66.

SUR LES FONCTIONS DE LAPLACE.

[From the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (Liouville), tom. XIII. (1848), pp. 275—280].

J'AI réussi à étendre à un nombre quelconque de variables la théorie des fonctions de Laplace, en me fondant sur le théorème que voici:

"Les coefficients $l, m, \ldots, l', m', \ldots$ étant assujettis aux conditions

$$\left.\begin{array}{l} l^2+m^2+\ldots=0, \\ l'^2+m'^2+\ldots=0, \end{array}\right\} \qquad (1),$$

et les limites de l'intégration étant données par

$$x^2+y^2+\ldots=1 \qquad (2),$$

l'on aura pour toutes valeurs entières et positives de s, s', excepté pour $s=s'$,

$$\int (lx+my+\ldots)^s\,(l'x+m'y+\ldots)^{s'}\,dx dy\ldots=0 \qquad (3),$$

et pour $s=s'$,

$$\int (lx+my+\ldots)^s\,(l'x+m'y+\ldots)^s\,dx dy\ldots=N_s\,(ll'+mm'+\ldots)^s \qquad (4),$$

en faisant, pour abréger,

$$N_s=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n}\,\Gamma(s+1)}{2^s\,\Gamma(\frac{1}{2}n+s+1)} \qquad (5),$$

(où n dénote le nombre des variables)."

En admettant d'abord comme vrai ce théorème qui sera démontré plus bas, je remarque qu'il est permis d'écrire $\frac{d}{da}, \frac{d}{db}, \ldots, \frac{d}{da'}, \frac{d}{db'}, \ldots$, au lieu de $l, m, \ldots, l', m', \ldots$, où ces nouveaux symboles se rapportent à de certaines fonctions f, f' de $a, b, \ldots$ et de $a', b', \ldots$ respectivement. De là ce nouveau théorème:

"Les fonctions f, f' étant assujetties aux conditions

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2f}{da^2}+\frac{d^2f'}{db^2}+\ldots=0,\\ \frac{d^2f'}{da'^2}+\frac{d^2f'}{db^2}+\ldots=0,\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6),$$

on aura (entre les mêmes limites qu'auparavant), excepté pour $s=s'$,

$$\int\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s f\,.\left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^{s'} f'\,.\,dxdy\ldots=0\ldots\ldots\ldots(7),$$

et pour $s=s'$,

$$\left.\begin{aligned}&\int\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s f\,.\left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^{s} f'\,.\,dxdy\ldots\\ &=N_s\left(\frac{d}{da}\frac{d}{da'}+\frac{d}{db}\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s ff'.\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(8)."$$

Il est facile de voir que les expressions

$$\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s f,\quad \left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^{s'} f'$$

satisfont à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\ldots=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9),$$

et, de plus, qu'elles sont les fonctions entières et homogènes, des degrés s et s' respectivement, les plus générales qui puissent satisfaire à cette équation. On a donc ce théorème:

"Soient V_s, $W_{s'}$ les fonctions entières et homogènes des degrés s et s' respectivement, les plus générales qui satisfassent à l'équation (9); on aura toujours, excepté au cas de $s=s'$,

$$\int V_s\,W_{s'}\,dxdy\ldots=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

(les limites étant les mêmes qu'auparavant)."

Écrivons à présent

$$f=(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1},$$

valeur qui satisfait à la première des équations (8), et nous obtiendrons par la différentiation successive, en faisant attention à la seconde de ces mêmes équations,

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d}{da}\frac{d}{da'}+\frac{d}{db}\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1}f'\\ &=(-)^s\,2^s\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}n+s-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)}\left(a\frac{d}{da'}+b\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s f'\,(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n-s+1}\end{aligned}\right\}\ldots(11).$$

En représentant, comme auparavant, par W_s la fonction

$$\left(x\frac{d}{da'}+y\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s f',$$

soit W_s' ce que devient W_s en écrivant $a, b, \ldots$ au lieu de $x, y, \ldots$, c'est-à-dire écrivons

$$W_s'=\left(a\frac{d}{da'}+b\frac{d}{db'}+\ldots\right)^s f'.$$

On déduit de là, et au moyen de l'équation (11), en substituant dans l'équation (8), la formule

$$\left.\begin{aligned}\frac{(-)^s}{\Gamma(s+1)}\int\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1}\,W_s\,dxdy\ldots\\ =M_s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n-s+1}\,W_s'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(12),$$

en faisant, pour abréger,

$$\Gamma(s+1)\,M_s=\frac{\Gamma\,2^s(\frac{1}{2}n+s-1)}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)}\,N_s,$$

ou bien

$$M_s=\frac{4\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma(\frac{1}{2}n-1)\,(n+2s)\,(n+2s-2)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13).$$

Soit maintenant

$$\frac{1}{[(a-x)^2+\ldots]^{\frac{1}{2}n-1}}=\frac{Q_0}{(a^2+b^2+\ldots)^{\frac{1}{2}n-1}}\ldots+\frac{Q_s}{(a^2+b^2+\ldots)^{\frac{1}{2}n+s-1}}\ldots\ldots\ldots\ldots(14),$$

ou, autrement dit, soit

$$Q_s=\frac{(-)^s}{\Gamma(s+1)}\left(x\frac{d}{da}+y\frac{d}{db}+\ldots\right)^s(a^2+b^2+\ldots)^{-\frac{1}{2}n+1}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15),$$

l'équation (12) devient

$$\int Q_s W_s\,dxdy\ldots=M_s W_s'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

{où la valeur de M_s est donnée par l'équation (13)}. Les deux équations (10) et (16) contiennent la théorie des fonctions W_s, Q_s, lesquelles comprennent évidemment, comme cas particulier, les fonctions de Laplace.

