

225/2011

**Raport Badawczy**

**RB/58/2011**

**Research Report**

**Heurystyczne algorytmy  
wyznaczania wartości miar  
zależności statystycznej  
dla przypadku nieprecyzyjnych  
danych**

**O. Hryniewicz, J. Karpiński,  
K. Opara**

**Instytut Badań Systemowych  
Polska Akademia Nauk**

**Systems Research Institute  
Polish Academy of Sciences**



# **POLSKA AKADEMIA NAUK**

## **Instytut Badań Systemowych**

ul. Newelska 6

01-447 Warszawa

tel.: (+48) (22) 3810100

fax: (+48) (22) 3810105

Kierownik Zakładu zgłaszający pracę:  
Prof. zw. dr hab. inż. Olgierd Hryniewicz

Warszawa 2011

Instytut Badań Systemowych PAN

Zakład Metod Stochastycznych

**Heurystyczne algorytmy wyznaczania wartości miar  
zależności statystycznej dla przypadku  
nieprecyzyjnych danych  
(Raport badawczy)**

**Prof. dr hab. Olgierd Hryniewicz**

**Prof. dr hab. Janusz Karpiński**

**Mgr Karol Opara**

**Warszawa, grudzień 2011**



## 1. Wstęp

Analiza zależności danych statystycznych była przedmiotem badań naukowych już w XIX wieku. Pierwsze propozycje pomiaru siły zależności pojawiły się w czasie, gdy opis probabilistyczny zależnych zdarzeń losowych był na bardzo wstępnym stadium rozwoju. Z tego to okresu pochodzą tak znane wskaźniki jak współczynnik korelacji liniowej  $r$  Pearsona, lub współczynnik korelacji rangowej  $\rho$  Spearmana. W późniejszym okresie zaproponowano wiele innych wskaźników, uwzględniających istnienie dodatkowych informacji o strukturze zależności. Przykładem takiego wskaźnika jest współczynnik asocjacji  $\tau$  Kendalla.

Narzędzia do wyznaczania wartości mierników zależności statystycznej są powszechnie dostępne. Współczynnik korelacji liniowej Pearsona może być wyznaczany przy pomocy arkuszy kalkulacyjnych typu MS Excel wykorzystując dostępną funkcję arkusza lub odpowiednie narzędzie analizy danych. Mierniki zależności statystycznej wykorzystujące pojęcie rang (współczynnik korelacji rangowej  $\rho$  Spearmana, współczynnik asocjacji  $\tau$  Kendalla) można wyznaczyć posługując się pakietami typu SPSS, STATISTICA, SAS i in. Powszechnie dostępne są też procedury pozwalające na wykonanie odpowiednich obliczeń przy pomocy własnych programów komputerowych.

Problem wyznaczania wartości mierników zależności zaczyna być kłopotliwy, gdy dane statystyczne są nieprecyzyjnie określone i mają postać przedziałową, a w bardziej ogólnej postaci opisane są przy pomocy zbiorów rozmytych. Oznaczmy przez  $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  oraz  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_n)$  składowe  $n$  nieprecyzyjnych (przedziałowych) obserwacji wektora losowego  $(X, Y)$ . Niech  $s(\tilde{x}, \tilde{y})$  oznacza realizację statystyki  $S$  będącej estymatorem pewnego miernika zależności. Minimalną i maksymalną wartości tego miernika, uwzględniające przedziałowy charakter danych, wyznaczamy rozwiązując następujące zadania optymalizacyjne:

$$s_L = \min_{x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}} s(x, y), \quad (1)$$

$$s_U = \max_{x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}} s(x, y). \quad (2)$$

Jeżeli statystyka  $s$  jest ciągłą funkcją wartości obserwacji, tak jak to jest w przypadku współczynnika korelacji liniowej  $r$  Pearsona, powyższe zadania optymalizacyjne są zadaniami nieliniowego programowania matematycznego i mogą być rozwiązywane przy pomocy dostępnego oprogramowania optymalizacyjnego. Jedynym problemem może być wymiar zadania optymalizacyjnego wynoszący  $2n$ , gdy licznosc próbek  $n$  jest bardzo duża. O wiele trudniejszy problem pojawia się, gdy statystyka  $s$  jest statystyką rangową, tak jak to jest w przypadku współczynnika korelacji rangowej  $\rho$  Spearmana lub współczynnika asocjacji  $\tau$  Kendalla. W takim przypadku zadania (1) oraz (2) stają się zadaniami optymalizacji dyskretnej o charakterze kombinatorycznym. Powoduje to wykładniczy wzrost nakładów na niezbędne obliczenia wraz ze wzrostem liczności próbki  $n$ . Denoeux i in. (2005) wykazali, że efektywne algorytmy dokładne działają dla liczności próbki  $n$  nie

większej niż 10, a zaproponowane przez nich algorytmy przybliżone są efektywne dla  $n$  rzędu 20-30. Konieczne jest więc stosowanie heurystycznych algorytmów optymalizacyjnych, takich jak np. algorytmy genetyczne.

Efektywność optymalizacyjnych algorytmów heurystycznych zależy od przyjętych rozwiązań startowych. Hryniewicz i Szewi (2008) zaproponowali bardzo prosty algorytm heurystyczny do przybliżonej analizy autokorelacji szeregu czasowego z wykorzystaniem współczynnika  $\tau$  Kendalla. Badania symulacyjne wykazały, że w wielu przypadkach uzyskane przy pomocy tego algorytmu rozwiązania przybliżone były nieodległe od rozwiązań uzyskanych w rozbudowanych eksperymentach Monte Carlo. Pozwalało to przypuszczać, że zastosowanie podobnych algorytmów w przypadku klasycznego problemu badania zależności pozwoli wygenerować bardzo dobre punkty startowe do późniejszych poszukiwań rozwiązań optymalnych za pomocą algorytmów genetycznych.

Opisane w pracy (Hryniewicz, Szewi, 2008) badania symulacyjne pokazały, że w określonych warunkach (typ i siła zależności) najlepsze rezultaty dają różne wersje zaproponowanego algorytmu heurystycznego. W niniejszym raporcie przedstawiono wyniki badań mających na celu opracowanie rekomendacji pozwalających wybrać możliwie najlepszy punkt startowy do dalszych obliczeń optymalizacyjnych. Analizę wykonano w trzech przekrojach, uwzględniając typ zależności opisany odpowiednią kopułą, licznosc próbki oraz stopień „rozmycia” danych. Matematyczny opis analizowanego problemu przedstawiono w drugim rozdziale raportu. Heurystyczne algorytmy pozwalające wyznaczyć przybliżone wartości minimalnych i maksymalnych wartości rozpatrywanych trzech miar zależności przedstawiono w rozdziale 3. Eksperyment symulacyjny opisano w rozdziale 4, ilustrując go w rozdziale 5 wynikami wybranymi z wielu przeprowadzonych symulacji. Wnioski z przeprowadzonych eksperymentów zebrano w rozdziale 6 raportu. Siódmy rozdział raportu poświęcony jest prezentacji wyników wstępnych badań nad możliwością wykorzystania algorytmów genetycznych do wyznaczania przedziałowych wartości statystyki  $\tau$  Kendalla. W rozdziale tym rozpatrywano, podobnie jak w pracy (Hryniewicz, Szewi, 2008), dane szeregu czasowego, a celem opisanych badań była wstępna ocena efektywności różnych algorytmów optymalizacyjnych, wykorzystywanych do znajdowania przedziałowych wartości rozpatrywanych miar zależności.

