworden war, und dieses Referat doch nicht abgehen sollte, ohne auch noch über das sechste mitzuberichten. In der Vorrede stieß Herr Erler auf das oben wiedergegebene Citat aus der Vorrede zu Steiners „Systematische Darstellung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander“ und suchte nun „nach den wenigen Fundamentalbeziehungen, durch deren Aneignung man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes macht", und da ihm dieselben nicht sofort durch Fettschrift entgegentreten, so findet er nicht, was er sucht, und glaubt nur in den Sätzen 21, 25, 29, 38 u. a. etwas ähnliches erkennen zu sollen. Damit zufrieden, geht er sofort an sein Referat, das nun wörtlich so weiter geht: ... „Aber es ist schon übel, daß wir darüber nur Vermutungen aufstellen können. Täuschen wir uns nicht über die Absicht des Verfassers, jenen Worten des berühmten Meisters in seinem Buche, soweit es auf dieser Stufe angänglich war, Folge zu geben, so würde das Lehrbuch des Verfassers unzweifelhaft außerordentlich an Wert gewinnen, wenn jene fundamentalen Sätze durch den Druck vor den aus denselben abgeleiteten Folgerungen hervorgehoben würden. Ein von uns vor ca. acht Jahren in diesen Blättern angezeigtes Buch, welches wegen seiner eigentümlichen Anlage wohl weniger Beachtung gefunden hat, als es verdiente: Lange, Aufgaben aus der ebenen Geometrie nach Hauptsätzen geordnet. Berlin, Stilke und Muyden (vergl. Jahrgang XXIII. 476, XXIV. 684), stellte an die Spitze jedes Abschnittes einen Hauptlehrsatz und knüpfte daran eine lange Reihe von Aufgaben und Sätzen, die aus jenen folgten und unter denen dann wieder Lehrsätze waren, die die Überschrift und Grundlage eines späteren Abschnittes bildeten. In ähnlicher Weise sollte der Verfasser verfahren, wenn jene von ihm zitierten Worte Steiners für sein Buch eine hervorragende Bedeutung haben sollten; erst dann würde man deutlich erkennen, ob und wie weit es ihm gelungen, den Steinerschen Gedanken auch in einem elementaren Lehrbuche zur Geltung zu bringen".

Seit 24 Jahren habe ich einen großen Teil der mir freilich immer nur spärlich zugemessenen freien Zeit dazu verwandt, an den Bestrebungen zur Reform des geometrischen Unterrichts auch das meinige beizutragen, und ich kann wohl sagen, daß ich in die ganze einschlagende Literatur von Schweins (1810) bis Fiedler und Frischauf mit allen ihren Irrtümern, Fehlgriffen und Auswüchsen einen tiefen Einblick gethan habe. Und wenn ich nun zurückblicke auf die ganze Danaidenarbeit und sehe, wie wenig die bahnbrechenden Leistungen eines Steiner und anderer Erweiterer der Wissenschaft und die deutlichen Winke einiger derselben*) von denjenigen begriffen und benutzt wurden, deren Aufgabe

*) Ich erinnere hier besonders an die beherzigenswerten Worte, mit denen von Staudt 1847 seine Geometrie der Lage eingeleitet hat. Ist es auch schwer,

die systematische Neubearbeitung des Lehrstoffes ist, so erhalte ich in dieser neuen Auffassung der Leistungen des großen Bahnbrechers Steiner eine Bestätigung mehr von der Wahrheit der tief entmutigenden Worte, die der große Menschen- und Weltkenner Göthe in Dichtung und Wahrheit mit bezug auf den berühmten Arzt Zimmermann ausgesprochen hat:

„Weil nun wirklich einige außerordentliche Menschen, wie Boerhave und Haller, das Unglaubliche geleistet, so schien man sich berechtigt, von ihren Schülern und Nachkömmlingen noch mehr zu fordern. Man behauptete, die Bahn sei gebrochen, da doch in allen irdischen Dingen selten von Bahn die Rede sein kann; denn wie das Wasser, das durch ein Schiff verdrängt wird, gleich hinter ihm wieder zusammenstürzt, so schließt sich auch der Irrtum, wenn vorzügliche Geister ihn bei Seite gedrängt und sich Platz gemacht haben, hinter ihnen sehr geschwind wieder naturgemäß zusammen".

Wenn ich in der Weise von Lange verfahren wäre, so hätte ich unmöglich für die Geometrie des Maßes und der Gestalt leisten können, was Steiner für die projektivische Geometrie geleistet hat, da die Weise Steiners mit der Langes aber auch gar nicht das mindeste zu thun hat. Und wenn Herr Erler in dem leider unvollendet gebliebenen Hauptwerke Steiners, dessen oben angeführter Titel schon eines bessern hätte belehren sollen, ebenso „nach den fundamentalen Sätzen" suchen will, wie in dem meinigen, so wird er sie ebensowenig finden, ohne alles im Zusammenhang zu lesen, wie er sie in diesem gefunden hat. Denn dieselben sind dort ebensowenig durch den Druck vor den aus denselben abgeleiteten Folgerungen hervorgehoben, wie bei mir oder wie in dem zweiten Teile seiner von Schröbter herausgegebenen Vorlesungen. Ja in meinem Lehrbuch hätte dies Herr Erler viel besser gekonnt, wenn er nur einige Paragraphen vollständig gelesen hätte. Er würde dann gefunden haben, daß jeder derselben, der nicht unmittelbar an den vorhergehenden anschließt, entweder mit allgemeinen Betrachtungen beginnt, die in einem solchen Fundamentalsatze endigen, oder mit einem an der

---

besonders in einem Schulbuch für Tertianer seinen Anforderungen ganz gerecht zu werden, so muß man doch darüber stutzig werden, auch seinen Hinweis auf die Alles durchdringenden Gesetze der Symmetrie so ganz unbeachtet zu sehen, daß noch nach vierundzwanzig Jahren ein Frankfurter Pädagoge die Verwertung derselben für die Geometrie als etwas neues empfehlen konnte. (Dr. Fresenius in Hoffmanns Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht. II, S. 1 bis 14.)

Spitze stehenden Fundamentalsatze beginnt, an den sich dann die folgenden Sätze und oft noch die des folgenden Paragraphen als einfache Konsequenzen anschließen.

Bequemer konnte ich's auch den Herrn Rezensenten kaum machen, wenn mein Buch zum Schulgebrauch dienen sollte. Denn hätte ich außerdem noch Fettschrift angewandt, so würde ich Lehrer und Schüler zu dem Irrtum veranlaßt haben, das übrige für weniger wichtig zu halten. Denn nach meiner aus langjähriger Erfahrung und reiflichem Nachdenken hervorgegangenen Überzeugung kann man dem geometrischen Unterricht durchaus keinen anderen vernünftigen Zweck zuschreiben, als den, daß die Schüler sich das Wissenswerteste derselben zu geistigem Eigentum machen und in Stand gesetzt werden, davon jeden möglichen Gebrauch machen zu können. In Hinsicht auf die praktische Bedeutung sind aber die abgeleiteten Sätze so wichtig wie die Fundamentalsätze, und nur insoferne sind diese wichtiger, als sie den roten Faden bilden, an den sich der übrige Stoff naturgemäß und ohne viele Mühe ankrystallisiert.

Die meisten der übrigen Referenten über die erste Abteilung meines Lehrbuches (Pensum der Tertia und Untersekunda) sind jedoch meiner Absicht gerecht geworden und haben mich besonders die Herrn Günther in Ansbach, Walentin in Brünn, Killing in Berlin und der Herausgeber des Archives für Mathematik, Herr Hoppe, zu Dank verpflichtet durch die Ausführlichkeit, mit der sie gerade solche Punkte hervorgehoben haben, auf die es mir besonders ankam. Auch der Referent für das pädagogische Archiv (Band XXI, 6), der sich eine ausführlichere Besprechung für später vorbehalten hat, sagt in 15 Zeilen mehr über den Inhalt und die Ziele des ersten Buches, als Herr Erler in drei Seiten vorzubringen weiß.

Doch ich sehe schon den Leser, wenn überhaupt ein solcher ausnahmsweise auch einmal zu einem Schulprogramme greift, unwillig werden, da er vermutlich meine Lehrbücher gar nicht kennt, und keine literarische Fehde, sondern Belehrung über eine etwa ausführbare oder ausgeführte Reform des geometrischen Unterrichts erwartet, und kehre darum zur Sache zurück, indem ich es versuche die mich bei der Ausarbeitung der Planimetrie leitenden „Fundamentalbeziehungen" ganz rein und ohne weitergehende Konsequenzen lediglich in ihrem eigenen Zusammenhang hier darzulegen.

Die erste dieser Fundamentalbeziehungen — um einmal bei diesem

Ausdruck zu bleiben — ist die axiomatische, daß zwischen je zwei Punkten des Raumes eine und nur eine lineare Verbindung besteht, die kürzer ist wie jede andere, nämlich die geradlinige. Fügen wir dazu noch das Axiom von der Ebene und das Parallelenaxiom mit seiner Umkehrung, so ergeben sich als einfache Konsequenzen derselben der vierte ebenfalls fundamentale Satz von der Winkelsumme des Dreiecks und der Satz, daß jedem Punkte in bezug auf jede nicht durch ihn gehende Gerade ein und nur ein Punkt in der Ebene entspricht, der in bezug auf diese Gerade ebenso liegt*), d. h. von jedem ihrer Punkte denselben Abstand hat. Durch ganz einfache Herbeiziehung der vorhergehenden Sätze wird dann dieser Satz in den folgenden erweitert, der als fünfter Fundamentalsatz bezeichnet werden kann. Der geometrische Ort aller von zweien in der Ebene gegebenen Punkten gleich weit abstehenden Punkte ist deren Symmetrieaxe, welche die dem einen näher liegenden Punkte von den dem andern näher gelegenen trennt.

Eine unmittelbare Folge des ersten unserer Fundamentalsätze ist der Satz, daß die Summe der geradlinigen Strecken, welche einen Punkt innerhalb eines Dreiecks mit zwei Eckpunkten verbindet, immer kleiner ist als die der darüber stehenden Seiten, und der allgemeinere, daß eine geschlossene von außen überall konvexe Linie stets eine geringere Länge hat als eine sie einschließende.

Unmittelbaren Anschluß hieran findet dann der folgende etwas weitläufig auszusprechende 6. Fundamentalsatz (Lehrsatz 21 meines Lehrbuchs), den auch Herr Erler als solchen erkannt hat.

Unter allen geradlinigen Strecken zwischen einem Punkte und einer Geraden ist das Lot auf dieselbe die kürzeste und eine schiefe ist um so größer, je größer der Abstand ihres Fußpunktes auf der Geraden von dem des Lotes. Von jeder die Länge des Lotes übertreffenden Länge können zwei Strecken von dem Punkte nach der Geraden gezogen werden, deren Fußpunkte symmetrische Gegenpunkte in bezug auf das Lot sind, die also mit diesem und der Geraden gleiche Winkel bilden. Diese schließen alle kürzeren Strecken von dem Punkte

*) Einer meiner Rezensenten hat diese Definition des symmetrischen Gegenpunktes eines Punktes in bezug auf eine Gerade, ohne übrigens Gründe anzugeben, freilich für sehr unlogisch erklärt, ein Wort, das neuerdings sehr oft gebraucht wird, wo es mir ganz unmöglich ist einen Sinn damit zu verbinden.

beweisen begründet, so ist es wohl nicht ganz überflüssig, den von mir gebrachten, ebenfalls von Briot herrührenden Beweis hier beizufügen, wobei ich jedoch den Leser bitten muß, sich die erforderliche Figur selbst zu skizzieren: Seien AS, BS die beiden Strecken, und wird AS so in die Lage A'S gedreht, daß der hohle Winkel mit BS größer wird, so schneidet offenbar die Gerade A'B die Halbierungslinie des Winkels A'SA, welche die Symmetrieachse von A und A' ist. Sei C der Schnittpunkt, so ist ist dann $A'C = AC$, und mithin $A'B = A'C + CB = AC + CB > AB$. Als neunter Fundamentalsatz schließt sich diesem der folgende ebenso fruchtbare an (Lehrsatz 38 meines Lehrbuchs, den Herr Erler doch auch noch richtig aufgefunden hat):

Wird von zweien sich schneidenden Geraden einer Ebene die eine in derselben um den Schnittpunkt gedreht, so wächst der Abstand der einen Geraden von sämtlichen Punkten der andern mit dem spitzen Winkel, den die Geraden bilden, bis derselbe ein rechter geworden und jede der beiden Geraden von jedem Punkte der andern den größten Abstand erreicht hat. Bei fortgesetzter Drehung nimmt dieser Abstand mit dem nun auf der anderen Seite gebildeten Winkel ebenso wieder ab. Dieses Gesetz ist eine sehr einfache Konsequenz des sechsten Fundamentalsatzes und des ersten Kongruenzsatzes. Aus ihm folgt unmittelbar, daß die Symmetrieachsen der aus zwei sich schneidenden Geraden gebildeten Figur, also die Halbierungslinien ihrer Winkel, der geometrische Ort aller von diesen Geraden gleich weit abstehenden Punkte sind und die näher an der einen dieser Geraden liegenden Punkte von den der andern näher gelegenen trennen. Betrachtet man gleichwohl diesen Satz wegen seiner Ergiebigkeit als den zehnten Fundamentalsatz, so wird sich als elfter der folgende anschließen, der ebenfalls nur eine unmittelbare Folgerung aus dem neunten ist: Von jedem Punkte außerhalb eines Kreises gehen zwei Tangenten an denselben, deren Berührungspunkte symmetrische Gegenpunkte in bezug auf den durch denselben Punkt gehenden Durchmesser sind, also von diesem Punkte gleichen Abstand haben. Eine durch denselben Punkt gehende Gerade schneidet den Kreis nur und immer, wenn sie den den Kreis einschließenden Winkel der Tangenten durchschneidet und zwar in einer Sehne, deren Größe durch den spitzen Winkel mit dem Durchmesser so bestimmt ist, daß sie abnimmt, wenn dieser wächst. Als weitere unmittelbare Konsequenz aus dem neunten Fundamentalsatze kann noch hinzugefügt werden:

Unter allen durch einen Punkt innerhalb des Kreises gehenden Sehnen ist der Durchmesser die größte, die darauf senkrechte die kleinste, und je zwei gegen den Durchmesser symmetrisch geneigte sind gleich groß und um so größer, je kleiner ihr spitzer Winkel mit dem Durchmesser.

