Archives of Mechanics • Archiwum Mechaniki Stosowanej • 29, 3, pp. 431-444, Warszawa 1977

Représentations irréductibles des fonctions tensorielles non-polynomiales de deux tenseurs symétriques dans quelques cas d'anisotropie

J. P. BOEHLER et J. RACLIN (GRENOBLE)

UNE MÉTHODE permettant d'établir des représentations irréductibles pour les fonctions non nécessairement polynomiales est utilisée pour obtenir la représentation d'un tenseur symétrique fonction non nécessairement polynomiale de deux tenseurs symètriques dans les cas de l'anisotropie la plus générale, de l'orthotropie et de l'orthotropie de révolution. Pour le type de fonction étudié, les représentations irréductibles obtenues sont constituées d'invariants polynomiaux et de générateurs simples en nombre plus restreint que dans les représentations des fonctions polynomiales pour les cas de l'orthotropie et de l'orthotropie de révolution.

Metodę pozwalającą na wyprowadzenie niesprowadzalnych reprezentacji dla funkcji anizotropowych, niekoniecznie wielomianów, wykorzystano w celu otrzymania reprezentacji tensora symetrycznego — niewielomianowej funkcji dwóch tensorów symetrycznych — w przypadku najbardziej ogólnej anizotropii, ortotropii i ortotropii poprzecznej. Dla badanego typu funkcji otrzymane reprezentacje niesprowadzalne są utworzone z niezmienników wielomianów i generatorów prostych o liczbie mniejszej niż w przypadku reprezentacji funkcji wielomianowych dla ortotropii i izotropii poprzecznej.

Метод, позволяющий вывести несводимые представления для анизотропных функций, не обязательно многочленов, использован с целью получения представления симметричного тензора — немногочленной функции двух симметричных тензоров — в случае наиболее общей анизотропии, ортотропии и поперечной ортотропии. Для исследуемого типа функций полученные несводимые представления образованы из инвариантов многочленов и простых генераторов с меньшим числом, чем в случае представления многочленных функций для ортотропии и поперечной изотропии.

1. Introduction

LES REPRÉSENTATIONS irréductibles des fonctions tensorielles anisotropes non nécessairement polynomiales d'un seul tenseur symétrique du second ordre, obtenues à partir de la méthode proposée dans [1], sont similaires aux représentations irréductibles des fonctions tensorielles anisotropes polynomiales. Ce résultat n'est pas confirmé pour les fonctions de deux tenseurs symétriques du second ordere: les représentations des fonctions non-polynomiales sont plus réduites que les représentations correspondantes des fonctions polynomiales. Ces réductions sont appréciables dans les applications, notamment dans l'étude des lois constitutives des milieux continus écrouissables, lorsque les fonctions considérées ne vérifient pas la restriction polynomiale.

Dans cette étude, nous supposons que ces équations constitutives s'expreiment par des relations explicites entre trois tenseurs symétriques du second ordre dans un espace à trois dimensions. Un repère lié au milieu précise l'orientation par rapport à ce milieu des tenseurs-arguments de la fonction étudiée. Sans restreindre la généralité, ce repère est choisi orthonormé dans la configuration de référence. Pour les types suivants d'anisotropie: anisotropie la plus générale, orthotropie et orthotropie de révolution, les formes les plus générales des équations constitutives sont établies à l'aide de la théorie des représentations des fonctions tensorielles isotropes non-polynomiales [2–4] et par application des restrictions provenant des symétries du milieu orienté considéré. Les représentations irréductibles obtenues contiennent un nombre plus restreint d'éléments que celles du cas polynomial, explicitées ici par la méthode proposée dans [5] pour les groupes de transformations orthotrope et orthotrope de révolution.

2. Formulation du problème

Soit un milieu anisotrope, dont la loi de comportement peut être explicitée par:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \tag{2.1}$$

où **A** est un tenseur du second ordre, considéré comme variable mécanique; **B** est un autre tenseur symétrique du second ordre, indépendant de **A**, considéré comme variable d'écrouissage; **T**, tenseur symétrique du second ordre, est la réponse du milieu; $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est un triplet de vecteurs liés au milieu, orthonormé dans la configuration de référence. L'anisotropie est introduite par la variation de la réponse **T** suivant l'orientation relative des variables **A** et **B** par rapport au milieu. Cette orientation est définie à partir du repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$.

Le principe de l'isotropie de l'espace impose que, pour que (2.1) soit une équation constitutive, la fonction **F** doit être isotrope par rapport à ses cinq arguments; c'est-à-dire que pour toute transformation **Q** appartenant au groupe orthogonal **O**, appliquée à la fois aux sollicitations **A** et **B** et au milieu défini à partir du repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, la réponse **T** doit être transmuée par la même transformation [1]:

$$\mathbf{Q} \in \mathbf{O} \quad \mathbf{F}(\mathbf{QAQ}^t, \mathbf{QBQ}^t, \mathbf{Qv}_1, \mathbf{Qv}_2, \mathbf{Qv}_3) = \mathbf{QFQ}^t. \tag{2.2}$$

Pour la fonction isotrope **F**, lorsque ses cinq arguments sont des variables indépendantes, des représentations dans le cas non-polynomial ont été établies par:

Smith [2] qui propose comme base fonctionnelle la réunion de toutes les bases correspondant à des sous-ensembles du domaine de **F**.

Wang [3], qui propose comme base fonctionnelle (resp. comme ensemble de générateurs) la réunion des bases fonctionnelles irréductibles (resp. des ensembles irréductibles de générateurs) correspondant à toutes les sous-listes indépendantes de la liste des arguments de **F**.

Les différences qui apparaissent entre les résultats de ces deux auteurs ont été analysées et réduites dans [6]. La représentation retenue pour la fonction **F**, non nécessairement polynomiale et isotrope par rapport à ses cinq arguments, est une combinaison linéaire de trente-deux générateurs (tenseurs symétriques du second ordre) ayant comme coefficients des fonctions scalaires de quarante-six invariants scalaires isotropes. Ces invariants et ces générateurs sont donnés en Annexe I. Cette représentation est irréductible: aucun des quarante-six invariants de la base fonctionnelle n'est une fonction à valeur unique des autres invariants de base; aucun des trente-deux générateurs de base n'est une combinaison linéaire des autres générateurs de base, avec pour coefficients des fonctions scalaires des invariants de la base fonctionnelle.