## 2. Badanie zależności zmiennych losowych

Badanie zależności pomiędzy cechami statystycznymi jest jednym z najważniejszych zadań statystyki. Jest rzeczą powszechnie wiadomą, że pełny opis zależności występujących pomiędzy składowymi  $p$ -wymiarowego wektora losowego  $(X_1, X_2, \dots, X_p)$  jest równoznaczny ze znajomością jego wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa opisanego  $p$ -wymiarową dystrybucją

$F(x_1, x_2, \dots, x_p)$ . Istnieje nieskończenie wiele wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa, ale przez wiele lat jedynym praktycznie stosowanym rozkładem wielowymiarowym był wielowymiarowy rozkład normalny, opisany w każdym podręczniku rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. Analiza rzeczywistych danych statystycznych pokazywała jednak, że w bardzo wielu przypadkach rozkład ten nie nadawał się do opisu zależnych zmiennych losowych. Dotyczyło to, przede wszystkim, zastosowań w badaniach niezawodności i analizie przeżycia, gdzie rozkłady brzegowe składowych wektora losowego w sposób oczywisty nie mogą być rozkładami normalnymi (gdyż muszą być określone na półosi dodatniej). Pojawiły się również przykłady danych, dla których rozkłady brzegowe mogły być rozkładami normalnymi, ale rozkład łączny nie był wielowymiarowym rozkładem normalnym. Powstał więc problem opracowania ogólnych zasad konstrukcji wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa o zadanych rozkładach brzegowych. Prace nad tym problemem były prowadzone w latach pięćdziesiątych XX wieku przez takich autorów jak np. Fréchet lub Gumbel, ale przełom nastąpił po opublikowaniu pracy Sklara (1959).

Sklar (1959) udowodnił, że jeżeli  $H(x, y)$  jest dwuwymiarową dystrybuantą ciągłego wektora losowego  $(X, Y)$ , którego rozkłady brzegowe wynoszą, odpowiednio,  $F(x)$  i  $G(y)$ , to istnieje jednoznacznie określona funkcja  $C$ , zwana *kopułą*, taka, że  $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ . Formalnie, definicja kopuły  $C$  jest jak następuje ( $u=F(x), v=G(y)$ ):

**Definicja 1** Kopuła jest funkcją  $C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ , taką że

- (a) dla każdego  $u, v$  należącego do przedziału  $[0,1]$  mamy:  $C(u,0)=0=C(0,v)$  oraz  $C(u,1)=u$  i  $C(1,v)=v$ ;
- (b) dla każdego  $u_1, u_2, v_1, v_2$  należącego do przedziału  $[0,1]$ , takiego że  $u_1 \leq u_2$  oraz  $v_1 \leq v_2$  zachodzi:  

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

Jak łatwo zauważyć, najprostszą kopułą jest tzw. kopuła iloczynowa  $\Pi(u, v) = uv$ , opisująca *niezależne* zmienne losowe. Można też pokazać, że kopuły spełniają ograniczenia Frécheta-Hoeffdinga

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v). \quad (3)$$

Od momentu opublikowania pracy Sklara zaproponowano dziesiątki różnych kopuł opisujących wielowymiarowe rozkłady prawdopodobieństwa. Do najważniejszych z nich należą:

- a) kopuła normalna, będąca uogólnieniem dwuwymiarowego rozkładu normalnego, zdefiniowana jako

$$C_{\rho(u,v)} = \Phi_N(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); r), \quad (4)$$

gdzie  $\Phi_N(x, y; \rho)$  jest dystrybucją dwuwymiarowego standaryzowanego rozkładu normalnego o współczynniku korelacji  $\rho$ , zaś  $\Phi^{-1}(u)$  jest funkcją odwrotną do dystrybucyj standardyzowanego rozkładu normalnego (kwantylem w tym rozkładzie),

b) jednoparametrowa rodzina kopuł Farliego-Gumbela-Morgensterna zdefiniowana w pracy Farliego (1960) jako

$$C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v), \quad -1 \leq \theta \leq 1, \quad (5)$$

c) dwuparametrowa rodzina kopuł Marshalla-Olkina, zdefiniowana w pracy Marshalla i Olkina (1967) jako

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}), \quad \alpha, \beta \in [0, 1], \quad (6)$$

d) opisana przez Genesta i McKaya (1986) rodzina kopuł archimedesowskich o postaci

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (7)$$

gdzie  $\varphi^{-1}$  jest pseudo-odwrotnością ciągłej i ściśle malejącej funkcji  $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ , zwanej generatorem kopuły, takiej że  $\varphi(1) = 0$ .

Wyczerpujący opis problematyki kopuł znajduje się w znakomitej monografii Nelsena (1999).

Rodzina kopuł archimedesowskich obejmuje najczęściej wykorzystywane w praktyce następujące kopuły:

- Claytona [Clayton (1978)]

$$C(u, v) = \max\left([u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1]^{-1/\alpha}, 0\right), \quad \alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\} \quad (8)$$

$$\varphi(t) = \frac{t^{-\alpha} - 1}{\alpha}, \quad \alpha \in [-1, \infty) \setminus \{0\}. \quad (9)$$

- Gumbela [Gumbel (1960)]

$$C(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{1+\alpha} + (-\ln v)^{1+\alpha}\right]^{1/(1+\alpha)}\right), \quad \alpha \in (0, \infty) \quad (10)$$

$$\varphi(t) = [-\ln t]^{1+\alpha}, \quad \alpha \in (0, \infty). \quad (11)$$

- Franka [Frank (1979)]

$$C(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{e^{-\alpha} - 1}\right), \quad \alpha \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\} \quad (12)$$



$$\varphi(t) = \ln \left( \frac{1 - e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha t}} \right), \quad \alpha \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}. \quad (13)$$

Przy parametryzacji przyjętej we wzorach (8) – (13) przypadek *niezależności* odpowiada wartości  $\alpha=0$  lub granicy  $\alpha \rightarrow 0$ .

Podstawowymi problemami statystycznej analizy danych zależnych jest estymacja parametrów opisujących te dane wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa, a także weryfikacja hipotez statystycznych o wartościach tych parametrów, a zwłaszcza hipotezy o niezależności badanych zmiennych losowych. Problemy te są stosunkowo proste w przypadku gdy znamy postać funkcyjną kopuły opisującej dane statystyczne, a także znamy postać brzegowych rozkładów prawdopodobieństwa. W takim przypadku mamy do czynienia z problemem parametrycznym, dla którego istnieją ogólne rozwiązania bazujące na estymatorach uzyskanych metodą największej wiarygodności. W przypadku nieznanomości postaci rozkładów brzegowych pewne rozwiązania semi-parametryczne zostały zaproponowane w pracy (Shih, Louis, 1995).

Najczęściej stosowanym w praktyce miernikiem zależności jest współczynnik korelacji liniowej  $r$  Pearsona. Wykazano, że jest on nieobciążonym estymatorem parametru  $r$  w kopule normalnej opisanej wzorem (4), ale tylko w przypadku, gdy rozkłady brzegowe rozpatrywanego wektora losowego są *rozkładami normalnymi*, w więc w przypadku gdy mamy do czynienia z klasycznym dwuwymiarowym rozkładem normalnym. Ponadto można pokazać (Genest & Verret, 2005), że dla wybranych kopuł i wybranych rodzajów rozkładów brzegowych testy niezależności wykorzystujące współczynnik korelacji liniowej są asymptotycznie równoważne pewnym optymalnym testom nieparametrycznym. Oznacza to w praktyce, że współczynnik ten nie jest uniwersalnym miernikiem zależności statystycznej, gdyż jego własności w dużej mierze zależą od typu zależności (typu kopuły) oraz rodzaju rozkładów brzegowych.

Schweizer i Wolff (1981) pokazali, że dla dowolnej kopuły  $C(u,v)$  można wyznaczyć teoretyczne (populacyjne) odpowiedniki statystyki  $\rho$  Spearmana i  $\tau$  Kendalla. Oznaczmy przez  $I^2$  kwadrat o jednostkowym boku  $[0,1]$ . Populacyjna wersja statystyki  $\rho$  Spearmana wynosi:

$$\rho = 12 \iint_{I^2} C(u,v) du dv = 12 \iint_{I^2} uv dC(u,v). \quad (14)$$

Z kolei, populacyjna wersja statystyki  $\tau$  Kendalla wynosi

$$\tau = 4 \iint_{I^2} C(u,v) dC(u,v). \quad (15)$$

Związek pomiędzy tymi charakterystykami dwuwymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa badali Fredricks i Nelsen (2007).