Dies ist jedoch nur eine Ergänzung des elften Fundamentalsatzes, und als zwölfter wird sich wohl der folgende anschließen lassen, welcher allerdings in meinem Lehrbuche den drei letztgenannten vorausgeht und als 30. Lehrsatz bezeichnet ist:

Der geometrische Ort aller Punkte auf derselben Seite einer Geraden, welche gleichen Abstand von derselben haben, ist eine Parallele zu dieser Geraden.

Durch diesen Satz, aus welchem dann sofort alle Sätze über die Strecken zwischen zwei und mehreren Parallelen folgen, ergiebt sich dann auch noch die Ergänzung des 10. Fundamentalsatzes: Der Ort aller Punkte, welche von zwei parallelen Geraden gleichen Abstand haben, ist ebenfalls ihre Symmetrieachse und auch hier trennt dieselbe die näher an der einen der Parallen gelegenen Punkte von den der andern näher liegenden.

Betrachten wir jetzt als dreizehnte Fundamentalbeziehung diejenige, welche die Winkel zweier den Kreis schneidenden oder berührenden Geraden mit den aus demselben heraus geschnittenen Bögen verbindet, so habe ich als 14. und letzten Fundamentalsatz zur Begründung des ganzen ersten Abschnittes der Planimetrie (meiner drei ersten Kapitel) nur noch den folgenden fast evidenten hinzuzufügen:

Alle Geraden einer Ebene, welche von zweien Punkten derselben gleichen Abstand haben, bilden einen vollständigen ebenen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der gegebenen Punkte ist, und die Schar der Parallelen zu der sie verbindenden Geraden. Jede Gerade, welche die durch die beiden Punkte gehende Gerade in einem anderen als ihrem Mittelpunkte schneidet, ist dem Punkte näher, welchem dieser Schnittpunkt näher liegt.

Diese wenigen noch dazu in der einfachsten Weise untereinander zusammenhängenden Sätze enthalten die einfachen Grundbeziehungen, auf die sich alle nicht in komplizierteren metrischen Relationen bestehenden

Eigenschaften der ebenen Vielecke und des Kreises, aber auch sehr viele Eigenschaften der Kegelschnitte und selbst drei dimensionaler Gebilde ohne jede Schlußkette, lediglich durch einfache Schlüsse direkt zurückführen lassen.

Um dies für die Vierecke zu leisten, deren Darstellung in meinem Lehrbuche wohl am meisten von der üblichen abweicht und auch wohl am meisten als meine Leistung anerkannt werden dürfte, leitete ich zunächst aus den Fundamentalsätzen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen ab, daß 1. vier Punkte in einem Kreise liegen, 2. vier Gerade a) einen in der Fläche des durch sie gebildeten konvexen Vierecks liegenden Kreis berühren, b) einen in der Fläche des durch sie gebildeten offenen Vierseits liegenden Kreis berühren, c) zwei Kreise berühren, und wurde so auf das Sehnenviereck, die beiden Arten konvexer Tangentenvierecke und das von Euklides vergessene, später unter verschiedenen Namen (Deltoid, Drachen ꝛc.) hier und da eingeführte Viereck, das ich nach dem Vorschlage von Baltzer als Rhomboid bezeichnete, weil der Rhombus die meisten seiner charakteristischen Eigenschaften als ein besonderer Fall desselben besitzt, und das ungleichseitige schiefwinkelige Parallelogramm, dem man diesen Namen ohne jeden Grund beigelegt hat, überhaupt eines besonderen Namens gar nicht bedarf, da nichts über dasselbe auszusagen ist.

Dann bezeichnete ich als Mittellinie eine Gerade, welche von allen Ecken einer Figur gleichen Abstand hat und leitete aus dem 14. Fundamentalsatze ab, daß jedes Dreieck drei Mittellinien besitzt, deren jede zwei Seiten halbiert und der dritten parallel ist, daß aber ein Viereck nur eine oder zwei Mittellinien besitzen kann, je nachdem es ein oder zwei Paar paralleler Seiten besitzt. Dadurch wurde ich auf Trapez und Parallelogramm geführt, deren besondere Arten ihre besondere Eigenschaften nur erhalten, weil sie zugleich einem oder mehreren der vorhergenannten Vierecksarten angehören*).

Ich unterlasse es, auch die Fundamentalsätze aus den Kapiteln über Fläche und Umfang und über Ähnlichkeit und metrische Relationen zwischen Strecken, und was dahin gehört, aufzuzählen, da hierin bereits

*) Ich verweise übrigens hier auf meinen dahin gehörigen Aufsatz in der Zeitschrift für math. und nat. Unterricht (Jahrgang III, Heft 4, S. 361): Über Einteilungsgründe in der Geometrie, worin ich in Kürze schon vor 8 Jahren gezeigt habe, wie ich die Worte Steiners und die darauf fußenden Richard Baltzers in der Vorrede zu seiner Geometrie verstanden habe.

durch Baltzer, Spieker u. a. jede wünschenswerte Ordnung, Übersicht und Einsicht in den Zusammenhang geboten wird, so daß man von allen Göttern verlassen sein muß, wenn man sie nicht selbst findet, sofern man nur danach sucht.

Bei der Bearbeitung der Stereometrie ging ich zwar von andern Axiomen aus; wer jedoch, nachdem er mir bis dahin gefolgt, diesen Teil meines Lehrbuches sich etwas näher ansieht, wird finden, daß auch hier einige wenige Grundgesetze den leitenden Faden bilden, an den sich das Übrige ohne lange und künstliche Syllogismen anschließt. Nur kann natürlich dieses Buch nicht den Anspruch auch nur auf eine relative Vollständigkeit machen, da ein Schulbuch doch den engbegrenzten vorgeschriebenen Lehrstoff nicht wesentlich überschreiten darf (die gleichwohl wissentlich gemachten Überschreitungen sind derart, daß sie weggelassen werden können, ohne den Zusammenhang zu stören).

Auf einen anderen Punkt, auf den es wesentlich ankommt, wenn eine Darstellung der Geometrie den Anforderungen entsprechen soll, die man vom Standpunkte der Wissenschaft an sie zu machen berechtigt ist, hat lange vor Steiner und v. Staudt der Philosoph Arthur Schopenhauer mit Nachdruck aufmerksam gemacht (in seiner Doktordissertation „über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde“). Er zeigt nämlich dort, daß die Art, wie die einzelnen Eigenschaften der geometrischen Figuren einander gegenseitig bedingen, so daß jede zugleich Grund und Folge der andern ist, eine ganz eigentümliche nur in der Geometrie zur Geltung kommende Form des Satzes vom zureichenden Grunde ist, welche er den Satz vom Grunde des Seins im Raume nennt. Auch Kant*) hat diese Thatsache bereits bemerkt, wie aus einer Stelle in einem seiner freilich nach 1813 veröffentlichten Briefe an Reinhold hervorgeht. In derselben (Ausg. von Hartenstein X, S. 512) sagt er nämlich wörtlich:

„Nebenbei merke ich nur an, (um in der Folge auf Eberhards Verfahren besser aufmerken zu können), daß der Realgrund wiederum zweifach sei, entweder der formale (der Anschauung der Objekte), wie z. B. die Seiten des Dreiecks den Grund der Winkel enthalten, oder der materiale (der Existenz der Dinge), welcher letztere macht, daß das, was ihn enthält, Ursache genannt wird“.

---

*) Über einen noch ältern Vorgänger siehe den soeben bei F. A. Brockhaus erschienenen „Briefwechsel zwischen Arthur Schopenhauer und Johann August Becker“, S. 73.

Das zufällig gewählte Beispiel mag der Grund sein, warum er nicht zugleich auf die charakteristische Eigentümlichkeit des „formalen Realgrundes“ aufmerksam wurde, daß seine Folge auch zugleich sein Grund ist. Denn die Winkel des Dreiecks sind nicht wieder der Grund der Seiten, sondern nur der ihres Verhältnisses, wie auch umgekehrt nur das Verhältnis der Seiten, nicht ihre absolute Länge, der Grund der Winkel ist.

Wie nun die Aufgabe der Physik (in ihrer allgemeinsten Bedeutung) die ist, die Gesetze darzuthun, nach denen die Naturerscheinungen einander als Ursache und Wirkung bedingen, so muß die Aufgabe der Geometrie, so weit sie Wissenschaft ist (denn wenn man sie richtig erfaßt, ist sie ebenso wie die Mathematik überhaupt weit mehr Kunst als Wissenschaft), die sein, die Gesetze darzuthun, nach denen die räumlichen Eigenschaften der Dinge einander als Seinsgrund und Folge bedingen. In der That ist jede Eigenschaft einer Figur an eine oder mehrere andere derart gebunden, daß in der Regel jede dieser Eigenschaften die notwendige und hinreichende Bedingung der andern ist, und ein Theorem ist darum nur ein vollständiges, wenn es in jedem Falle das ganze Abhängigkeitsverhältnis darlegt. Weil jedoch in den meisten Fällen ein solches Theorem zu lang ausfallen würde, um von einem Schüler leicht erfaßt und zusammengehalten zu werden, ist es oft nötig, dasselbe in mehrere Lehrsätze zu zerspalten, die aber unmittelbar aufeinander folgen und zusammengehalten werden müssen, wenn der Schüler den richtigen Einblick in das zu erfassende Gesetz erhalten und nicht blos Stückwerk in seinen Kopf aufnehmen soll.

Ich habe deshalb in einer Anmerkung zum dritten Kapitel meines ersten Buches ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht. Das hat jedoch Herr Erler so verstanden, daß er mir darüber folgende Belehrung zu teil werden läßt:

„Wir wollen es nicht tadeln, wenn einem Satze die ganze Fülle seiner Umkehrungen hinzugefügt wird, wenn also z. B. den Eigenschaften, die ein Quadrat hat, in fünf Sätzen die Bedingungen angeschlossen werden, unter denen ein Viereck ein Quadrat ist. Sollen aber alle diese einfachen Sätze aufgeführt werden, die eben, weil sie ganz leichte Folgerungen anderer Sätze sind, sich in anderen Lehrbüchern nicht finden, so ist es doch für die Übersicht dringend wünschenswert, daß ein Hauptsatz als solcher durch den Druck hervorgehoben werde, die Folgerungen oder speziellen Sätze sich nicht durch gleichen Druck ebenso breit machen als jener".

Sollte man danach nicht meinen, mein auf 148 Seiten in voller Ausführlichkeit mit 90 großen in den Text gedruckten Figuren das ganze Pensum von drei Jahren bringendes Lehrbuch sei ein wahres Chaos von überflüssigen Sätzen ohne allen erkennbaren Zusammenhang!

Und doch ist die Zahl aller in 50 Paragraphen verteilten Lehrsätze nur 125, denen im ganzen noch kein Dutzend Zusätze und Folgerungen beigefügt ist. Dem einzigen Lehrsatze, welcher alle Eigenschaften des Quadrats in fünf Zeilen ausdrückt, sind aber als Umkehrung die Bedingungen, unter welchen ein Viereck ein Quadrat ist, nicht in fünf Sätzen, sondern in einem einzigen Satze und ohne Begründung beigefügt, was ich als Beispiel für die Genauigkeit anführe, mit der Herr Erler referiert.

Auch Herr Killing, der meinen Bestrebungen sonst mehr gerecht wird, obwohl er in seinen Grundmeinungen vielfach mit mir differiert, hat in seinem Bericht an die Zeitschrift für math. und naturwissenschaftl. Unterricht zu dem in der oben erwähnten Anmerkung ausgesprochenen Schopenhauerschen Grundgedanken nur bemerkt, er sei nicht dieser Ansicht. Was er aber dagegen vorzubringen hätte, und welches seine gegenteilige Ansicht sei, hat er für sich behalten. Übrigens habe ich gerade diesen Grundgedanken bereits vor zehn Jahren ausführlich dargelegt in der vierten meiner 1870 bei Schultheß in Zürich erschienen „Abhandlungen aus dem Grenzgebiete der Mathematik und Philosophie".

Damit glaube ich mich des ersten Teiles meiner Aufgabe entledigt zu haben. Es bleibt mir nur noch die Darlegung der Vorurteile und Hemmnisse, welche der Erzielung besserer Erfolge oft im Wege stehen. Diese Darlegung kann hier selbstverständlich nur eine fragmentarische sein, und ich beschränke mich darum auf einige Punkte, die ich zur besseren Übersicht mit Nummern versehen will.

1.

