254.

SUR LA SURFACE PARALLÈLE À L'ELLIPSOIDE.

[From the *Annali di Matematica pura ed applicata*, (Tortolini), tom. III. (1860), pp. 345—352.]

Il y a pour la surface parallèle à l'ellipsoïde une solution tout à fait semblable à celle pour la courbe parallèle à l'ellipse. En effet soit

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

l'équation de l'ellipsoïde; k la distance de la surface parallèle, en prenant cette distance sur la normale extérieure au point (X, Y, Z) et en écrivant pour abréger

$$\sqrt{\frac{X^2}{a^4}+\frac{Y^2}{b^4}+\frac{Z^2}{c^4}}=\frac{k}{\lambda},$$

on trouve pour les coordonnées (x, y, z) de l'extrémité de la normale

$$x=X\left(1+\frac{\lambda}{a^2}\right),\quad y=Y\left(1+\frac{\lambda}{b^2}\right),\quad z=Z\left(1+\frac{\lambda}{c^2}\right),$$

et, en substituant pour X, Y, Z les valeurs données par ces équations, on obtient

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{b^2y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{c^2z^2}{(c^2+\lambda)^2}=1,$$

$$\frac{\lambda^2x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{\lambda^2y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{\lambda^2z^2}{(c^2+\lambda)^2}=k^2.$$

Or ces équations donnent

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k^2}{\lambda},$$

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}=\frac{k^2}{\lambda^2},$$

et la seconde équation est la dérivée par rapport à λ de la première. C'est-à-dire en obtient l'équation de la surface parallèle en égalant à zéro le discriminant par rapport à λ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k^2}{\lambda},$$

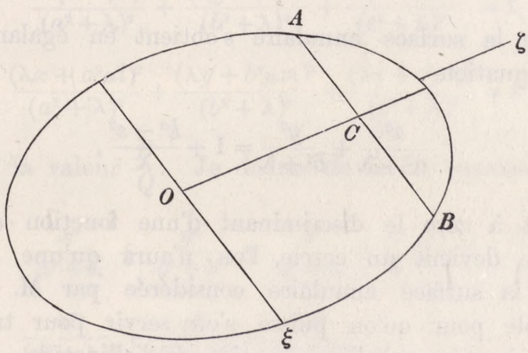
ou autrement dit, la surface parallèle est l'enveloppe par rapport à λ de cette équation. En multipliant par $\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$, on aura une équation du quatrième ordre, dont le discriminant égalé à zéro donne l'équation de la surface: on voit sans peine que cette équation sera de l'ordre 10.

J'avais à peine trouvé cette méthode, quand j'ai appris que le problème était déjà résolu par MM. Salmon et W. Roberts. M. Salmon considère la surface comme lieu des centres des sphères, rayon k, qui touchent à l'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$, ce qui lui donne tout de suite le théorème que voici; savoir on obtient l'équation de la surface parallèle, en égalant à zéro le discriminant par rapport à λ du discriminant par rapport à (X, Y, Z) de l'équation

$$\lambda\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}-1\right)+(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=0;$$

cette solution est donnée en passant dans une Note publiée dans le No. de Septembre 1860 des Nouvelles Annales (Terquem et Gerono). En formant le discriminant par rapport à X, Y, Z on trouve l'équation en λ ci-dessus donnée.

La solution de M. W. Roberts n'avait pas été publiée: il a bien voulu me permettre d'en faire part aux géomètres. En considérant une section circulaire de l'ellipsoïde, l'enveloppe des sphères, rayon k, ayant leurs centres sur cette section, sera une surface annulaire, et l'enveloppe des surfaces annulaires qui correspondent aux différentes



sections circulaires de l'ellipsoïde sera la surface parallèle. Dans la figure (qui est censée située dans le plan des axes le plus grand et le plus petit) soit $O\xi$ la trace de la section circulaire centrale, $O\zeta$ le diamètre perpendiculaire, AB la trace d'une section quelconque parallèle à la section circulaire centrale: soit de plus $AB=2\delta$, et (α, γ)