Oznaczmy przez  $K(t)$  dystrybuantę zmiennej losowej  $T = C(U_1, U_2)$ , gdzie  $C(*, *)$  jest funkcją kopuły, zaś  $U_1$  oraz  $U_2$  są zmiennymi losowymi o rozkładzie równomiernym na przedziale  $[0, 1]$ . Można udowodnić, patrz np. (Nelsen, 1999), że istnieje następujący związek łączący wartość populacyjnego współczynnika korelacji rangowej  $\tau$  Kendalla z postacią funkcyjną kopuły.

$$\tau = 3 - 4 \int_0^1 K(t) dt \quad (16)$$

Genest i Rivest (1993) zaproponowali prostszą metodę nieparametryczną wykorzystującą powszechnie znaną i wielokrotnie opisywaną miarę zależności, jaką jest statystyka  $\tau$  Kendalla. Wykazali oni, że dla archimedesowskiej kopuły danej ogólnym wzorem (3) dla zadanego generatora  $\varphi(v)$  zachodzi zależność

$$\tau = 4 \int_0^1 \frac{\varphi(v)}{\varphi'(v)} dv. \quad (17)$$

Na przykład, dla przypadku kopuły normalnej opisującej klasyczny dwuwymiarowy rozkład normalny populacyjna statystyka Kendalla jest następującą funkcją współczynnika korelacji

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin r \quad (18)$$

Do estymacji statystyki  $\tau$  Genest i Rivest (1993) zaproponowali wykorzystać statystyki

$$V_i = \text{card}\{(X_j, Y_j) : X_j < X_i, Y_j < Y_i\} / (n-1), i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Estymator statystyki  $\tau$  Kendalla ma postać

$$\tau_n = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n V_i - 1. \quad (20)$$

Podobnie, jeśli skorzystamy ze statystyk

$$W_i = \text{card}\{(X_j, Y_j) : X_j > X_i, Y_j > Y_i\} / (n-1), i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

to zachodzi zależność

$$\tau_n = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^n W_i - 1. \quad (22)$$

Ponadto Genest i Rivest (1993) wykazali, że jeżeli wyznaczmy statystykę

$$S_r^2 = \sum_{i=1}^n \left( V_i + W_i - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n V_i \right)^2 / (n-1), \quad (23)$$

to statystyka  $\sqrt{n}(\tau_n - \tau) / 4S_r$  ma asymptotycznie standaryzowany rozkład normalny.

Dla wymienionych powyżej najczęściej spotykanych w praktyce kopuł archimedesowskich, korzystając z ogólnego wzoru (17), można wyznaczyć zależności wiążące statystykę  $\tau$  z parametrem  $\alpha$  opisującym zależność pomiędzy rozpatrywanymi zmiennymi losowymi. W wypadku kopuły Claytona (8) występuje prosta zależność

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 2}. \quad (24)$$

Równie prosta zależność występuje w przypadku kopuły Gumbela (10)

$$\tau = \frac{\alpha}{\alpha + 1}, \quad (25)$$

oraz kopuły FGM (5)

$$\tau = \frac{2\alpha}{9}. \quad (26)$$

W przypadku kopuły Franka (12), Genest i Rivest (1993) podali następujące wyrażenie;

$$\tau = 1 + 4[D_1(\alpha) - 1]/\alpha \quad (27)$$

gdzie  $D_1(\alpha)$  jest funkcją Debye pierwszego rzędu określoną wzorem

$$D_1(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{t}{\alpha(e^t - 1)} dt. \quad (28)$$

### 3. Badanie zależności wektorów losowych w przypadku nieprecyzyjnych danych statystycznych.

W przypadku danych przedziałowych estymator współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla ma również postać przedziału  $[\tau_{min}, \tau_{max}]$ . Niech  $[x_{i,min}, x_{i,max}]$  oraz  $[y_{i,min}, y_{i,max}]$  oznaczają przedziałowe wartości  $i$ -tej realizacji wektora  $(X, Y)$ . Podobną postać przedziałową mają też estymatory współczynnika korelacji liniowej  $r$  Pearsona i współczynnika korelacji rangowej  $\rho$  Spearmana.

Maksymalna wartość estymatora współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla (a także dla innych rozpatrywanych miar zależności) powinna odpowiadać takim wartościom punktów  $x_{i,in} \in [x_{i,min}, x_{i,max}]$  oraz  $y_{i,in} \in [y_{i,min}, y_{i,max}]$  by dla wybranej permutacji danych wejściowych jednocześnie tworzyły one ciąg najbardziej przypominający ciąg o wartościach rosnących lub malejących.

Minimalna wartość estymatora współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla (a także dla innych rozpatrywanych miar zależności) powinna takim wartościom punktów  $x_{i,in} \in [x_{i,min}, x_{i,max}]$  oraz

$y_{i,in} \in [y_{i,min}, y_{i,max}]$  by dla wybranej permutacji danych wejściowych jeden z tworzonych przez te punkty ciągów był ciągiem najbardziej przypominającym ciąg o wartościach rosnących, a drugi ciągiem najbardziej przypominającym ciąg o wartościach malejących.

W eksperymencie zastosowano dwa rodzaje tworzenia ciągów "rosnących" i "malejących". Pierwszy z nich, stosowany wyłącznie dla jednej składowej wektora  $(X, Y)$ , polegał na uporządkowaniu przedziałów w sposób, odpowiednio, rosnący lub malejący według jednej wybranej z nich wartości (wartość minimalna, wartość środkowa, wartość maksymalna). Dla drugiej składowej wybierano wartości tworzące ciągi wartości, odpowiednio, "rosnących" i "malejących" wg pewnej heurystyki opisanej poniższym kodem (Fortran).

```
SUBROUTINE MAKETRD(INTR,NSAMP,XU,XL,XTR,EPS)
!
! SUBROUTINE COMPUTES TRENDED SERIES FROM INTEVAL DATA
!
! INPUT DATA:
!
! TREND INDICATOR
!   INTR=  0  - TREND DECREASING
!         =1  - TREND INCREASING
! SAMPLE SIZE   NSAMP
! INTERVAL DATA
!   XU(NSAMP) - UPPER LIMITS
!   XL(NSAMP) - LOWER LIMITS
!
!   EPS        - DISCRIMINATION CONSTANT (SMALL REAL NUMBER)
!
! OUTPUT DATA:
!
!   XTR(NSAMP) - TRENDED SERIES
!
! DIMENSION XU(NSAMP),XL(NSAMP),XTR(NSAMP)

IF (INTR.EQ.0) THEN
  XTR(1)=XU(1)
  DO K=1,NSAMP
    IF(XL(K+1).GE.XTR(K).OR.XU(K+1).LT.XTR(K)) THEN
      IF(XL(K+1).GE.XTR(K))XTR(K+1)=XL(K+1)
      IF(XU(K+1).LT.XTR(K))XTR(K+1)=XU(K+1)
    ELSE
      XTR(K+1)=XTR(K)-EPS
    ENDIF
  END DO
ELSE
  XTR(1)=XL(1)
  DO K=1,NSAMP
    IF(XL(K+1).GE.XTR(K).OR.XU(K+1).LT.XTR(K)) THEN
      IF(XL(K+1).GE.XTR(K)) XTR(K+1)=XL(K+1)
      IF(XU(K+1).LT.XTR(K)) XTR(K+1)=XU(K+1)
    ELSE
      XTR(K+1)=XTR(K)+EPS
    ENDIF
  END DO
ENDIF
```

```

END DO
END IF
END SUBROUTINE

```

Rozpatrzono 14 typów heurystyk oznaczonych symbolem  $(X_r^k, Y_r^k)$ , gdzie indeks  $k \in \{u, d\}$  oznacza rodzaj uporządkowanego ciągu wartości ( $u$  - rosnący,  $d$  - malejący), zaś indeks  $r \in \{g, l, a, c\}$  oznacza sposób wyboru punktu do obliczeń ( $g$  - wartość maksymalna w przedziale,  $l$  - wartość minimalna w przedziale,  $a$  - wartość środkowa w przedziale,  $c$  - wartość wyliczona algorytmem heurystycznym).