„Um die Methode der Mathematik zu verbessern, wird vorzüglich erfordert, daß man das Vorurteil aufgebe, die bewiesene Wahrheit habe irgend einen Vorzug vor der anschaulich erkannten, oder die logische, auf dem Satze vom Widerspruch beruhende vor der metaphysischen, welche unmittelbar evident ist, und zu der auch die reine Anschauung des Raumes gehört. Diese Worte des großen Frankfurter Philosophen, welche kürzlich mein verehrter Fachkollege Bunkofer in Bruchsal seiner jedenfalls beachtenswerten im vorigen Jahre erschienenen „Geometrie des Progymnasiums“ als Motto vorangestellt hat, kennzeichnen das wichtigste und zugleich verbreitetste der Vorurteile, welche einer gedeihlichen Wirksamkeit des Lehrers der Geometrie oft im Wege stehen. Und zwar ist die Wirkung dieses Vorurteils eine um so schlimmere, als es nur von Lehrern und Schulbehörden, keineswegs auch von unbefangenen Schülern geteilt wird. Diese können vielmehr nicht begreifen, warum ihnen zugemutet wird, eine lange Schlußkette zu merken, um darin den Beweisgrund zu erkennen für die Wahrheit einer Behauptung, von der nicht einmal zu begreifen ist, wie man sie überhaupt nur in Zweifel ziehen kann; sie glauben darum, den Satz selbst nicht zu verstehen, suchen allerhand dunkle Geheimnisse dahinter, und wenn sie sehen, daß es sich wirklich nur um Selbstverständliches handelt, halten sie das Ganze auch wohl für höchst überflüssig. Da nun gerade im Anfang eine ganze Reihe solcher Sätze kommen, die eigentlich keines Beweises bedürfen, und viele Lehrer, in ihrer Meinung, die Strenge der Beweise und Definitionen, sei die Hauptsache, mit der Einübung derselben so viele Zeit zubringen, daß für eine Einsicht in den sachlichen Zusammenhang der Sätze und für eine Verwertung derselben zu Konstruktionsaufgaben, wodurch doch erst Leben in den Unterricht kommt und Interesse dafür erweckt wird, keine Zeit mehr übrig bleibt, so kann es nicht ausbleiben, daß nach und nach die Mehrzahl der Schüler für diesen Unterricht ganz abgestumpft und untauglich wird, und der Lehrer, will er überhaupt nicht ganz fruchtlos arbeiten, sich an die wenigen Schüler halten muß, die eine so hervorragende Begabung für geometrische Schlußreihen haben, daß sie an der Übung dieser Anlage allein Befriedigung finden, auch wenn ihre Frage nach dem Zusammenhange und dem Zwecke des Erlernten unbeantwortet bleibt. In der Vorrede zur zweiten Abteilung meines Lehrbuches habe ich meine Erfahrungen, die ich als Schüler eines nach Brettner dozierenden Lehrers vor nunmehr 32 Jahren darüber gemacht habe, mitgeteilt und inzwischen habe ich noch manchen kennen gelernt, der gleich mir dem ersten geometrischen Unterricht aus dem angegebenen Grunde beim besten Willen durchaus nicht folgen konnte, und doch später bewies, daß es ihm keineswegs an der nötigen Beanlagung fehlte. Am schlimmsten wirkt dieses pedantische Drillen in Demonstrationen und Definitionen, wenn man damit zu früh beginnt. Vor der Obertertia sollte nach meiner Ansicht der geometrische Unterricht höchstens in Anschauungsunterricht und geometrischem Zeichnen bestehen. Hat der Schüler erst einmal durch bloße Beobachtung die Zusammengehörigkeit gewisser Eigenschaften bei einfachen selbst konstruierten Figuren kennen gelernt, so wird er schon geneigter sein, einer wissenschaftlichen Darlegung dieses Zusammenhangs zu folgen. So sehr ich nun auch heute noch die Gleichwertigkeit der intuitiven und diskursiven Erkenntnis anerkenne, ja sogar in vieler Hinsicht jener vor dieser den Vorzug gebe, so habe ich doch meine vor 10 Jahren in den oben zitierten Abhandlungen niedergelegte und begründete Ansicht über diesen Gegenstand inzwischen dahin geändert, daß eine wissenschaftliche Darstellung der Geometrie ihrem Zwecke mehr entspricht, wenn die ohne Beweis unmittelbar der Anschauung zu entlehnenden Sätze auf einige wenige Grundeigenschaften des Raumes reduziert werden. Denn dadurch erscheint die ganze Geometrie als in den Eigenschaften des Raumes begründet, und entspricht der ebenfalls von Schopenhauer gegebenen Definition einer Wissenschaft, als „eines Systems verknüpfter Erkenntnisse" im Gegensatz zum bloßen Aggregrat von Erkenntnissen besser als eine Geometrie, bei welcher nur bewiesen wird, was ohne Beweis nicht verstanden werden kann, aber auch nicht zusammenhängt, was ohne Beweis evident ist*). Ich habe sogar meinem Lehrbuch der Elementarmathematik den ersten Teil eines größeren, nicht für die Schule bestimmten Lehrgebäudes unter dem Titel „Elemente der Geometrie, auf neuer Grundlage streng deduktiv dargestellt" vorausgeschickt, das auf sechs Axiome gestützt ist, die im wesentlichen mit den Postulaten übereinstimmen, welche nach Helmholtz dem Raum unserer Anschauung diejenigen Eigentümlichkeiten zuschreiben, durch welche die Giltigkeit der Euklidschen Geometrie bedingt ist. Obwohl ich auch in der Vorrede zu diesem Werke meinen scheinbar gegenteiligen früher vertretenen Standpunkt wahrte, habe ich doch dadurch so sehr den Beifall des Fortsetzers von Grunerts Archiv erweckt, daß er u. a. darüber sagt:

„Das vorliegende Werk ist eine entfaltete Darlegung der Prinzipien der Geometrie nach ihrem logischen Inhalt. Um das vorgesetzte Ziel

*) Indessen wollte ich mich auch heute noch erbötig machen, für ein größeres Publikum eine sehr weitgehende populäre Geometrie zu schreiben, in der das Wort Beweis gar nicht vorkommen dürfte, wenn ich Zeit hätte, und es sich lohnen würde.

zu erreichen, ist der pädagogische, sowie der systematische Gesichtspunkt ganz bei Seite gelassen. Die Aufgabe stellt zu große Anforderungen, als daß sie ohne vorgängige Trennung der Gesichtspunkte gelöst werden könnte. Manche Versuche in gleichem Sinne sind in neuester Zeit zu Tage getreten. Die gegenwärtige Bearbeitung möchte wohl eine vor allen früheren hervorragende Leistung zu nennen sein. Es sind darin die gesamten prinzipiellen Fragen aus dem Versteck ans Licht gezogen, in vortrefflicher Klarheit, ohne Entstellung der Thatsachen durch eingemischte Strebungen, aufgefaßt und in einfachster Form durch didaktische Aufstellungen gelöst. Der Verfasser räumt gern die Möglichkeit von Irrungen ein, indem er sich trotzdem bewußt ist, einen gesicherten Fortschritt gethan zu haben; denn sein Werk ist kein künstlicher Bau, der zusammenbricht, wenn eine Stütze versagt; nichts ist auf die Spitze des Wortes gestellt, vielmehr alles im freien Gedanken, den Gegenstand und die Aufgabe vor Augen, zur Reife gebracht, dann erst in die geeignete Darstellungsform gebracht. Es tritt uns darin die große Überlegenheit derjenigen Logik, welche erst denkt, dann spricht, über die gewöhnliche formelle Logik, welche nur innerhalb der oft sehr zufälligen Grenzen des Wortes zu denken vermag, recht deutlich entgegen". Eine solche Beurteilung meiner Arbeit kann ich mir schon gefallen lassen, wenn auch nachher einige Ausstellungen folgen und in diesem zustimmenden Urteil selbst gleich im Anfang eine große Verschiedenheit unserer Grundansichten zu Tage tritt. Während nämlich meine Darstellung den Anforderungen des Herrn Hoppe an ein System der Geometrie so wenig entsprochen, daß er glaubt, der systematische Gesichtspunkt sei ganz bei Seite gelassen, ist es gerade die vollkommene Vereinbarkeit der strengen logischen Deduktion mit meiner Auffassung einer systematischen Darstellung der Geometrie, welche mich zur Ausarbeitung meines Lehrgebäudes antrieb und Herr Hoppe hat wohl die Stelle meines Vorworts übersehen, worin ich dies ausdrücklich sagte. Auf Seite VII desselben heißt es wörtlich: „Da es mir nun gelungen, mit dieser streng deduktiven Methode meine übrigen Ansichten über die Grundbegriffe und über Anordnung und Begründung der Lehrsätze vollkommen in Einklang zu bringen, und die unmittelare Anschauung doch nur bei den Anfangsgründen zur Geltung kommt, so sehe ich keine Inkonsequenz darin, die einmal begonnene Untersuchung zur Herstellung eines vollständigen deduktiven Lehrgebäudes fortzuführen".

Auch meine Arithmetik und Algebra für den Schulgebrauch findet bei Herrn Hoppe außergewöhnlichen Beifall und eine sehr günstige Beurteilung, da ich hier in einem leitenden Grundgedanken mit ihm übereinstimme; nämlich darin, daß die algebraische Operation keine Auswertung, sondern eine Transformation ist, was von den algebraischen Lehrbüchern fast durchgängig außer acht gelassen ist, einer der Hauptbeweggründe, welche mich veranlaßten, auch die Zahl der Lehrbücher der Arithmetik um ein neues zu vermehren. Übrigens überwiegt schon hier, trotz des außerordentlichen Lobes, fast die Zahl der Ausstellungen.

Mit meinem Lehrbuche der Geometrie für den Schulgebrauch bin ich jedoch dem hier zu erörternden Vorurteil, das bei Herrn Hoppe die Form eines Dogmas von unfehlbarer Wahrheit angenommen zu haben scheint, nämlich des Dogmas, daß alle unmittelbare Erkenntnis nur oberflächlich sein könne, und alle wahre Erkenntnis mithin nur eine diskursive, also rein begriffliche sei, so entschieden entgegengetreten, daß er nur noch Worte findet, um meine Ketzerei zu bekämpfen. Den übrigen Inhalt aber übersieht er so flüchtig, daß er sogar aus meiner vor dreißig Jahren gemachten Schülererfahrung eine dreißigjährige Lehrererfahrung macht, womit er mich wohl zugleich zu einem alten Manne stempelt, der sich von den durch die transscendenten Hypergeometer und ihre Philosophen Otto Liebmann und Benno Erdmann „überwundenen Standpunkt" der Kant-Schopenhauerschen Erkenntnistheorie und Pestalozzischen Pädagogik nicht mehr trennen kann.

Ich habe mir nämlich erlaubt — „nicht im Vorwort, sondern an die Schüler gerichtet" — in meinem Lehrbuch (I, S. 11) folgendes zu sagen:

„Da man bei oberflächlicher Betrachtung der Dinge oft etwas als selbstverständlich ansieht, was nicht einmal allgemein wahr ist, so ist es seit Euklides . . . . . üblich geworden, nur sehr wenige Behauptungen als Axiome aufzustellen, und nur solche, die im Ernste niemand bestreiten kann, der ein klares Anschauungsvermögen besitzt. Im folgenden werden darum auch eine Reihe von Behauptungen bewiesen und also als Lehrsätze aufgestellt, deren Wahrheit auch ohne Beweis einleuchtet. Es geschieht dies zum Teil auch deshalb, weil man eine neue Wahrheit besser versteht und behält, wenn man weiß, wie sie aus anderen bereits bekannten folgt, zum Teil auch, weil diese Beweise so einfach sind, daß man an ihnen leicht und allmählich lernen kann, wie man neue Wahrheiten auf alte zurückführt, und wie man aus bekannten Wahrheiten neue folgert. Doch soll man dadurch nicht irre werden an der Wahrheit dessen, was man unmittelbar anschaulich erkennt. Vielmehr ist im praktischen Leben die aus der Anschauung direkt gewonnene Erkenntnis, mit der nötigen Vorsicht und Umsicht angewendet, der erst durch Beweise erworbenen weitaus vorzuziehen*)".

Darauf bemerkt nun Herr Hoppe:

„Was ist nun mit „„oberflächlicher Betrachtung"" gemeint? Soll es eine accidentelle Schwäche bezeichnen, die bei gehöriger Achtsamkeit zu vermeiden wäre? Wie der Verfasser wiederholt an die Grenzen des philosophischen Gebiets streift, aber stets zur rechten Zeit innehält, wo ein mehreres der Einsicht nicht förderlich sein würde, so auch hier, doch geschieht es diesmal an einer sehr schlüpfrigen Stelle. In der That wird durch den leicht hingeworfenen Tadel seine Meinung scheinbar gerettet, eigentlich sei die Beschränkung der Axiomenzahl ganz unnötig. Ist denn aber je eine Betrachtung von Seiten der Schüler, ist diejenige, zu der das Lehrbuch anleitet, nicht oberflächlich? Das allein macht es ja möglich, Anfänger von der Richtigkeit der Axiome zu überzeugen, daß sie schon bei oberflächlicher Betrachtung einleuchten, eine tiefe Betrachtung darf niemand voraussetzen. Das Axiom III ist ein schlagender Beleg dafür: „Durch jeden Punkt einer Ebene geht zu jeder nicht durch ihn gehenden Geraden in derselben immer eine und nur eine Parallele". Dieser Satz wird vielleicht bei sehr oberflächlicher, nicht eben achtsamer Betrachtung selbstverständlich erscheinen. Dabei ist er erfahrungsmäßig allgemein wahr, sogar apodiktisch richtig, letzteres aber nur auf Grund von Eigenschaften der Ebene, die nicht auf der Hand liegen. Es ist für den Schüler kein Grund ersichtlich, warum die zweite Gerade bei Drehung von der Parallelen aus sofort auf einer von beiden Seiten die erste schneiden müßte. Der Verfasser baut also selbst auf eine nicht nur oberflächliche, sondern auch unachtsame Betrachtung, wenn er dem Satze unmittelbare Evidenz zuschreibt. Sein Ausspruch, von dem wir ausgingen, hat demnach eine durchgängige, nicht auf Fälle von momentanem Lapsus beschränkte Giltigkeit. Nicht, *wenn* einmal die Betrachtung oberflächlich ist, sondern, *weil* sie bei unmittelbarem Einleuchten stets nur oberflächlich sein kann, ist man der Gefahr ausgesetzt, für selbst-

*) Es ist selbstverständlich in beiden Fällen nur von wirklicher Erkenntnis, nicht von oberflächlicher Meinung die Rede. *Irren* kann man sich ja sowohl durch Intuition als durch Diskursion.

