D. Brückner, M. Podhorodyński
B. Skalmierski

CIĄGOWE UJĘCIE TEORII PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

WARSZAWA 1980

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 10 listopada 1980 r.

Zarejestrowana pod nr 50/1980

Publikacja została napisana w ramach pracy zleconej
przez IPPT PAN
problem MR.I-23, zadanie 1.1.6.

N a   p r a w a c h   r ę k o p i s u

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład 160 egz. Ark. wyd. 1,3. Ark. druk. 2.
Oddano do drukarni w grudniu 1980 r.
Nr zamówienia 796/o/80

Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa,
ul. Śniadeckich 8

DAMIAN BRUCKNER
MARIAN PODHORODYŃSKI
Instytut Matematyki U.Śl.
BOGDAN SKALMIERSKI
Instytut Mechaniki Teoretycznej Pol.Śl.

CIĄGOWE UJĘCIE TEORII PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

Wstęp

Niniejsza publikacja poświęcona jest teorii procesów stochastycznych w ujęciu ciągowym i pewnym jej zastosowaniom w mechanice. Jest kontynuacją pracy [7] dotyczącej teorii wektorów losowych i prawdopodobieństwa i czerpie w pewnej mierze z prac [2,3,4,5,6,8,10] .

Przypominamy, że istota ciągowego ujęcia polega na definiowaniu podstawowych obiektów losowych w oparciu o zasadę identyfikacji, a zasadniczych charakterystyk probabilistycznych jako średnich z odpowiednich operacji na rodzinach ciągów stanowiących dany obiekt losowy.

§1. Proces stochastyczny i jego podstawowe własności w ujęciu ciągowym

Przypomnijmy postawione w pracy [7] definicje.

Ciąg $\left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right),\ i\in\mathbb{N}\right)$ punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$ nazywamy P_N-podstawowym, jeżeli ciąg

$$(1.1)\qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N} H\left(x^k - {}_iX^k\right),\ n\in\mathbb{N}\right)$$

jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}^N$, a B_N-podstawowym jeżeli ciąg

$$(1.2)\qquad \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N} \exp i u^k\,{}_iX^k,\ n\in\mathbb{N}\right),$$

przy czym $i = \sqrt{-1}$, jest punktowozbieżny na $\mathbb{R}^N$ do funkcji ciągłej.

N-wymiarowym P-wektorem losowym $[X^1,\dots,X^N]_P$ (B-wektorem losowym $[X^1,\dots,X^N]_B$) nazywamy klasę abstrakcji względem relacji równoważności $\widetilde{P}_N$ $(\widetilde{B}_N)$ określonej na rodzinie ciągów $P_N(B_N)$ podstawowych w następujący sposób: dwa ciągi P_N (B_N) podstawowe są w relacji $\widetilde{P}_N$ $(\widetilde{B}_N)$,jeżeli granice skonstruowanych dla nich ciągów postaci (1.1) $((1.2))$ są równe.

N-wymiarowym wektorem losowym $[X^1,\dots,X^N]$ nazywamy P-wektor losowy lub B-wektor losowy.

We wspomnianej pracy [7] wykazaliśmy,że każdy N-wymiarowy B-wektor losowy $[X^1,\dots,X^N]_B$ wyznacza dokładnie jeden P-wektor losowy $[X^1,\dots,X^N]_P$ i odwrotnie tak,że zachodzi

$$(1.3) \qquad [X^1,\dots,X^N]_P \subset [X^1,\dots,X^N]_B .$$

Obecnie przechodzimy do podania definicji procesu stochastycznego.

Ciąg $\left(\left({}_iX^1(t),\dots,{}_iX^N(t)\right),\ i\in\mathbb{N}\right)$ układów N funkcji, $N\in\mathbb{N}$, określonych na dowolnym podzbiorze $\mathcal{T}$ zbioru liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych nazywamy S_N-podstawowym , jeżeli dla dowolnego $m\in\mathbb{N}$ i dowolnych $t_1,\dots,t_m\in\mathcal{T}, t_1<\dots<t_m$, ciąg

$$(1.4) \qquad \left(\left({}_iX^1(t_1),\dots,{}_iX^1(t_m),\dots,{}_iX^N(t_1),\dots,{}_iX^N(t_m)\right)\ ,\ i\in\mathbb{N}\right)$$

punktów przestrzeni $\mathbb{R}^{N\cdot m}$ jest $B_{N\cdot m}$-podstawowy.

W niepustej - co można łatwo stwierdzić - rodzinie ciągów S_N-podstawowych określamy relację $\widetilde{S}_N$ w następujący sposób:

$$(1.5) \qquad \left(\left({}_iX^1(t),\dots,{}_iX^N(t)\right) i\in\mathbb{N}\right)\ \widetilde{S}_N\ \left(\left({}_i\bar{X}^1(t),\dots,{}_i\bar{X}^N(t)\right), i\in\mathbb{N}\right)$$

$$\iff \left(\left({}_iX^1(t_1),\dots,{}_iX^1(t_m),\dots,{}_iX^N(t_1),\dots,{}_iX^N(t_m)\right), i\in\mathbb{N}\right)\ \widetilde{B}_{Nm}$$

$$\left(\left({}_i\bar{X}^1(t_1),\dots,{}_i\bar{X}^1(t_m),\dots,{}_i\bar{X}^N(t_1),\dots,{}_i\bar{X}^N(t_m)\right), i\in\mathbb{N}\right)$$

dla dowolnego $m\in\mathbb{N}$ i wszystkich $t_1,\dots,t_m\in\mathcal{T}$, $t_1<\dots<t_m$. Relacja $\widetilde{S}_N$ okazuje się relacją równoważności i jako taka dzieli rodzinę wszystkich ciągów S_N-podstawowych na rozłączne klasy abstrakcji.

<u>Definicja 1.1.</u>

N-wymiarowym procesem stochastycznym na $\mathcal{T}$ $[X^1(t),\dots,X^N(t)]$ nazywamy klasę abstrakcji względem relacji $\widetilde{S}_N$. Ciągiem realizacji N-wymiarowego procesu stochastycznego nazywamy każdy reprezentant tej klasy, a realizacją procesu stochastycznego każdy wyraz dowolnego ciągu realizacji.

<u>Wniosek 1.1.</u>

Jeżeli $[X^1(t),\dots,X^N(t)]$ jest N-wymiarowym procesem stochastycznym na $\mathcal{T}$, a $t_1,\dots,t_m\in\mathcal{T}$, $t_1<\dots<t_m$, $m\in\mathbb{N}$, to

$$\left(X^1(t_1),\dots,X^1(t_m),\dots,X^N(t_1),\dots,X^N(t_m)\right)=\Big\{\Big(\big({}_iX^1(t_1),\dots,{}_iX^1(t_m),\dots,{}_iX^N(t_1),\dots,{}_iX^N(t_m)\big), i\in\mathbb{N}\Big):\Big(\big({}_iX^1(t),\dots,{}_iX^N(t)\big), i\in\mathbb{N}\Big)\in\left[X^1(t),\dots,X^N(t)\right]\Big\}$$

wyznacza jednoznacznie $N\cdot m$-wymiarowy wektor losowy, który oznaczamy $[X^1(t_1),\dots,X^1(t_m),\dots,X^N(t_1),\dots,X^N(t_m)]$.

<u>Lemat 1.1.</u>

Jeżeli $[X^1,\dots,X^p]$ jest p-wymiarowym wektorem losowym, a $\big(({}_iX^1,\dots,{}_iX^p), i\in\mathbb{N}\big)\in\mathcal{J}[X^1,\dots,X^p]$ [7], to ciąg $\big(({}_iX^1,\dots,{}_iX^1,\dots,{}_iX^p,\dots,{}_iX^p), i\in\mathbb{N}\big)$, gdzie ${}_iX^j$ występuje w i-tym wyrazie tego ciągu m_j razy, $m_j\in\mathbb{N}$, $j=1,\dots,p$; jest B_m-podstawowy, gdzie $m=m_1+\dots+m_p$, a każde dwa ciągi powyższego typu skonstruowane w powyższy sposób dla dwóch dowolnych ciągów $\widetilde{B}_p$-równoważnych są $\widetilde{B}_m$-równoważne.

Dowód.

Rozszerzenie funkcji ciągłej zdefiniowanej wzorem:

$$\text{(a)}\quad f\left(x^1,\dots,x^p\right)=\left(x^1,\dots,x^1,\dots,x^p,\dots,x^p\right),$$

gdzie x^j występuje po prawej stronie m_j razy, $j=1,\dots,p$; do odwzorowania określonego na rodzinach ciągów punktów przestrzeni $\mathbb{R}^p$ zgodnie z wzorem (1.3) [7] jest odwzorowaniem dopuszczalnym.

Z lematu 1.1 i wniosku 1.1 wynika twierdzenie.

Twierdzenie 1.1.