Dans notre étude, la fonction $\mathbf{F}$ est soumise à deux types de restrictions:

elle doit vérifier les symétries matérielles propres à chaque type d'anisotropie envisagé.

ses arguments $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ne sont pas un ensemble de variables indépendantes, mais constituent un repère orthonormé.

La fonction $\mathbf{F}$, isotrope par rapport à ses cinq arguments $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, est anisotrope par rapport aux sollicitations $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, le type d'anisotropie étant spécifié par le groupe d'invariance du triplet $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Lorsque ce triplet est non dégénéré, il s'agit de l'anisotropie la plus générale. L'orthotropie correspond au cas où les sens des vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ ne sont plus imposés. En ne retenant dans les représentations de la fonction (2.2) que les éléments indépendants de $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$ pour $i \neq j$, on obtient donc une représentation pour $\mathbf{T}$ fonction orthotrope de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. L'orthotropie de révolution, par exemple d'axe privilégié $\mathbf{v}_3$, correspond au cas où les vecteurs $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ sont nuls. En ne retenant dans la représentation de la fonction (2.2) que les éléments indépendants de $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{22}, \mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{23}, \mathbf{M}_{31}$, on obtient donc une représentation pour $\mathbf{T}$ fonction orthotrope de révolution de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.

Les arguments $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ n'étant pas des variables indépendantes, les représentations ainsi obtenues ne sont pas irréductibles. Il est montré dans [1] que l'irréductibilité est obtenue trivialement dans le cas de l'anisotropie la plus générale et qu'elle est automatiquement satisfaite dans le cas de l'orthotropie de révolution par l'introduction de la condition de normalité du vecteur $\mathbf{v}_3$: $\operatorname{tr}\mathbf{M}_{33} = \operatorname{tr}(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3) = 1$. Dans le cas de l'orthotropie, les conditions de normalité $\operatorname{tr}\mathbf{M}_{11} = \operatorname{tr}\mathbf{M}_{22} = \operatorname{tr}\mathbf{M}_{33} = 1$ ne suffisent pas pour assurer l'irréductibilité, car il faut encore introduire les conditions d'orthogonalité des vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Pour une fonction de deux tenseurs symétriques, une analyse directe permet de conclure.

3. Anisotropie la plus générale

La représentation de la fonction isotrope (2.2), donnée en Annexe I, fournit une représentation pour $\mathbf{T}$ fonction anisotrope la plus générale de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. En analysant les formes explicites dans le repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ des quarante-six invariants de base, nous remarquons que tous ces invariants sont des fonctions à valeurs uniques des douze invariants indépendants suivants:

$$(3.1)\qquad \begin{array}{cccccc} \operatorname{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{A} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{A} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{A} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{23}\mathbf{A} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{31}\mathbf{A} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{12}\mathbf{A}, \\ \operatorname{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{B} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{B} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{B} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{23}\mathbf{B} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{31}\mathbf{B} & \operatorname{tr}\mathbf{M}_{12}\mathbf{B}, \end{array}$$

qui constituent donc une base fonctionnelle irréductible. Il apparaît que les invariants (3.1) sont les douze composantes indépendantes de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Ce résultat était prévisible, puisque, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ étant indépendants et la fonction $\mathbf{F}$ ne présentant aucune symétrie, tout invariant scalaire de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans le cas de l'anisotropie la plus générale est une fonction quelconque des douze composantes indépendantes de **A** et **B**. La formulation à l'aide des tenseurs $\mathbf{M}_{ij}$ permet cependant d'exprimer **F** en fonction des invariants (3.1) et non directement en fonction des composantes de **A** et **B**, ce qui est physiquement plus adéquat.

De même nous remarquons que parmi les trente-deux générateurs de la représentation de **F**, les six générateurs suivants sont linéairement indépendants:

$$\mathbf{M}_{11} \quad \mathbf{M}_{22} \quad \mathbf{M}_{33} \quad \mathbf{M}_{23}+\mathbf{M}_{32} \quad \mathbf{M}_{31}+\mathbf{M}_{13} \quad \mathbf{M}_{12}+\mathbf{M}_{21} \tag{3.2}$$

les autres générateurs de base s'exprimant par rapport aux générateurs (3.2) par des combinaisons linéaires dont les coefficients sont des fonctions scalaires quelconques des invariants (3.1). Les générateurs (3.2) constituent donc un ensemble irréductible de générateurs pour la représentation de **T**. Ce résultat était également prévisible, puisque ces générateurs constituent une base tensorielle de l'espace des tenseurs symétriques du second ordre à trois dimensions.

Une représentation irréductible pour **T** fonction anisotrope la plus générale de **A** et **B** est finalement donnée par:

$$\begin{gathered}\mathbf{T} = \alpha_1\mathbf{M}_{11}+\alpha_2\mathbf{M}_{22}+\alpha_3\mathbf{M}_{33}+\alpha_4(\mathbf{M}_{23}+\mathbf{M}_{32})+\alpha_5(\mathbf{M}_{31}+\mathbf{M}_{13})+\alpha_6(\mathbf{M}_{12}+\mathbf{M}_{21}),\\ \alpha_i = \alpha_i(\mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{23}\mathbf{A}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{31}\mathbf{A}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{12}\mathbf{A}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{B},\\ \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{23}\mathbf{B}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{31}\mathbf{B}, \mathrm{tr}\mathbf{M}_{12}\mathbf{B})\end{gathered} \tag{3.3}$$

ou, en utilisant les composantes de **A** et **B** avec la base tensorielle (3.2) par:

$$\mathbf{T} = T_{11}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+T_{22}\begin{vmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{vmatrix}+T_{33}\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}+T_{23}\begin{vmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}+T_{31}\begin{vmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix}+T_{12}\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{vmatrix} \tag{3.4}$$

les T_{ij} étant des fonctions quelconques des composantes A_{kl} et B_{mn} de **A** et **B**.