verständlich zu halten, was nicht einmal allgemein wahr ist. Die unmittelbare Evidenz der Axiome ist nichts als ungeprüfte Meinung, mithin eine ganz falsche Rechtfertigung für sie. Diesen Umstand hat der Verfasser in seiner überall bewiesenen und höchst wohlthuenden Offenheit verraten, aber sehr geschickt wieder verhüllt". Da Herrn Hoppe meine Offenheit gefällt, so muß er sich auch gefallen lassen, wenn ich nun an seiner eigenen Darlegung zeige, was ich unter einer oberflächlichen Betrachtung verstehe. Eine oberflächliche anschauliche Betrachtung ist eine solche, welche nur einzelne Momente des der Anschauung vorliegenden Gegenstandes auffaßt und andere wesentliche übersieht, und ich gebe bereitwillig zu, daß in dieser Hinsicht nicht nur alle Kinder, sondern auch die meisten Erwachsenen, namentlich solche, die keinen guten Unterricht in der Naturgeschichte genossen haben, oder nicht durch ihren Beruf gezwungen wurden, ihre Augen aufzuthun, außerordentliche Oberflächlichkeit an den Tag legen. Eine aus Urteilen zusammengesetzte Betrachtung aber ist oberflächlich, wenn die einzelnen Urteile entweder auf oberflächlicher Anschauung oder unlogischer Deduktion beruhen, welche nebenbei bemerkt ebenso häufig ist, wie die oberflächliche Anschauung. Eben darum aber soll man die Schüler nicht blos zu richtiger Anwenwendung der diskursiven Denkthätigkeit, sondern ebenso, ja noch mehr zu richtigem Gebrauch ihrer Sinne und genauer Anschauung anleiten und ihnen den Weg dazu zeigen. Was nun insbesondere die Bemerkung über das Axiom III betrifft, so liegt derselben immerhin etwas Wahres zu Grunde. Denn bei oberflächlicher Betrachtung kann allerdings ein Schüler über die Wahrheit des Axiom III stutzig werden, wenn ihm dasselbe lediglich in der Form entgegengebracht wird, in welcher es ausgesprochen ist. Denn es leuchtet in der That nicht ohne weiteres ein, warum die eine von zwei Parallelen, wenn sie um einen ihrer Punkte eine auch noch so geringe Drehung in der Ebene vornimmt, die andere notwendig schneiden müsse; ja es ist auch nicht sofort anschaulich evident, daß sie schneiden müsse; denn die Anschauung erstreckt sich nicht bis ins Unendliche, und unmittelbare anschauliche Evidenz kann nur dann sich auf Unendliches erstrecken, wenn sie sich auf eine Negation beschränkt. So beruht unsere Überzeugung von der Unendlichkeit des Raumes nur darauf, daß wir uns jede Grenze im Raume denken müssen, weil wir den Raum jenseits der Grenze nicht wegdenken können. Ja man kann noch weiter gehen und sagen: Wenn ich auf der Erdoberfläche immer geradeaus gehe, so glaube ich doch auch, mich von meiner Anfangsstelle immer mehr zu entfernen, und doch werde ich, wenn mir keine lokalen Hindernisse im Wege stehen, auf dieser Bahn zu meiner Anfangslage wieder zurückkehren. Was berechtigt mich nun, da mich doch hier die Anschauung täuscht, weil ich die Kreislinie mit sehr fernem Mittelpunkte für eine Gerade halte, in einem anderen Fall der Anschauung mehr zu trauen und mit solcher Bestimmtheit zu sagen, daß gerade diese eine durch den Punkt A gehende Gerade die gegebene Gerade a nicht schneiden könne, jede andere in derselben Ebene liegende sie aber schneiden müsse? Da nun in der That von einer anschaulich vorliegenden geraden Strecke nicht sofort mit Bestimmtheit gesagt werden kann, ob sie wirklich ein Teil einer Geraden ist, oder ein Teil eines Kreises mit sehr fernem Mittelpunkte oder irgend einer andern sehr schwach gekrümmten Linie, auch von zweien Geraden nicht mit absoluter Sicherheit gesagt werden kann, ob sie wirklich parallel sind, wenn sie so erscheinen, so wird man bei oberflächlicher Betrachtung nichts darauf zu erwiedern wissen, und sich überreden lassen, daß es wirklich mit der anschaulichen Evidenz nichts sei. Bei genauer Untersuchung wird man aber finden: Die Überzeugung von der Wahrheit des Axiom III beruht in der unmittelbar evidenten Erkenntnis, daß einerseits ein Punkt, der sich in einer Ebene so bewegt, daß er seinen Abstand von einer Geraden in derselben nicht ändert, immer wieder eine Gerade beschreibt, während andererseits ein Punkt, der von einer gegebenen Geraden ausgehend auf einer andern fortschreitet, seinen Abstand von der verlassenen Geraden in demselben Verhältnisse vergrößert, in welchem er auf seiner Bahn fortschreitet. Daß in der That hierin und nur hierin die unmittelbare Einsicht in das fragliche Axiom beruht, das jedem evident ist, trotz der angeblich nur oberflächlichen Betrachtung, aus der es hervorgegangen, kann jeder praktische Lehrer zu jeder Zeit an seinen eigenen Schülern erproben: Fragt er irgend einen Schüler, wenn die Definition der Parallelen und ihre Theorie nicht gerade in den letzten vier Wochen vorgekommen, oder dieses Kapitel frisch repetiert worden ist, was parallele Gerade seien, so läßt sich 100 gegen 1 wetten, daß seine Antwort sein wird: „Parallele Gerade sind solche, die überall gleichen Abstand voneinander haben", und zwar wird er diese Antwort auch vorbringen, wenn noch gar nichts von dem Abstand zwischen Punkt und Gerade vorgekommen ist. Auch zeigt sich die Zusammengehörigkeit der Vorstellung paralleler und nicht paralleler meiner Erörterungen nicht ganz eingedrungen ist und meine Grundansichten nicht kennt, zur Meinung geführt werden, ich wolle durch dieses Wort meinem Urteile die Form eines logischen Schlusses geben und dadurch den Anschein erwecken, als wäre damit die Existenz eines Minimums für die lineare Verbindung getrennter Punkte logisch erwiesen. Dennoch konnte ich mich wohl keines anderen Wortes bedienen, da unsere Sprache keine besonderen Bindewörter besitzt, durch welche ich die anschaulich erkannte Notwendigkeit der Existenz einer Minimalverbindung getrennter Punkte als solche hätte ausdrücken können. Eben darum habe ich aber die Anmerkung beigefügt, in der ich mich auf die Anschauung berufen habe. Nun ist es ja wahr, daß die anschauliche Erkenntnis von der Existenz einer kürzesten linearen Verbindung zweier Punkte im Raume erweckt wird durch die Vorstellung der geraden Linie, „welche erst später vorkommt". Aber einesteils habe ich ja doch deutlich die Absicht ausgesprochen, der Anschauung nur diejenigen Daten zu entnehmen, welche zur Begründung der übrigen notwendig sind, und es ist mithin doch nichts dagegen einzuwenden, daß ich hier zunächst nur das Datum der Existenz einer kürzesten linearen Verbindung festhalte und davon abstrahiere, welche weitere Eigenschaften derselben als Linie zukommen, und ob es überhaupt nur eine sei oder mehrere. Andererseits bezieht sich meine Anmerkung nicht bloß auf den Raum, sondern auch auf *jede beliebige Fläche*, und es sollte zugleich festgestellt werden, daß unsere Anschauung uns, wie im Raume, so auch auf jeder Fläche die Existenz von *mindestens einer* kürzesten linearen Verbindung für zwei getrennte Punkte vorauszusetzen zwingt, wenn wir auch gar nicht erkennen können, *wie diese etwa beschaffen sei*, womit für jeden, der diese Einsicht gewonnen hat, klar ist, daß diese Voraussetzung *ganz unabhängig* ist von der Vorstellung dieser Linie. Meinen Schülern habe ich hierzu noch folgende Erläuterung gegeben: Man denke sich einen biegsamen aber unausdehnbaren Faden auf irgend einer Fläche in einem Endpunkte befestigt, und dann durch einen zweiten Punkt der Fläche wie durch ein Nadelöhr hindurch gezogen, so daß nur das die beiden Punkte verbindende Stück auf der Fläche bleibt, so wird man, so lange dasselbe noch keine kürzeste Verbindung der Punkte auf der Fläche darstellt, immer noch ein Stück durch diesen Punkt hindurch ziehen können; offenbar hat dieses Durchziehen aber einmal ein Ende, da der Faden doch nicht unendlich lang ist, und dann stellt er eine solche kürzeste Verbindung dar. Es kann nun wohl sein, daß diese kürzeste Linie noch auf der Fläche bewegt werden kann, ohne aufzuhören die Verbindung dieser Punkte zu sein, und dann giebt es unendlich viel kürzeste Verbindungen zwischen diesen Punkten; es kann aber auch der Fall einer diskreten Anzahl kürzester Verbindungen zweier Punkte auf derselben Fläche eintreten. Ein Beispiel erster Art ist die kürzeste Verbindung der Endpunkte eines Kugeldurchmessers auf der Kugelfläche; ein Beispiel zweiter Art liefert die kürzeste Verbindung der Endpunkte einer Achse eines Ellipsoids auf der Oberfläche desselben. Ich sollte also meinen, es sei eine notwendige Konsequenz meiner Absicht, und keine Willkür oder Inkonsequenz, daß ich zunächst nur diese Existenz von wenigstens einer Minimalverbindung zweier Punkte als Axiom aufstelle, zumal diese Voraussetzung hinreicht, um den Begriff der Distanz und der Figur aufzustellen. Daß nun das sechste Axiom wieder der anschaulichen Vorstellung derselben Linie entlehnt ist, welche zu dem ersten führt, thut dem Werte desselben keinen Eintrag, denn es ist keineswegs notwendig, daß die Punkte auf einer kürzesten Linie ihrer Lage nach durch ihre Distanz von zweien Punkten derselben bestimmt sind, und es lohnt sich darum wohl, darzuthun, daß und wie durch die vorausgesetzten Daten auch die Eigentümlichkeit des Raumes bedingt ist, daß der Ort aller durch ihre Distanz von zwei festen Punkten bestimmten Punkte zugleich die einzige Linie ist, durch welche dieselben ihre kürzeste lineare Verbindung erhalten.

Wie daraus, daß wir die Linieneinheit wählen können, folgen soll, daß wir „die Welt beliebig vergrößern und verkleinern können", und daß das Minimum „keine absolute Größe sei", ist mir unerfindlich. Wenn ich derartiges meinen Schülern vorbrächte, würde ich jedenfalls eine sehr heitere Stimmung hervorrufen. Übrigens hätte ich gar nichts dagegen, wenn ich durch passende Wahl der Linieneinheit, die Distanz zwischen Wertheim und andern Orten beliebig verkleinern könnte.

Herr Hoppe schließt seine Belehrung mit den Worten:

„Durch die Auffassung der Axiome als Hypothesen gelangen wir erst zur vollen Aufrichtigkeit gegen die Schüler; die Ambition des absoluten Wissens, welche noch nie der Einsicht förderlich gewesen ist, wird dadurch als Sebsttäuschung verurteilt".

Dem setze ich entgegen: Nehmen wir den Schülern die Überzeugung von der Zuverlässigkeit anschaulich evidenter Erkenntnis, ohne ihnen zugleich auf demselben Weg zu zeigen, worin die Möglichkeit eines Irrtums begründet sein könne, und wie im einzelnen Falle aus einer unzureichenden Beobachtung die falsche Überzeugung von der Evidenz eines nur bedingungsweise richtigen Urteils hervorgehen kann*), so ziehen wir ihnen jeden festen Boden unter den Füßen weg und nehmen ihnen dadurch jede Lust zu weiterer Forschung. Sollte aber, was ja auch in der Prima eines Gymnasiums kaum vorkommen dürfte, etwa ein ganz besonders philosophisch beanlagter Schüler einmal nach der Berechtigung zu diesem Anspruch auf unmittelbare Evidenz für so viele oft nur aus oberflächlicher Beobachtung entspringende Urteile fragen, so verweise man ihn auf die Antwort, die auf diese Frage der tiefste, gründlichste und zugleich gewissenhafteste aller Denker, Immanuel Kant, gegeben hat, und er wird erst dann sich der Grenzen und der relativen Natur alles menschlichen Erkennens bewußt werden.

Während die Umwandlung der Axiome in Hypothesen bis jetzt nichts erzeugt hat, als eine Reihe der verrücktesten Spekulationen, die je für Wissenschaft ausgegeben worden sind, wird er sich bescheiden und vor dem vergeblichen Versuche deduktiver Welterklärungen bewahrt werden durch die Einsicht, welche der genialste, konsequenteste und ehrlichste Nachfolger Kants in den Worten ausgedrückt hat: „Welche Fackel wir auch anzünden, und welchen Raum sie auch erleuchten mag; stets wird unser Horizont von tiefer Nacht umgrenzt bleiben".

2.

Mit dem besprochenen Vorurteile in innigstem Zusammenhange steht das andere, durch den Unterricht in der Geometrie, besonders durch die scharfen Definitionen und die strengen Beweise werde das logische Denken und das, was man gewöhnlich Verstand nennt, ganz außerordentlich geübt und geschärft. So fügt Herr Provinzial-Schulrat Schrader in seiner Pädagogik dem Tadel derjenigen Lehrer der Mathematik, welche um doch wenigstens etwas in ihrem Fache zu leisten, sich nur noch mit den für ihre Demonstrationen besonders begabten Schülern befassen, die folgende Bekräftigung bei: „Denn seine Aufgabe ist nicht, die Mathematik zu lehren, sondern durch die Mathematik den Geist zu bilden". Will man nun (wenn man sich etwa des Voltaireschen

*) So wird z. B. wer nur an Flächen von einfachem Zusammenhange denkt, dem nur für diese richtigen Urteile unmittelbare Evidenz zuschreiben: „Jede in einer Fläche verlaufende, geschlossene und sich selbst nicht schneidende Linie, schließt einen Teil der Fläche vollständig ein".