W przypadku poszukiwania *maksymalnej* wartości współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla (a także dla innych rozpatrywanych miar zależności) kolejno analizowano heurystyki:  $(X_g^d, Y_c^d), (X_c^d, Y_g^d), (X_l^u, Y_c^u), (X_c^u, Y_l^u), (X_l^d, Y_c^d), (X_c^d, Y_l^d), (X_g^u, Y_c^u), (X_c^u, Y_g^u), (X_a^d, Y_c^d), (X_c^d, Y_a^d), (X_a^u, Y_c^u), (X_c^u, Y_a^u), (X_c^u, Y_c^u), (X_c^d, Y_c^d)$ .

W przypadku poszukiwania *minimalnej* wartości współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla (a także dla innych rozpatrywanych miar zależności) kolejno analizowano heurystyki:  $(X_l^u, Y_c^d), (X_c^d, Y_l^u), (X_g^d, Y_c^u), (X_c^u, Y_g^d), (X_g^u, Y_c^d), (X_c^d, Y_g^u), (X_l^d, Y_c^u), (X_c^u, Y_l^d), (X_a^u, Y_c^d), (X_c^d, Y_a^u), (X_a^d, Y_c^u), (X_c^u, Y_a^d), (X_c^d, Y_c^u), (X_c^u, Y_c^d)$ .

#### 4. Opis eksperymentu symulacyjnego

Eksperyment rozpoczyna się od wygenerowania dokładnych wartości  $n$  par zmiennych losowych  $(X, Y)$ . Dane są generowane z dwuwymiarowych kopuł:

- danych niezależnych
- normalnej
- Claytona
- Gumbela
- Franka
- Fairliego-Gumbela-Morgensterna (FGM)

Parametr opisujący zależność w danej kopule został wybrany w ten sposób, by zapewnić žadana wartość populacyjnego wskaźnika  $\tau$  Kendalla.

Rozkładami brzegowymi są standaryzowane rozkłady normalne  $N(0,1)$ . Rozkład ten wybrano dlatego, że stopień "rozmycia" danych można w prosty sposób odnieść do miary zmienności jakim jest odchylenie standardowe.

Każda wygenerowana obserwacja jest z prawdopodobieństwem  $p_{ex}$  przyjmowana jako obserwacja dokładna lub z prawdopodobieństwem  $1 - p_{ex}$  przyjmowana jako obserwacja przedziałowa.

Maksymalna szerokość obserwacji przedziałowej wynosi  $w = z * \sigma$ , gdzie  $\sigma$  jest przyjętym w symulacji odchyleniem standardowym ( $\sigma = 1$ ). Dla danej obserwacji przedziałowej szerokość przedziału generuje się z rozkładu równomiernego na przedziale  $(0, w]$ .

Wygenerowany przedział jest z prawdopodobieństwem  $p_s$  symetryczny względem wygenerowanej wartości dokładnej, a z prawdopodobieństwem  $1 - p_s$  niesymetryczny. W tym drugim przypadku punkt przedziału odpowiadający wygenerowanej wartości dokładnej generowany jest z rozkładu równomiernego na  $(0, w]$ .

Generowane próbki danych przedziałowych w eksperymencie Monte Carlo powtarza się w  $N$  przebiegach symulacyjnych.

## 5. Wyniki badań symulacyjnych

### 5.1 Opis wyników

Rezultaty każdego eksperymentu symulacyjnego przedstawiają:

- średnią wartość estymowanego współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla dla danych dokładnych,
- odchylenie standardowe estymowanego współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla dla danych dokładnych,
- średnią wartość estymowanego współczynnika korelacji liniowej  $r$  Pearsona dla danych dokładnych,
- odchylenie standardowe estymowanego współczynnika korelacji liniowej  $r$  Pearsona dla danych dokładnych,
- średnią wartość estymowanego współczynnika korelacji rangowej  $\rho$  Spearmana dla danych dokładnych,
- odchylenie standardowe estymowanego współczynnika korelacji rangowej  $\rho$  Spearmana dla danych dokładnych.

W tabelach przedstawiających wyniki eksperymentu symulacyjnego dla rozpatrywanych miar zależności przedstawione kolejno, dla każdej heurystyki (dwie heurystyki w wierszu) w dwu kolumnach, następujące wielkości:

- średnia wartość wyestymowanej wartości granicznej współczynnika korelacji  $\tau$  Kendalla dla danych przedziałowych (kolumna 1 oraz kolumna 3),

- frakcja przypadków, gdy wyznaczona dla danej wartość skrajna była najlepszą spośród wszystkich rozpatrywanych (kolumna 2 oraz kolumna 4).

Wyniki symulacji przedstawiono w następującym układzie wersji algorytmu heurystycznego:

Tabela 1. Heurystyki do wyznaczania minimalnej wartości statystyki

$(X_l^u, Y_c^d)$	$(X_c^d, Y_l^u)$
$(X_g^d, Y_c^u)$	$(X_c^u, Y_g^d)$
$(X_g^u, Y_c^d)$	$(X_c^d, Y_g^u)$
$(X_l^d, Y_c^u)$	$(X_c^u, Y_l^d)$
$(X_a^u, Y_c^d)$	$(X_c^d, Y_a^u)$
$(X_a^d, Y_c^u)$	$(X_c^u, Y_a^d)$
$(X_c^d, Y_c^u)$	$(X_c^u, Y_c^d)$

Tabela 2. Heurystyki do wyznaczania maksymalnej wartości statystyki

$(X_g^d, Y_c^d)$	$(X_c^d, Y_g^d)$
$(X_l^u, Y_c^u)$	$(X_c^u, Y_l^u)$
$(X_l^d, Y_c^d)$	$(X_c^d, Y_l^d)$
$(X_g^u, Y_c^u)$	$(X_c^u, Y_g^u)$
$(X_a^d, Y_c^d)$	$(X_c^d, Y_a^d)$
$(X_a^u, Y_c^u)$	$(X_c^u, Y_a^u)$
$(X_c^u, Y_c^u)$	$(X_c^d, Y_c^d)$

## 5.2 Badanie efektywności wybranego algorytmu heurystycznego od rodzaju statystycznej miary zależności oraz typu zależności.

Przedstawiono przypadek silnej dodatniej zależności ( $\tau=0,8$ ) dla danych rozmytych w umiarkowanym stopniu (wszystkie dane nieprecyzyjne, maksymalna szerokość przedziału wartości równa  $2\sigma$ ) i próbki o dużej liczności ( $n=200$ ).