Jeżeli $[X^1(t),\ldots,X^N(t)]$ jest N-wymiarowym procesem stochastycznym, a $t_1,\ldots,t_m$ dowolnie ustalonymi (niekoniecznie różnymi) elementami z $\mathcal{T}$, $m\in\mathbb{N}$, to operacja

$$\left(X^1(t_1),\ldots,X^1(t_m),\ldots,X^N(t_1),\ldots,X^N(t_m)\right) =$$

$$=\left\{\left(\left({}_iX^1(t_1),\ldots,{}_iX^1(t_m),\ldots,{}_iX^N(t_1),\ldots,{}_iX^N(t_m)\right),\ i\in\mathbb{N}\right):\right.$$

$$\left.:\ \left(\left({}_iX^1(t),\ldots,{}_iX^N(t)\right),\ i\in\mathbb{N}\right)\in[X^1(t),\ldots,X^N(t)]\right\}$$

wyznacza jednoznacznie $N\cdot m$ -wymiarowy wektor losowy,który oznaczamy $[X^1(t_1),\ldots,X^1(t_m),\ldots,X^N(t_1),\ldots,X^N(t_m)]$.

Wykorzystując twierdzenia 2.1 i2.2 z pracy [7] oraz twierdzenie 1.1 uzyskuje się następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.2.

Jeżeli $[X^1(t),\ldots,X^N(t)]$ jest N-wymiarowym procesem stochastycznym, a $t_1,\ldots,t_m$ dowolnie ustalonymi (niekoniecznie różnymi) elementami z $\mathcal{T}$, $m\in\mathbb{N}$, to istnieją średnie

$$\left\langle \prod_{k=1}^{N}\prod_{l=1}^{m} H\left(x^{k,l}-X^k(t_l)\right)\right\rangle, \tag{1.6}$$

$$\left\langle \prod_{k=1}^{N}\prod_{l=1}^{m} \delta\left(x^{k,l}-X^k(t_l)\right)\right\rangle, \tag{1.7}$$

$$\left\langle \prod_{k=1}^{N}\prod_{l=1}^{m} \exp i\, u^{k,l}\, X^k(t_l)\right\rangle \tag{1.8}$$

na tym procesie stochastycznym.

Definicja 1.2.

m-wymiarową dystrybuantą

$$G^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(x^{1,1},\dots,x^{1,m},\dots,x^{N,1},\dots,x^{N,m}\middle|t^1,\dots,t^m\right),$$

m-wymiarową gęstością

$$g^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(x^{1,1},\dots,x^{1,m},\dots,x^{N,1},\dots,x^{N,m}\middle|t^1,\dots,t^m\right),$$

m-wymiarową funkcjącharakterystyczną ,

$$Q^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(u^{1,1},\dots,u^{1,m},\dots,u^{N,1},\dots,u^{N,m}\middle|t^1,\dots,t^m\right)$$

N-wymiarowego procesu stochastycznego $[X^1(t),\dots,X^N(t)]$ nazywamy funkcję, której wartość przy ustalonych $t^l=t_l$, $l=1,\dots,m$, jest odpowiednio dystrybuantą, gęstością, funkcją charakterystyczną $N\cdot m$ wymiarowego wektora losowego $[X^1(t_1),\dots,X^1(t_m),\dots,X^N(t_1),\dots,X^N(t_m)]$.

Wniosek 1.2.

Jeżeli $[X^1(t),\dots,X^N(t)]$ jest N-wymiarowym procesem stochastycznym, a $t_1,\dots,t_m$, $m\in\mathbb{N}$,dowolnie ustalonymi (niekoniecznie różnymi) elementami z $\mathcal{T}$, to zachodzą następujące równości:

$$G^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(x^{1,1},\dots,x^{1,m},\dots,x^{N,1},\dots,x^{N,m}\middle|t_1,\dots,t_m\right)= \tag{1.9}$$
$$=\left\langle\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=1}^{m} H\left(x^{k,l}-X^k(t_l)\right)\right\rangle ,$$

$$g^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(x^{1,1},\dots,x^{1,m},\dots,x^{N,1},\dots,x^{N,m}\middle|t_1,\dots,t_m\right)= \tag{1.10}$$
$$=\left\langle\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=1}^{m} \delta\left(x^{k,l}-X^k(t_l)\right)\right\rangle ,$$

$$Q^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(u^{1,1},\dots,u^{1,m},\dots,u^{N,1},\dots,u^{N,m}\middle|t_1,\dots,t_m\right)= \tag{1.11}$$
$$=\left\langle\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=1}^{m} \exp i\,u^{k,l}X^k(t_l)\right\rangle .$$

Twierdzenie 1.3.

Jeżeli $[X^1(t),\dots,X^N(t)]$ jest takim N-wymiarowym procesem stochastycznym na zbiorze otwartym $\mathcal{T}$, że zbiór $\mathcal{C}[X^1(t),\dots,X^N(t)]$ ciągów realizacji ciągłych tego procesu jest niepusty, to dla dowolnie ustalonego układu N miar postaci

$$v_k = \sum_{l=1}^{m} u_{k,l}\, \delta_{t_l}, \tag{1.12}$$

$u_{k,l} \in \mathbb{R}$, $t_l \in \mathcal{T}$, $k=1,\dots,N$; $l=1,\dots,m$; $m \in \mathbb{N}$;
istnieje średnia

$$\left\langle \prod_{k=1}^{N} \exp v_k\left(X^k(t)\right)\right\rangle \tag{1.13}$$

na $\mathcal{C}[X^1(t),\dots,X^N(t)]$ i jest równa

$$Q^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(u_{1,1},\dots,u_{1,m},\dots,u_{N,1},\dots,u_{N,m}\,|\,t_1,\dots,t_m\right).$$

Dowód.

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$ i $t_1,\dots,t_m \in \mathcal{T}$, a $u_{k,l} \in \mathbb{R}$, $k=1,\dots,N$; $l=1,\dots,m$.

Obliczmy teraz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, v_k\; {}_iX^k\, t =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i \sum_{l=1}^{m} u_{k,l}\; \delta_{t_l}\left(X^k(t)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=1}^{m} \exp i\, u_{k,l}\; {}_iX^k(t_l) =$$

$$= Q^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}\left(u_{1,1},\dots,u_{1,m},\dots,u_{N,1},\dots,u_{n,m}\,|\,t_1,\dots,t_m\right).$$

Tak więc granica ta istnieje i jest identyczna dla dowolnego ciągu $\left(\left({}_iX^1(t),\dots,{}_iX^N(t)\right), i \in \mathbb{N}\right) \in \mathcal{C}[X^1(t),\dots,X^N(t)]$,co oznacza , że istnieje średnia (1.13) na $\mathcal{C}[X^1(t),\dots,X^N(t)]$.

Definicja 1.3.

Funkcjonałem charakterystycznym $Q_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}(v^1,\dots,v^N)$ takiego N-wymiarowego procesu stochastycznego $[X^1(t),\dots,X^N(t)]$, że $\mathcal{C}[X^1(t),\dots,X^N(t)] \neq \emptyset$ nazywamy odwzorowanie przyporządkowujące ustalonemu układowi miar $v^k = v_k$ postaci (1.12) wartość (1.13).

Uwaga 1.1.

Funkcjonał charakterystyczny globalnie charakteryzuje proces stochastyczny, gdyż korzystając z równości

$$(1.14)\qquad Q_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}(v_1,\dots,v_N) = $$
$$= Q^m_{[X^1(t),\dots,X^N(t)]}(u_{1,1},\dots,u_{1,m},\dots,u_{N,1},\dots,u_{N,m}|t_1,\dots,t_m)$$

można otrzymać funkcje charakterystyczne dowolnie wymiarowych wektorów losowych wyznaczonych przez ten proces stochastyczny, a więc wszystkie skończenie wymiarowe rozkłady.

§2. Uogólniony proces stochastyczny na przestrzeni liniowej

Ciąg $\left(\left({}_iL^1(v^1),\dots,{}_iL^N(v^N)\right),\ i\in\mathbb{N}\right)$ układów N funkcjonałów liniowych określonych na dowolnych przestrzeniach liniowych odpowiednio V^k, $k=1,\dots,N$; nad ciałem liczb rzeczywistych i o wartościach rzeczywistych nazywamy U_N-podstawowym, jeżeli dla dowolnych $v_k \in V^k$, $k=1,\dots,N$; ciąg

$$(2.1)\qquad \left(\left({}_iL^1(v_1),\dots,{}_iL^N(v_N)\right),\ i\in\mathbb{N}\right)$$

punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$ jest B_N-podstawowy.

W niepustej - co i tu można łatwo sprawdzić - rodzinie ciągów U_N-podstawowych określamy relację $\widetilde{U}_N$ w następujący sposób:

$$\left(\left({}_iL^1(v^1),\dots,{}_iL^N(v^N)\right),\ i\in\mathbb{N}\right)\ \widetilde{U}_N\ \left(\left({}_i\bar{L}^1(v^1),\dots,{}_i\bar{L}^N(v^N)\right),\right.$$
$$(2.2)\qquad \left.i\in\mathbb{N}\right) \iff \left(\left({}_iL^1(v_1),\dots,{}_iL^N(v_N)\right),\ i\in\mathbb{N}\right)\ \widetilde{B}_N$$

$$\widetilde{B}_N \quad \left(\left({}_i\bar{L}^1(v_1), \ldots, {}_i\bar{L}^N(v_N)\right), \; i \in \mathbb{N}\right)$$

dla wszystkich $v_k \in V^k$, $k=1,\ldots,N$.