4. Orthotropie

En ne retenant dans la représentation de la fonction (2.2) que les éléments indépendants de $\mathbf{M}_{ij}$ $(i \neq j)$ et en introduisant les conditions de normalité $\mathrm{tr}\mathbf{M}_{11} = \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22} = \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33} = 1$, nous obtenons une représentation de **T** fonction othotrope de **A** et **B** constituée des vingt-cinq invariants:

$$\begin{array}{lllllll} \mathrm{tr}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\mathbf{A}^3 & \mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\\ \mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\mathbf{B}^3 & \\ \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \\ \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\mathbf{AB}^2 & \end{array} \tag{4.1}$$

et des vingt-trois générateurs:

$$\begin{array}{llllll} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{AB}+\mathbf{BA} & \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{33}\\ \mathbf{M}_{11} & \mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{BA}^2 & \mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{33}\\ \mathbf{M}_{22} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{AB}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A} & \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33}\\ \mathbf{M}_{33} & \mathbf{B}^2 & & \mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33} \end{array} \tag{4.2}$$

La base fonctionnelle (4.1) et l'ensemble de générateurs (4.2) ne sont pas irréductibles à cause de l'orthogonalité des vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Les invariants $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{B}^2$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{AB}$ et $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ s'expriment par des fonctions à valeur unique des autres invariants (4.1) (Annexe II). Une analyse directe montre que les dix-neuf invariants qui subsistent forment une base fonctionnelle irréductible, aucun d'entre eux n'étant une fonction à valeur unique des autres. Les générateurs $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}^2, \mathbf{B}^2, \mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{BA}^2$ et $\mathbf{AB}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A}$ s'expriment par des combinaisons linéaires des autres générateurs (4.2) avec pour coefficients des fonctions scalaires des invariants de la base fonctionnelle irréductible (Annexe II). De même une analyse directe montre que les seize générateurs qui subsistent sont linéairement indépendants.

Une représentation irréductible pour $\mathbf{T}$ fonction orthotrope de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est finalement donnée par:

$$
\begin{aligned}
(4.3)\qquad \mathbf{T} = \beta_1\mathbf{M}_{11}+\beta_2\mathbf{M}_{22}+\beta_3\mathbf{M}_{33}&+\beta_4(\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{11})+\beta_5(\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{22})\\
&+\beta_6(\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{33})+\beta_7(\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{11})\\
&+\beta_8(\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{22})+\beta_9(\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{33})\\
&+\beta_{10}(\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{11})+\beta_{11}(\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{22})\\
&+\beta_{12}(\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33})+\beta_{13}(\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{11})\\
&+\beta_{14}(\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22})+\beta_{15}(\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33})\\
&+\beta_{16}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA});
\end{aligned}
$$

avec:

$$
\begin{aligned}
(4.4)\qquad \beta_i = \beta_i(&\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{B}^3, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{AB}^2\\
&\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B},\\
&\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2,\\
&\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{AB}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{AB}, \quad \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{AB}).
\end{aligned}
$$

Par une démonstration semblable à celle donnée dans [1], on peut obtenir une autre représentation à partir de (4.3) en remplaçant les générateurs $\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{11}$, $\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{22}$, $\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33}$ par leur somme $2\mathbf{A}^2$ et les générateurs $\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{11}$, $\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22}$, $\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33}$ par leur somme $2\mathbf{B}^2$. Cette nouvelle représentation pour $\mathbf{T}$ fonction orthotrope de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est donnée par:

$$
\begin{aligned}
(4.5)\qquad \mathbf{T} = \beta_1\mathbf{M}_{11}+\beta_2\mathbf{M}_{22}+\beta_3\mathbf{M}_{33}&+\beta_4(\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{11})+\beta_5(\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{22})\\
&+\beta_6(\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{33})+\beta_7(\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{11})\\
&+\beta_8(\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{22})+\beta_9(\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{33})\\
&+\beta_{10}\mathbf{A}^2+\beta_{11}\mathbf{B}^2+\beta_{12}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})
\end{aligned}
$$

les β_i étant des fonctions des mêmes variables que dans (4.4).

La représentation (4.5) n'est pas une forme réduite de la représentation (4.3), les douze générateurs de (4.5) n'étant pas un sous-ensemble des seize générateurs de (4.3). Ces deux représentations sont complètes et irréductibles. Ceci illustre le fait qu'une représentation irréductible pour une fonction non-polynomiale n'est pas unique et que le nombre de ses éléments dépend de leur choix.

5. Orthotropie de révolution

En ne retenant dans la représentation de la fonction (2.2) que les éléments indépendants de $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{22}, \mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{23}, \mathbf{M}_{31}$ et en introduisant la condition de normalité $\mathrm{tr}\mathbf{M}_{33} = 1$, on obtient une représentation pour $\mathbf{T}$ fonction orthotrope de révolution de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ constituée de quinze invariants:

$$(5.1) \quad \begin{array}{llllllll} \mathrm{tr}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\mathbf{A}^3 & \mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 \\ \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\mathbf{B}^3 & \mathrm{tr}\mathbf{AB}^2 & \end{array}$$

et de treize générateurs:

$$(5.2) \quad \begin{array}{llllll} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{AB}+\mathbf{BA} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{BA}^2 & \mathbf{AB}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A} \\ \mathbf{M}_{33} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{B}^2 & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{33} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33} & \\ & & & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{33} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33}. & \end{array}$$

Comme nous l'avons rappelé au paragraphe 2, cette représentation est irréductible et prend la forme:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{T} = {} & \gamma_1\mathbf{I}+\gamma_2\mathbf{M}_{33}+\gamma_3\mathbf{A}+\gamma_4\mathbf{B}+\gamma_5(\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{33})+\gamma_6(\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{33}) \\ & +\gamma_7\mathbf{A}^2+\gamma_8\mathbf{B}^2+\gamma_9(\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33})+\gamma_{10}(\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33}) \\ & +\gamma_{11}(\mathbf{AB}+\mathbf{BA})+\gamma_{12}(\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{BA}^2)+\gamma_{13}(\mathbf{AB}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A}), \end{aligned}$$

où les γ_i sont des fonctions scalaires arbitraires des invariants (5.1).

