25.

SUR L'ÉQUATION EN MATRICES $px = xq$.

[*Comptes Rendus*, XCIX. (1884), pp. 67—71; 115, 116.]

SOIENT p et q deux matrices de l'ordre ω.

Pour résoudre l'équation $px = xq$, on obtiendra ω^2 équations homogènes linéaires entre les ω^2 éléments de l'inconnue x et les éléments de p et de q, de sorte que, afin que l'équation donnée soit résoluble, les éléments de p et de q doivent être liés ensemble par une et une seule équation.

Mais, si l'*équation identique* en p est écrite sous la forme

$$p^\omega + Bp^{\omega-1} + Cp^{\omega-2} + \ldots + L = 0,$$

on aura apparemment, en vertu de l'équation $p = xqx^{-1}$,

$$xq^\omega x^{-1} + Bxq^{\omega-1}x^{-1} + Cxq^{\omega-2}x^{-1} + \ldots + L = 0$$

ou bien $$q^\omega + Bq^{\omega-1} + Cq^{\omega-2} + \ldots + L = 0\,;$$

donc les ω racines de q seront identiques avec celles de p et, au lieu d'une seule équation, on aura en apparence (*au moins*) ω équations entre les éléments de p et de q.

Pour faire disparaître ce paradoxe, il n'y a qu'une seule supposition à faire : c'est que x, sous les suppositions faites, devient une matrice vide, car alors x^{-1} n'a plus une existence actuelle, et l'équation $p = xqx^{-1}$ n'aura pas lieu ; c'est ce qu'on va voir arriver *dans le cas général*, où $px = xq$.

Pour fixer les idées, supposons $\omega = 1$ et faisons

$$p = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} \lambda & \mu \\ \nu & \pi \end{vmatrix}.$$

En égalant px à xq, on obtient les quatre équations simultanées et homogènes entre λ, μ, ν, π suivantes :

$$\begin{aligned}
(a-\alpha)\lambda + c\mu - \beta\nu + 0\pi &= 0,\\
b\lambda + (d-\alpha)\mu + 0\nu - \beta\pi &= 0,\\
-\gamma\lambda + 0\mu + (a-\delta)\nu + c\pi &= 0,\\
0\lambda + \gamma\mu + b\nu + (d-\delta)\pi &= 0,
\end{aligned}$$

et conséquemment on aura*

$$b^2c^2 + \beta^2\gamma^2 - 2bc\beta\gamma - 2abcd - 2\alpha\beta\gamma\delta + (bc + \beta\gamma)(a + d)(\alpha + \delta)$$
$$- bc(\alpha^2 + \delta^2) - \beta\gamma(a^2 + d^2) + \alpha\delta(a^2 + d^2) + ad(\alpha^2 + \delta^2)$$
$$+ 2ad\alpha\delta + a^2d^2 + \alpha^2\delta^2 - (a + d)(\alpha + \delta)(ad + \alpha\delta) = 0,$$

ou, en écrivant $a + d = B,\ ad - bc = D,\ \alpha + \delta = C,\ \alpha\delta - \beta\gamma = F,$

$$(D - F)^2 + (B - C)(BF - CD) = 0\,;$$

c'est-à-dire, si R est le résultant de $X^2 - Bx + D$, $X^2 - Cx + F$, $R = 0$ sera la condition générale de la possibilité de satisfaire à l'équation $px = xq$.

Il est facile de faire voir que ce résultat peut être étendu au cas général où p et q sont des matrices de l'ordre ω : on n'a qu'à démontrer que si une des racines latentes de p est égale à une de q, l'équation $px = xq$ est résoluble; et de plus, sans que cette condition soit satisfaite, l'équation est irrésoluble. Soient donc $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\omega$ les racines latentes de p et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\omega$ de q et supposons que $\lambda_1 = \mu_1$, alors

$$(p - \lambda_1)\,x = x\,(q - \mu_1),$$

et l'on peut satisfaire à cette équation en écrivant

$$x = (p - \lambda_2)(p - \lambda_3)\ldots(p - \lambda_\omega)(q - \mu_2)(q - \mu_3)\ldots(q - \mu_\omega).$$

Conséquemment, si les racines latentes de p et de q sont les racines des deux formes algébriques $X^\omega + BX^{\omega-1} + \ldots + L$, $X^\omega + CX^{\omega-1} + \ldots + M$, quand R (le résultant de ces deux formes) s'évanouit, le résultant des ω^2 équations homogènes linéaires obtenues en égalant $px = xq$ s'évanouira ; mais R est indécomposable et du même degré (ω^2) que ce dernier résultant dans les éléments de p et q. Conséquemment les deux résultants (à un facteur numérique près) sont identiques : ce qui démontre que la condition $R = 0$ est non pas seulement nécessaire, mais de plus suffisante afin que $px = xq$ soit résoluble.