Pour démontrer le théorème exprimé par les équations (1), (2), (3), (4), (5), je fais d'abord abstraction des équations (1), et j'écris

$$x=\ l\xi+\ l'\eta+\ l''\zeta\ldots,$$

$$y=m\xi+m'\eta+m''\zeta\ldots,$$

où les coefficients sont tels que l'équation

$$x^2+y^2+\ldots=p\xi^2+2q\xi\eta+p'\eta^2+p''\zeta^2+\ldots$$

soit identiquement vraie. Cela suppose que les valeurs de p, p', q soient respectivement $l^2+m^2+\ldots$, $l'^2+m'^2+\ldots$, et $ll'+mm'+\ldots$, et que les sommes de produits telles que $ll''+mm''+\ldots$, $l'l''+m'm''+\ldots$ se réduisent chacune à zéro. De là

$$dxdy\ldots=\sqrt{pp'-q^2}\,\sqrt{p''}\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots,$$
$$lx+my+\ldots=p\xi+q\eta,$$
$$l'x+m'y+\ldots=q\xi+p'\eta.$$

En représentant par I l'intégrale au premier membre de l'équation (3), cela donne

$$I=\sqrt{pp'-q^2}\,\sqrt{p''}\ldots\int(p\xi+q\eta)^s\,(q\xi+p'\eta)^{s'}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots,$$

l'équation des limites étant

$$p\xi^2+2q\xi\eta+p'\eta^2+p''\zeta^2+\ldots=1.$$

Cette intégrale se simplifie en écrivant

$$\xi\sqrt{p}+\frac{q\eta}{\sqrt{p}}=\xi_,,\quad \eta\sqrt{p'-\frac{q^2}{p}}=\eta_,,\quad \zeta\sqrt{p''}=\zeta_,,\ldots;$$

car alors

$$\sqrt{pp'-q^2}\,\sqrt{p''}\ldots d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots=d\xi_,\,d\eta_,\,d\zeta_,\ldots,$$
$$p\xi+q\eta=\sqrt{p}\,\xi_,,$$
$$q\xi+p'\eta=\frac{1}{\sqrt{p}}(q\xi_,+\sqrt{pp'-q^2}\,\eta_,),$$

et de là

$$I=p^{\frac{1}{2}(s-s')}\int\xi_,^{\,s}(q\xi_,+\sqrt{pp'-q^2}\,\eta_,)^{s'}\,d\xi_,\,d\eta_,\,d\zeta_,\ldots,$$

l'équation des limites étant

$$\xi_,^{\,2}+\eta_,^{\,2}+\ldots=1.$$

En supposant $s>s'$, l'intégrale s'évanouit pour $p=0$, et de même quand $s'>s$, elle s'évanouit pour $p'=0$. Donc, en écrivant $p=0$, $p'=0$, on aura toujours, excepté pour $s=s'$, l'équation $I=0$; ce qui revient à l'équation (3). Au cas de $s=s'$, en écrivant de même $p=0$, $p'=0$, on trouve

$$I=q^s\int\xi_,^{\,s}\,(\xi_,+i\eta_,)^s\,d\xi_,\,d\eta_,\,d\zeta_,\ldots$$

(où, comme à l'ordinaire, $i=\sqrt{-1}$). En faisant attention à la valeur de q, et en comparant avec l'équation (4), cette dernière équation sera démontrée en vérifiant la formule

$$N_s=\int\xi_,^{\,s}\,(\xi_,+i\eta_,)^s\,d\xi_,\,d\eta_,\,d\zeta_,\ldots.$$

Soient pour cela

$$\xi_,=\rho\cos\theta,\qquad \eta_,=\rho\sin\theta.$$

Cela donne (en omettant la partie imaginaire qui s'évanouit évidemment)

$$N_s = \int \rho^{2s+1} \cos^s \theta \cos s\theta \, d\rho \, d\theta \, d\zeta, \ldots.$$

En effectuant d'abord l'intégration par rapport à $\zeta, \ldots$, les limites de ces variables sont données par

$$\zeta^2 + \ldots = 1 - \rho^2,$$

et l'on trouve tout de suite

$$N_s = \frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \int \rho^{2s+1} (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n-1} \cos^s \theta \cos s\theta \, d\rho \, d\theta.$$

Cette formule doit être intégrée depuis $\rho = 0$ à $\rho = 1$, et depuis $\theta = 0$ à $\theta = 2\pi$; mais en multipliant par quatre, on peut n'étendre l'intégration par rapport à θ que depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \frac{1}{2}\pi$. De là

$$N_s = \frac{4\pi^{\frac{1}{2}n-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} \int_0^1 \rho^{2s+1} (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n-1} \, d\rho \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^s \theta \cos s\theta \, d\theta;$$

et enfin, au moyen des formules connues

$$\int_0^1 \rho^{2s+1} (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}n-1} \, d\rho = \frac{\Gamma(s+1)\,\Gamma(\frac{1}{2}n)}{2\,\Gamma(\frac{1}{2}n+s+1)},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^s \theta \cos s\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2^{s+1}},$$

on retrouve la formule (5), laquelle il s'agissait de démontrer. Ainsi le théorème fondamental est complétement établi.