6. Comparaison avec les représentations des fonctions polynomiales

Le nombre des invariants et des générateurs de base constituant chacune des représentations irréductibles établies ci-dessus pour des fonctions anisotropes non nécessairement polynomiales est:

	invariants	générateurs
anisotropie la plus générale	12	6
orthotropie	19	12
orthotropie de révolution	15	13

Comparons ces résultats avec les représentations correspondantes des fonctions anisotropes polynomiales. Ces représentations sont de la forme:

$$(6.1) \quad \mathbf{T} = \alpha_i(I_1, \ldots, I_n)\mathbf{G}_i$$

où les $\mathbf{G}_i$ constituent un ensemble de générateurs vérifiant les symétries du milieu et où les α_i sont des fonctions scalaires polynomiales des invariants $I_1, \ldots, I_n$ qui constituent une base d'intégrité pour le groupe de transformations orthogonales considéré. Les représentations des fonctions polynomiales constituent également des représentations pour les fonctions non-polynomiales, les coefficients α_i n'étant alors plus nécessairement des polynomes par rapport aux invariants de la base d'intégrité (PIPKIN et WINEMAN [10–11]).

Cependant dans le cas non-polynomial, ces représentations ne sont pas en général irréductibles (Spencer [12], Wang [3]).

Les générateurs de la représentation d'un tenseur symétrique du second ordre **T**, fonction polynomiale de deux tenseurs symétriques du second ordre **A** et **B**, peuvent être obtenus en prenant les dérivées partielles par rapport à **T** des invariants linéaires en **T** de la base d'intégrité des trois tenseurs **A**, **B** et **T** (Adkins [5], Smith et Rivlin [8], Pipkin et Rivlin [9]).

Pour la représentation de **T** dans le cas de l'anisotropie la plus générale, la représentation du cas polynomial est identique à celle obtenue en (3.4), les $T_{ij} = T_{ij}(A_{kl}, B_{mn})$ étant des fonctions scalaires polynomiales des composantes de **A** et de **B**. Ce résultat est banal, puisque la fonction **F**, ne présentant aucune symetrie, peut être représentée par une combinaison linéaire de la base (3.2) de l'espace des tenseurs symétriques, avec pour coefficients des fonctions arbitraires des composantes indépendantes de ses arguments. Ce résultat est généralisable pour les représentations de fonctions anisotropes de n tenseurs symétriques du second ordre.

Les bases d'intégrité ont été établies par Adkins [5–7] pour un nombre quelconque de tenseurs symétriques du second ordre dans les sous-groupes orthotrope et orthotrope de révolution des transformations orthogonales. Pour deux tenseurs symétriques du second ordre, la base d'intégrité comporte vingt-trois invariants dans le cas orthotrope et dix-sept dans le cas orthotrope de révolution (donnés en Annexe III).

En appliquant la méthode indiquée ci-dessus pour la détermination des générateurs et des représentations de la fonction **F** dans le cas polynomial, nous obtenons à partir des bases d'intégrité établies par Adkins [5–7] vingt-et-un générateurs dans le cas de l'orthotropie et quatorze dans le cas de l'orthotropie de révolution (Annexe III).

En comparant avec le tableau donné ci-dessus, nous constatons que les représentations établies dans cette étude pour les fonctions anisotropes non nécessairement polynomiales contiennent un nombre plus restreint d'invariants et de générateurs que les représentations des fonctions polynomiales dans le cas de l'orthotropie et de l'orthotropie de révolution.

7. Conclusion

La technique utilisée nous a permis d'établir des représentations irréductibles d'un tenseur symétrique du second ordre, fonction non nécessairement polynomiale de deux tenseurs symétriques du second ordre, pour trois types d'anisotropie. La méthode utilise la représentation irréductible pour la fonction $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, isotrope par rapport à ses cinq arguments. Les représentations irréductibles spécifiques sont obtenues en introduisant les restrictions imposées par les symétries propres à chaque type d'anisotropie et celles dues à la non-indépendance des vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. Cette méthode nous a permis de montrer que les représentations irréductibles des fonctions anisotropes non nécessairement polynomiales contiennent un nombre plus réduit d'éléments que dans le cas polynomial. De telles réductions sont appréciables dans l'élaboration des relations contraintes-déformations non-linéaires pour des milieux à structure évolutive.

Annexe I

Soient $\mathbf{T}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ trois tenseurs symétriques du second ordre et $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ trois vecteurs dans un espace à trois dimensions.

Une fonction isotrope des variables indépendantes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

admet comme représentation irréductible ([2], [3], [6]):

$$\mathbf{T} = \alpha_i \mathbf{G}_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 32$$

où les $\mathbf{G}_i$ sont trente-deux générateurs et les α_i des fonctions scalaires de quarante-six invariants donnés dans le Tableau 1.

Tableau 1.