les coordonnées du point C qui est le centre de la section AB. En prenant pour un moment ce point C pour origine, et l'axe de η parallèle à l'axe moyen, la surface annulaire sera l'enveloppe de la sphère

$$(\xi - \delta \cos \phi)^2 + (\eta - \delta \sin \phi)^2 + \zeta^2 = k^2,$$

(où ϕ est un paramètre arbitraire); donc l'équation de la surface annulaire sera

$$4\delta^2 (\xi^2 + \eta^2) = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \delta^2 - k^2)^2,$$

ou, en prenant le centre de l'ellipsoïde pour origine, cette équation sera

$$4\delta^2 (\xi^2 + \eta^2 - 2\alpha\xi + \alpha^2) = (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \delta^2 - k^2 - 2\alpha\xi - 2\gamma\zeta - \alpha^2 - \gamma^2)^2.$$

Mais par les propriétés de l'ellipse on a $\gamma = l\alpha$ et $\delta^2 = m + n\alpha^2$, où l, m, n sont des quantités constantes, fonctions des axes a, b, c de l'ellipsoïde. L'équation de la surface annulaire devient ainsi

$$4 (m + n\alpha^2) (\xi^2 + \eta^2 - 2\alpha\xi + \alpha^2) = [\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + m - k^2 - 2\alpha (\xi + l\zeta) + \alpha^2 (n + 1 + l^2)]^2,$$

équation qui contient le paramètre variable α au quatrième degré, et en égalant à zéro le discriminant par rapport à α de cette équation, on obtiendrait l'équation de la surface parallèle. À propos de cette solution je remarque qu'en considérant la surface annulaire, enveloppe des sphères, rayon k, ayant leurs centres sur l'ellipse

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

on obtient sans peine le système d'équations

$$\frac{a^2x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2y^2}{(b^2+k)^2} = 1, \quad \frac{\lambda^2x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{\lambda^2y^2}{(c^2+\lambda)^2} = k^2 - z^2,$$

et de là l'équation de la surface annulaire s'obtient en égalant à zéro le discriminant par rapport à λ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1 + \frac{k^2 - z^2}{\lambda},$$

c'est-à-dire en égalant à zéro le discriminant d'une fonction *cubique* de λ. Mais en supposant que l'ellipse devient un cercle, l'on n'aura qu'une fonction quadratique de λ; c'est là pourquoi la surface annulaire considérée par M. Roberts s'exprime sous une forme assez simple pour qu'on puisse s'en servir pour trouver l'équation de la surface parallèle. Soit à présent l'ellipse, section de l'ellipsoïde

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

par un plan quelconque

$$lX + mY + nZ = p;$$

il est clair que l'équation de la surface annulaire doit se trouver de même à moyen d'une fonction cubique de λ. Pour vérifier cela, je remarque que l'on a à trouver l'enveloppe de la sphère $(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=k^2$, où les paramètres X, Y, Z sont liés par les deux équations qui viennent d'être mentionnées: cela donne tout de suite pour la surface annulaire le système des équations

$$x - X - \lambda\frac{X}{a^2} - \mu l = 0,$$

$$y - Y - \lambda\frac{Y}{b^2} - \mu m = 0,$$

$$z - Z - \lambda\frac{Z}{c^2} - \mu n = 0,$$

où λ, μ sont des paramètres arbitraires: ces équations donnent

$$X = \frac{a^2(x-\mu l)}{a^2+\lambda},\quad Y = \frac{b^2(y-\mu m)}{b^2+\lambda},\quad Z = \frac{c^2(z-\mu n)}{c^2+\lambda},$$

et de là, en mettant pour abréger

$$\frac{la^2x}{a^2+\lambda} + \frac{mb^2y}{b^2+\lambda} + \frac{nc^2z}{c^2+\lambda} - p = P,$$