Relacja $\widetilde{U}_N$ okazuje się relację równoważności i jako taka dzieli rodzinę wszystkich ciągów U_N-podstawowych na rozłączne klasy abstrakcji.

Definicja 2.1.

N-wymiarowym uogólnionym procesem stochastycznym na $V: = \bigtimes_{k=1}^{N} V^k$ nazywamy klasę abstrakcji względem relacji $\widetilde{U}_N$. Ciągiem realizacji N-wymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego nazywamy każdy reprezentant tej klasy.

Wniosek 2.1.

Każdy N-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny na V $\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$ przy dowolnie ustalonym $(v_1,\ldots,v_N) \in V$ wyznacza jednoznacznie N-wymiarowy wektor losowy $\left[L^1(v_1),\ldots,L^N(v_N)\right]$.

Twierdzenie 2.1.

Jeżeli $\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$ jest N-wymiarowym uogólnionym procesem na V , a $(v_1,\ldots,v_N)$ dowolnie ustalonym elementem z V , to istnieje średnia

$$\left\langle \prod_{k=1}^{N} \exp i\, L^k(v_k) \right\rangle \tag{2.3}$$

na tym uogólnionym procesie równa

$$Q_{\left[L^1(v_1),\ldots,L^N(v_N)\right]}(1,\ldots,1) \tag{2.3a}$$

.

Dowód.

Ustalmy $(v_1,\ldots,v_N) \in V$ i zauważmy , że dla dowolnego ciągu

$$\left(\left({}_iL^1(v^1),\ldots,{}_iL^N(v^N)\right), i \in \mathbb{N}\right) \in \left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, {}_iL^k(v_k) = Q_{\left[L^1(v_1),\ldots,L^N(v_N)\right]}(1,\ldots,1) ,$$

gdyż ciąg $\left(\left({}_iL^1(v_1),\ldots,{}_iL^N(v_N)\right), i \in \mathbb{N}\right) \in \left[L^1(v_1),\ldots,L^N(v_N)\right]$.

Definicja 2.2.

Funkcjonałem charakterystycznym $Q_{[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)]}(v^1,\dots,v^N)$ N-wymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego na V nazywamy odwzorowanie przyporządkowujące ustalonemu elementowi $(v_1,\dots,v_N) \in V$ wartość (2.3).

Twierdzenie 2.2.

Jeżeli $[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)]$ jest N-wymiarowym uogólnionym procesem stochastycznym na V, a $(v_{1,l},\dots,v_{N,l}) \in V$, $l=1,\dots,m$; to operacja

$$\left(L^1(v_{1,1}),\dots,L^1(v_{1,m}),\dots,L^N(v_{N,1}),\dots,L^N(v_{N,m})\right) =$$

$$=\Big\{\left(\left({}_iL^1(v_{1,1}),\dots,{}_iL^1(v_{1,m}),\dots,{}_iL^N(v_{N,1}),\dots,{}_iL^N(v_{N,m})\right),\ i\in\mathbb{N}\right)$$

$$:\left(\left({}_iL^1(v^1),\dots,{}_iL^N(v^N)\right),\ i\in\mathbb{N}\right)\in\left[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)\right]\Big\}$$

wyznacza jednoznacznie $N\cdot m$ -wymiarowy wektor losowy $[L^1(v_{1,1}),\dots,L^1(v_{1,m}),\dots,L^N(v_{N,1}),\dots,L^N(v_{N,m})]$, którego funkcja charakterystyczna jest równa:

$$(2.4)\quad Q_{[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)]}\left(u^1\sum_{l=1}^{m} v_{1,l},\dots,u^N\sum_{l=1}^{m} v_{N,l}\right).$$

Dowód.

Niech

$$\left(\left({}_iL^1(v_{1,1}),\dots,{}_iL^1(v_{1,m}),\dots,{}_iL^N(v_{N,1}),\dots,{}_iL^N(v_{N,m})\right),i\in\mathbb{N}\right)\in$$

$$\left(L^1(v_{1,1}),\dots,L^1(v_{1,m}),\dots,L^N(v_{N,1}),\dots,L^N(v_{N,m})\right).$$

Obliczmy granicę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N}\prod_{l=1}^{m}\exp i\,u^k\,{}_iL^k(v_{k,l}) =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N}\exp i\,{}_iL^k\left(u^k\sum_{l=1}^{m} v_{k,l}\right) =$$

$$= Q_{\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]}\left(u^1 \sum_{l=1}^{m} v_{1,l},\ldots,u^N \sum_{l=1}^{m} v_{N,l}\right) ,$$

która istnieje i jest identyczna dla dowolnego ciągu z $\left(L^1(v_{1,1}),\ldots,L^1(v_{1,m}),\ldots,L^N(v_{N,1}),\ldots,L^N(v_{N,m})\right)$, co dowodzi że dwa dowolne ciągi tej rodziny są w relacji $\widetilde{B}_{N\cdot m}$.

Definicja 2.3.

Niezależnymi uogólnionymi procesami stochastycznymi nazywamy takie procesy $\left[L^1(v^1)\right],\ldots,\left[L^N(v^N)\right]$ na odpowiednio V^k $k=1,\ldots,N$; wyznaczone przez N-wymiarowy proces stochastyczny $\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$ na V , że

$$(2.5)\quad Q_{\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]}(v^1,\ldots,v^N) = \prod_{k=1}^{N} Q_{\left[L^k(v^k)\right]}(v^k) .$$

Obecnie przechodzimy do omówienia przekształceń dopuszczalnych .

Niech f będzie rozszerzeniem odwzorowania typu $\bigtimes_{k=1}^{N}(V^k)^*$ w $\bigtimes_{l=1}^{M}(\bar{V}^l)^*$, gdzie V^k , $k=1,\ldots,N$; $\bar{V}^l$, $l=1,\ldots,M$; są przestrzeniami liniowymi , do przekształcenia określonego na rodzinach ciągów elementów przestrzeni $\bigtimes_{k=1}^{N}(V^k)^*$ zgodnie z wzorem (1.3) [7] .

Definicja 2.4.

Przekształceniem dopuszczalnym nazywamy takie przekształcenie f , że dla dowolnego N-wymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego $\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$ na V istnieje taki M-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny $\left[\bar{L}^1(\bar{v}^1),\ldots,\bar{L}^M(\bar{v}^M)\right]$ na $\bar{V}$, że

$$(2.6)\quad f\left(\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]\right) \subset \left[\bar{L}^1(\bar{v}^1),\ldots,\bar{L}^M(\bar{v}^M)\right] .$$

Wniosek 2.2.

Rozszerzenie funkcji $h : \bigtimes_{k=1}^{N}(V^k)^* \to \bigtimes_{k=1}^{N}(V^k)^*$

$$(2.7)\quad h\left(W^1(v^1),\ldots,W^N(v^N)\right) = \left(W^{p_1}(v^{p_1}),\ldots,W^{p_N}(v^{p_N})\right) ,$$

gdzie $(p_1,\ldots,p_N)$ jest permutacją ciągu $(1,\ldots,N)$; do odwzorowania określonego na rodzinach ciągów elementów przestrzeni $\bigtimes_{k=1}^{N}(V^k)^*$ zgodnie z wzorem (1.3) [7] jest przekształceniem dopuszczalnym.

Jeżeli $\left[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)\right]$ jest N-wymiarowym uogólnionym procesem stochastycznym , to operacja

$\left(L^{p_1}(v^{p_1}),\dots,L^{p_N}(v^{p_N})\right)$ na tym procesie wyznacza jednoznacznie N-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny $\left[L^{p_1}(v^{p_1}),\dots,L^{p_N}(v^{p_N})\right]$, którego funkcjonał charakterystyczny ma własność

$$Q_{\left[L^{p_1}(v^{p_1}),\dots,L^{p_N}(v^{p_N})\right]}(v_{p_1},\dots,v_{p_N}) = \tag{2.8}$$
$$= Q_{\left[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)\right]}(v_1,\dots,v_N) \; .$$

Dla przykładu udowodnimy następujący fakt.

<u>Wniosek 2.3.</u>

Rozszerzenie funkcji $h:(V^*)^N \longrightarrow (V^*)^M$, ($V$ - przestrzeń liniowa), danej wzorem

$$h\left(W^1(v^1),\dots,W^N(v^N)\right) = \tag{2.9}$$
$$=\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^1\, W^k(v^1) + \bar{W}^1(v^1),\dots,\sum_{k=1}^{N} a_k^M\, W^k(v^M) + \bar{W}^M(v^M)\right),$$

$a_k^l \quad R \;,\; W^l\; v^l \quad V \;,\; l=1,\dots,M \;;\; k=1,\dots,N \;;$

doodwzorowania określonegona rodzinach ciągów elementów przestrzeni $(V^*)^N$ zgodnie z wzorem (1.3) [7] jest przekształceniem dopuszczalnym.