Générateurs	Invariants
$\mathbf{I}$	
$\mathbf{A}$	$\mathrm{tr}\mathbf{A}$
$\mathbf{B}$	$\mathrm{tr}\mathbf{B}$
$\mathbf{A}^2$	$\mathrm{tr}\mathbf{A}^2$
$\mathbf{B}^2$	$\mathrm{tr}\mathbf{B}^2$
	$\mathrm{tr}\mathbf{A}^3$
	$\mathrm{tr}\mathbf{B}^3$
$\mathbf{M}_{11} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{11} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1$
$\mathbf{M}_{22} = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{22} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2$
$\mathbf{M}_{33} = \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_3$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{33} = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3$
$\mathbf{AB}+\mathbf{BA}$	$\mathrm{tr}\mathbf{AB}$
$\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{BA}^2$	$\mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}$
$\mathbf{AB}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A}$	$\mathrm{tr}\mathbf{AB}^2$
	$\mathrm{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$
$\mathbf{M}_{12}+\mathbf{M}_{21} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{12} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$
$\mathbf{M}_{23}+\mathbf{M}_{32} = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{23} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$
$\mathbf{M}_{31}+\mathbf{M}_{13} = \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_3$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{31} = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1$
$\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{11} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{Av}_1 + \mathbf{Av}_1 \otimes \mathbf{v}_1$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{A} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{Av}_1$
$\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{22} = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{Av}_2 + \mathbf{Av}_2 \otimes \mathbf{v}_2$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{A} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{Av}_2$
$\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{33} = \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{Av}_3 + \mathbf{Av}_3 \otimes \mathbf{v}_3$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{A} = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{Av}_3$
$\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{11} = \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{Bv}_1 + \mathbf{Bv}_1 \otimes \mathbf{v}_1$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{11}\mathbf{B} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{Bv}_1$
$\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{22} = \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{Bv}_2 + \mathbf{Bv}_2 \otimes \mathbf{v}_2$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{22}\mathbf{B} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{Bv}_2$
$\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{BM}_{33} = \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{Bv}_3 + \mathbf{Bv}_3 \otimes \mathbf{v}_3$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{33}\mathbf{B} = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{Bv}_3$
$(\mathbf{M}_{12}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{21})-(\mathbf{M}_{21}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{12}) = (\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{Av}_2 + \mathbf{Av}_2 \otimes \mathbf{v}_1) + -(\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{Av}_1 + \mathbf{Av}_1 \otimes \mathbf{v}_2)$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{12}\mathbf{A} = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{Av}_2$
$(\mathbf{M}_{23}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{32})-(\mathbf{M}_{32}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{23}) = (\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{Av}_3 + \mathbf{Av}_3 \otimes \mathbf{v}_2) + -(\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{Av}_2 + \mathbf{Av}_2 \otimes \mathbf{v}_3)$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{23}\mathbf{A} = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{Av}_3$
$(\mathbf{M}_{31}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{13})-(\mathbf{M}_{13}\mathbf{A}+\mathbf{AM}_{31}) = (\mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{Av}_1 + \mathbf{Av}_1 \otimes \mathbf{v}_3) + -(\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{Av}_3 + \mathbf{Av}_3 \otimes \mathbf{v}_1)$	$\mathrm{tr}\mathbf{M}_{31}\mathbf{A} = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{Av}_1$

Tableau 1 [suite]

$(\mathbf{M}_{12}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{21})-(\mathbf{M}_{21}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{12}) = (\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{B}\mathbf{v}_2+\mathbf{B}\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1)+ -(\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{B}\mathbf{v}_1+\mathbf{B}\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2)$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{12}\mathbf{B} = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_2$
$(\mathbf{M}_{23}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{32})-(\mathbf{M}_{32}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{23}) = (\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{B}\mathbf{v}_3+\mathbf{B}\mathbf{v}_3\otimes\mathbf{v}_2)+ -(\mathbf{v}_3\otimes\mathbf{B}\mathbf{v}_2+\mathbf{B}\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_3)$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{23}\mathbf{B} = \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_3$
$(\mathbf{M}_{31}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{13})-(\mathbf{M}_{13}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{31}) = (\mathbf{v}_3\otimes\mathbf{B}\mathbf{v}_1+\mathbf{B}\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_3)+ -(\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{B}\mathbf{v}_3+\mathbf{B}\mathbf{v}_3\otimes\mathbf{v}_1)$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{31}\mathbf{B} = \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_1$
$\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{11} = \mathbf{v}_1\otimes\mathbf{A}^2\mathbf{v}_1+\mathbf{A}^2\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_1$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v}_1$
$\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{22} = \mathbf{v}_2\otimes\mathbf{A}^2\mathbf{v}_2+\mathbf{A}^2\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_2$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v}_2$
$\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33} = \mathbf{v}_3\otimes\mathbf{A}^2\mathbf{v}_3+\mathbf{A}^2\mathbf{v}_3\otimes\mathbf{v}_3$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v}_3$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{12}\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v}_2$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{23}\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v}_3$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{31}\mathbf{A}^2 = \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{A}^2\mathbf{v}_1$
$\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{11} = \mathbf{v}_1\otimes\mathbf{B}^2\mathbf{v}_1+\mathbf{B}^2\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_1$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{B}^2\mathbf{v}_1$
$\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22} = \mathbf{v}_2\otimes\mathbf{B}^2\mathbf{v}_2+\mathbf{B}^2\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_2$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2 = \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{B}^2\mathbf{v}_2$
$\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33} = \mathbf{v}_3\otimes\mathbf{B}^2\mathbf{v}_3+\mathbf{B}^2\mathbf{v}_3\otimes\mathbf{v}_3$	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2 = \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{B}^2\mathbf{v}_3$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{12}\mathbf{B}^2 = \mathbf{v}_1\cdot\mathbf{B}^2\mathbf{v}_2$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{23}\mathbf{B}^2 = \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{B}^2\mathbf{v}_3$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{31}\mathbf{B}^2 = \mathbf{v}_3\cdot\mathbf{B}^2\mathbf{v}_1$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_1$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_2$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_3$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{12}\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{21}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_2- -\mathbf{A}\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_1$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{23}\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{32}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_3- -\mathbf{A}\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_2$
	$\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{31}\mathbf{A}\mathbf{B}-\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{13}\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{v}_3\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_1- -\mathbf{A}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{B}\mathbf{v}_3$

Annexe II

Nous avons établi au paragraphe 4 qu'une représentation de $\mathbf{T}$, fonction orthotrope de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, est constituée par les vingt-cinq invariants:

$$
\begin{array}{lllllll}
\mathrm{tr}\,\mathbf{A} & \mathrm{tr}\,\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3 & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 \\
\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{B}^3 & \\
\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \\
\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}\mathbf{B}^2 &
\end{array}
\tag{A.1}
$$

et par les vingt-trois générateurs:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A} & \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{33} \\
\mathbf{M}_{11} & \mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}^2 & \mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{33} \\
\mathbf{M}_{22} & \mathbf{A}^2 & \mathbf{A}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A} & \mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33} \\
\mathbf{M}_{33} & \mathbf{B}^2 & & \mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33}.
\end{array}
\tag{A.2}
$$

Cette représentation n'est pas irréductible. Nous montrons ci-dessous que les invariants $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{B}$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{B}^2$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{AB}$, $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ et les générateurs $\mathbf{I}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{B}^2$, $\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{BA}^2$, $\mathbf{AB}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A}$ sont redondants.

a) Base fonctionnelle

En analysant les formes explicites dans le repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ des invariants (A.1), nous obtenons immédiatement les identités:

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{A} = \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A} \qquad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2 = \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2$$

$$\text{(A.3)} \qquad \mathrm{tr}\,\mathbf{B} = \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B} \qquad \mathrm{tr}\,\mathbf{B}^2 = \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2$$