Ausspruchs erinnert: „Die Mathematik läßt den Verstand wie sie ihn findet") aus dem Buche selbst Belehrung über diejenigen Richtungen des menschlichen Geistes schöpfen, welche wesentlich nur durch Mathematik ausgebildet werden können — denn das würde doch allein zu der Herbeiziehung eines Lehrfaches berechtigen, das man nicht seiner selbst wegen treibt, so sucht man durchaus vergebens danach. Denn dem Unterricht der Mathematik werden zwar eine Reihe wohlthätiger Einwirkungen auf die Ausbildung des Verstandes zugeschrieben, aber zugleich dargethan, daß alle diese Einwirkungen durch den Unterricht in den alten Sprachen in viel ausgiebigerer und zugleich anregenderer Weise hervorgebracht werden. In der That kann ja nicht wohl geleugnet werden, daß ein gut geleiteter Unterricht in der Mathematik ebenso gut wie jeder andere wissenschaftliche Unterricht von großem Einflusse auf die Entwickelung des Geistes sein muß. Was aber durch diesen Unterricht und ganz besonders durch den Geometrie-Unterricht vorwiegend ausgebildet wird, sind hauptsächlich gerade nur diejenigen Geisteskräfte, welche ausschließlich bei der Mathematik und denjenigen Disziplinen zur Anwendung kommen, die sich der Mathematik als Hilfswissenschaft bedienen. Denn nur bei geometrischen und verwandten Untersuchungen ist man in der Lage, sein Wissen „durch die Konstruktion der Begriffe", d. h. durch logische Deduktionen zu erweitern, die nicht von allgemeinen Begriffen ausgehen, sondern von bestimmten vorgezeichneten Figuren, über die gewisse Voraussetzungen gemacht werden, an denen oft auch noch Hilfslinien anzubringen sind, die es allein möglich machen, auf Grund bekannter räumlicher Beziehungen die vorausgesetzten Daten so zu gruppieren, daß Schlüsse gezogen werden können, durch die man wieder die Ober- oder Untersätze zu neuen Schlüssen gewinnt. Es ist ja gerade eines der Hauptverdienste Kants, gezeigt zu haben, daß die Mathematik nur scheinbar eine Wissenschaft aus Begriffen ist, in der That aber keinen Schritt weiter geht, ohne auf die Anschauung zurück zu gehen, während man durch bloße Anwendung der logischen Denkthätigkeit über die Begriffe, von denen man ausgegangen, gar nicht hinauskommen kann. Das mathematische Denken, soweit es auf Erweiterung der Wissenschaft gerichtet, ist von jeder andern Denkthätigkeit so himmelweit verschieden, daß es in keiner Weise als Vorbereitung zu irgend einer andern wissenschaftlichen Thätigkeit dienen kann, ja bei einseitiger Ausbildung desselben geradezu hindernd im Wege steht, wie denn auch gar oft ganz vorzügliche Mathematiker sich im praktischen Leben, sobald sie aus ihrer eigentlichen Sphäre heraustreten, als unpraktisch, eckig und unbehilflich erweisen. Das Wesentliche bei allem wissenschaftlichen Denken besteht nicht in dem Ziehen von Schlüssen, wenn die Prämissen gegeben sind, sondern in dem Ausfindigmachen der Prämissen, die zu Schlüssen führen. „Aus gegebenen Prämissen einen richtigen Schluß ziehen kann jeder Tropf", sagt Schopenhauer irgendwo. Das Ausfindigmachen der Prämissen aber erfordert Urteilsfähigkeit und Beobachtungsgabe, welche allein befähigen, die überall sprudelnden Quellen des Irrtums möglichst zu vermeiden. Wie soll aber ein Unterricht dazu befähigen, der nicht bloß die Prämissen zu jedem Schlusse selbst giebt, sondern auch noch die Schlüsse selbst zieht, so daß der Schüler nichts zu thun hat als den vorgezeichneten Gang nachzugehen, durch den ihm jede Möglichkeit des Irrtums geradezu genommen ist. Der leider anonym gebliebene englische Verfasser der auch von Schopenhauer rühmlichst erwähnten Abhandlung, welche unter dem Titel „Über den Wert und Unwert der Mathematik als Mittel der höheren geistigen Ausbildung" im Jahre 1836 (Kassel, im Verlage von J. J. Bohné) ebenfalls anonym in deutscher Übersetzung erschienen ist, vergleicht darum nicht mit Unrecht das Verfahren, das Denkvermögen durch Mathematik zu bilden, mit demjenigen, das Schwimmen durch Vorübungen in einer Truhe voll Quecksilber, in welchem das Sinken unmöglich ist, zu lehren. Gilt auch vieles, was in diesem Schriftchen gegen die Verwendung der Mathematik als Bildungsmittel vorgebracht wird, nur für einen geo-geometrischen Unterricht nach der Methode des Euklid, und nur für einen solchen, der vor lauter Demonstrationen zu keiner Anwendung des Erlernten kommt, womit erst dem angehenden selbständigen Geometer vielfach Gelegenheit gegeben wird, seine Urteilskraft, ja sogar seine Beobachtungsgabe zu schärfen, um den auch hier nicht ganz verschlossenen Quellen des Irrtums aus dem Wege zu gehen und seine Erkenntnisse selbständig zu erweitern, so wird doch derjenige, welcher dies Schriftchen ohne vorgefaßte Meinung liest und hinreichende eigene Erfahrung auf dem Gebiete des mathematischen Unterrichts besitzt, daraus ersehen, daß durch Mathematik wesentlich nur diejenigen Geisteskräfte ausgebildet werden, welche ausschließlich bei dem weitergehenden Studium der Mathematik zur Geltung kommen, während für die allgemeinere Geistesbildung aus ihrem Studium nur so viel gewonnen wird, wie aus jeder andern speziellen Wissenschaft. Dieser Gewinn wird um so größer sein, je mehr man darauf Bedacht nehmen wird, die Mathe-

Erlernten mit dem früheren stets aufrecht zu erhalten, glauben viele Lehrer der Mathematik, der Lehrbücher ganz entbehren oder sich auf Aufgabensammlungen und solche Lehrbücher beschränken zu dürfen, die nur einige Hauptresultate und dürftige Skizzen bringen.

Das mag für besonders begabte Schüler auch hinreichen; denn diese lassen den einmal ergriffenen Faden von selbst nicht mehr fallen und finden meist in sich selbst die Mittel, die durch die Vergeßlichkeit entstandenen Lücken jederzeit wieder auszufüllen, besonders wenn der Unterricht ein guter und anregender ist und einerseits bei jedem neuen Theorem den Zusammenhang mit den früheren nach allen Richtungen nachweist, andererseits an jedes neue Theorem die Verwertung desselben zur Lösung praktischer Aufgaben anschließt. Aber die minder begabten Schüler, und das ist nicht selten die ganze Klasse, immer aber ein sehr großer Teil derselben werden auf diese Weise nur sehr wenig gefördert und verlieren meistens allen Mut und alle Lust, dem Unterrichte weiter zu folgen, da sie selbst beim größten Fleiße einmal eingerissene Gedächtnislücken nicht wieder selbständig auszufüllen vermögen. Wenn freilich der Lehrer, was auch zuweilen der Fall ist, sich auf ein ganz kleines Pensum beschränkt, das er so oft wiederholt und so breit tritt, daß es schließlich jedem zum Ekel wird, so wird zwar diesem Übelstand einigermaßen abgeholfen; der Unterricht hat aber dann auch einen sehr geringen Wert.

Was viele abhält, ein ausführliches Lehrbuch der Geometrie, das namentlich auch die Beweise in voller Ausführlichkeit enthält, ihrem Unterrichte zugrunde zu legen, ist der Umstand, daß allerdings manche Schüler dadurch in den Irrtum verfallen, sie könnten sich den Inhalt desselben ähnlich wie etwa die Grammatik oder Geographie durch bloßes Auswendiglernen aneignen, und durch bloß gedächtnismäßiges Hersagen des Beweises die Meinung erwecken, als hätten sie ihn verstanden. Dem ist aber sehr leicht zu begegnen, wenn der Lehrer beim mündlichen Vortrage, sowie bei der Repetition durch andere Wahl der Figuren und Buchstaben von der Darstellung im Buche abweicht, überhaupt beim Unterrichte das Buch selbst nur dann benutzt, wenn es sich darum handelt, den Schülern zu zeigen, wie dasselbe von ihnen bei der Repetition zu benutzen sei, oder auch um sie dasselbe richtig lesen zu lehren, was bei Tertianern besonders häufig nötig sein dürfte. Bedient man sich aber gar keines Buches, so werden auch bei der besten Methode und dem klarsten und präzisesten Vortrage mittelmäßig begabte Schüler selbst beim besten Willen dem Unterrichte auf die Dauer nicht folgen können. Gar häufig wird der Lehrer die Erfahrung machen können: Gesetzt, er habe irgend ein Theorem, das eines einigermaßen komplizierten Beweises bedarf, vollständig und gründlich durchgesprochen und nach allen Seiten beleuchtet, so daß er aus den Antworten, die er von den Schülern auf alle dahin gehörigen Fragen erhalten, die Überzeugung gewonnen hat, diesmal sei neun Zehnteln der Klasse alles vollkommen klar geworden. Kommt er dann in der nächsten Stunde, die erst drei oder vier Tage später stattfindet, wieder auf dasselbe Thema und läßt sich nun den Beweis — nicht von den zwei oder drei besten — sondern von einem der übrigen Schüler wiederholen, so wird derselbe eine unglaubliche Unwissenheit über das vorgelegte Thema entwickeln und die zehn folgenden, die ihm nacheinander beistehen sollen, werden nichts Besseres vorzubringen wissen, wenn nicht endlich einer der besonders begabten (sehr oft ist dies nur einer, noch häufiger gar keiner) aus der Patsche hilft. Und doch hatten in der vorigen Stunde alle selbst geglaubt, sie hätten den Beweis ganz gut verstanden, weil ihnen jeder einzelne Schluß ganz klar war, als ihn der Lehrer vorgebracht hatte. Aber über die drei Tage ist ihnen der Faden verloren gegangen, welcher die einzelnen Schlüsse verband und somit das Ganze zerfallen. Aus der Figur, die vielleicht im Gedächtnis haften geblieben und einzelnen Daten, die ihnen, als mit dem Beweise zusammenhängend, noch erinnerlich, kann aber nur der vorwiegend geometrisch begabte sich wieder zurecht finden; die andern wissen weder, wo anfangen, noch wie fortsetzen. Hat aber ein fleißiger, wenn auch nur schwach begabter Schüler den ganzen aus dem lebendigen Vortrag einmal verstandenen Beweis in seinem Buche vollständig vorliegen, so wird er ihn sich zu Hause so oft wiederholen, bis er ihn nicht bloß im Einzelnen, sondern im Zusammenhange vollständig begriffen und dadurch zu seinem geistigen Eigentume gemacht hat, das er mit Hilfe dieses Buchs auch dann jederzeit wieder neu erwerben kann, wenn sein Gedächtnis nichts mehr davon aufbewahrt. Denn ist es auch richtig, daß man die Mathematik nicht durch Auswendiglernen, also lediglich auf Grund eines guten Gedächtnisses erlernen kann, so bedarf man doch sehr des Gedächtnisses, um ihre Lehren zu behalten, und zwar sowohl zum Behalten der Sätze als der Beweise. Wer aber nicht ein so gutes Gedächtnis für dergleichen Dinge besitzt (und es hat nicht jeder für alles gleich gutes Gedächtnis), der muß seine Zuflucht nehmen zu einem Buch, wo er das, was er sich einprägen und behalten soll, vollständig ausgeführt findet. Ich spreche hier auf Grund langjähriger eigener Erfahrung. Denn ich selbst hatte lange an der Meinung festgehalten, der Schüler müsse in der Schule selbst den Gegenstand sich so vollkommen aneignen, daß er dauernd haften bleibe, habe aber mehr und mehr mich überzeugt, daß dies nur bei ganz außergewöhnlicher Begabung möglich ist, oder auch dann, wenn man sich immer in demselben kleinen Kreise weniger leichter Sätze bewegt, und im Grunde also nichts leistet, was für irgend einen Schüler einen andern Nutzen haben könnte, als daß er etwa wieder in derselben Weise andere drillen kann. Daß nicht bloß junge, sondern auch alte Lehrer, wie mir ein Rezensent vorhält, trotz langjähriger Erfahrung ohne Lehrbuch dozieren oder mit bloßen Diktaten oder kurzen Leitfäden, welche die Beweise andeuten, auszureichen glauben, beweist nichts gegen die Richtigkeit meiner Erfahrungen. Denn sehr viele machen eben in ihrem ganzen Leben keine Erfahrungen, weil ihnen die Einsicht in den kausalen Zusammenhang der Erscheinungen fehlt oder verkümmert ist.

Druck von Pöschel & Trepte in Leipzig.

Auszüge

aus den öffentlichen Beurteilungen der Lehrbücher

von

Johann Karl Becker.

Außer dem bei Karl Schoch in Schaffhausen 1872 erschienenen Leitfaden der Geometrie für Mittelschulen (Planimetrie und Stereometrie umfassend) hat derselbe folgende Lehrbücher herausgegeben:

1. Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage streng deduktiv dargestellt. Bd. I. Berlin, Weidmann. Preis 7 M.

2. Lehrbuch der Elementarmathematik für den Schulgebrauch. Im gleichen Verlage in fünf einzeln verkäuflichen Büchern erschienen, nämlich:

I. Teil. Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.
1. Buch. Das Pensum der Tertia und Sekunda. (Preis 1 M. 60 Pf.)
2. Buch. Das Pensum der Prima. (Preis 1 M. 60 Pf.)

II. Teil. Lehrbuch der Elementargeometrie.
1. Buch. Das Pensum der Tertia und Untersekunda. (Preis 1 M. 60 Pf.)
2. Buch. Das Pensum der Obersekunda. (Preis 2 M.)
3. Buch. Das Pensum der Prima. (Preis 2 M. 40 Pf.)

1.

Über die „Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage" bringen Referate: Die Fortschritte der Mathemathik (IX, 2), das Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques par M. G. Darboux, J. Hoüel et J. Tannery (2e série, t. I 1877), die Zeitschrift für das Gymnasialwesen von Hirschfelder und Kern, die Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht von J. C. V. Hoffmann, das Zentralorgan für die Interessen des Realschulwesens, das Archiv für reine und angewandte Mathematik, die Jenaer Litteraturzeitung, die Gaea, die allgemeine Schulzeitung von Dr. K. V. Stoy. Endlich hat der Verfasser selbst in dem „Repertorium für reine und angewandte Mathematik" von Königsberger und Zeuner (II, S. 35) ein Referat veröffentlicht, das Veranlassung, Zweck und Inhalt des Werkes kurz angiebt.

Von den genannten Zeitschriften geben zunächst die „Fortschritte der Mathematik“ eine ausführliche Aufzählung der Axiome und ein sehr knappes Referat über den Inhalt, ohne jedes Urteil.

Die ausführliche Kritik in der genannten französischen Zeitschrift rührt von Herrn Dr. S. Günther, Prof. am Gymnasium in Ansbach, her. Sie beginnt damit, die prinzipielle Verschiedenheit zwischen den Ansichten des Referenten über die Quelle des math. Wissens und denen des Verfassers auseinanderzusetzen und fährt dann fort:

„Au point de vue pédagogique, comme au point de vue mathématique, nous sympathisons entièrement avec l'auteur; mais au point de vue de cette branche de la science, que l'on a assez improprement nommée la métaphysique de la Geométrie, nous considérerions comme très-regrettable qu'une répugnance systématique,*) comme celle que l'on rencontre chez M. Becker, pour l'examen des sources de nos connaissances, se répandit généralement.

„Ayant ainsi expliqué en quoi notre point de vue diffère de celui de l'auteur, nous nous astreindrons, dans ce qui va suivre, à accepter complétement sa base pour la nôtre, et à examiner jusqu'à quel point il est resté fidèle à la marche qu'il s'est tracée. Nous commencerons par déclarer qu'à notre avis il a, sous ce rapport, parfaitement réussi, et que nous avons vraiment affaire à une nouvelle création, qui s'imposera même à l'attention des personnes assez nombreuses qui sont par principe les adversaires de cette méthode.“ Dann folgen weitere Ausführungen.