$$\frac{l^2a^2}{a^2+\lambda} + \frac{m^2b^2}{b^2+\lambda} + \frac{n^2c^2}{c^2+\lambda} \quad = Q,$$

on trouve à moyen de l'équation linéaire

$$Q\mu - P = 0, \text{ où } \mu = \frac{P}{Q},$$

et les deux autres équations donnent alors

$$\frac{a^2(x-\mu l)^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2(y-\mu m)^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2(z-\mu n)^2}{(c^2+\lambda)^2} = 1,$$

$$\frac{(\lambda x + a^2\mu l)^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{(\lambda y + b^2\mu m)^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{(\lambda z + c^2\mu n)^2}{(c^2+\lambda)^2} = k^2,$$

où μ est censé dénoter la valeur $\dfrac{P}{Q}$. Je déduis de là les équations

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} + \frac{\mu^2}{\lambda}Q = 1 + \frac{k^2}{\lambda},$$

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}$$

$$+\,2\left(\frac{a^2lx}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^2my}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^2nz}{(c^2+\lambda)^2}\right)\frac{\mu}{\lambda}$$

$$+\left(\frac{a^4l^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^4m^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^4n^2}{(c^2+\lambda)^2}\right) \quad = \frac{k^2}{\lambda^2}.$$

Soient P', Q' les dérivées de P, Q par rapport à λ, on a

$$-P' = \frac{la^2x}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{mb^2y}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{nc^2z}{(a^2+\lambda)^2},$$

$$-Q' = \frac{l^2a^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{m^2b^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{n^2c^2}{(c^2+\lambda)^2},$$

et de là aussi

$$Q+\lambda Q' = \frac{a^4l^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{b^4m^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{c^4n^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

A moyen de ces équations, et en substituant pour μ la valeur $\frac{Q}{P}$, les deux équations ci-dessus données deviennent

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 - \frac{k^2}{\lambda}\right) Q + \frac{P^2}{\lambda} = 0,$$

$$\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} - \frac{k^2}{\lambda^2}\right) Q - 2\frac{PP'}{\lambda} + (Q+\lambda Q')\frac{P^2}{Q\lambda^2} = 0;$$

en différentiant la première équation par rapport à λ on obtient

$$-\left(\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2} - \frac{k^2}{\lambda^2}\right) Q$$
$$+\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 - \frac{k^2}{\lambda}\right) Q' + \frac{2PP'}{\lambda} - \frac{P^2}{\lambda^2} = 0,$$

et cette équation se réduit à une identité à moyen des deux équations: donc l'équation de la surface annulaire s'obtient en égalant à zéro le discriminant par rapport à λ de l'équation

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 - \frac{k^2}{\lambda}\right) Q + \frac{P^2}{\lambda} = 0,$$

c'est-à-dire, en substituant pour P, Q leurs valeurs, l'équation sera

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 - \frac{k^2}{\lambda}\right)\left(\frac{a^2l^2}{a^2+\lambda} + \frac{b^2m^2}{b^2+\lambda} + \frac{c^2n^2}{c^2+\lambda}\right)$$
$$+\frac{1}{\lambda}\left(\frac{a^2lx}{a^2+\lambda} + \frac{b^2my}{b^2+\lambda} + \frac{c^2nz}{c^2+\lambda} - p\right)^2 = 0.$$

Dans cette équation, en réunissant les termes

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}\,\frac{a^2l^2}{a^2+\lambda} + \frac{1}{\lambda}\,\frac{a^4l^2x^2}{(a^2+\lambda)^2},$$

on voit que ces termes se réduisent à

$$\frac{(a^2+\lambda)\,\dfrac{a^4l^2x^2}{\lambda}}{(a^2+\lambda)}, = \frac{a^4l^2x^2}{\lambda\,(a^2+\lambda)},$$

et de même pour les termes semblables en y, z. Donc en multipliant par

$$\lambda(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)$$

les dénominateurs disparaissent, et l'équation est réellement de l'ordre 3 par rapport à λ.