Jeżeli $\left[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)\right]$ jest dowolnym N-wymiarowym uogólnionym procesem stochastycznym na V^N, to operacja

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^1\, L^k + \bar{W}^1\right)(v^1),\dots,\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^M\, L^k + \bar{W}^M\right)(v^M)\right)$$

wyznacza jednoznacznie M-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^1 L^k + \bar{W}^1\right)(v^1), \ldots, \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^M L^k + \bar{W}^M\right)(v^M)\right] \text{ na } V^M,$$

którego funkcjonał charakterystyczny ma postać

$$(2.10) \quad \prod_{l=1}^{M} \exp i\, \bar{W}^l(v_l)\, Q_{[L^1(v^1), \ldots, L^N(v^N)]}\left(\sum_{l=1}^{M} a_1^l v_l, \ldots, \sum_{l=1}^{M} a_N^l v_l\right).$$

W szczególności, gdy $[L^1(v^1)], \ldots, [L^N(v^N)]$ są niezależnymi uogólnionymi procesami stochastycznymi na V wyznaczonymi przez N-wymiarowy $[L^1(v^1), \ldots, L^N(v^N)]$ na V^N, to funkcjonał ten ma postać :

$$(2.10a) \left(\prod_{l=1}^{M} \exp i\, \bar{W}^l(v_l)\right) \cdot \prod_{k=1}^{N} Q_{[L^k(v^k)]}\left(\sum_{l=1}^{M} a_k^l v_l\right).$$

Dowód.

Niech $(v_1, \ldots, v_M) \in V$,

a $\left(\left({}_iL^1(v^1), \ldots, {}_iL^N(v^N)\right), i \in \mathbb{N}\right) \in [L^1(v^1), \ldots, L^N(v^N)]$.

Obliczmy granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{l=1}^{M} \exp i\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^l\, {}_iL^k(v_l) + \bar{W}^l(v_l)\right) u^l =$$

$$= \left(\prod_{l=1}^{M} \exp(i\, \bar{W}^l(v_l)\, u^l)\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{l=1}^{M} \exp i\left(\sum_{k=1}^{N} u^l\, {}_iL^k(a_k^l v_l)\right) =$$

$$= \left(\prod_{l=1}^{M} \exp(i\, \bar{W}^l(v_l)\, u^l)\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \prod_{l=1}^{M} \exp i\, {}_iL^k(v_l)\, a_k^l u^l =$$

$$= \left(\prod_{l=1}^{M} \exp(i\, \bar{W}^l(v_l)\, u^l)\right) \cdot Q_{[L^1(v_1), \ldots, L^1(v_M), \ldots, L^N(v_1), \ldots, L^N(v_M)]}\left(a_1^1 u^1, \ldots, a_1^M u^M, \ldots, a_N^1 u^1, \ldots, a_N^M u^M\right).$$

Obliczona granica jest identyczna dla każdego ciągu

$\left(\left({}_iL^1(v^1), \ldots, {}_iL^N(v^N)\right), i \in \mathbb{N}\right) \in [L^1(v^1), \ldots, L^N(v^N)]$,

a co za tym idzie - dla dowolnego elementu rozważanej operacji i jest funkcją ciągłą zmiennych $u^1,\dots,u^M$.
Zauważmy jeszcze , że

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{l=1}^{M}\exp i\left(\sum_{k=1}^{N} a_k^l\, {}_iL^k(v_l)+\bar{W}^l(v_l)\right)=$$

$$=\left(\prod_{l=1}^{M}\exp i\,\bar{W}^l(v_l)\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{N}\exp i\,{}_iL^k\left(\sum_{l=1}^{M}a_k^l v_l\right)=$$

$$=\left(\prod_{l=1}^{M}\exp i\,\bar{W}^l(v_l)\right)\cdot Q_{[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)]}\left(\sum_{l=1}^{M}a_1^l v_l,\dots,\sum_{l=1}^{M}a_N^l v_l\right),$$

co po wykorzystaniu niezależności procesów $[L^k(v^k)]$,$k=1,\dots,N$ daje równość (2.10a) .

<u>Wniosek2.4.</u>

Rozszerzenie funkcji $\Pi:\ \mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}(V^k)^*\longrightarrow\mathop{\times}\limits_{l=1}^{M}(V^l)^*$, $1\le M<N$,

$$(2.11)\quad \Pi\left(W_1(v^1),\dots,W_M(v^M),\dots,W_N(v^N)\right)=\left(W_1(v^1),\dots,W_M(v^M)\right)$$

do przekształcenia określonego na rodzinach ciągów punktów z $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}(V^k)^*$ zgodnie z wzorem (1.3) [7] jest przekształceniem dopuszczalnym.

Jeżeli $[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)]$ jest N-wymiarowym uogólnionym procesem stochastycznym na $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N}V^k$, to operacja $(L^1(v^1),\dots,L^M(v^M))$ wyznacza jednoznacznie M-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny $[L^1(v^1),\dots,L^M(v^M)]$ na $\mathop{\times}\limits_{l=1}^{M}V^l$, którego funkcjonał charakterystyczny ma postać :

$$Q_{[L^1(v^1),\dots,L^M(v^M),\dots,L^N(v^N)]}(v^1,\dots,v^M,0,\dots,0)\ .$$

<u>Definicja 2.5.</u>

Funkcjonałem momentu rzędu $(r_1,\dots,r_s)$, $r_1,\dots,r_s\in\{1,\dots,N\}$ N-wymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego $[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)]$ na V nazywamy odwzorowanie

$$M^{r_1,\dots,r_s}_{[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)]}(v^{r_1},\dots,v^{r_s})\quad \text{typu}\quad \mathop{\times}\limits_{p=1}^{s}V^{r_p}\ \text{w}\ \mathbb{R}\ ,$$

które punktowi $(v_{r_1},\ldots,v_{r_s})$ przypisuje średnią

$$\left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p}) \right\rangle \text{ na } \mathcal{J}\left[L^{r_1}(v_{r_1}),\ldots,L^{r_s}(v_{r_s})\right].$$

<u>Twierdzenie 2.3.</u>

Jeżeli $[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)]$ jest takim N- wymiarowym uogólnionym procesem stochastycznym, że dla dowolnego $(v_1,\ldots,v_N)\in V$ istnieje ograniczony ciąg $\left(({}_iX^1,\ldots,{}_iX^N),\ i\in\mathbb{N}\right)^1 \in \mathcal{J}[L^1(v_1),\ldots,L^N(v_N)]$, to są określone funkcjonały momentów wszystkich rzędów oraz funkcjonał charakterystyczny tego procesu ma postać :

$$1+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{i^s}{s!}\sum_{r_1,\ldots,r_s=1}^{N} m^{r_1,\ldots,r_s}_{[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)]}(v^{r_1},\ldots,v^{r_s}) \tag{2.12}$$

Dowód.

Ustalmy $r_1,\ldots,r_s\in\{1,\ldots,N\},(v_{r_1},\ldots,v_{r_s})\in \bigtimes_{p=1}^{s} V^{r_p}$.

Średnia $\left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p}) \right\rangle$ na $\mathcal{J}[L^{r_1}(v_{r_1}),\ldots,L^{r_s}(v_{r_s})]$

istnieje na podstawie twierdzenia 3.1 [7] , z którego też wynika wzór (2.12) .

<u>Twierdzenie2.4.</u>

Jeżeli $(L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N))$ jest takim zbiorem ciągów układów n funkcjonałów liniowych określonych odpowiednio na V^k, $k=1,\ldots,N$,że dla dowolnego $(v_1,\ldots,v_N)\in V$ ciąg $({}_iL^k(v_k),\ i\in\mathbb{N})$ $k=1,\ldots,N$, jest ograniczony oraz,że dla dowolnych $r_1,\ldots,r_s\in\{1,\ldots,N\}$ i dowolnych $(v_{r_1},\ldots,v_{r_s})\in \bigtimes_{p=1}^{s} V^{r_p}$, $s\in\mathbb{N}$, istnieją średnie $\left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p}) \right\rangle$ na $(L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N))$, to zbiór $(L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N))$ wyznacza jednoznacznie N-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny na V .

Dowód.

Niech $\left(({}_iL^1(v^1),\ldots,{}_iL^N(v^N)),\ i\in\mathbb{N}\right)\in\left(L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right)$,

a $(v_1,\ldots,v_N)\in V$, $u_1,\ldots,u_N\in\mathbb{R}$.

Niech

$$ {}_iX = \sum_{k=1}^{N} u_k \, {}_iL^k(v_k) \, . $$

Zauważmy , że dla dowolnego $s \in \mathbb{N}$

$$ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} {}_iX^s = \sum_{r_1,\dots,r_s=1}^{N} u_{r_1} \dots u_{r_s} \left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p}) \right\rangle . $$

Zatem na podstawie lematu 3.1 [7] zachodzi równość

$$ \text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, u_k \, {}_iL^k(v_k) = $$

$$ = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{r_1,\dots,r_s=1}^{N} u_{r_1} \dots u_{r_s} \left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p}) \right\rangle . $$

Dla wykazania U_N podstawowości ciągu $\left(\left({}_iL^1(v^1), \dots, {}_iL^N(v^N) \right), \ i \in \mathbb{N} \right)$ wystarczy wykazać,że funkcja

$$ Q(u^1,\dots,u^N) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{r_1,\dots,r_s=1}^{N} \left\langle \prod_{l=1}^{s} L^{r_l}(v_{r_l}) \right\rangle u^{r_1} \dots u^{r_s} $$

jest ciągła .