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{AB} = \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{AB}+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{AB}+\mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{AB}$$

Il subsiste alors vingt invariants dans la base fonctionnelle: $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ et les dix-neuf invariants:

$$\text{(A.4)} \qquad \begin{array}{lllllll} \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2 & \\ \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2 & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2 & \\ \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{11}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{22}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\,\mathbf{M}_{33}\mathbf{AB} & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^3 & \mathrm{tr}\,\mathbf{B}^3 & \mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathrm{tr}\,\mathbf{AB}^2 \end{array}$$

La donnée des invariants (A.4) permet de déterminer de façon unique les quantités:

$$\text{(A.5)} \qquad \begin{array}{llll} I_1 = A_{11} & I_2 = A_{22} & I_3 = A_{33} & I_4 = A_{12}^2 \quad I_5 = A_{23}^2 \quad I_6 = A_{31}^2 \\ & & & I_7 = A_{12}A_{23}A_{31} \\ J_1 = B_{11} & J_2 = B_{22} & J_3 = B_{33} & J_4 = B_{12}^2 \quad J_5 = B_{23}^2 \quad J_6 = B_{31}^2 \\ & & & J_7 = B_{12}B_{23}B_{31} \end{array}$$

$$K_1 = A_{12}B_{12} \quad K_2 = A_{23}B_{23} \quad K_3 = A_{31}B_{31}$$

$$K_4 = A_{12}A_{23}B_{31}+A_{23}A_{31}B_{12}+A_{31}A_{12}B_{23}$$

$$K_5 = B_{12}B_{23}A_{31}+B_{23}B_{31}A_{12}+B_{31}B_{12}A_{23}$$

et réciproquement. Les A_{ij} et les B_{ij} dans (A.5) sont les composantes dans le repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ des tenseurs $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. La donnée supplémentaire de l'invariant $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ permet de déterminer la quantité:

$$\text{(A.6)} \qquad K_6 = (I_1+I_2)A_{12}B_{23}B_{31}+(I_2+I_3)A_{23}B_{31}B_{12}+(I_3+I_1)A_{31}B_{12}B_{23}+ \\ +(J_1+J_2)B_{12}A_{23}A_{31}+(J_2+J_3)B_{23}A_{31}A_{12}+(J_3+J_1)B_{31}A_{12}A_{23}$$

et réciproquement.

Pour montrer que $\mathrm{tr}\,\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ est une fonction à valeur unique des invariants (A.4), il faut et il suffit de montrer que K_6 est une fonction à valeur unique des invariants (A.5), c'est-à-dire que les six quantités:

$$\text{(A.7)} \qquad \begin{array}{lll} L_1 = A_{12}B_{23}B_{31} & L_2 = A_{23}B_{31}B_{12} & L_3 = A_{31}B_{12}B_{23} \\ M_1 = B_{12}A_{23}A_{31} & M_2 = B_{23}A_{31}A_{12} & M_3 = B_{31}A_{12}A_{23} \end{array}$$

sont des fonctions à valeur unique des quantités $I_1, \ldots, I_7, J_1, \ldots, J_7, K_1, \ldots, K_5$. Il vient par exemple pour L_1:

$$
\text{(A.8)} \qquad \begin{aligned} L_1 &= \frac{J_7}{J_4} K_1 \quad && \text{si} \quad J_4 \neq 0 \\ L_1 &= K_5 && \text{si} \quad J_4 = 0 \end{aligned}
$$

et de même pour L_2, L_3, M_1, M_2, M_3. Finalement l'invariant $\operatorname{tr}\mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$ est redondant. Une analyse directe montre que les dix-neuf invariants (A.4) constituent une base fonctionnelle irréductible.

b) Ensemble de générateurs

En analysant les formes explicites dans le repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ des générateurs (A.2), nous obtenons immédiatement les identités:

$$
\text{(A.9)} \qquad \begin{aligned}
\mathbf{I} &= \mathbf{M}_{11} && +\mathbf{M}_{22} && +\mathbf{M}_{33} \\
2\mathbf{A} &= (\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{11}) && +(\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{22}) && +(\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{33}) \\
2\mathbf{B} &= (\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{11}) && +(\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{22}) && +(\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{33}) \\
2\mathbf{A}^2 &= (\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{11}) && +(\mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{22}) && +(\mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33}) \\
2\mathbf{B}^2 &= (\mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{11}) && +(\mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22}) && +(\mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33}).
\end{aligned}
$$

Il subsiste alors dix-huit générateurs: $\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A}$ et les seize générateurs

$$
\text{(A.10)} \qquad \begin{array}{llll}
\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33} & \mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A} \\
\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{11}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{11} \\
\mathbf{M}_{11}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{22}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{11}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22} \\
 & & \mathbf{M}_{22}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{33} \\
 & & \mathbf{M}_{22}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33}.
\end{array}
$$

La donnée des générateurs (A.10) permet de déterminer de façon unique, par des combinaisons linéaires dont les coefficients sont des fonctions des invariants (A.4), les générateurs:

$$
\mathbf{M}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{G}_1 = \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{G}_4 = \begin{vmatrix} 0 & A_{13}A_{23} & 0 \\ \text{---} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{F}_1 = \begin{vmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ B_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{F}_4 = \begin{vmatrix} 0 & B_{13}B_{23} & 0 \\ \text{---} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{M}_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{G}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} \\ 0 & A_{23} & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{G}_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{12}A_{31} \\ 0 & \text{---} & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{F}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & B_{23} & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{F}_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{12}B_{31} \\ 0 & \text{---} & 0 \end{vmatrix}
$$

(A.11)

$$
\mathbf{M}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}
\mathbf{G}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{G}_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{12}A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{F}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix}
\mathbf{F}_6 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & B_{12}B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ \text{---} & 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
\mathbf{E}_1 = \begin{vmatrix} 0 & A_{31}B_{23}+B_{31}A_{23} & A_{12}B_{23}+B_{12}A_{23} \\ \text{---} & 0 & A_{12}B_{31}+B_{12}A_{31} \\ \text{---} & \text{---} & 0 \end{vmatrix}
$$

et réciproquement. La donnée supplémentaire du générateur $\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}^2$ permet de déterminer le générateur:

$$(\text{A.12})\quad \mathbf{E}_2 = \begin{vmatrix} 0 & A_{13}B_{23}(A_{11}+A_{33})+A_{23}B_{31}(A_{22}+A_{33}) & A_{12}B_{23}(A_{11}+A_{22})+ \\ & & +A_{23}B_{12}(A_{22}+A_{33}) \\ - & 0 & A_{12}B_{31}(A_{11}+A_{22})+ \\ & & +A_{31}B_{12}(A_{11}+A_{33}) \\ - & - & 0 \end{vmatrix}$$

et réciproquement.

