7.

DÉMONSTRATION GRAPHIQUE* D'UN THÉORÈME D'EULER CONCERNANT LES PARTITIONS DES NOMBRES.

[*Comptes Rendus*, XCVI. (1883), pp. 1110—1112.]

COMME confirmation de la puissance de la méthode graphique appliquée à la théorie des partitions, la preuve suivante d'un théorème que je crois être nouveau ne sera pas, je l'espère, tout à fait dépourvue d'intérêt pour les géomètres; car il serait, il me semble, assez difficile d'en trouver une preuve directe analytique au moyen de la comparaison de fonctions génératrices, comme on le fait ordinairement pour des théorèmes de ce genre.

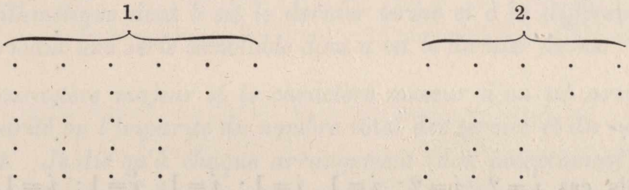
Euler a trouvé facilement, par une comparaison de telles fonctions, que le nombre de partitions de n en nombres impairs est le même que le nombre de partitions de n en nombres inégaux; je précise ce théorème en ajoutant que le nombre de partitions de n en nombres impairs, qui se divisent en i groupes de nombres distincts, est égal au nombre de partitions de n en i suites tout à fait distinctes de nombres consécutifs.

Nommons U une partition en nombres impairs et V une partition en nombres inégaux.

Je dis qu'on peut passer de U à V par la méthode suivante. Supposons, par exemple, que U soit la partition $11 . 11 . 7 . 7 . 7 . 5$.

Je forme deux assemblages réguliers de points en prenant dans l'un d'eux, sur chaque ligne, un nombre de points égal à $\frac{11+1}{2}$, $\frac{11+1}{2}$, $\frac{7+1}{2}$, $\frac{7+1}{2}$, $\frac{7+1}{2}$, $\frac{5+1}{2}$, et l'autre assemblage en diminuant de l'unité chacun de ces nombres de points. On forme ainsi ces deux assemblages:

1. 2.



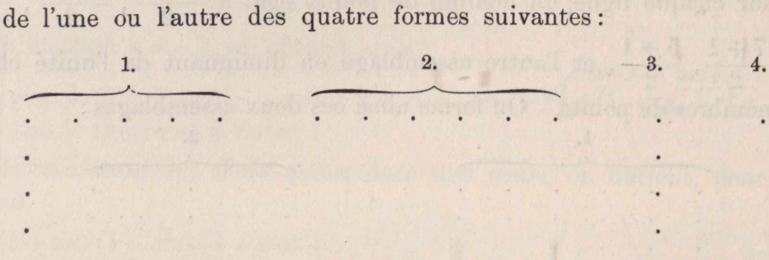
et, en comptant le nombre de points dans les *angles* successifs de chaque figure, on obtient, dans l'un, 11, 9, 5, 2, et, dans l'autre, 10, 8, 3; en les réunissant, on obtient la partition

$$11 . 10 . 9 . 8 . 5 . 3 . 2,$$

qui est un V.

[* See p. 39 above.]

Or il est facile de voir que dans cette méthode de transformation U devient V, et l'on démontre (en construisant un certain système d'équations linéaires) que, pour un V quelconque donné, on peut trouver un et un seul U qui se transformera dans ce V, de sorte qu'il y a correspondance un à un entre la totalité des U et la totalité des V, ce qui sert à démontrer le théorème original d'Euler. Mais si tel était le but de cette recherche, cette méthode de transformation serait peine perdue, car il existe une tout autre méthode, infiniment plus simple, d'établir une telle correspondance: on la trouvera expliquée dans le cahier de l'*American Journal of Mathematics* qui va paraître. L'utilité de cette méthode spéciale de créer la correspondance consiste en ceci: que le V ainsi conjugué avec un U contiendra le même nombre de suites distinctes de nombres consécutifs que le U contient de nombres impairs distincts: cela veut dire que le nombre des lignes inégales (disons i) dans l'un ou l'autre assemblage de points est toujours égal à j, nombre de suites distinctes obtenu en opérant de la manière expliquée ci-dessus. La preuve en est facile; car si l'on enlève l'angle extérieur à l'un et à l'autre des assemblages, on verra facilement que quatre cas se présenteront: pour un de ces cas, j ne change pas de valeur, à cause du changement opéré dans les deux assemblages; dans un autre cas, j subira une diminution de deux unités, et dans les deux cas intermédiaires d'une seule unité. Ces cas correspondent aux quatre suppositions qui résultent de la combinaison des hypothèses que les deux premières lignes ou les deux premières colonnes dans l'un ou l'autre des assemblages sont ou ne sont pas égales entre elles: de sorte qu'on verra facilement que le j et le i seront toujours diminués de la même quantité, ou 0, ou 1 ou 2, et conséquemment on aura $i-j$ *constant*; si l'on enlève l'un après l'autre les angles des deux assemblages jusqu'à ce qu'on arrive à un assemblage qui sera de l'une ou l'autre des quatre formes suivantes:



pour lesquels cas $i=2$, $j=2$; $i=1$, $j=1$; $i=1$, $j=1$; $i=1$, $j=1$; respectivement on aura toujours ainsi $i=j$, de sorte qu'il y a correspondance une à une entre les partitions du même nombre n qui contiennent justement i nombres impairs répétés (ou non) à volonté, et celles qui contiennent justement i suites distinctes de nombres consécutifs, et conséquemment il y aura le même nombre des unes et des autres: ce qui est le théorème que j'ai voulu démontrer.