Niech $\varepsilon > 0$, $(u_1^0,\dots,u_N^0) \in \mathbb{R}^N$, a $\left((u_1^n,\dots,u_N^n) , \ n \in \mathbb{N} \right)$ będzie dowolnym ciągiem zbieżnym do $(u_1^0,\dots,u_N^0)$.

Wówczas

$$ \bigvee_{M>1} \ \bigwedge_{r_1,\dots,r_s \in \{1,\dots,N\}} \left| \left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p}) \right\rangle \right| \leqslant M^s , $$

$$ \bigvee_{s_1 \in \mathbb{N}} \ \bigvee_{C>0} \ \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \ \sum_{s=s_1+1}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{r_1,\dots,r_s=1}^{N} \left| \left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p}) \right\rangle \right| \cdot $$

$$ \cdot \left| u_{r_1}^n \dots u_{r_s}^n - u_{r_1}^0 \dots u_{r_s}^0 \right| < \sum_{s=s_1+1}^{\infty} \frac{C^s}{s!} < \frac{\varepsilon}{2} , $$

$$ \bigvee_{n_0 \in \mathbb{N}} \ \bigwedge_{n > n_0} \ \sum_{r_1,\dots,r_s=1}^{N} \left| u_{r_1}^n \dots u_{r_s}^n - u_{r_1}^0 \dots u_{r_s}^0 \right| < \frac{\varepsilon}{2 \sum_{s=1}^{s_1} \frac{M^s}{s!}} , $$

$$ \bigwedge_{n > n_0} \ \left| Q(u_1^n,\dots,u_N^n) - Q(u_1^0,\dots,u_N^0) \right| \leqslant $$

$$\leq \sum_{s=1}^{s_1} \frac{1}{s!} \sum_{r_1,\dots,r_s=1}^{N} \left|\left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p})\right\rangle\right| \cdot \left|u^n_{r_1}\dots u^n_{r_s} - u^0_{r_1}\dots u^0_{r_s}\right| +$$

$$+ \sum_{s=s_1+1}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{r_1,\dots,r_s=1}^{N} \left|\left\langle \prod_{p=1}^{s} L^{r_p}(v_{r_p})\right\rangle\right| \cdot \left|u^n_{r_1}\dots u^n_{r_s} - u^0_{r_1}\dots u^0_{r_s}\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\sum_{s=1}^{s_1} \frac{M^s}{s!}} \cdot \sum_{s=1}^{s_1} \frac{M^s}{s!} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Równość (a) gwarantuje $\widetilde{U}_N$ równoważność dwóch dowolnych ciągów z $\left(L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)\right)$.

Zauważmy , że N-wymiarowy wektor losowy oraz N-wymiarowy proces stochastyczny mogą być traktowane jako pewne uogólnione procesy stochastyczne.Istotnie.

<u>Wniosek 2.5.</u>

Operacja $\left(X^1(v^1),\dots,X^N(v^N)\right) =$

$$= \left\{\left(\left({}_iX^1(v^1),\dots,{}_iX^N(v^N)\right), i\in\mathbb{N}\right) : \left(\left({}_iX^1,\dots,{}_iX^N\right), i\in\mathbb{N}\right)\in\left[X^1,\dots,X^N\right]\right\}$$

na wektorze losowym $\left[X^1,\dots,X^N\right]$, $v^1,\dots,v^N$ - zmienne rzeczywiste , wyznacza jednoznacznie N-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny $\left[X^1(v^1),\dots,X^N(v^N)\right]$ na $\mathbb{R}^N$, którego funkcjonał charakterystyczny jest postaci :

$$\text{(2.13)} \quad Q_{\left[X^1(v^1),\dots,X^N(v^N)\right]}(v^1,\dots,v^N) = Q_{\left[X^1,\dots,X^N\right]}(v^1,\dots,v^N) .$$

Dowód wynika z ciągłości funkcji $f(x^1,\dots,x^N) = \left(v_1\cdot x^1,\dots,v_N\cdot x^N\right)$.

<u>Wniosek 2.6.</u>

Jeżeli $\emptyset \neq \mathcal{C}\left[X^1(t),\dots,X^N(t)\right]$ - zbiór ciągów realizacji N-wymiarowego procesu stochastycznego $\left[X^1(t),\dots,X^N(t)\right]$ na zbiorze otwartym ,

to operacja

$$\left(X^1(v^1),\dots,X^N(v^N)\right) =$$

$$= \Big\{ \Big(\big(v^1({}_i x^1(t)), \ldots, v^N({}_i x^N(t)) \big), \ i \in \mathbb{N} \Big) :$$

$$\Big(\big({}_i x^1(t), \ldots, {}_i x^N(t) \big), i \in \mathbb{N} \Big) \in \mathcal{C}[X^1(t), \ldots, X^N(t)] \Big\} ,$$

przy czym $v^k = v_k$ dane są wzorem (1.12) ;

wyznacza jednoznacznie N-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny $[X^1(v^1), \ldots, X^N(v^N)]$ na V^N , gdzie V-przestrzeń miar postaci (1.12) , którego funkcjonał charakterystyczny ma postać :

$$Q_{[X^1(v^1), \ldots, X^N(v^N)]}(v^1, \ldots, v^N) = \tag{2.14}$$

$$= Q_{[X^1(t), \ldots, X^N(t)]}(v^1, \ldots, v^N) ,$$

czyli funkcjonały charakterystyczne procesu $[X^1(t), \ldots, X^N(t)]$ oraz wyznaczonego przez niego uogólnionego procesu stochastycznego $[X^1(v^1), \ldots, X^N(v^N)]$ pokrywają się .

Dowód wynika z ciągłości funkcji $f(x_1^1, \ldots, x_{m_1}^1, \ldots, x_1^N, \ldots, x_{m_N}^N) =$

$$= \Big(\sum_{l=1}^{m_1} v_l^1 x_l^1, \ldots, \sum_{l=1}^{m_N} v_l^N x_l^N \Big) , \ v_l^k \in \mathbb{R} , \ l=1, \ldots, m ; \ k=1, \ldots, N.$$

<u>Twierdzenie 2.5.</u>

Jeżeli $\emptyset \neq \mathcal{D}[L^1(v^1), \ldots, L^N(v^N)]$ - zbiór ciągów realizacji będących dystrybucjami N-wymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego $[L^1(v^1), \ldots, L^N(v^N)]$ na $V_d = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} D_{m_k}(O_k)$,

gdzie $D_{m_k}(O_k)$ oznacza przestrzeń funkcji gładkich o nośniku ograniczonym zawartym w podzbiorze otwartym O_k przestrzeni $\mathbb{R}^{m_k}$, $k=1, \ldots, N$, to operacja

$$\big(D^{r_1} L^1(v^1), \ldots, D^{r_N} L^N(v^N) \big) \text{ na } \mathcal{D}[L^1(v^1), \ldots, L^N(v^N)] ,$$

gdzie D^{r_k} oznacza różniczkowanie dystrybucyjne rzędu $r_k = (r_k^1, \ldots, r_k^{m_k})$, $k=1, \ldots, N$,wyznacza jednoznacznie N-wymiarowy uogólniony proces stochastyczny $[D^{r_1} L^1, \ldots, D^{r_N} L^N]$

na V_d .

Dowód.

Niech $\left(\left({}_iL^1(v^1),\ldots,{}_iL^N(v^N)\right), i\in \mathbb{N}\right)\in \mathcal{D}\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$.

Ciąg $\left(\left(D^{r_1}{}_iL^1(v^1),\ldots,D^{r_N}{}_iL^N(v^N)\right), i\in \mathbb{N}\right)$ jest U_N podstawowy.

Istotnie. Ustalmy $v^k = v_k \in D_{m_k}(O_k)$ dla $k=1,\ldots,N$.

Wówczas dla dowolnych $i\in\mathbb{N}$ oraz $k\in\{1,\ldots,N\}$ mamy

(a) $$D^{r_k}{}_iL^k(v_k) = {}_iL^k\left((-1)^{|r_k|}D^{r_k}v_k\right),$$

gdzie $|r_k| = \sum_{l=1}^{m_k} r_k^l$, $k=1,\ldots,N$, co oznacza , że ciąg

$\left(\left(D^{r_1}{}_iL^1(v_1),\ldots,D^{r_N}{}_iL^N(v_N)\right), i\in\mathbb{N}\right)$ jest B_N podstawowy.

Podobnie dwa dowolne ciągi $\left(\left(D^{r_1}{}_iL^1(v^1),\ldots,D^{r_N}{}_iL^N(v^N)\right), i\in\mathbb{N}\right)$, $\left(\left(D^{r_1}{}_i\bar{L}^1(v^1),\ldots,D^{r_N}{}_i\bar{L}^N(v^N)\right), i\in\mathbb{N}\right)$ należące do operacji $\left(D^{r_1}L^1(v^1),\ldots,D^{r_N}L^N(v^N)\right)$ są w relacji $\tilde{U}_N$, gdyż uwzględniając (a) dla ustalonego $v^k = v_k$ otrzymane z nich ciągi są $\tilde{B}_N$ równoważne .

Twierdzenie 2.6.