Pour montrer que le générateur $\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}^2$ est redondant, il faut et il suffit de montrer que $\mathbf{E}_2$ est une combinaison linéaire des générateurs (A.11) avec pour coefficients des fonctions scalaires des invariants (A.5). Pour cela, nous décomposons le générateur $\mathbf{E}_2$ en:

$$\mathbf{E}_2 = (I_1+I_3)\mathbf{V}_1+(I_2+I_3)\mathbf{W}_1+(I_1+I_3)\mathbf{V}_2+(I_1+I_2)\mathbf{W}_2+(I_1+I_2)\mathbf{V}_3+(I_2+I_3)\mathbf{W}_3$$

$$(\text{A.13})\quad \begin{aligned} &\text{avec:}\quad \mathbf{V}_1 = \begin{vmatrix} 0 & A_{31}B_{23} & 0 \\ - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}B_{12} \\ 0 & - & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{V}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{12}B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &\mathbf{W}_1 = \begin{vmatrix} 0 & B_{31}A_{23} & 0 \\ - & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{W}_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{31}A_{21} \\ 0 & - & 0 \end{vmatrix} \quad \mathbf{W}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & B_{21}A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ - & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Il vient par exemple pour les générateurs $\mathbf{V}_1$ et $\mathbf{W}_1$:

$$(\text{A.14})\quad \begin{aligned} &\mathbf{V}_1 = \frac{M_2}{I_4}\mathbf{G}_1 && \mathbf{W}_1 = \frac{M_3}{I_4}\mathbf{G}_1 && \text{si} \quad I_4 \neq 0 \\ &\mathbf{V}_1 = \frac{L_3}{J_4}\mathbf{F}_1 && \mathbf{W}_1 = \frac{L_2}{J_4}\mathbf{F}_1 && \text{si} \quad I_4 = 0, \quad J_4 \neq 0 \\ &\mathbf{V}_1 = \frac{K_2}{I_5}\mathbf{G}_4 && \mathbf{W}_1 = \frac{K_3}{I_6}\mathbf{G}_4 && \text{si} \quad I_4 = J_4 = 0, \quad I_5 I_6 \neq 0 \\ &\mathbf{V}_1 = \mathbf{E}_1 && \mathbf{W}_1 = 0 && \text{si} \quad I_4 = J_4 = I_5 = 0 \\ &\mathbf{V}_1 = 0 && \mathbf{W}_1 = \mathbf{E}_1 && \text{si} \quad I_4 = J_4 = I_6 = 0 \end{aligned}$$

les invariants M_2, M_3, L_2, L_3 étant des fonctions à valeur unique des invariants (A.5) comme il a été montré en a). On obtient de même des expressions analogues pour les générateurs $\mathbf{V}_2, \mathbf{W}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{W}_3$. Finalement le générateur $\mathbf{A}^2\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}^2$ est redondant. Par le même procédé on peut montrer que le générateur $\mathbf{A}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A}$ est également redondant. Une analyse directe montre que l'ensemble des seize générateurs (A.10) est irréductible.

Annexe III

Les invariants des bases d'intégrité pour les représentations de la fonction polynomiale $\mathbf{T} = \mathbf{F}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, obtenues par ADKINS [5–7], admettent comme expressions dans le repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$:

a) cas de l'orthotropie

$$
\begin{array}{lllllll}
A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{23}^2 & A_{31}^2 & A_{12}^2 & A_{23}A_{31}A_{12} \\
B_{11} & B_{22} & B_{33} & B_{23}^2 & B_{31}^2 & B_{12}^2 & B_{23}B_{31}B_{12} \\
A_{23}B_{23} & A_{31}B_{31} & A_{12}B_{12} & & & & \\
A_{23}A_{31}B_{12} & A_{31}A_{12}B_{23} & A_{12}A_{23}B_{31} & & & & \\
A_{12}B_{23}B_{31} & A_{23}B_{31}B_{12} & A_{31}B_{12}B_{23} & & & &
\end{array}
$$

b) cas de l'orthotropie de révolution

$$A_{33};\quad B_{33};\quad A_{11}+A_{22}+A_{33};\quad B_{11}+B_{22}+B_{33};$$

$$A_{31}^2+A_{23}^2+A_{33}^2;\quad A_{11}^2+A_{22}^2+A_{33}^2+2(A_{23}^2+A_{31}^2+A_{12}^2);$$

$$B_{31}^2+B_{23}^2+B_{33}^2;\quad B_{11}^2+B_{22}^2+B_{33}^2+2(B_{23}^2+B_{31}^2+B_{12}^2);$$

$$A_{31}B_{31}+A_{23}B_{23}+A_{33}B_{33};\quad A_{11}B_{11}+A_{22}B_{22}+A_{33}B_{33}+2(A_{23}B_{23}+A_{31}B_{31}+ \\ +A_{12}B_{12});$$

$$A_{11}^3+A_{22}^3+A_{33}^3+3A_{11}(A_{31}^2+A_{12}^2)+3A_{22}(A_{23}^2+A_{12}^2)+3A_{33}(A_{31}^2+A_{23}^2)+6A_{23}A_{31}A_{12};$$

$$B_{11}^3+B_{22}^3+B_{33}^3+3B_{11}(B_{31}^2+B_{12}^2)+3B_{22}(B_{23}^2+B_{12}^2)+3B_{33}(B_{31}^2+B_{23}^2)+6B_{23}B_{31}B_{12};$$