### Kopuła normalna (n=200)

BIVARIATE NORMAL: TAU= 0.800000 PEARSON RO= 0.951056  
LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 200  
SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.800000 ESTYM. TAU= **0.800119** EST. SIGMA(TAU)= 0.015696  
EST. R PEARSON = **0.950875** EST. SIGMA(R)= 0.006837  
EST. RHO SPEARMAN = **0.944342** EST. SIGMA(RHO)= 0.009019

#### MIN. TAU

0.758049	0.000010	0.757938	0.000000
0.757930	0.000000	0.758046	0.000000
0.761282	0.000000	0.761391	0.000000
0.761384	0.000010	0.761256	0.000000
0.799509	0.000000	0.799558	0.000000
0.799478	0.000000	0.799570	0.000000
0.595573	0.499975	0.595567	0.500005

#### MAX. TAU

0.783297	0.002890	0.783464	0.003215
0.783455	0.003190	0.783368	0.003165
0.786320	0.004325	0.786219	0.004070
0.786198	0.003875	0.786348	0.003905
0.830487	0.240048	0.830626	0.245123
0.830508	0.242015	0.830599	0.244178
0.602033	0.000000	0.602020	0.000000

TAUMIN= 0.593098 TAUMAX= 0.849511

\*\*\*\*\*

#### MIN. R PEARSON

0.929770	0.000000	0.929710	0.000000
0.929715	0.000000	0.929761	0.000000
0.931805	0.000000	0.931896	0.000000
0.931894	0.000000	0.931823	0.000000
0.952660	0.000000	0.952661	0.000000
0.952637	0.000000	0.952652	0.000000
0.810032	0.499355	0.810036	0.500645

#### MAX. R PEARSON

0.933074	0.001230	0.933128	0.001330
0.933141	0.001410	0.933086	0.001180
0.933986	0.001360	0.933941	0.001490
0.933918	0.001410	0.934000	0.001410
0.954470	0.247050	0.954526	0.247210
0.954508	0.246970	0.954508	0.247950
0.814205	0.000000	0.814184	0.000000

RCORMIN= 0.806984 RCORMAX= 0.961272

\*\*\*\*\*

#### MIN. RHO SPEARMAN

0.925463	0.000010	0.925390	0.000000
0.925354	0.000000	0.925430	0.000000
0.927001	0.000000	0.927103	0.000000
0.927100	0.000010	0.927010	0.000000
0.949640	0.000000	0.949640	0.000000
0.949629	0.000000	0.949672	0.000000
0.785677	0.501075	0.785671	0.498905



## MAX. RHO SPEARMAN

0.926698	0.003270	0.926787	0.003740
0.926804	0.003750	0.926746	0.003870
0.928220	0.004900	0.928124	0.004600
0.928117	0.004420	0.928221	0.004570
0.951072	0.241170	0.951125	0.242765
0.951088	0.240835	0.951083	0.242110
0.789172	0.000000	0.789170	0.000000

RRHOMIN= 0.782924 RRHOMAX= 0.960134

## Kopula Claytona (n=200)

CLAYTON: TAU= 0.800000 TETA= 0.800000E+01

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 200

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 P5YM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.800000 ESTYM. TAU= 0.800075 EST. SIGMA(TAU)= 0.019140

EST. R PEARSON = 0.916643 EST. SIGMA(R)= 0.015730

EST. RHO SPEARMAN = 0.938876 EST. SIGMA(RHO)= 0.012047

## MIN. TAU

0.745990	0.000010	0.745997	0.000000
0.739250	0.000000	0.739197	0.000000
0.748865	0.000000	0.748805	0.000000
0.743357	0.000000	0.743430	0.000000
0.786116	0.000000	0.786119	0.000000
0.779908	0.000000	0.780058	0.000000
0.577858	0.498440	0.577858	0.501550

## MAX. TAU

0.769155	0.002440	0.769110	0.002515
0.770424	0.003070	0.770427	0.003245
0.771852	0.003355	0.771940	0.003250
0.773803	0.004820	0.773749	0.004825
0.816379	0.217213	0.816535	0.220573
0.818352	0.269595	0.818372	0.265098
0.584194	0.000000	0.584194	0.000000

TAUMIN= 0.575410 TAUMAX= 0.836771

\*\*\*\*\*

## MIN. R PEARSON

0.905060	0.000000	0.905061	0.000000
0.895796	0.000010	0.895699	0.000000
0.905588	0.000000	0.905609	0.000000
0.899232	0.000000	0.899229	0.000000
0.925945	0.000000	0.925914	0.000000
0.917967	0.000000	0.917917	0.000000
0.765850	0.499740	0.765872	0.500250

## MAX. R PEARSON

0.907074	0.005210	0.907056	0.005070
0.908150	0.007580	0.908109	0.007610
0.909802	0.009330	0.909829	0.009080
0.907661	0.006050	0.907663	0.005680
0.928659	0.254930	0.928663	0.258130
0.927719	0.216710	0.927667	0.214620
0.769912	0.000000	0.770130	0.000000

RCORMIN= 0.762655 RCORMAX= 0.937412

\*\*\*\*\*

#### MIN. RHO SPEARMAN

0.918661	0.000010	0.918671	0.000000
0.913412	0.000010	0.913375	0.000000
0.919255	0.000000	0.919241	0.000000
0.915901	0.000000	0.915934	0.000000
0.942154	0.000000	0.942169	0.000000
0.937458	0.000000	0.937495	0.000000
0.770087	0.499125	0.770108	0.500855

#### MAX. RHO SPEARMAN

0.918075	0.003270	0.918088	0.003650
0.919783	0.005930	0.919796	0.005505
0.920375	0.005890	0.920430	0.005660
0.920262	0.006140	0.920249	0.005760
0.942380	0.207150	0.942447	0.210075
0.943623	0.271490	0.943643	0.269480
0.773618	0.000000	0.773497	0.000000

RRHOMIN= 0.767342 RRHOMAX= 0.952611

### Kopula Gumbela (n=200)

GUMBEL: TAU= 0.800000 TETA= 5.000000

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 200

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 P5YM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.800000 ESTYM. TAU= 0.799682 EST. SIGMA(TAU)= 0.017691

EST. R PEARSON = 0.945488 EST. SIGMA(R)= 0.009026

EST. RHO SPEARMAN = 0.941065 EST. SIGMA(RHO)= 0.010888

#### MIN. TAU

0.752920	0.000010	0.752936	0.000000
0.754637	0.000020	0.754615	0.000000
0.756788	0.000000	0.756779	0.000000
0.757783	0.000000	0.757662	0.000010
0.793708	0.000000	0.793667	0.000000
0.794904	0.000000	0.794837	0.000000
0.592236	0.499900	0.592220	0.500059

#### MAX. TAU

0.779584	0.003375	0.779561	0.004310
0.779065	0.003220	0.779087	0.003345
0.782710	0.004725	0.782598	0.004955
0.781953	0.004620	0.781942	0.004675
0.826211	0.251553	0.826081	0.248215
0.825528	0.234783	0.825391	0.232223
0.598699	0.000000	0.598693	0.000000

TAUMIN= 0.589767 TAUMAX= 0.845241

\*\*\*\*\*

#### MIN. R PEARSON

0.924040	0.000000	0.924053	0.000000
0.926132	0.000000	0.926178	0.000000
0.926924	0.000000	0.926945	0.000000
0.927618	0.000000	0.927573	0.000000
0.946999	0.000000	0.947083	0.000000
0.948148	0.000000	0.948221	0.000000
0.804159	0.499054	0.804142	0.500944

MAX. R PEARSON

0.928945	0.002410	0.928881	0.002440
0.928804	0.002020	0.928787	0.002130
0.929226	0.001800	0.929078	0.001840
0.930411	0.002730	0.930432	0.002870
0.949423	0.220560	0.949387	0.217825
0.950324	0.270090	0.950365	0.273285
0.808369	0.000000	0.808312	0.000000

RCORMIN= 0.801102 RCORMAX= 0.957140

\*\*\*\*\*

MIN. RHO SPEARMAN

0.921568	0.000010	0.921537	0.000000
0.922804	0.000010	0.922772	0.000000
0.923713	0.000000	0.923682	0.000020
0.924066	0.000000	0.923965	0.000010
0.945556	0.000000	0.945543	0.000000
0.946371	0.000000	0.946374	0.000000
0.782098	0.500099	0.782096	0.499849

MAX. RHO SPEARMAN

0.924001	0.004930	0.923965	0.005645
0.923332	0.004070	0.923302	0.004010
0.925071	0.005595	0.924988	0.005965
0.925156	0.006050	0.925139	0.005990
0.947758	0.249585	0.947753	0.248485
0.947362	0.231735	0.947349	0.227940
0.785590	0.000000	0.785626	0.000000

RRHOMIN= 0.779341 RRHOMAX= 0.957105

### 5.3 Badanie efektywności wybranego algorytmu heurystycznego w zależności od rodzaju statystycznej miary zależności, typu zależności oraz liczności próbek.