Am Schluß kommt noch folgende Bemerkung:

„Les savants des pays voisins de race latine avaient eu jusqu'à ces derniers temps sur leurs confrères d'Allemagne l'avantage incontesté d'écrire leurs Traités avec plus de clarté. De nombreux livres d'enseignement publiés dans ces dernières années témoignent que les auteurs allemands apprennent peu à peu à suivre l'exemple de leurs émules. Parmi ces livres l'Ouvrage que nous venons d'analyser a sans aucun doute le droit de figurer.“

Da dieses Referat zwar in französischer Sprache geschrieben ist, aber doch von einem Deutschen herrührt, so sei noch bemerkt, daß in der Vorrede zu den „Eléments de Géométrie par A. M. Legendre, revus et mis en rapport avec les méthodes scientifiques modernes par H. Girard (Capitaine en premier du Génie, Professeur à l'Ecole militaire, ancien professeur de Mathématiques supérieures et de Mécanique), Namur 1881“ Herr Girard diejenigen, welche sich für den Fortschritt der Elementargeometrie interessieren, auf das obige Buch ganz besonders aufmerksam macht.

Herr Prof. Dr. Günther ist auch der Referent für die „allgem. Schulzeitung“ und schließt das dort veröffentlichte kurze Referat mit den Worten:

*) Nämlich gegen die sogenannte „absolute Geometrie“ und eine Philosophie wie die von Benno Erdmann.

„Wenn auch nicht als Lehrbuch, so doch als Handbuch für Lehrer und gereifte Schüler werden Beckers Elemente treffliche Dienste leisten".

In dem Archiv für reine und angewandte Mathematik (61. Teil, Heft 4, S. 40) sagt der Herausgeber, Herr Prof. Dr. Hoppe:

„Das vorliegende Werk ist eine entfaltete Darlegung der Prinzipien der Geometrie nach ihrem logischen Inhalt. Um das vorgesetzte Ziel zu erreichen, ist der pädagogische sowie der systematische Gesichtspunkt ganz bei Seite gelassen. Die Aufgabe stellt zu große Anforderungen, als daß sie ohne vorgängige Trennung der Gesichtspunkte gelöst werden könnte. Manche Versuche in gleichem Sinne sind in neuester Zeit zu Tage getreten. Die gegenwärtige Bearbeitung möchte wohl eine vor allen früheren hervorragende Leistung zu nennen sein. Es sind darin die gesamten prinzipiellen Fragen aus dem Versteck ans Licht gezogen, in vortrefflicher Klarheit, ohne Entstellung der Thatsachen durch eingemischte Strebungen, aufgefaßt und in einfachster Form durch didaktische Aufstellungen gelöst. Der Verfasser räumt gern die Möglichkeit von Irrungen ein, indem er sich trotzdem bewußt ist einen gesicherten Fortschritt gethan zu haben; denn sein Werk ist kein künstlicher Bau, der zusammenbricht, wenn eine Stütze versagt; nichts ist auf die Spitze des Wortes gestellt, vielmehr alles im freien Gedanken, den Gegenstand und die Aufgabe vor Augen, zur Reife gebracht, dann erst in die geeignete Darstellungsform gebracht. Es tritt uns darin die große Überlegenheit derjenigen Logik, welche erst denkt, dann spricht, über die gewöhnliche formelle Logik, welche nur innerhalb der oft sehr zufälligen Grenzen des Wortes zu denken vermag, recht deutlich entgegen. In Verbindung hiermit steht wohl auch die Ansicht des Verfassers über die Axiome, daß, wofern sie nur sind, was sie sein sollen, nämlich von selbst einleuchtend, wir nicht so wenige, sondern so viele als möglich statuieren müßten. Er stellt deren sieben oder acht auf, ist aber stets bereit ein neues hinzuzufügen. Auf die Genesis der Begriffe und der den Axiomen zugrunde liegenden Erfahrungen geht er nicht ein, nimmt vielmehr deren Resultate auf, sofern die Deutlichkeit eines jeden unbestritten ist; gleichwohl ist in den Herleitungen die Leitung durch die Genesis oft zu erkennen. Der Stoff des Buches, in welchem Planimetrie und Stereometrie ungetrennt erscheint, ist zu ausgedehnt und mannichfaltig, um den besondern Inhalt vorführen zu können; vieles ist darin originell instruktiv, manches sogar unmittelbar für die Schule verwendbar. Zu letzterem ist die Erklärung des Winkels zu rechnen. Es wird unbedenklich ausgesprochen: Der Winkel ist die Winkelfigur; mit der Länge der Schenkel macht man sich nur nichts zu thun — unbedenklich und mit Recht, denn die Größe des Winkels muß unter allen Umständen durch die Bedingung der Gleichheit und Ungleichheit besonders definiert werden."

Eine sehr ausführliche Rezension (zehn Seiten lang) liefert Herr Dr. Killing in der Hoffmannschen Zeitschrift. Dieselbe schließt mit den Worten:

„Blicken wir noch einmal auf die ganze Besprechung zurück, so müssen wir allerdings gestehen, daß wir dem Werke ein unbedingtes Lob nicht er-teilen können. Wir glauben jedoch genug Gründe hervorgehoben zu haben, aus denen wir es in den Händen vieler Lehrer sehen möchten. Die Ansicht des Herrn Verfassers, daß ein praktischer Lehrer manches in dem Buche finden werde, was er beim Unterrichte verwenden könne, wird gewiß allen Lesern als viel zu bescheiden erscheinen. Auch in der Hand fähiger Schüler dürfte das Werk von großem Nutzen sein, da es sie in schwierige Partien einzuführen und im ganzen zu einem strengen Beweisverfahren anzuleiten vermag. Wir wünschen demselben eine weite Verbreitung."

Die „Gaea" (Jahrg. 1877, S. 771) sagt darüber:

„Der Verfasser als scharfer, philosophischer Denker bekannt, liefert in diesem Lehrbuche in einer ihm eigentümlichen Weise eine Entwickelung der Elementargeometrie, die auch sehr hohen Anforderungen wohl genügen dürfte. Das Buch ist nicht für Anfänger bestimmt, aber recht geeignet, dem weiter Fortgeschrittenen von höheren Gesichtspunkten aus, als sehr anregendes Hilfsmittel zu tieferem, wissenschaftlichem Studium zu dienen."

In dem Zentral-Organ für die Interessen des Realschulwesens (VIII, S. 254—256) giebt Herr Dr. Fr. Poske nach einer dreimal so langen Kritik der philosophischen Ansichten des Verfassers und einiger aus dem Zusammenhang herausgerissenen Stellen der Einleitung das folgende Urteil über das Buch selbst ab:

„Erscheint die Anschauung bei der bisherigen Entwickelung in Wahrheit „von einem bösen Geist im Kreis herumgeführt", so bewährt sie sich dagegen in den übrigen Ausführungen des Buches als ungemein fruchtbar und ausgiebig. Die thunlichste Ablösung der Lehrsätze von der arithmetischen Beweisform, die Zurückführung derselben auf rein anschauliche Operationen mit den einfachsten Gebilden, wie sie die neuere Geometrie inauguriert hat, ist in dem Buche mit großer Konsequenz angestrebt. Die formale Bedeutung der befolgten Methode liegt darin, daß sie auch bei dem Beweisverfahren aus der Anschauung den streng logischen Charakter der Schlußweise durchsichtig macht; die gegebenen Entwickelungen können in der That darauf Anspruch machen, eine streng deduktive Darstellung des Stoffes zu sein. — Das Buch ist nicht für den Unterricht bestimmt, sondern giebt sich als selbständige Abhandlung; gleichwohl wird man vielfach in den Abschnitten über die symmetrischen Figuren, noch mehr in denen über die räumlichen Gebilde anregendes und auch für den Unterricht brauchbares finden. Beachtenswert ist namentlich die Definition der Ebene als Kegelfläche, welche der eine Schenkel eines rechten Winkels beschreibt, wenn derselbe um den andern Schenkel als Axe gedreht wird (man vgl. Worpitzky); die klare und schöne Ableitung der Hauptsätze über die Ebene aus dieser Definition; die Betrachtungen der Ebenenbüschel und der Symmetrieebenen; die Sätze über Cylinder- und Kegelflächen. Den Schluß bilden Untersuchungen über gleicheckige und gleichflächige Polyederflächen von einfachem Zusammenhang, sowie über Polyeder mit dreifach zusammenhängender Oberfläche. Alles in allem genommen, ist das Buch als eine willkommene Erweiterung der mathematischen Litteratur zu begrüßen."

Noch mehr als die Herren Poske, Killing und Günther zieht Herr P. Langer in der Jenaer Litteraturzeitung (1877, S. 260—262) gegen einige Bemerkungen in der Vorrede zu Feld, um dann doch mit der folgenden anerkennenden Beurteilung des Werkes selbst zu schließen:

„Was die einzelnen Axiome sonst anlangt, so sind sie sehr anschaulich gehalten. Nur könnte im Sinne des Verfassers das fünfte Axiom direkt als Axiom von der Ebene benutzt werden, indem gesagt wird: „alle Punkte, welche durch ihren Abstand von zwei festen Punkten nicht völlig bestimmt sind und von den beiden Punkten denselben Abstand haben, erfüllen stetig eine ohne Ende ausgedehnte Fläche, welche durch die Mitte des Abstandes der beiden Punkte geht.“ Gegen die Ableitung der Sätze ist sonst wenig einzuwenden, vielmehr sind alle von anerkennenswerter Klarheit und vielleicht grade für den Unterricht am geeignetsten. Nur möchte Referent eine größere Gliederung gern sehen in ähnlicher Weise wie es im kleinen von Kambly durchgeführt ist. Die Sätze könnten hinsichtlich ihrer Bedeutung vielleicht auch äußerlich anschaulich durch verschiedenen Druck mehr charakterisiert werden. Das Werk ist sonst eine beachtenswerte Erscheinung, es teilt die Anschaulichkeit mit des Verfassers sonstigen kleineren Schriften, die alle nur von leidenschaftlicher Polemik gegen die moderne Raumauffassung*) durchglüht sind. Und so sei denn dieses Werk allen „esprits de bonne foi“ empfohlen. Der Gegensatz zur absoluten Geometrie, die ja immerhin eine solche Bedeutung wie die reformierte Euklidische nicht besitzt, bezieht sich ja nur auf die Axiome; vielleicht wird in späteren Auflagen dieser Gegensatz weniger schroff hervortreten und am Ende ganz verwischt werden. Dazu ist nur nötig, daß die Axiome als anschaulich hypothetisch erkannt werden, daß zugegeben wird, daß die Geometrie des Verfassers deshalb die am meisten geltende bleibt, weil sie unserer Anschauung am meisten entspricht und nicht weil es so sein muß.**) Das ist in letzter Instanz der ganze Unterschied.“

2.

Über die Lehrbücher für den Schulgebrauch bringen außer einem Teil der genannten Zeitschriften noch Referate: die (österreichische) Zeitschrift für das Realschulwesen, die Zeitschrift für österreichische Gymnasien, die Zeitschrift für bayerische Gymnasien, das pädagogische Archiv, die pädagogischen Jahresberichte, der „Wegweiser durch die pädagogische Litteratur“ und das „Pädagogische Litteraturblatt“ von Dr. Werner Werther (Hannover).

In dem letztgenannten (Jahrg. I, S. 131) findet sich über die vier ersten Bücher das folgende Referat:

„Der Verfasser der vorliegenden Lehrbücher hat bei Abfassung dieses

---

*) Nämlich die der Herren Frischauf, Langer, Rosanes 2c. und ihres Philosophen Benno Erdmann.

**) Was übrigens der Verfasser nie behauptet hat.

neuesten Werkes nicht bloß Gymnasien, sondern auch Realschulen und Realgymnasien im Auge gehabt und setzt seitens der Lernenden diejenigen Kenntnisse voraus, „welche ein normaler Schüler beim Eintritt in die Untertertia eines Gymnasiums oder einer Realschule I. Ordnung mitbringt". Namentlich aber sollen diese Lehrbücher auch zum Selbststudium für fähige Schüler dienen. „Um den verschiedenen Bedürfnissen der verschiedenen Klassen gerecht zu werden", sind beide Lehrbücher je „in zwei einzeln verkäufliche Teile geteilt", wie oben zu ersehen ist. Das Lehrbuch der Arithmetik und Algebra behandelt im Pensum der Tertia und Sekunda in sechs Kapiteln das Rechnen mit ganzen Zahlen, die Teilbarkeit der ganzen Zahlen, das Rechnen mit rationalen Zahlen, die Potenzen, Wurzeln und Logarithmen und die algebraischen Gleichungen 1. und 2. Grades, im Pensum der Prima in acht Kapiteln die Kettenbrüche und diophantischen Gleichungen, die arithmetischen und geometrischen Progressionen, Zinseszins- und Rentenberechnung, das Rechnen mit komplexen Zahlen, die Permutationen, Kombinationen und Variationen, die Wahrscheinlichkeitsrechnung, die Anwendungen der Kombinatorik auf die allgemeine Arithmetik, die ganzen algebraischen Funktionen und die algebraischen Gleichungen, die Potenzreihen und die Determinanten und ihre Anwendung auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Ein Anhang giebt endlich noch die direkte Bestimmung der Koeffizienten a_1, a_2, $a_3, \ldots . a_r$ in der Reihe $n^r = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} a_2 + \cdots \binom{n}{r} a_r$. Verfasser ist durchaus nicht der Meinung, daß der ganze Inhalt dieses zweiten Buches „in der Prima eines Gymnasiums durchgenommen werden solle"; dies scheint ihm bei der Zeit, die in der Prima der meisten Gymnasien dem mathematischen Unterrichte zugewiesen ist, geradezu unmöglich zu sein; aber er hält es für angezeigt, „daß ein Lehrbuch für die Schüler der Prima nicht ein Minimum, sondern das Maximum alles dessen enthalten soll, was etwa in einer guten zweijährigen Prima bei durchgeführter Trennung der beiden Jahreskurse und nicht zu großer Schülerzahl durchgenommen werden könnte." Ref. ist damit völlig einverstanden. Alles, was und wie es hier für den Schulgebrauch geschrieben ist, wird willkommen sein. Die Benutzung zum Selbstunterrichte wird neben klaren Erläuterungrn besonders auch durch zahlreiche Paradigmata und Übungsaufgaben, welche letzteren den Schüler in Stand setzen, seine mathematischen Kenntnisse praktisch zu verwerten und welche — soweit es die eingekleideten Aufgaben zu den Gleichungen betrifft — fast ausschließlich aus der Geometrie und der Physik genommen sind, ermöglicht. Zu den Übungsaufgaben, sowohl uneingekleideten als eingekleideten sind keine Resultate gegeben. Das Pensum für Prima enthält sachlich neues, was andere Lehrbücher nicht bieten. An diese beiden durchaus empfehlenswerten arithmetischen Bücher schließen sich in gleich vollendeter Anlage und Form die beiden Pensen des Lehrbuchs der Geometrie an. Die wesentlichste und wichtigste Aufgabe der Geometrie, „die in den räumlichen Gebilden zu Tage tretenden Gestaltungsgesetze ausfindig zu machen und klar darzulegen, sei es mit Berufung auf unmittelbare Evidenz, wo diese möglich, sei es durch Beweise, wo es nicht anders geht," ist dem Verfasser neben den Forderungen der Pädagogik maßgebend gewesen. Das Pensum für Tertia und Untersekunda enthält in fünf Kapiteln: Einleitung und Grundbegriffe, ebene Figuren aus zwei und drei Geraden, Vierecke und Vielecke, Vergleichung der Vielecke nach Fläche und Umfang, metrische Relationen zwischen Strecken, Ähnlichkeit der Dreiecke und Berechnung des Kreises.