La section sera circulaire en supposant

$$l=\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}},\quad m=0,\quad n=\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}};$$

cela donne

$$\frac{a^2l^2}{a^2+\lambda}+\frac{b^2m^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2n^2}{c^2+\lambda}=\frac{\frac{a^2}{b^2}-1}{a^2+\lambda}+\frac{1-\frac{c^2}{b^2}}{c^2+\lambda}=\frac{(a^2-c^2)(b^2+\lambda)}{b^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

l'équation en λ devient ainsi

$$\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1-\frac{k^2}{\lambda}\right)(a^2-c^2)(b^2+\lambda)$$
$$+\frac{b^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)}{\lambda}\left(\frac{a^2x\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}}{a^2+\lambda}+\frac{c^2z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}{c^2+\lambda}-p\right)^2=0,$$

laquelle se réduit à

$$\begin{aligned}&x^2[\lambda(a^2-c^2)+c^2(a^2-b^2)]+y^2\lambda(a^2-c^2)+z^2[\lambda(a^2-c^2)+a^2(b^2-c^2)]\\&\quad+2acxz\sqrt{a^2-b^2}.\sqrt{b^2-c^2}\\&\quad-2bp[ax(c^2+\lambda)\sqrt{a^2-b^2}+by(a^2+\lambda)\sqrt{b^2-c^2}]\\&\quad-2(a^2-c^2)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)+b^2p^2(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)=0,\end{aligned}$$

équation de l'ordre 2 par rapport à (x, y, z), par rapport à λ, et par rapport à p. Donc en égalant à zéro le discriminant par rapport à λ, on obtiendrait une équation du quatrième ordre par rapport aux coordonnées (x, y, z), et par rapport à p; on aurait ainsi l'équation de la surface annulaire de M. Roberts, rapportée aux axes de l'ellipsoïde, et en termes des quantités a, b, c, k et du paramètre p qui donne la position du plan

$$X\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}+Y\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}-p=0$$

de la section circulaire.

M. Roberts a donné (*Comptes Rendus* Nov. 14, 1859) le théorème que voici qui se rapporte à une surface primitive quelconque:—"Soit D la surface semblable à la primitive en multipliant par 2 ses rayons vecteurs, et soit P la surface parallèle ou équidistante de D par la longueur constante k, l'équation qui résulte de la substitution de $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ au lieu de k dans l'équation de P, coïncide avec l'équation de la première dérivée négative de la surface primitive"—ou je rappelle que dans la théorie des surfaces dérivées de M. Hirst la *première dérivée négative* est la surface enveloppe des plans conduits par les points de la surface primitive perpendiculairement aux rayons menés par un point quelconque. Pour démontrer le théorème, prenons $f(X, Y, Z)=0$ pour l'équation de la surface primitive: en supposant que (X, Y, Z) soient les coordonnées d'un point de cette surface, $(2X, 2Y, 2Z)$ seront les coordonnées d'un point de la surface D, et la surface parallèle à D sera l'enveloppe des sphères

$$(x-2X)^2+(y-2Y)^2+(z-2Z)^2=k^2,$$

avec la relation $f(X, Y, Z)=0$ entre les paramètres. Or on peut *avant d'effectuer l'élimination* écrire $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ au lieu de k, l'équation devient ainsi

$$X(x-X)+Y(y-Y)+Z(z-Z)=0,$$

avec cette même relation $f(X, Y, Z)=0$ entre les paramètres; or cette équation est celle d'un plan conduit par le point (X, Y, Z) perpendiculairement au rayon mené par l'origine des coordonnées: et ce dernier système donne ainsi l'équation de la surface dérivée.