Przedstawiono przypadek słabej ujemnej zależności ( $\tau=-0,10$ ) dla danych rozmytych w umiarkowanym stopniu (wszystkie dane nieprecyzyjne, maksymalna szerokość przedziału wartości równa  $2\sigma$ ) oraz próbek o malej ( $n=10$ ) i dużej ( $n=100$ ) liczności.

#### Kopuła normalna ( $n=10$ )

BIVARIATE NORMAL: TAU= -.100000 PEARSON RO= -.156434  
 LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 10  
 SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000  
 \*\*\*\*\*  
 ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= **-0.099090** EST. SIGMA(TAU)= 0.247562  
 EST. R PEARSON = **-0.146823** EST. SIGMA(R)= 0.329064  
 EST. RHO SPEARMAN = **-0.135126** EST. SIGMA(RHO)= 0.329892

MIN. TAU

-0.263164	0.097646	-0.259379	0.094032
-0.261116	0.095040	-0.260908	0.094353
-0.262515	0.083436	-0.261211	0.082617
-0.261985	0.083381	-0.260476	0.081258
-0.266127	0.059156	-0.264582	0.058341
-0.266217	0.058865	-0.265639	0.058626
-0.119143	0.026574	-0.118951	0.026680

MAX. TAU  
 0.052606 0.096419 0.049650 0.093582  
 0.051080 0.095351 0.050940 0.095042  
 0.051327 0.078192 0.050842 0.078781  
 0.051548 0.080846 0.049287 0.079494  
 0.047317 0.052404 0.045612 0.051114  
 0.048231 0.053934 0.045497 0.053524  
 -0.036279 0.045995 -0.035706 0.045325

\*\*\*\*\*

TAUMIN= -0.525155 TAUMAX= 0.334992

MIN. R PEARSON  
 -0.271907 0.105250 -0.269018 0.103625  
 -0.269883 0.105155 -0.270598 0.104060  
 -0.270989 0.086160 -0.270595 0.085350  
 -0.270355 0.086570 -0.268976 0.085285  
 -0.276757 0.037230 -0.275853 0.037605  
 -0.275828 0.035610 -0.275731 0.036295  
 -0.148442 0.046205 -0.148910 0.045600

MAX. R PEARSON  
 -0.033151 0.101715 -0.034437 0.099985  
 -0.034420 0.100740 -0.033938 0.100405  
 -0.035948 0.080830 -0.035229 0.081395  
 -0.035472 0.080015 -0.036981 0.078685  
 -0.040517 0.027980 -0.040974 0.027745  
 -0.040467 0.027130 -0.041916 0.027795  
 -0.085558 0.082620 -0.085840 0.082960

RCORMIN= -0.532151 RCORMAX= 0.274099

\*\*\*\*\*

MIN. RHO SPEARMAN  
 -0.273814 0.096389 -0.269397 0.093363  
 -0.271022 0.094441 -0.271713 0.093760  
 -0.272951 0.081622 -0.271997 0.080844  
 -0.272372 0.082516 -0.270984 0.080298  
 -0.277514 0.055150 -0.276161 0.055247  
 -0.277649 0.055546 -0.277398 0.054781  
 -0.137319 0.038290 -0.137273 0.037753

MAX. RHO SPEARMAN  
 -0.005241 0.094433 -0.008108 0.092984  
 -0.007088 0.092074 -0.006937 0.092113  
 -0.006844 0.077843 -0.007009 0.077350  
 -0.006583 0.076768 -0.008710 0.075213  
 -0.011946 0.048216 -0.013800 0.047057  
 -0.011111 0.048891 -0.013829 0.048200  
 -0.073007 0.064411 -0.072443 0.064449

RRHOMIN= -0.586833 RRHOMAX= 0.353386

### Kopuła normalna (n=100)

BIVARIATE NORMAL: TAU= -.100000 PEARSON RO= -.156434  
 LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 100  
 SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000  
 \*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.099597 EST. SIGMA(TAU)= 0.066968  
 EST. R PEARSON = -0.155162 EST. SIGMA(R)= 0.098114  
 EST. RHO SPEARMAN = -0.147461 EST. SIGMA(RHO)= 0.098439

#### MIN. TAU

-0.133224	0.088443	-0.132894	0.087268
-0.133270	0.087312	-0.133235	0.089280
-0.133359	0.087647	-0.133351	0.089038
-0.132979	0.086130	-0.132933	0.087018
-0.137745	0.067833	-0.137633	0.067083
-0.137779	0.069068	-0.137652	0.067940
-0.085080	0.013360	-0.085114	0.012578

#### MAX. TAU

-0.099873	0.077350	-0.100066	0.076440
-0.099782	0.076408	-0.099604	0.078788
-0.099674	0.075123	-0.099709	0.075440
-0.099955	0.074975	-0.100102	0.074115
-0.104498	0.037770	-0.104542	0.036790
-0.104350	0.037525	-0.104402	0.037475
-0.077458	0.120995	-0.077509	0.120805

TAUMIN= -0.205324 TAUMAX= -0.020445

\*\*\*\*\*

#### MIN. R PEARSON

-0.196252	0.090960	-0.195820	0.091740
-0.196206	0.092320	-0.196225	0.092340
-0.196035	0.089290	-0.196022	0.089240
-0.195706	0.086860	-0.195537	0.087730
-0.202814	0.063700	-0.202630	0.062430
-0.202752	0.063760	-0.202686	0.062280
-0.131255	0.013560	-0.131275	0.013790

#### MAX. R PEARSON

-0.156968	0.078320	-0.157172	0.076520
-0.156931	0.076900	-0.156643	0.078630
-0.157425	0.072650	-0.157345	0.073170
-0.157671	0.071850	-0.157815	0.071520
-0.164140	0.027730	-0.164209	0.027880
-0.164050	0.027890	-0.164018	0.027800
-0.123375	0.144390	-0.123460	0.144750

RCORMIN= -0.284609 RCORMAX= -0.054672

\*\*\*\*\*

#### MIN. RHO SPEARMAN

-0.184074	0.086640	-0.183662	0.087160
-0.184132	0.087355	-0.184087	0.088025
-0.184202	0.087870	-0.184291	0.088870
-0.183740	0.087515	-0.183689	0.087600
-0.190632	0.066835	-0.190544	0.065165
-0.190665	0.067255	-0.190507	0.066010
-0.123177	0.017035	-0.123217	0.016665

#### MAX. RHO SPEARMAN

-0.159682	0.073890	-0.159888	0.071925
-0.159528	0.072550	-0.159281	0.074400
-0.159398	0.072930	-0.159402	0.073335
-0.159764	0.071640	-0.160010	0.070860
-0.166432	0.034700	-0.166442	0.033520
-0.166252	0.034830	-0.166325	0.034065
-0.117465	0.140560	-0.117559	0.140795

RRHOMIN= -0.286624 RRHOMAX= -0.041720

### Kopuła Claytona (n=10)

CLAYTON: TAU= -.100000 TETA= -.181818  
LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 10  
SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000  
\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.099464 EST. SIGMA(TAU)= 0.244206  
EST. R PEARSON = -0.148233 EST. SIGMA(R)= 0.323989  
EST. RHO SPEARMAN = -0.135067 EST. SIGMA(RHO)= 0.326877

#### MIN. TAU

-0.273439	0.103574	-0.271506	0.102735
-0.254873	0.088191	-0.254917	0.087290
-0.273546	0.088980	-0.273360	0.089546
-0.255171	0.076631	-0.253757	0.075988
-0.278486	0.065070	-0.277649	0.063849
-0.258901	0.054161	-0.258731	0.053028
-0.119589	0.025214	-0.120457	0.025747