Am Ende eines jeden Kapitels sind Fragen zur Repetition, resp. Konstruktionen und Aufgaben, sachgemäß und ausreichend geboten. Das Pensum der Obersekunda behandelt in der 1. Abteilung die ebene Trigonometrie und zwar zunächst die Funktionen der spitzen Winkel und das rechtwinklige Dreieck, dann die trigonometrischen Funktionen beliebiger Winkel, Goniometrie, und die Anwendung auf das Dreieck, Viereck und Vieleck, in der 2. Abteilung als zweite Stufe der Planimetrie die Anfangsgründe der projektivischen Geometrie. Aufgaben mit und solche ohne Auflösung reihen sich der ersten Abteilung an. Ref. glaubt sich den Dank vieler mathematischer Lehrer zu verdienen, wenn er sie besonders auf dieses Lehrbuch, das in mehr als einer Hinsicht von der großen Menge seiner Art abweicht, aufmerksam macht. Rückbeil, Oberlehrer an der Realschule in Sondershausen."

Ein ähnliches Referat, unterzeichnet Villicus, bringt der „Wegweiser durch die pädagogische Litteratur" vom Jahre 1881, VII, S. 66, aus dem wir nur die folgende Stelle entnehmen:

„Indem der Verfasser weiter angiebt, die Aufgaben von Heis teilweise benützt zu haben, bemerkt er zu dieser sehr umfangreichen Aufgabensammlung ganz zutreffend, daß es ein Übelstand sei, wenn man die Schüler teuere Bücher anschaffen läßt, von deren Inhalt die große Mehrzahl kaum $^1/_{10}$, und selbst diejenigen, welche das Gymnasium oder die Realschule vollständig absolvieren, kaum $^1/_3$ brauchen, während sie beim Repetieren auf dürftige Notizen oder Diktate beschränkt sind. Die natürliche Folge ist dann die, daß die Schüler selbst zu solchen Lehrbüchern greifen, die ihnen durch Zufall bekannt werden, und da sie dort meist wieder alles in ganz anderer Art behandelt finden, so ist es kein Wunder, wenn viele es aufgeben, in der Mathematik etwas leisten zu wollen. Referent teilt die Meinung des Verfassers, daß der Unterricht fruchtbringender wird, wenn das demselben zu Grunde liegende Lehrbuch die Theorie und Praxis so schicklich wie das vorliegende verbindet, in welchem jedem Abschnitte zahlreiche Übungsaufgaben beigegeben sind, die nach vorausgegangener theoretischer Entwickelung mathematischer Lehrsätze den Schüler in den Stand setzen, mit Verständnis die Aufgaben zu lösen. Die ziemlich vielen eingestreuten physikalischen Aufgaben, durch welche der Autor das abstrakte Formelwesen der allgemeinen Arithmetik abschwächt, beleben den mathematischen Unterricht durch unmittelbare Betrachtung und Anwendung auf das Naturleben in eingeschaltenen kurzgefaßten physikalischen Erörterungen, und erhöhen die praktische Brauchbarkeit des in Rede stehenden Werkes. Die sonst von manchen Lehrern sehr beliebten Rätselaufgaben im Texte der Gleichungen vermissen wir gänzlich, welcher Abgang keineswegs zu bedauern ist, nachdem durch sie nur eine sehr zweifelhafte Anregung zum Studium der Mathematik erzielt werden kann".

Das Zentralorgan für die Interessen des Realschulwesens (V, S. 737) giebt über den ersten Teil folgendes Referat:

„Es ist eine willkommene Gabe aus Süddeutschland, die uns in dem vorliegenden Werk geboten wird (der Verfasser ist Professor am Gymnasium in Mannheim). Die Darstellung ergeht sich namentlich bei den Elementen in breiter Behäbigkeit und nimmt vieles auf, was wohl besser der mündlichen Erklärung vorbehalten bleibt, so daß das Buch vorzugsweise auch für den Selbstunterricht geeignet erscheint; aber die begriffliche Schärfe der Definitionen und die Klarheit der Entwickelung lassen kaum etwas zu wünschen übrig. Den einzelnen Abschnitten sind zahlreiche Übungsaufgaben beigefügt, bei deren Auswahl ein Hauptaugenmerk auf die praktische Verwertung der gewonnenen Kenntnisse gerichtet wurde. Die Textaufgaben zu den Gleichungen sind mit Recht fast ausschließlich der Geometrie und der Physik entnommen und bekunden das dankenswerte Bestreben, das abstrakte Formelwesen mit dem lebendigen Stoff sinnlicher Naturthatsachen zu durchsetzen und zu durchdringen. Besondere Anerkennung verdienen auch die historischen Hinweise, die namentlich auf der Oberstufe den Hauptsätzen beigefügt sind, und denen zur Hebung des Kontinuitätsbewußtseins wie des Pietätsgefühls auf wissenschaftlichem Gebiete eine hohe, oft verkannte Bedeutung beigelegt werden muß. —

Das erste Buch umfaßt die Elemente bis zu den algebraischen Gleichungen zweiten Grades und deren Anwendung auf einfache Maximal- und Minimalaufgaben. Das zweite Buch liefert für den Unterricht in der Prima ein reiches Material, dessen völlige Ausnutzung freilich jenseits der Grenzen der Möglichkeit liegt, und das zum Teil nur für den Privatfleiß begabterer Schüler mit Vorteil verwendbar ist. Gleichwohl möchte man nichts von dem Inhalte des Buches missen; es erstreckt sich nächst den Kettenbrüchen und Progressionen auf die Theorie der komplexen Zahlen, auf die Kombinationslehre und deren Anwendungen; in den letzten drei Kapiteln werden die ganzen algebraischen Funktionen und die algebraischen Gleichungen, die Potenzreihen und die Determinanten ausführlich behandelt. Als sachlich neu ist hervorzuheben eine erweiterte Anwendung des binomischen Satzes auf die Darstellung von figurierten Zahlen und eine bequeme Formel zur Berechnung des Prismatoids. Die äußere Ausstattung des Buches durch die Verlagshandlung ist reich und überaus ansprechend.

Berlin. Dr. Fr. Poske."

Derselbe „Wegweiser durch die pädagogische Litteratur", der das oben erwähnte Referat von Villicus brachte, bringt schon im Jahrgang 1879 Nr. 2 ein längeres Referat, unterzeichnet P., über die Arithmetik allein, welches beginnt mit den Worten:

„Ein vortreffliches Werk nach Inhalt und Anlage wie nach Form und Ausführung".

Der Schluß lautet:

„Referent hatte sich beim Durchlesen der Schrift eine größere Anzahl von Notizen zur Empfehlung desselben gemacht. Die Rücksicht auf den Raum gestattet ihm aber nicht, dieselben hier anzufügen. Möge jeder, der Interesse für den fraglichen Gegenstand hat, das Buch selbst zur Einsicht verlangen. Die typische Ausstattung des Lehrbuchs verdient volle Anerkennung".

Aus der ausführlichen Rezension, die Herr Dr. Killing über den ersten Teil in der Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht IX, S. 294 bis 300 geliefert hat, heben wir folgende Stellen heraus:

„Beim Beweise arithmetischer Sätze kommt es sehr oft darauf an, zu erkennen, daß eine mit bestimmten Zahlen durchgeführte Betrachtung auf alle andern Zahlen übertragen werden könne, und der Beweis ist, wenn er mit allgemeinen Zahlzeichen durchgeführt wird, nur die Andeutung einer solchen Übertragung. In allen diesen Fällen ist es also notwendig, den Schüler zunächst in die Betrachtung selbst einzuführen und ihm die volle Einsicht zu verschaffen; dagegen ist es ziemlich gleichgiltig, ob er sich die allgemeine Form auch noch aneignet. Demnach wird man es ganz billigen, daß in diesen Fällen der Beweis nur an einem Beispiele durchgeführt ist, welches erkennen läßt, daß derselbe Beweis für jedes andere Beispiel bestehen bleibt. Es ist dies nichts anderes, als daß die Geometrie eine Figur zu Grunde legt, welche zwar speziell ist, aber dem Beweise keine Beschränkung auflegt".

„Mit besonderer Freude haben wir die drei letzten Kapitel gelesen, da sie eine ganz vorzügliche Vorschule für das akademische Studium bilden. Gegenwärtig darf die Differentialrechnung nicht mit allgemeinen Betrachtungen beginnen; man hat daher mit Recht empfohlen, diese Theorie zunächst auf die ganzen rationalen Funktionen anzuwenden. Das ist im sechsten Kapitel vollständig durchgeführt. Daneben bringt dasselbe noch eine ziemlich erschöpfende Theorie der algebraischen Gleichungen, zwei Methoden der Lösung durch Annäherung und für kubische und biquadratische Gleichungen die allgemeine Auffindung aller Wurzeln. Ebenso zeichnet sich die Lehre von den Potenzreihen, die im siebenten Kapitel gegeben ist, durch Strenge und genügende Vollständigkeit aus. Das letzte Kapitel liefert die Determinantentheorie bis zum Multiplikationstheorem und zu den reziproken Determinanten (einschl.) und einige wichtige Anwendungen".

Das Referat schließt mit den Worten:

„Zum Schluß glauben wir nochmals hervorheben zu müssen, daß das Werk nach unserer Meinung beim Unterricht großen Nutzen stiften wird. Möge die vorstehende Besprechung in etwas zu seiner Verbreitung beitragen".

In der (österreichischen) Zeitschrift für das Realschulwesen (III, S. 246, IV, S. 211 und S. 630) liefert Herr Dr. Günther ausführliche Rezensionen über alle Teile. Der Rezension des ersten Teiles entnehmen wir:

„Das Buch soll in erster Linie dem Schulunterricht dienen, ja für den Selbstunterricht rät es sogar der Verfasser selbst nur mit Einschränkung an, des Verfassers „Elemente der Geometrie, auf neuer Grundlage streng deduktiv entwickelt“ gearbeitet sind. Über dieses letztere Buch, welches allseitig, auch von Gegnern des Verfassers, als eine höchst bedeutende Arbeit anerkannt worden ist, hat der Unterzeichnete im „Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques“ sich des näheren verbreitet und auch die Bedenken angedeutet, welche er gegen die Methodik des Buches hegte. Hier nun, wo es sich nicht um streng wissenschaftliche Begründung, sondern einzig und allein darum handelt, den jugendlichen Geistern die geometrischen Wahrheiten auf dem sichersten und kürzesten Wege zur Evidenz und vollen Aneignung zu bringen, hier schwinden alle derartigen Bedenken und mit voller Befriedigung verfolgt man den zielbewußten Gang des Autors. Beckers Absicht ist es bekanntlich, jene Fundamentalsätze, aus welchen Helmholtz auf analytischem Wege das Lehrgebäude der Geometrie konstruiert hat, elementar zu gewinnen. So strenge, wie in dem erwähnten früheren Werke, drückt sich hier dies Bestreben nicht aus, doch werden auch hier die Begriffe von Kreis, Kegel und Kugel mit in den ersten vorbereitenden Abschnitt hereingezogen. In den Anfängen der Dreieckslehre ist die scharfe Scheidung zwischen kongruenten und symmetrischen Figuren anzuerkennen, sowie überhaupt die umfassende Berücksichtigung der Symmetrie. Die Polygone werden im dritten Kapitel eingehender abgehandelt, als in den meisten Unterrichtsbüchern, und das reguläre Polygon gewinnt seinen richtigen Platz, indem es nicht als deus ex machina abrupt dem Lernenden entgegentritt, sondern als gleichseitiges Sehnen- und gleichwinkliges Tangentenvieleck erklärt wird. Bei der Flächenbestimmung fehlen auch die isoperimetrischen Sätze nicht. Die Ähnlichkeitslehre, welche auch die harmonischen Beziehungen mit umfaßt, stützt sich wenigstens teilweise auf den Begriff des Ähnlichkeitszentrums und gipfelt in einer elegant durchgeführten Diskussion des Feuerbachschen Kreises.

Eine reichhaltige Sammlung von Konstruktionsaufgaben ist jedem einzelnen Kapitel angehängt. — Ein Hauptvorzug des größeren Werkes, die gleichmäßige Behandlung der planimetrischen und stereometrischen Verhältnisse, tritt freilich in dieser didaktischen Umarbeitung zurück, da der Verfasser offenbar nicht so radikal mit den üblichen Anschauungen brechen wollte, als dies z. B. Frischauf thut; allein, wie nun einmal die praktischen Umstände unserer Lehranstalten sind, wird es wohl so besser sein. Für Realschulen möchte sich wohl noch etwas mehr Rücksicht auf neuere Geometrie empfehlen, für Gymnasien aber wüßten wir wenigstens kein Buch zu nennen, welches wir über Beckers Leitfaden stellen möchten.