Pour ce qui regarde la valeur de x, posons $x = UV$, où

$$U = (p - \lambda_2)(p - \lambda_3)\ldots(p - \lambda_\omega)\,;\quad V = (q - \mu_2)(q - \mu_3)\ldots(q - \mu_\omega),$$

le seul fait que x contient U comme facteur ou que x contient V comme facteur suffit à constater que x n'est pas seulement vide, mais de plus possède au moins $\omega - 1$ degrés de nullité, c'est-à-dire que tous ses déterminants mineurs du second ordre sont des zéros.

Cela est la conséquence d'un théorème que j'ai démontré dans le *Johns Hopkins Circular*† relatif au degré de nullité des combinaisons des *facteurs latents* d'une matrice, dont le théorème relatif à l'*équation* dite *identique* de Cayley ou de Hamilton n'est qu'un cas particulier, ou pour mieux dire le cas extrême ; seulement il faut y ajouter un théorème qui fait partie de ma troisième loi de mouvement algébrique, c'est-à-dire que le degré de nullité d'un facteur ne peut jamais excéder le degré de nullité du produit auquel il appartient.

[* The expressions for p, q in line 7 from the bottom of p. 176 should be interchanged; in the last line of p. 176, for $+\gamma\mu$ *read* $-\gamma\mu$.] [† p. 134 above.]

Nous avons donc complètement résolu le paradoxe qui était à expliquer. Mais, sur-le-champ, une nouvelle contradiction surgit, car il semble que nous avons démontré que, dans *tout* cas sans exception, si $px = xq$, x est nécessairement une matrice vide, ce qui est évidemment faux, car on sait bien que, si, ω étant de l'ordre de p et de q, $q = \sqrt[\omega]{(1)}\,p$, alors, afin que l'équation $px = xq$ soit résoluble, il n'est jamais nécessaire que x soit vide. Ainsi, par exemple, pour les matrices binaires, l'équation $qx = xq$ est satisfaite quand x est une fonction quelconque de q, et l'équation $qx = -xq$ est résoluble, pourvu que q^2 soit *scalar*, en imposant deux conditions (dont une que son carré soit *scalar*) sur x. Pour lever cette contradiction, revenons au cas où $\omega = 2$ et aux équations fondamentales

$$\begin{gathered}(a-\alpha)\,\lambda + c\mu - \beta\nu = 0,\\ b\lambda + (d-\alpha)\,\mu - \beta\pi = 0,\\ -\gamma\lambda + (a-\delta)\,\nu + c\pi = 0,\\ -\gamma\mu + b\nu + (d-\delta)\,\pi = 0.\end{gathered}$$

Certes, si ces équations donnent des valeurs *déterminées* aux rapports λ, μ, ν, π, le raisonnement précédent rend certain que x doit être vide, c'est-à-dire que $\lambda\pi - \mu\nu = 0$, mais cette conclusion devient fausse aussitôt que p et q sont pris tels que ces rapports deviennent indéterminés, ce qui arrive quand tous les premiers déterminants mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} (a-\alpha) & c & -\beta & 0 \\ b & (d-\alpha) & 0 & -\beta \\ -\gamma & 0 & (a-\delta) & c \\ 0 & -\gamma & b & (d-\delta) \end{vmatrix}$$

s'évanouissent simultanément.

Dans ce cas, quoique la solution générale qui donne *x vide* tienne bon, rien n'empêche qu'il n'existe d'autres valeurs de x, c'est-à-dire de $\begin{matrix}\lambda & \mu\\ \nu & \pi\end{matrix}$, pour lequels cela n'est pas vrai.