#### MAX. TAU

0.053075	0.096044	0.052942	0.096722
0.047010	0.092910	0.047727	0.092004
0.052701	0.081840	0.054091	0.084633
0.046689	0.078190	0.046124	0.077334
0.049110	0.053989	0.048800	0.053533
0.042411	0.051085	0.042425	0.051004
-0.036587	0.046293	-0.037102	0.044423

\*\*\*\*\*

TAUMIN= -0.527672 TAUMAX= 0.335272

#### MIN. R PEARSON

-0.286262	0.115110	-0.284767	0.113085
-0.261746	0.094275	-0.262112	0.094495
-0.286107	0.097535	-0.285663	0.096535
-0.260884	0.075840	-0.260089	0.075155
-0.293012	0.041735	-0.291761	0.041325
-0.266506	0.032165	-0.266545	0.033855
-0.149298	0.044390	-0.150971	0.044500

#### MAX. R PEARSON

-0.027989	0.108510	-0.028203	0.107900
-0.043820	0.091805	-0.043401	0.092375
-0.029621	0.086985	-0.028601	0.088605
-0.045224	0.074130	-0.045865	0.073110
-0.034432	0.030370	-0.034523	0.030960
-0.051597	0.024920	-0.051557	0.025080
-0.085398	0.081060	-0.088580	0.084190

RCORMIN= -0.536642 RCORMAX= 0.273713

\*\*\*\*\*

#### MIN. RHO SPEARMAN

-0.287647	0.102433	-0.285042	0.101341
-0.263292	0.087414	-0.263299	0.086097
-0.287830	0.088563	-0.287402	0.089044
-0.263608	0.074772	-0.261637	0.074312
-0.294162	0.061770	-0.292570	0.060827
-0.268315	0.050640	-0.268133	0.050125
-0.137879	0.036117	-0.139164	0.036547

## MAX. RHO SPEARMAN

-0.002749	0.095930	-0.002981	0.096359
-0.013163	0.089113	-0.012380	0.088236
-0.003262	0.080206	-0.001636	0.082534
-0.013552	0.074121	-0.013928	0.074331
-0.007967	0.050554	-0.008684	0.049709
-0.019503	0.045640	-0.019210	0.045607
-0.073499	0.064364	-0.073412	0.063298

RRHOMIN= -0.591120 RRHOMAX= 0.354589

## Kopuła Claytona (n=100)

CLAYTON: TAU= -.100000 TETA= -.181818

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.100170 EST. SIGMA(TAU)= 0.066018

EST. R PEARSON = -0.158652 EST. SIGMA(R)= 0.095936

EST. RHO SPEARMAN = -0.147960 EST. SIGMA(RHO)= 0.097624

## MIN. TAU

-0.138229	0.098380	-0.138370	0.099713
-0.132644	0.077658	-0.132524	0.075628
-0.138573	0.096177	-0.138714	0.097132
-0.132821	0.079400	-0.132803	0.078040
-0.143318	0.077150	-0.143374	0.078578
-0.137223	0.059008	-0.137207	0.058080
-0.086533	0.012895	-0.086549	0.012160

## MAX. TAU

-0.099678	0.081243	-0.099476	0.081665
-0.103266	0.072543	-0.103306	0.071462
-0.099840	0.082658	-0.099853	0.082065
-0.103563	0.068615	-0.103654	0.067423
-0.104175	0.040808	-0.104199	0.041175
-0.108330	0.033005	-0.108300	0.032128
-0.078975	0.121848	-0.078942	0.123360

\*\*\*\*\*

TAUMIN= -0.207556 TAUMAX= -0.022291

## MIN. R PEARSON

-0.206055	0.105870	-0.206259	0.105960
-0.196314	0.077480	-0.196087	0.077150
-0.206317	0.102710	-0.206479	0.103540
-0.196125	0.073990	-0.196042	0.073890
-0.213802	0.076700	-0.213867	0.075870
-0.202854	0.049920	-0.202937	0.050290
-0.134884	0.013460	-0.134836	0.013170

## MAX. R PEARSON

-0.157344	0.087070	-0.156936	0.089000
-0.165524	0.066900	-0.165511	0.065820
-0.157993	0.081840	-0.157953	0.082260
-0.166545	0.062030	-0.166643	0.062070
-0.164297	0.032650	-0.164359	0.032100
-0.173618	0.022190	-0.173576	0.020950
-0.126870	0.149450	-0.127125	0.145670

RCORMIN= -0.290044 RCORMAX= -0.058830

\*\*\*\*\*

# MIN. RHO SPEARMAN

-0.190648	0.096205	-0.190831	0.097475
-0.183104	0.078385	-0.182888	0.075755
-0.191161	0.096340	-0.191326	0.097500
-0.183336	0.079645	-0.183325	0.078275
-0.197957	0.075565	-0.198022	0.076095
-0.189647	0.058690	-0.189650	0.057120
-0.125195	0.016965	-0.125218	0.015985

# MAX. RHO SPEARMAN

-0.158902	0.078160	-0.158562	0.078380
-0.164594	0.067280	-0.164624	0.066750
-0.159091	0.078995	-0.159107	0.078460
-0.165059	0.065375	-0.165174	0.065165
-0.165381	0.038300	-0.165417	0.037805
-0.172008	0.030945	-0.171954	0.029730
-0.119570	0.142970	-0.119517	0.141685

RRHOMIN= -0.289933 RRHOMAX= -0.043631

## Kopuła Franka (n=10)

FRANK: TAU= -.100000 TETA= 2.477787

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 10

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.099074 EST. SIGMA(TAU)= 0.245172

EST. R PEARSON = -0.140540 EST. SIGMA(R)= 0.327215

EST. RHO SPEARMAN = -0.135074 EST. SIGMA(RHO)= 0.327109

# MIN. TAU

-0.261806	0.095565	-0.259127	0.094541
-0.260341	0.094802	-0.261934	0.097676
-0.262233	0.083259	-0.261987	0.082042
-0.261701	0.082819	-0.260265	0.081652
-0.266668	0.058528	-0.264843	0.058552
-0.264896	0.058775	-0.265592	0.058355
-0.116758	0.026553	-0.117067	0.026884

# MAX. TAU

0.053001	0.093723	0.052416	0.092858
0.053213	0.096017	0.053718	0.096155
0.051466	0.077754	0.053021	0.080071
0.052976	0.080605	0.050639	0.079001
0.048322	0.052697	0.048355	0.052322
0.049031	0.053797	0.047552	0.052378
-0.032945	0.047154	-0.033919	0.045472

\*\*\*\*\*

TAUMIN= -0.525246 TAUMAX= 0.336896

# MIN. R PEARSON

-0.264634	0.106025	-0.261768	0.103425
-0.262581	0.104260	-0.264788	0.105740
-0.263997	0.086330	-0.263807	0.085640
-0.263675	0.086405	-0.262304	0.085535
-0.270285	0.035910	-0.268276	0.036175
-0.268367	0.037420	-0.269581	0.035675
-0.140453	0.045210	-0.140564	0.046250



## MAX. R PEARSON

-0.025230	0.100570	-0.025712	0.101575
-0.025743	0.101795	-0.024886	0.100725
-0.028819	0.079775	-0.025958	0.081525
-0.027204	0.078630	-0.029328	0.078255
-0.032827	0.028270	-0.032063	0.028760
-0.032234	0.028910	-0.033366	0.026620
-0.076036	0.083120	-0.078207	0.081470

RCORMIN= -0.525856 RCORMAX= 0.282517

\*\*\*\*\*

## MIN. RHO SPEARMAN

-0.272060	0.094251	-0.268684	0.094846
-0.270015	0.093811	-0.272244	0.096394
-0.272508	0.081150	-0.272153	0.080810
-0.271842	0.082523	-0.270178	0.081029
-0.278246	0.054439	-0.275817	0.055469
-0.276117	0.055609	-0.276944	0.054317
-0.134539	0.037041	-0.134546	0.038312