Jeżeli $\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$ jest takim N-wymiarowym uogólnionym procesem stochastycznym na V_d , że $\mathcal{D}\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right] \neq \emptyset$, to funkcjonał charakterystyczny N-wymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego wyznaczonego przez operację $\left(D^{r_1}L^1(v^1),\ldots,D^{r_N}L^N(v^N)\right)$ na $\mathcal{D}\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]$ ma postać

(2.15) $$Q_{\left[D^{r_1}L^1(v^1),\ldots,D^{r_N}L^N(v^N)\right]}(v^1,\ldots,v^N) =$$

$$= Q_{\left[L^1(v^1),\ldots,L^N(v^N)\right]}\left((-1)^{|r_1|}D^{r_1}v^1,\ldots,(-1)^{|r_N|}D^{r_N}v^N\right),$$

Dowód.

Ustalmy $v^k = v_k \in D_{m_k}(O_k)$, k=1,...N .

Zauważmy , że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, D^{r_k}{}_iL^k(v_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{N} \exp i\, {}_iL^k\left((-1)^{|r_k|} D^{r_k} v_k\right) =$$

$$= Q_{\left[L^1(v^1),\dots,L^N(v^N)\right]}\left((-1)^{|r_1|} D^{r_1} v_1,\dots,(-1)^{|r_N|} D^{r_N} v_N\right).$$

§3. Przypadkowe obciążenia o charakterze dystrybucyjnym pręta prostego

Jako przykład zastosowań ciągowego ujęcia teorii prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych w mechanice omówimy zagadnienie obciążenia pręta prostego siłami skupionymi prostopadłymi do jego osi , momentami skupionymi działającymi w płaszczyźnie tych sił , a także obciążeniami o stałej intensywności , przy czym ich wielkości i punkty przyłożenia będą losowe. W sposób najbardziej naturalny charakter tych obciążeń oddaje język dystrybucji.Obiążenie ciągłe o stałej wartości , siła skupiona oraz moment skupiony rodzą pojęcia dystrybucji Heaviside'a , δ - Diraca i jej pochodnej . Dzięki wprowadzeniu dystrybucji teoria prętów ulega znacznemu uproszczeniu. W paragrafie tym wykorzystywać będziemy wzory ujęcia deterministycznego tego zagadnienia przedstawionego w książce [12] . Pręt o długości l identyfikujemy z przedziałem $I \subset (0,L)$, $L > l$. O wartościach sił skupionych , momentów skupionych i obciążeń o stałej intensywności zakładamy , że pochodzą z przedziału J . Niech

$$[H] := \left[X^1,\dots,X^{m_1},a^1,\dots,a^{m_1},Y^1,\dots,Y^{m_2},b^1,\dots,b^{m_2},Z^1,\dots\right.$$
$$\left.\dots,Z^{m_3},c^1,\dots,c^{m_3}\right]$$

będzie $m = 2(m_1+m_2+m_3)$ wymiarowym wektorem losowym , a

$$\Big(\big({}_iX^1,\dots,{}_iX^{m_1},{}_ia^1,\dots,{}_ia^{m_1},{}_iY^1,\dots,{}_iY^{m_2},{}_ib^1,\dots,{}_ib^{m_2},{}_iZ^1,\dots$$

$\ldots, {}_iZ^{m_3}, {}_ic^1, \ldots, {}_ic^{m_3}\big)$, $i \in \mathbb{N}\big)$ dowolnym jego ciągiem istotnych realizacji. Ustalmy $i \in \mathbb{N}$. Umawiamy się traktować ${}_ia^k$ jako punkt przyłożenia momentu skupionego o wartości ${}_iX^k$, $k=1,\ldots,m_1$; ${}_ib^k$ jako punkt przyłożenia siły skupionej o wartości ${}_iY^k$, $k=1,\ldots,m_2$; a ${}_ic^k$ jako punkt, w którym rozpoczyna się działanie obciążenia o stałej wartości ${}_iZ^k$, $k=1,\ldots,m_3$. Przy tej interpretacji obciążenie ${}_iq(x)$, siła poprzeczna ${}_iT(x)$, moment zginający ${}_iM(x)$ pochodzące od i-tej realizacji ciągu istotnych realizacji tego wektora mają odpowiednio postać [12] :

$$(3.1) \qquad {}_iq(x) = \sum_{k=1}^{m_1} {}_iX^k\, \delta'\left(x - {}_ia^k\right) + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iY^k\, \delta\left(x - {}_ib^k\right) + \sum_{k=1}^{m_3} {}_iZ^k\, H\left(x - {}_ic^k\right),$$

$$(3.2) \qquad {}_iT(x) = \sum_{k=1}^{m_1} {}_iX^k \delta\left(x - {}_ia^k\right) + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iY^k\, H\left(x - {}_ib^k\right) + \sum_{k=1}^{m_3} {}_iZ^k \left(x - {}_ic^k\right) H\left(x - {}_ic^k\right),$$

$$(3.3) \qquad {}_iM(x) = \sum_{k=1}^{m_1} {}_iX^k\, H\left(x - {}_ia^k\right) + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iY^k\left(x - {}_ib^k\right) H\left(x - {}_ib^k\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_3} {}_iZ^k \left(x - {}_ic^k\right)^2 H\left(x - {}_ic^k\right).$$

Niech $D(0,L)$ oznacza przestrzeń funkcji gładkich o nośnikach ograniczonych zawartych w przedziale $(0,L)$.

Dystrybucję ${}_iq(x)$ daną wzorem (3.1) można traktować jako funkcjonał liniowy i ciągły ${}_iq(v)$ na $D(0,L)$, przy czym

$$(3.4) \qquad {}_iq(v) = -\sum_{k=1}^{m_1} {}_iX^k\, v'\left({}_ia^k\right) + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iY^k\, v\left({}_ib^k\right) + \sum_{k=1}^{m_3} {}_iZ^k \int_{{}_ic^k}^{L} v(s)\,ds .$$

Podobnie, dystrybucję ${}_iT(x)$ daną wzorem (3.2) można traktować jako funkcjonał liniowy i ciągły ${}_iT(v)$ na $D(0,L)$, przy czym

$$(3.5)\qquad {}_iT(v) = \sum_{k=1}^{m_1} {}_iX^k\, v({}_ia^k) + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iY^k \int_{{}_ib^k}^{L} v(s)ds + \sum_{k=1}^{m_3} {}_iZ^k \int_{{}_ic^k}^{L} (s - {}_ic^k)\, v(s)ds \,.$$

Wreszcie, dystrybucję ${}_iM(x)$ daną wzorem (3.3) można traktować jako funkcjonał liniowy i ciągły ${}_iM(v)$ na $D(0,L)$, przy czym

$$(3.6)\qquad {}_iM(v) = \sum_{k=1}^{m_1} {}_iX^k \int_{{}_ia^k}^{L} v(s)ds + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iY^k \int_{{}_ib^k}^{L} (s - {}_ib^k)v(s)ds + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m_3} {}_iZ^k \int_{{}_ic^k}^{L} (s - {}_ic^k)^2\, v(s)ds \,.$$

<u>Wniosek 3.1.</u>

Pomiędzy operacjami $q(v)$, $T(v)$ i $M(v)$ na $\mathcal{J}[H]$ zachodzą związki

$$(3.7)\qquad D^1 M(v) = T(v)\,,$$

$$(3.8)\qquad D^2 M(v) = D^1 T(v) = q(v)\,.$$

Przyjmijmy upraszczające dalsze zapisy tego paragrafu oznaczenia :

$$(o_1)\qquad {}_iH := ({}_iX^1,\dots,{}_iX^{m_1},{}_ia^1,\dots,{}_ia^{m_1},{}_iY^1,\dots,{}_iY^{m_2},{}_ib^1,\dots,{}_ib^{m_2},{}_iZ^1,\dots,{}_iZ^{m_3},{}_ic^1,\dots,{}_ic^{m_3})\,,$$

$$(o_2)\qquad h := (x^1,\dots,x^{m_1},\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^{m_1},y^1,\dots,y^{m_2},\bar{y}^1,\dots,\bar{y}^{m_2},z^1,\dots,z^{m_3},\bar{z}^1,\dots,\bar{z}^{m_3})\,,$$

(o_3) $\Lambda : = J^{m_1} \times I^{m_1} \times J^{m_2} \times I^{m_2} \times J^{m_3} \times I^{m_3}$,

(o_4) $O : = J_1^{m_1} \times (0,L)^{m_1} \times J_1^{m_2} \times (0,L)^{m_2} \times J_1^{m_3} \times (0,L)^{m_3}$,

gdzie J_1 jest przedziałem otwartym zawierającym J ,

(o_5) $g : = \langle \delta_H \rangle$ - gęstość wektora $[H]$.

Twierdzenie 3.1.

Operacja $q(v)$ na $\mathfrak{I}[H]$ wyznacza jednoznacznie jednowymiarowy uogólniony proces stochastyczny $[q(v)]$ na $D(0,L)$.
Dowód.