Wir betrachten überhaupt das ganze Werk als eine entschiedene Bereicherung unseres Büchermarktes. Für die humanistischen Studienanstalten Bayerns giebt der Verfasser freilich zu viel, aber für die fortgeschrittenen Realschulen Norddeutschlands und Österreichs, sowie auch für die süddeutschen „Realgymnasien“ empfiehlt es sich als eines der besten Lehrmittel, über welches man zur Zeit verfügt“.

Aus der Besprechung des zweiten Buches des zweiten Teiles setzen wir nur die Einleitung her, da der Rest hauptsächlich in einem Referat über den Inhalt besteht.

„Referent hat, wie den Lesern der Zeitschrift bekannt ist, bereits über die ersten drei Bücher dieses wichtigen und umfassenden Unterrichtswerkes berichtet und ist dabei zu dem Ergebnis gelangt, daß, woferne man auch mit den stets dezidiert auftretenden pädagogischen Anschauungen des Verfassers nicht durchweg einverstanden sein sollte, der originellen Anlage und der von tiefem Nachdenken zeugenden Durchführung dieses Planes vollste Anerkennung gezollt werden muß. Erfreulicherweise dient diese neueste Lieferung nur zur Bestätigung des damals ausgesprochenen Urteiles. Wir wollen gleich eingangs andeuten, daß wir auf die in dem ausführlichen Vorwort behandelte Frage, ob Schulbücher nur aphoristische Hilfsmittel für einen genetischen Unterricht oder aber eine vollständige Darstellung des Lehrstoffes enthalten sollen, hier gar nicht eingehen. Diese Streitfrage zu entscheiden, wird erst einer späteren Zeit möglich sein; vorderhand betrachten wir dieselbe als eine offene und stellen uns für die Dauer dieser Berichterstattung durchaus auf den Standpunkt Beckers. Das aber wollen wir aussprechen, daß ein solches Buch, wie wir es hier vor uns haben, dem vom Autor gewünschten Zwecke recht wohl entsprechen kann. Nicht minder billigen wir den Grundsatz, daß ein Lehrbuch, welches gleichzeitig dem Selbstunterrichte soll dienen können, recht wohl gar manches enthalten darf, was unter gewöhnlichen Verhältnissen in der Schule selbst nicht wird durchgenommen werden können. Es wäre sehr schade, wenn um des gewöhnlichen Mittelgutes halber, welches in der Einrichtung der normativen Lehrplan-Grenzen sein höchstes Ziel erblickt, ausgezeichnete Schüler, wie es ja deren zum Glücke doch auch giebt, an weiterem Aufflug sich müßten verhindern lassen. Es ist dies der nämliche Grundsatz, welchen seinerzeit Professor Unverzagt vor der Wiesbadener Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in mustergiltigerer Weise zum Ausdruck brachte“.

Von dem Referat über das letzte Buch lautet der Schluß:

„Die Kegelschnitte machen den Beschluß. Sie werden ihrem Namen völlig entsprechend dem Kegel selbst entnommen und auch fürs erste am Kegel selbst untersucht, so daß also z. B. für die Konstruktion der Brennpunkte einer Ellipse die beiden dem Kegel eingeschriebenen Kugeln des Dandelinschen Theoremes verwendet werden. Im übrigen ist die Behandlungsweise wesentlich eine algebraisch-geometrische, und es gelingt, so ziemlich allen, auch den komplizierteren, Eigenschaften wie Tangenten, konjugierten Durchmessern u. s. w. gerecht zu werden. Die letzten sechs Seiten suchen von dem im Buche selbst zurücktretenden Gegensatz zwischen analytischer und synthetischer Geometrie dem weiter Strebenden einen Begriff zu verschaffen; bezüglich der letzteren wird noch anhangsweise die Erzeugung der Kurven zweiter Ordnung mit Hilfe projektivischer Strahlbüschel gelehrt. — Es wird dem Verfasser ganz ebenso mit diesem „Ausblick“ ergehen, wie dem Berichterstatter; viele Lehrer werden sich mit solchen nur beiläufigen Erweiterungen des Gesichtsfeldes nicht einverstanden erklären. Allein die dagegen vorgebrachten Gründe vermochten uns wenigstens nicht zu überzeugen. Der gute Schüler, insbesondere aber der doch wahrlich nicht zu vernachlässigende Bruchteil, welcher sich selbst dem Studium der Mathematik widmen will, soll und muß stets darauf hingewiesen werden, daß jenseits der von ihm zur Zeit betretenen Gefilde erst das wirkliche gelobte Land der Wissenschaft liege, und wer ihm, wie es Becker thut, möglichst oft die Gelegenheit verschafft, einen Blick in dasselbe zu thun, der braucht wahrlich nicht zu fürchten, er leiste der Oberflächlichkeit Vorschub.

Wir sind mit unserem Berichte über das fertige Werk zu Ende. Möge derselbe recht vielen Kollegen Lust machen, sich dasselbe selbst genauer anzusehen! Man wird es nicht zu bereuen haben".

Den Referaten des Herrn Dr. Killing in der Hoffmannschen Zeitschrift über den zweiten Teil (X, S. 422 bis 427 und XI, S. 370 bis 375) entnehmen wir nur folgende Stellen:

„Zunächst heben wir hervor, daß das Werkchen trotz des geringen Umfanges und des niedrigen Preises neben dem vollständigen Lehrstoff reichliches Übungsmaterial enthält. Außer zahlreichen Konstruktionsaufgaben, von denen eine genügende Anzahl vollständig gelöst ist, und vielen zu beweisenden Lehrsätzen, enthalten die drei ersten Kapitel zusammen etwa 50 Fragen zur Einübung des Stoffes; dieselben dienen nicht nur dazu, Definitionen und Lehrsätze zu wiederholen, sondern machen auch öfter auf den Kernpunkt der Beweise aufmerksam. Wir möchten nur wünschen, auch den beiden letzten Kapiteln seien Fragen, namentlich der letzten Art, beigegeben.

Den wichtigsten Fortschritt möchten wir in der Anordnung der Sätze erblicken. Wir glauben nämlich, daß für die Gruppierung dem Verfasser vor allem zwei Ziele vorgeschwebt haben: dem Schüler die Möglichkeit zu gewähren, die Stellung eines jeden Satzes im Systeme leicht zu erkennen und zu behalten, sowie jede Gruppe auf ein einziges Beweisprinzip zu stützen, so daß die Gruppe, zu der ein Satz gehört, die Beweisart hervortreten läßt. Einer solchen Anordnung müssen wir unbedingt beipflichten. Es ist schon sehr wichtig, daß die Schüler „aus dem Unterricht über Geometrie den Eindruck eines wohlgeordneten Ganzen davontragen"; zudem wird hierdurch der lästige Gedächtniskram wesentlich vermindert; vor allem aber werden die Schüler in das Wesen von geometrischen Untersuchungen eingeführt; denn nicht durch Aufstellung eines Lehrsatzes und unbestimmtes Suchen nach einem Beweise wird der Fortschritt in der Geometrie herbeigeführt, sondern durch Entwickelung der Abhängigkeit der zu einer Figur vereinigten Gebilde".

„Ohne die gegebene Anordnung unbedingt zu billigen, wird man ihr hohen Wert beilegen müssen. Viele Beweisarten sind dem Verfasser eigentümlich; sie einzeln darzulegen würde zu weit führen. Der Verfasser hat es fast immer verschmäht, durch allmähliche Entwickelung den Zusammenhang noch deutlicher hervortreten zu lassen; weit entfernt, hierin einen Nachteil zu erblicken, glauben wir, die starre Form Euklidischer Beweise müsse überhaupt beibehalten werden. Wenn wir schließlich noch erwähnen, daß alle Beweise so ausführlich gegeben sind, daß der Schüler ohne Schwierigkeit in das Verständnis eingeführt wird, so glauben wir genug Gründe hervorgehoben zu haben, aus denen die hohe Bedeutung des Werkchens hervorgeht; wir empfehlen dasselbe allen Amtsgenossen aufs wärmste".

„Zudem hat sich Herr Becker, wie er in der Vorrede zum zweiten Hefte der Geometrie ausspricht, durch die offenbar richtige Erfahrung leiten lassen, „daß ein Lehrbuch nur dann seinen Zweck erfüllen kann, wenn es so geschrieben, daß es auch zum Selbstunterrichte gebraucht werden kann". So verspricht sein Lehrbuch allen Schülern wesentlichen Nutzen zu bringen. Selbst der schwächste Schüler wird bei der Vollständigkeit aller Beweise, der Klarheit und Einfachheit der Sprache leicht in das volle Verständnis eindringen; es wird für ihn kein Nachteil sein, daß der Stoff über die Anforderungen des Gymnasiums hinausgeht; der fähigere Schüler aber findet die beste Gelegenheit, selbständig oder nach kurzer Anleitung in der Schule seine Kenntnisse zu erweitern und sich etwa auf den akademischen Unterricht vorzubereiten. So verdient das Buch den Fachgenossen bestens empfohlen zu werden; möge es weite Verbreitung finden".

Dem Referate des Herrn J. G. Wallentin in der Zeitschrift für das österreichische Gymnasialwesen (Jahrgang 1880, S. 128) über das erste und vierte Buch entnehmen wir die Stellen:

„Die eigenen Worte des in der mathematischen Litteratur rühmlichst bekannten Verfassers, daß es die wesentlichste und wichtigste Aufgabe der Geometrie ist, „die in den räumlichen Gebilden zu Tage tretenden Gestaltungsgesetze ausfindig zu machen und klar darzulegen, sei es mit Berufung auf unmittelbare Evidenz, wo dies möglich, sei es durch Beweise, wo es nicht anders geht", charakterisieren seinen Standpunkt bei Abfassung dieses Lehrbuches zur genüge. Eine naturgemäße Vermittelung zwischen der Geometrie des Maßes und der Geometrie der Lage anzustreben und womöglich konsequent durchzuführen, großes Gewicht auf die Untersuchung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander zu legen — das sind die den Autor leitenden Grundideen. In der That finden wir, wie ein genaueres Eindringen in das Buch lehrt, diesen Plan gewissenhaft verwirklicht. Mit Recht wird vom Verfasser bemerkt, daß Euklid nur ein Aggregat unumstößlich gewisser Einzelerkenntnisse ohne jede sachgemäße Verbindung lieferte, daß eine Aneinanderreihung der Sätze nach den in den Eigenschaften der Figuren zu Tage tretenden Gestaltungsgesetzen mit der Beweisführung eines folgenden Lehrsatzes aus einem vorhergehenden ohne weitere Berufung auf die Anschauung auf Grundlage weniger Axiome dringend geboten sei.

Auf einen Umstand möge von vorneherein hier aufmerksam gemacht werden. Insbesonders der zweite für die Obersekunda bestimmte Teil enthält vieles, was bei dem Stundenausmaße, das der Mathematik an der Mittelschule durchschnittlich zufällt, einerseits, bei der nicht gleich vorzüglichen

Begabung der Schüler andererseits, nicht durchgenommen werden kann. Deshalb wird kein Fachmann dem Autor einen Vorwurf machen, im Gegenteile es ist sehr lobenswert, daß ein begabterer Schüler, der einiges Interesse für „mathematisches Wissen und Können“ mitbringt, schon in dem gebrauchten und darum gewohnten Lehrbuche ein Mittel hat, das Angefangene zu einem befriedigenderen Abschlusse zu bringen.

Die klare, korrekte und gewählte Sprache, deren sich der Verfasser bedient, die Schärfe und Sicherheit in der Beweisführung, die gehörige Abrundung und Glättung des Stoffes werden das Buch zum Selbststudium ebenso geeignet machen wie zum Schulunterrichte“.

„Mit wahrer Freude hat Referent die zweite Abteilung der Planimetrie, in welcher die Anfangsgründe der projektivischen Geometrie zur Behandlung kommen, durchgelesen. Eine so klare und schulgerechte Darstellung dieser interessanten Partie ist ihm selten begegnet. Jeder, der sich mit den Elementen der Geometrie soweit vertraut machen will, daß er zur Lektüre größerer Werke über diesen Gegenstand, so z. B. der am Schlusse dieses Buches zitierten „Elemente der projektivischen Geometrie von Dr. H. Hankel“, der „Geometrie der Lage von Dr. F. Reye“, der bahnbrechenden Steinerschen Vorlesungen über synthetische Geometrie (in den letzten Jahren von Geiser und Schröter bearbeitet) gerüstet ist, soll zu diesem Buche seine Zuflucht nehmen; es wird ihn sehr schnell und dabei doch ziemlich eingehend mit den Fundamentalsätzen der neueren Geometrie bekannt machen.

Referent muß schließlich anerkennen, daß die schönen Erwartungen, die durch die großen Vorzüge der früher erschienenen, in dieser Zeitschrift besprochenen Bücher desselben Verfassers hinlänglich gerechtfertigt waren, bei der Durchsicht dieses Buches in keinerlei Weise getrübt wurden“.

Endlich möge noch das Referat der „Fortschritte der Mathematik“ XII, S. 416 über das fünfte Buch in extenso folgen:

J. K. Becker. Lehrbuch der Elementargeometrie für den Schulgebrauch. Drittes Buch. Stereometrie, sphärische Trigonometrie und Kegelschnitte. Berlin 1879. Weidmann.

„Das erste Buch (1877) enthielt die erste Stufe der Planimetrie, das zweite Buch (1878) die ebene Trigonometrie und zweite Stufe der Planimetrie. Diese sowohl wie das gegenwärtige verwerten die Grundsätze, welche in der vorausgehenden Schrift des Verfassers: „Die Elemente der Geometrie auf neuer Grundlage ꝛc.“ 1877 (s. F. d. M. IX, 1877, S. 394) dargelegt sind. Die Stereometrie stützt sich nicht wie gewöhnlich auf die vorausgehende Behandlung der Planimetrie, sondern greift im Gegenteil in der Grundlegung noch weiter zurück als diese. Die Grundbegriffe der Geometrie werden mit außerordentlicher Gründlichkeit und Ausführlichkeit entwickelt. Das Studium der Riemannschen Schriften hat sichtlich den Verfasser auf die Beachtung der wichtigen Punkte gelenkt. So entsprechen auch die aufgestellten sechs Axiome (a. a. O. genannt) im ganzen den Beschränkungen des empirischen Raumes nach Riemann. Die didaktische Verarbei=