La matrice écrite en haut doit posséder et possède, en effet, la propriété remarquable que, en supprimant une ligne horizontale quelconque et en nommant A, B, C, D les quatre déterminants mineurs de la matrice rectangulaire qui survient, affectés de signes convenables, la quantité $AD - BC$ contiendra le déterminant complet comme facteur. Il sera peut-être utile, avant de conclure, de donner un exemple d'un genre nouveau de subsistance de l'équation $px = xq$ avec une valeur finie du déterminant de x. Faisons donc

$$a - \delta = 0, \quad d - \alpha = 0, \quad bc - \beta\gamma = 0,$$

on aura

$$\begin{gathered}(a-d)\,\lambda + c\mu - \beta\nu = 0,\\ b\lambda - \beta\pi = 0, \quad -\gamma\lambda + c\pi = 0,\\ -\gamma\mu + b\nu + (d-a)\,\pi = 0,\end{gathered}$$

équations qui n'équivalent qu'à deux,

$$b\lambda-\beta\pi=0,\quad (a-d)\,\lambda+(c\mu-\beta\nu)=0,$$

et le déterminant de x, c'est-à-dire $\lambda\pi-\mu\nu$, aura en général une valeur finie.

Dans la dernière Note (insérée dans les *Comptes rendus**) qui roule sur l'équation en matrices binaires $x^2-px=0$, j'ai remarqué qu'en addition aux solutions normales

$$x=0,\quad x=p,\quad x=r\frac{p-s}{r-s},\quad x=s\frac{p-r}{s-r}$$

(où r, s sont les racines latentes de p), on a la solution indéterminée (due en grande partie à la sagacité de M. Franklin)

$$x=\begin{Bmatrix}-\lambda\,(d-r) & \lambda b\\ \mu c & -\mu\,(a-r)\end{Bmatrix}$$

avec la condition $\lambda\,(d-r)+\mu\,(a-r)+r=0$. Évidemment on a aussi la solution tout à fait distincte

$$x=\begin{Bmatrix}-\lambda\,(d-s) & \lambda b\\ \mu c & -\mu\,(a-s)\end{Bmatrix}$$

avec la condition $\lambda\,(d-s)+\mu\,(a-s)+s=0$; mais on doit noter que, quand on prend $\lambda=\mu$, on reprend les deux valeurs normales $x=r\dfrac{p-s}{r-s}$, $x=s\dfrac{p-r}{s-r}$; le fait curieux que, quand $b=0$ et $c=0$, les deux solutions aberrantes forment un troisième couple tout à fait déterminé a été déjà noté, et l'on peut y ajouter la remarque que si, en addition à $b=0$, $c=0$, on a aussi

$$a-d=0,$$

alors l'indétermination reparaît à pas redoublé, la solution entière étant dans ce cas extra-spécialement constituée par une paire de solutions dont l'une et l'autre contiennent *deux* constantes arbitraires au lieu d'une seule.

Je dois ajouter que, dans le cas où i racines de p $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i)$ sont identiques avec i de q $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_i)$, l'équation

$$px=xq,$$

qui amène à $\quad p^2x=xq^2,\ \ldots,\ p^ix=xq^i$

et, par conséquent, à

$$(p-\lambda_1)\ldots(p-\lambda_i)\,x=x\,(q-\mu_1)\ldots(q-\mu_i),$$

sera satisfaite si l'on fait $x=UV$, où

$$U=(p-\lambda_{i+1})\ldots(p-\lambda_\omega),\quad V=(q-\mu_{i+1})\ldots(q-\mu_\omega),$$

[* p. 174 above.]

de sorte que x (en vertu du théorème déjà cité) aura au moins $\omega - \theta$ degrés de nullité, c'est-à-dire tous ses déterminants mineurs de l'ordre $\theta + 1$ s'évanouiront. Mais on sait, pour le cas où $\theta = \omega$ (et l'on a toute raison de croire pour le cas où θ a une valeur quelconque au-dessus de l'unité), qu'il existe pour des valeurs spéciales de p et de q des solutions singulières de l'équation $px = xq$, lesquelles (comme dans le cas de l'equation de Riccati) sont bien autrement intéressantes et beaucoup plus importantes que la solution générale.

On remarquera que, quand $\theta = \omega$, la solution générale disparaît, tandis que les solutions singulières pour des valeurs particulières de p et de q, ayant toutes les racines latentes de l'un identiques avec celles de l'autre, forment la base de la présentation des matrices sous la forme de quaternions, nonions, etc.