Niech $v_o \in D(0,L)$.
Funkcja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(h) : = - \sum_{k=1}^{m_1} x^k v_o'(\bar{x}^k) + \sum_{k=1}^{m_2} y^k v_o(\bar{y}^k) + \sum_{k=1}^{m_3} z^k \int_{\bar{z}^k}^{L} v_o(s)ds$$

jest funkcją ciągłą , więc jej rozszerzenie do odwzorowania określonego na rodzinach ciągów punktów przestrzeni $\mathbb{R}^m$ zgodne z wzorem (1.3) [7] jest odwzorowaniem dopuszczalnym (tw.9.1 [7]) . Zatem istnieje taki jednowymiarowy wektor losowy $[q(v_o)]$, że $q(v_o) \subset [q(v_o)]$, co oznacza , że wszystkie elementy operacji $q(v_o)$ są w relacji $\widetilde{B}_1$.

Twierdzenie 3.2.

Funkcjonał charakterystyczny $Q_{[q(v)]}(v)$ jednowymiarowego procesu stochastycznego $[q(v)]$ wyznaczonego przez operację $q(v)$ ma postać

$$(3.9) \qquad Q_{[q(v)]}(v) = g(\varphi) \, , \qquad ,$$

gdzie $\varphi \in D_m(O)$, przy czym dla $h \in \Lambda$

$$(3.9a) \quad \varphi(h) = \exp i\left(-\sum_{k=1}^{m_1} x^k v'(\bar{x}^k) + \sum_{k=1}^{m_2} y^k v(\bar{y}^k) + \sum_{k=1}^{m_3} z^k \int_{\bar{z}^k}^{L} v(s)ds\right)$$

Dowód.

Ustalmy $v \in D(0,L)$ oraz $\left({}_iq(v)\ ,\ i\in\mathbb{N}\right) \in q(v)$ .Wtedy

$$Q_{[q(v)]}(v) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp i\ {}_iq(v) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\exp i\Big(-\sum_{k=1}^{m_1}{}_iX^k\cdot v'({}_ia^k) + \sum_{k=1}^{m_2}{}_iY^k\, v({}_ib^k) + \sum_{k=1}^{m_3}{}_iZ^k\int_{{}_ic^k}^{L} v(s)ds\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{{}_iH}(\varphi) = g(\varphi) \ .$$

Wniosek 3.2.

Jeżeli H jest m- wymiarowym wektorem losowym o gęstości g będącej funkcją lokalnie całkowalną , to wzór (3.9) przyjmuje postać :

$$Q_{[q(v)]}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\exp i\Big(-\sum_{k=1}^{m_1}x^k\, v'(\bar{x}^k) + \sum_{k=1}^{m_2}y^k\, v(\bar{y}^k) + \sum_{k=1}^{m_3}z^k\int_{\bar{z}^k}^{L}v(s)ds\Big)\cdot g\big(x^1,\dots,x^{m_1},\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^{m_1},y^1,\dots,y^{m_2},\bar{y}^1,\dots,\bar{y}^{m_2},z^1,\dots,z^{m_3},\bar{z}^1,\dots,\bar{z}^{m_3}\big)\, dx^1\dots dx^{m_1}d\bar{x}^1\dots d\bar{x}^{m_1}dy^1\dots dy^{m_2}d\bar{y}^1\dots d\bar{y}^{m_2}dz^1\dots dz^{m_3}d\bar{z}^1\dots d\bar{z}^{m_3} \ .$$

Twierdzenie 3.3.

Operacja $T(v)$ na $\mathfrak{J}[H]$ wyznacza jednoznacznie jednowymiarowy uogólniony proces stochastyczny $[T(v)]$ na $D(0,L)$.

Dowód.

Niech $v_0 \in D(0,L)$.

Funkcja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(h) := \sum_{k=1}^{m_1}x^k\, v(\bar{x}^k) + \sum_{k=1}^{m_2}y^k\int_{\bar{y}^k}^{L}v(s)ds + \sum_{k=1}^{m_3}z^k\int_{\bar{z}^k}^{L}(s-\bar{z}^k)\, v(s)ds$$

jest funkcją ciągłą , więc jej rozszerzenie do odwzorowania określonego na rodzinach ciągów punktów przestrzeni $\mathbb{R}^m$ zgodne z wzorem (1.3) [7] jest odwzorowaniem dopuszczalnym (tw. 9.1 [7]) . Zatem istnieje taki jednowymiarowy wektor losowy $[T(v_o)]$, że $T(v_o) \subset [T(v_o)]$, co oznacza , że wszystkie elementy operacji $T(v_o)$ są w relacji $\widetilde{B}_1$.

Twierdzenie 3.4.

Funkcjonał charakterystyczny $Q_{[T(v)]}(v)$ jednowymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego $[T(v)]$ wyznaczonego przez operację $T(v)$ ma postać

$$(3.10) \qquad Q_{[T(v)]}(v) = g(\psi) ,$$

gdzie $\psi \in D_m(O)$, przy czym dla $h \in \Lambda$

$$(3.10a) \quad \psi(h) = \exp i\Big(\sum_{k=1}^{m_1} x^k\, v(\bar{x}^k) + \sum_{k=1}^{m_2} y^k \int_{\bar{y}^k}^{L} v(s)ds + \sum_{k=1}^{m_3} z^k \int_{\bar{z}^k}^{L} (s - \bar{z}^k)v(s)ds\Big) .$$

Dowód.

Ustalmy $v \in D(O,L)$ oraz $\left({}_iT(v) , i \in \mathbb{N}\right) \in T(v)$. Wtedy

$$Q_{[T(v)]}(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i\, {}_iT(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i\Big(\sum_{k=1}^{m_1} {}_ix^k \cdot v({}_ia^k) + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iy^k \int_{{}_ib^k}^{L} v(s)ds + \sum_{k=1}^{m_3} {}_iz^k \int_{{}_ic^k}^{L} (s - {}_ic^k)v(s)ds\Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{{}_iH}(\psi) = g(\psi) .$$

Wniosek 3.3.

Jeżeli $[H]$ jest m- wymiarowym wektorem losowym o gęstości g będącej funkcją lokalnie całkowalną , to wzór (3.10) przyjmuje postać :

$$(3.11) \quad Q_{[T(v)]}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp i\Big(\sum_{k=1}^{m_1} x^k\, v(\bar{x}^k) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_2} y^k \int_{\bar{y}^k}^{L} v(s)ds + \sum_{k=1}^{m_3} z^k \int_{\bar{z}^k}^{L} (s - \bar{z}^k) v(s)ds \Big) \cdot g\Big(x^1,\dots,x^{m_1},$$

$$\bar{x}^1,\dots,\bar{x}^{m_1}, y^1,\dots,y^{m_2}, \bar{y}^1,\dots,\bar{y}^{m_2}, z^1,\dots,z^{m_3}, \bar{z}^1,\dots,\bar{z}^{m_3}\Big) dx^1 \dots$$

$$\dots dx^{m_1} d\bar{x}^1 \dots d\bar{x}^{m_1} dy^1 \dots dy^{m_2} d\bar{y}^1 \dots d\bar{y}^{m_2} dz^1 \dots dz^{m_3} d\bar{z}^1 \dots d\bar{z}^{m_3} .$$

Twierdzenie 3.5.

Operacja $M(v)$ na $\mathcal{J}[H]$ wyznacza jednoznacznie jednowymiarowy uogólniony proces stochastyczny $[M(v)]$ na $D(0,L)$.

Dowód.

Niech $v_0 \in D(0,L)$.

Funkcja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(h) := \sum_{k=1}^{m_1} x^k \int_{\bar{x}^k}^{L} v_0(s)ds + \sum_{k=1}^{m_2} y^k \int_{\bar{y}^k}^{L} (s - \bar{y}^k) v_0(s)ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_1} z^k \int_{\bar{z}^k}^{L} (s - \bar{z}^k)^2 \, v_0(s)\, ds$$

jest funkcją ciągłą , więc jej rozszerzenie do odwzorowania określonego na rodzinach ciągów punktów z $\mathbb{R}^m$ zgodne z wzorem $(1.3)[7]$ jest odwzorowaniem dopuszczalnym (tw.91 [7]). Zatem istnieje taki jednowymiarowy wektor losowy $[M(v_0)]$, że $M(v_0) \subset [M(v_0)]$, co oznacza , że wszystkie elementy operacji $M(v_0)$ są w relacji $\widetilde{B}_1$.

Twierdzenie 3.6.

Funkcjonał charakterystyczny $Q_{[M(v)]}(v)$ jednowymiarowego uogólnionego procesu stochastycznego $[M(v)]$ wyznaczonego przez operację $M(v)$ ma postać :

$$(3.12) \qquad Q_{[M(v)]}(v) = g(\chi) ,$$

gdzie $\chi \in D_m(0)$, przy czym dla $h \in \Lambda$

$$(3.12a) \quad \chi(h) := \exp i \Big(\sum_{k=1}^{m_1} x^k \int_{\bar{x}^k}^{L} v(s)ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_2} y^k \int_{\bar{y}^k}^{L} \left(s - \bar{y}^k\right) v(s)ds + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_3} z^k \int_{\bar{z}^k}^{L} \left(s - \bar{z}^k\right)^2 v(s)ds\Big).$$

Dowód.