$$(A_{11}A_{31}+A_{12}A_{23}+A_{13}A_{33})B_{31}+(A_{12}A_{31}+A_{22}A_{23}+A_{23}A_{33})B_{23}+ \\ +(A_{31}^2+A_{23}^2+A_{33}^2)B_{33};$$

$$(B_{11}B_{31}+B_{12}B_{23}+B_{13}B_{33})A_{31}+(B_{12}B_{31}+B_{22}B_{23}+B_{23}B_{33})A_{23}+ \\ +(B_{31}^2+B_{31}^2+B_{33}^2)A_{33};$$

$$A_{11}^2B_{11}+A_{22}^2B_{22}+A_{33}^2B_{33}+2(A_{22}B_{23}+A_{23}B_{22}+A_{12}B_{13}+A_{31}B_{12}+A_{23}B_{33}+ \\ +A_{33}B_{23})A_{23}+2(A_{33}B_{31}+A_{31}B_{33}+A_{11}B_{31}+A_{31}B_{11} \\ +A_{23}B_{12}+A_{12}B_{23})A_{31}+2(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{11}+A_{22}B_{12} \\ +A_{12}B_{22}+A_{23}B_{31}+A_{31}B_{23})A_{12};$$

$$A_{11}B_{11}^2+A_{22}B_{22}^2+A_{33}B_{33}^2+2(A_{22}B_{23}+A_{23}B_{22}+A_{12}B_{13}+A_{31}B_{12}+A_{23}B_{33} \\ +A_{33}B_{23})B_{23}+2(A_{33}B_{31}+A_{31}B_{33}+A_{11}B_{31}+A_{31}B_{11} \\ +A_{23}B_{12}+A_{12}B_{23})B_{31}+2(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{11}+A_{22}B_{12} \\ +A_{12}B_{22}+A_{23}B_{31}+A_{31}B_{23})B_{12};$$

$$(A_{11}^2+A_{12}^2+A_{31}^2)(B_{11}^2+B_{12}^2+B_{31}^2)+2(A_{11}A_{12}+A_{22}A_{12}+A_{31}A_{23})(B_{11}B_{12} \\ +B_{22}B_{12}+B_{31}B_{23})+(A_{12}^2+A_{22}^2+A_{23}^2)(B_{12}^2+B_{22}^2 \\ +B_{23}^2)+2(A_{11}A_{31}+A_{12}A_{23}+A_{31}A_{33})(B_{11}B_{31} \\ +B_{12}B_{23}+B_{31}B_{33})+(A_{31}^2+A_{23}^2+A_{33}^2)(B_{31}^2 \\ +B_{23}^2+B_{33}^2)+2(A_{31}A_{12}+A_{22}A_{23}+A_{23}A_{33}) \\ \times(B_{31}B_{12}+B_{22}B_{23}+B_{23}B_{33}).$$

Dans le cas de l'orthotropie, les générateurs obtenus par la méthode indiquée par ADKINS [5–7] admettent comme expressions dans le repère $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} \\ 0 & A_{23} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & 0 \\ A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & B_{23} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & B_{31} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ B_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{23}A_{31} & 0 \\ A_{23}A_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{12}A_{31} \\ 0 & A_{12}A_{31} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{12}A_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{12}A_{23} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & B_{23}B_{31} & 0 \\ B_{23}B_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{12}B_{31} \\ 0 & B_{12}B_{31} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & B_{12}B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ B_{12}B_{23} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{23}B_{31} & 0 \\ A_{23}B_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{12}B_{31} \\ 0 & A_{12}B_{31} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{12}B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{12}B_{23} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & A_{31}B_{23} & 0 \\ A_{31}B_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{31}B_{12} \\ 0 & A_{31}B_{12} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & A_{23}B_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ A_{23}B_{12} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Dans le cas de l'orthotropie de révolution, ces générateurs sont les suivants:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{I} & \mathbf{A} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{M}_{33} \\ \mathbf{M}_{33} & \mathbf{B} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}+\mathbf{B}\mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}\mathbf{A}+\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{M}_{33} \\ & \mathbf{A}^2 & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{A}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{A}\mathbf{M}_{33} \\ & \mathbf{B}^2 & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{M}_{33} & \mathbf{M}_{33}\mathbf{B}\mathbf{A}^2+\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{M}_{33}. \end{array}$$

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le Professeur G. F. SMITH pour ses remarques et ses critiques lors d'une première version de cette note.

Références

1. J. P. BOEHLER, *A simple derivation of representations for non-polynomial constitutive equations in some cases of anisotropy* [soumis à publication].
2. G. F. SMITH, *On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors*, Int. J. Engng. Sci., **9**, 899–916, 1971.
3. C. C. WANG, *A new representation theorem for isotropic functions*, Part I and II, Arch. Rat. Mech. Anal., **36**, 166–223, 1970.
4. C. C. WANG, *Corrigendum*, Arch. Rat. Mech. Anal., **43**, 292–295, 1971.
5. J. E. ADKINS, *Symmetry relations for orthotropic and transversely isotropic materials*, Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 193–213, 1960.
6. J. P. BOEHLER, *On irreducible representations for isotropic scalar functions*, ZAMM, **57**, 1977 [sous presse].
7. J. E. ADKINS, *Dynamic properties of resilient materials: constitutive equations*, Phil. Trans. Roy. Soc., A **250**, 519–542, 1958.
8. G. F. SMITH and R. S. RIVLIN, *Stress-deformation relations for isotropic solids*, Arch. Rat. Mech. Anal., **1**, 107–112, 1957.
9. A. C. PIPKIN and R. S. RIVLIN, *The formulation of constitutive equations in continuum physics*. I, Arch. Rat. Mech. Anal., **4**, 129–144, 1959.
10. A. C. PIPKIN and A. S. WINEMAN, *Material symmetry restrictions on non-polynomial constitutive equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **12**, 420–426, 1963.
11. A. S. WINEMAN and A. C. PIPKIN, *Material symmetry restrictions on constitutive equations*, Arch. Rat. Mech. Anal., **17**, 184–214, 1964.
12. A. J. M. SPENCER, *Theory of invariants*, Continuum Physics, ed. by C. ERINGEN, Academic Press, 239–353, 1971.

INSTITUT DE MÉCANIQUE
UNIVERSITÉ DE GRENOBLE, FRANCE.

Received November 11, 1976.