L'équation de la surface parallèle de l'ellipsoïde est trouvée en égalant à zéro le discriminant par rapport à λ de l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k^2}{\lambda};$$

donc, en écrivant dans cette équation $x^2+y^2+z^2$ au lieu de k, et $4a^2$, $4b^2$, $4c^2$ au lieu de a^2, b^2, c^2, on doit obtenir l'équation de la dérivée de l'ellipsoïde, les rayons étant menés par le centre. Pour me conformer à la notation de mon Mémoire "Sur la surface qui est l'enveloppe des plans conduits par les points d'un ellipsoïde perpendiculairement aux rayons menés par le centre" (*Journal*, tom. II. 1859 [250]) j'écris -2θ au lieu de λ: l'équation en λ devient ainsi

$$\frac{x^2}{4a^2-2\theta}+\frac{y^2}{4b^2-2\theta}+\frac{z^2}{4c^2-2\theta}=1-\frac{x^2+y^2+z^2}{2\theta},$$

laquelle se réduit tout de suite à

$$\frac{x^2}{2-\dfrac{\theta}{a^2}}+\frac{y^2}{2-\dfrac{\theta}{b^2}}+\frac{z^2}{2-\dfrac{\theta}{c^2}}=\theta,$$

et la surface dérivée est l'enveloppe de cette équation en θ, résultat trouvé dans le mémoire que je viens de mentionner.

Mais je dois à M. Roberts la remarque que réciproquement l'équation en λ pour la surface parallèle peut se déduire des formules de ce mémoire. En effet en prenant $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$ pour les coordonnées d'un point de l'ellipsoïde (on a comme à l'ordinaire $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$) l'équation du plan perpendiculaire au rayon par le centre sera

$$ax\cos\alpha+by\cos\beta+cz\cos\gamma=a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma,$$

et l'enveloppe de cette équation est l'enveloppe par rapport à θ de l'équation

$$\frac{x^2}{2-\dfrac{\theta}{a^2}}+\frac{y^2}{2-\dfrac{\theta}{b^2}}+\frac{z^2}{2-\dfrac{\theta}{c^2}}=\theta.$$

Donc *en général* l'enveloppe de

$$l\cos\alpha+m\cos\beta+n\cos\gamma=p\cos^2\alpha+q\cos^2\beta+r\cos^2\gamma,$$

(où comme auparavant $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$) sera l'enveloppe par rapport à θ de l'équation

$$\frac{l^2}{2p-\theta}+\frac{m^2}{2q-\theta}+\frac{n^2}{2r-\theta}=\theta.$$

Or la surface parallèle à l'ellipsoïde est l'enveloppe de

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=k^2,$$

ou, en écrivant $a\cos\alpha$, $b\cos\beta$, $c\cos\gamma$ au lieu de X, Y, Z, cette surface est l'enveloppe de

$$l\cos\alpha+m\cos\beta+n\cos\gamma=p\cos^2\alpha+q\cos^2\beta+r\cos^2\gamma,$$

en posant $\rho=x^2+y^2+z^2$, et

$$l=2ax,\ m=2by,\ n=2cz,$$

$$p=\rho+a^2-k^2,\ q=\rho+b^2-k^2,\ r=\rho+c^2-k^2.$$

Donc cette surface sera l'enveloppe par rapport à θ de l'équation

$$\frac{4a^2x^2}{2(\rho+a^2-k^2)-\theta}+\frac{4b^2y^2}{2(\rho+b^2-k^2)-\theta}+\frac{4c^2z^2}{2(\rho+c^2-k^2)-\theta}=\theta,$$

et en écrivant $(2\rho-k^2)-\theta=2\lambda$ cette équation devient

$$\frac{a^2x^2}{a^2+\lambda}+\frac{b^2y^2}{b^2+\lambda}+\frac{c^2z^2}{c^2+\lambda}=\rho-k^2-\lambda,$$

c'est-à-dire

$$x^2+y^2+z^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}\right)=\rho-k^2-\lambda,$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1+\frac{k^2}{\lambda},$$

ce qu'il s'agissait de faire voir. Je réserve à une autre occasion la discussion de la forme, et des singularités de la forme, et des singularités de la surface parallèle à l'ellipsoïde.

2, *Stone Buildings, W. C., Londres,* 7 *Nov.* 1860.