Ustalmy $v \in D(0,L)$ oraz $\left({}_iM(v), i \in \mathbb{N}\right) \in M(v)$. Wtedy

$$Q_{[M(v)]}(v) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i\, {}_iM(v) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \exp i \Big(\sum_{k=1}^{m_1} {}_iX^k \int_{{}_ia^k}^{L} v(s)ds + \sum_{k=1}^{m_2} {}_iY^k \int_{{}_ib^k}^{L} \left(s - {}_ib^k\right) \cdot$$

$$v(s)ds + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_3} {}_iZ^k \int_{{}_ic^k}^{L} \left(s - {}_ic^k\right)^2 v(s)ds \Big) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{{}_iH}(\chi) = g(\chi) .$$

Wniosek 3.4.

Jeżeli $[H]$ jest m- wymiarowym wektorem losowym o gęstości g będącej funkcją lokalnie całkowalną , to wzór (3.12) przyjmuje postać

$$(3.13) \quad Q_{[M(v)]}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\{ \exp i \Big(\sum_{k=1}^{m_1} x^k \int_{\bar{x}^k}^{L} v(s)ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m_2} y^k \int_{\bar{y}^k}^{L} \left(s - \bar{y}^k\right) v(s)ds + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m_3} z^k \int_{\bar{z}^k}^{L} \left(s - \bar{z}^k\right)^2 v(s)ds \Big) \Big\} .$$

$$\cdot g\left(x^1, \dots, x^{m_1}, \bar{x}^1, \dots, \bar{x}^{m_1}, y^1, \dots, y^{m_2}, \bar{y}^1, \dots, \bar{y}^{m_2}, z^1, \dots, z^{m_3}, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^{m_3}\right) dx^1 \dots dx^{m_1} d\bar{x}^1 \dots d\bar{x}^{m_1} dy^1 \dots dy^{m_2} d\bar{y}^1 \dots d\bar{y}^{m_2} dz^1 \dots dz^{m_3} d\bar{z}^1 \dots d\bar{z}^{m_3} .$$

Wykazaliśmy więc że operacje $q(v)$, $T(v)$ i $M(v)$ na $\mathcal{J}[H]$ wyznaczają jednoznacznie jednowymiarowe uogólnione procesy stochastyczne $[q(v)]$, $[T(v)]$ i $[M(v)]$ na $D(0,L)$ (odpowiednio : losowe obciążenie , losową siłę poprzeczną i losowy moment zginający) wyrażając ich funkcjonały charakterystyczne za pomocą gęstości g wektora $[H]$. Oczywiste jest, że operacje występujące w tej samej z równości (3.7) i (3.8) wniosku 3.1 wyznaczają identyczne jednowymiarowe uogólnione procesy stochystyczne. Niemniej wobec twierdzenia 2.5 interesującym wydaje się pytanie o związek pomiędzy procesem $[T(v)]$, a procesem $[D^1 M(v)]$ wyznaczonym przez operację $D^1 M(v)$ na $\mathcal{D}[M(v)]$ oraz o związek pomiędzy procesem $[q(v)]$ a procesem $[D^1 T(v)]$ wyznaczonym przez operację $D^1 T(v)$ na $\mathcal{D}[T(v)]$ i procesem $[D^2 M(v)]$ wyznaczonym przez operację $D^2 M(v)$ na $\mathcal{D}[M(v)]$, przy czym rozpatrywanie procesów $[D^1 T(v)]$, $[D^1 M(v)]$ i $[D^2 M(v)]$ jest sensowne na podstawie tw. 2.5 , gdyż $\emptyset \neq T(v) \subset \mathcal{D}[T(v)]$, $\emptyset \neq M(v) \subset \mathcal{D}[M(v)]$. Odpowiedź na te pytania daje następujące twierdzenie.

<u>Twierdzenie 3.7.</u>

$$[D^1 M(v)] = [T(v)] \tag{3.14}$$

$$[D^2 M(v)] = [D^1 T(v)] = [q(v)] . \tag{3.15}$$

Dowód.

W charakterze reprezentanta klasy abstrakcji $[T(v)]$ weźmy ciąg $({}_iT(v), i \in \mathbb{N})$ z operacji $T(v) \subset [T(v)]$. Na podstawie równości (3.7) wniosek 3.1 uzyskujemy istnienie takiego ciągu $({}_iM(v), i \in \mathbb{N}) \in M(v) \subset \mathcal{D}[M(v)]$, że

$$({}_iT(v),\ i \in \mathbb{N}) = (D^1\ {}_iM(v),\ i \in \mathbb{N}) .$$

Tak więc

$$({}_iT(v),\ i \in \mathbb{N}) \ \tilde{U}_1 \ (D^1\ {}_iM(v),\ i \in \mathbb{N}) .$$

Fakt, że ciąg $(D^1\ {}_iM(v),\ i \in \mathbb{N})$ jest elementem operacji $D^1 M(v)$ na $\mathcal{D}[M(v)]$, gdyż $M(v) \subset \mathcal{D}[M(v)]$, kończy dowód równości (3.14) . Dla dowodu równości (3.15) obierzmy ciąg $({}_iq(v),\ i \in \mathbb{N})$ z operacji $q(v) \subset [q(v)]$ w charakterze reprezentanta klasy $[q(v)]$. Z równości (3.8) wniosek 3.1 wynika istnienie takich ciągów $({}_iT(v), i \in \mathbb{N}) \in T(v) \subset \mathcal{D}[T(v)]$

i $\left({}_iM(v), i\in\mathbb{N}\right)\in M(v)\subset\mathcal{D}[M(v)]$, że

$$\left({}_iq(v), i\in\mathbb{N}\right) = \left(D^1\ {}_iT(v), i\in\mathbb{N}\right) = \left(D^2\ {}_iM(v), i\in\mathbb{N}\right).$$

Stąd

$$\left({}_iq(v), i\in\mathbb{N}\right) \quad \tilde{U}_1 \quad \left(D^1\ {}_iT(v), i\in\mathbb{N}\right) ,$$

$$\left({}_iq(v), i\in\mathbb{N}\right) \quad \tilde{U}_1 \quad \left(D^2\ {}_iM(v), i\in\mathbb{N}\right) .$$

Wystarczy jeszcze zauważyć , że $\left(D^1\ {}_iT(v), i\in\mathbb{N}\right)$ jest elementem operacji $D^1\ T(v)$ na $\mathcal{D}[T(v)]$, bo $T(v)\subset\mathcal{D}[T(v)]$ oraz , że $\left(D^2\ {}_iM(v), i\in\mathbb{N}\right)$ należy do operacji $D^2\ M(v)$ na $\mathcal{D}[M(v)]$, bo $M(v)\subset\mathcal{D}[M(v)]$.

Literatura

[1] ANTOSIK P., MIKUSIŃSKI J., SIKORSKI R., Theory of distributions. The sequential approach,ESPC, Amsterdam, PWN , Warszawa 1973.

[2] BRÜCKNER D., PODHORODYŃSKI M., SKALMIERSKI B., Podstawy rachunku prawdopodobieństwa w ujęciu dystrybucyjnym, Zeszyty Naukowe pol.Śl.,seria Mat.-Fiz.,nr 29 , Gliwice 1979, s.67 - 81.

[3] BRÜCKNER D., PODHORODYŃSKI M., SKALMIERSKI B., Charakterystyki statystyczne zmiennej losowej w ujęciu dystrybucyjnym, Zeszyty Naukowe Pol.Śl.,seria Mat.-Fiz.,nr 29 , Gliwice 1979, s. 13 - 31.

[4] BRÜCKNER D., PODHORODYŃSKI M., SKALMIERSKI B., Charakterystyki statystyczne wektora losowego w ujęciu dystrybucyjnym, Zeszyty Naukowe Pol.Śl.,seria Mat.-Fiz.,nr 29 , Gliwice 1979, s. 33 - 50.

[5] BRÜCKNER D., PODHORODYŃSKI M., SKALMIERSKI B., Funkcjonał charakterystyczny i pewne charakterystyki statystyczne procesu stochastycznego /ujęcie ciągowe/,Zeszyty Naukowe Pol.Śl.,seria Mat.-Fiz., nr 29, Gliwice,s.51-65.

[6] BRÜCKNER D., PODHORODYŃSKI M., SKALMIERSKI B., Proces stochastyczny w ujęciu dystrybucyjnym, Prace Matematyczne,t.8, Prace Naukowe U.Śl. nr 218, katowice 1979 , s. 80 - 87.

[7] BRÜCKNER D., PODHORODYŃSKI M., SKALMIERSKI B., Ciągowe ujęcie teorii wektorów losowych i prawdopodobieństwa , Prace IPPT , Warszawa / w druku /.

[8] BRÜCKNER D., Wybrane zagadnienia ciągowego ujęcia teorii wielowymiarowych uogólnionych procesów stochastycznych , praca doktorska, U.Śl., Katowice 1979.

[9] FINE T., Theories of probability. An examinations of foun dations, Academic Press, New York - London 1973.

[10] PODHORODYŃSKI M., Pewne zagadnienia teorii układów punktów losowych w ujęciu ciągowym, praca doktorska, U.Śl., Katowice 1979.

[11] SCHWARTZ L., Theorie des distributions, Herman ,Paris 1973.

[12] SKALMIERSKI B., Mechanika z wytrzymałością materiałów dla automatyków, PWN, Warszawa 1973.