## MAX. RHO SPEARMAN

-0.004585	0.092479	-0.005188	0.091679
-0.004393	0.092681	-0.003162	0.092687
-0.006472	0.077513	-0.003959	0.078748
-0.004469	0.076318	-0.006954	0.075909
-0.010751	0.048881	-0.010542	0.047724
-0.010040	0.048473	-0.011409	0.047411
-0.068555	0.065633	-0.069864	0.063866

RRHOMIN= -0.586102 RRHOMAX= 0.356429

## Kopuła Franka (n=100)

FRANK: TAU= -.100000 TETA= 2.477787

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.099481 EST. SIGMA(TAU)= 0.066992

EST. R PEARSON = -0.142214 EST. SIGMA(R)= 0.098603

EST. RHO SPEARMAN = -0.147311 EST. SIGMA(RHO)= 0.098592

## MIN. TAU

-0.131182	0.090158	-0.130896	0.088098
-0.130928	0.087510	-0.130748	0.087703
-0.130674	0.085292	-0.130723	0.087013
-0.131218	0.087740	-0.131030	0.087810
-0.135762	0.068763	-0.135751	0.068673
-0.136000	0.067765	-0.135731	0.069873
-0.082187	0.011655	-0.082159	0.011945

## MAX. TAU

-0.097092	0.075678	-0.097011	0.077462
-0.097407	0.076925	-0.097134	0.076650
-0.097428	0.073690	-0.097305	0.076518
-0.097001	0.076338	-0.097037	0.076430
-0.102101	0.036615	-0.101963	0.036240
-0.102044	0.036815	-0.102036	0.036720
-0.074572	0.120252	-0.074522	0.123667

\*\*\*\*\*

TAUMIN= -0.203183 TAUMAX= -0.017901

MIN. R PEARSON

-0.180520	0.095350	-0.180196	0.091730
-0.180364	0.093460	-0.179921	0.093350
-0.179409	0.087580	-0.179368	0.087610
-0.180012	0.088520	-0.179782	0.088600
-0.186257	0.060890	-0.186060	0.060300
-0.186456	0.061810	-0.186067	0.061910
-0.116665	0.014500	-0.116547	0.014390

MAX. R PEARSON

-0.140418	0.077520	-0.140202	0.078500
-0.140710	0.077130	-0.140390	0.077650
-0.141065	0.072240	-0.140933	0.074040
-0.140651	0.074130	-0.140582	0.073890
-0.146951	0.028290	-0.146741	0.029630
-0.146991	0.028640	-0.146799	0.030250
-0.108758	0.138220	-0.108751	0.139870

RCORMIN= -0.269087 RCORMAX= -0.038345

\*\*\*\*\*

MIN. RHO SPEARMAN

-0.181068	0.089705	-0.180674	0.086855
-0.180728	0.086695	-0.180518	0.087840
-0.180324	0.085730	-0.180383	0.086035
-0.181107	0.087725	-0.180796	0.087945
-0.187787	0.067570	-0.187766	0.067175
-0.188102	0.067525	-0.187742	0.068190
-0.118897	0.015315	-0.118854	0.015695

MAX. RHO SPEARMAN

-0.155612	0.071920	-0.155540	0.073395
-0.155997	0.072770	-0.155648	0.071985
-0.156050	0.070700	-0.155881	0.073185
-0.155411	0.072540	-0.155479	0.072920
-0.162944	0.033760	-0.162773	0.033935
-0.162873	0.034190	-0.162838	0.033860
-0.113226	0.141485	-0.113170	0.143355

RRHOMIN= -0.283438 RRHOMAX= -0.037776

**Kopuła FGM (n=10)**

FGM: TAU= -.100000 TETA= -.450000

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 10

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.099332 EST. SIGMA(TAU)= 0.244796

EST. R PEARSON = -0.140229 EST. SIGMA(R)= 0.326013

EST. RHO SPEARMAN = -0.135416 EST. SIGMA(RHO)= 0.327364

MIN. TAU

-0.262275	0.095776	-0.260497	0.094714
-0.261952	0.096545	-0.262308	0.094928
-0.262613	0.083101	-0.262616	0.083348
-0.262467	0.082693	-0.261384	0.081705
-0.266899	0.059714	-0.265678	0.058150
-0.266912	0.059031	-0.266896	0.059572
-0.116374	0.024991	-0.117403	0.025736

MAX. TAU  
 0.051743 0.093137 0.051732 0.094064  
 0.051790 0.094046 0.052349 0.095569  
 0.051713 0.080337 0.052597 0.081858  
 0.051506 0.080559 0.050798 0.080539  
 0.046961 0.051291 0.047061 0.051484  
 0.047422 0.052318 0.047966 0.052948  
 -0.033303 0.046897 -0.033863 0.044955

\*\*\*\*\*

TAUMIN=-0.525853 TAUMAX= 0.336668

MIN. R PEARSON

-0.264621 0.104940 -0.263160 0.103630  
 -0.264363 0.104630 -0.264725 0.105505  
 -0.264635 0.086500 -0.264423 0.086135  
 -0.263492 0.086380 -0.262790 0.085110  
 -0.270507 0.036990 -0.269258 0.036445  
 -0.270037 0.035650 -0.269894 0.037415  
 -0.139405 0.045190 -0.141057 0.045480

MAX. R PEARSON

-0.026381 0.101165 -0.026334 0.100380  
 -0.026399 0.099930 -0.026047 0.101030  
 -0.027802 0.080570 -0.027168 0.081580  
 -0.027941 0.079525 -0.028812 0.080000  
 -0.033506 0.027905 -0.033662 0.029030  
 -0.033395 0.027045 -0.033103 0.028130  
 -0.076754 0.082110 -0.077331 0.081600

RCORMIN=-0.527151 RCORMAX= 0.283105

\*\*\*\*\*

MIN. RHO SPEARMAN

-0.272931 0.094240 -0.270690 0.094142  
 -0.272374 0.095147 -0.272833 0.094385  
 -0.273539 0.081854 -0.273437 0.081812  
 -0.272950 0.082386 -0.271457 0.080825  
 -0.279250 0.056026 -0.277032 0.054423  
 -0.278760 0.055675 -0.278737 0.056453  
 -0.133643 0.035738 -0.135126 0.036895

MAX. RHO SPEARMAN

-0.005611 0.091744 -0.006000 0.092893  
 -0.005798 0.091815 -0.005310 0.091790  
 -0.005826 0.078481 -0.004901 0.079183  
 -0.006215 0.077689 -0.006916 0.076635  
 -0.012184 0.047551 -0.012573 0.047737  
 -0.011893 0.047218 -0.010963 0.048041  
 -0.069013 0.065635 -0.069373 0.063587

RRHOMIN=-0.587524 RRHOMAX= 0.356895

### Kopuła FGM (n=100)

FGM: TAU= -.100000 TETA= -.450000

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.100154 EST. SIGMA(TAU)= 0.066359

EST. R PEARSON = -0.143366 EST. SIGMA(R)= 0.097249

EST. RHO SPEARMAN = -0.148747 EST. SIGMA(RHO)= 0.097938

MIN. TAU

-0.132040	0.087105	-0.132148	0.088080
-0.132207	0.088965	-0.132257	0.088468
-0.132218	0.086260	-0.132238	0.087390
-0.132289	0.087123	-0.132131	0.086393
-0.137133	0.068750	-0.137097	0.068425
-0.137143	0.069120	-0.137348	0.069025
-0.082848	0.012695	-0.082868	0.012200

MAX. TAU

-0.098195	0.076135	-0.098157	0.077430
-0.098004	0.077095	-0.098009	0.076715
-0.098223	0.076155	-0.098090	0.076055
-0.098146	0.074805	-0.098164	0.075315
-0.103039	0.036460	-0.103281	0.035835
-0.103063	0.035575	-0.102927	0.035975
-0.075273	0.123335	-0.075248	0.123115

\*\*\*\*\*

TAUMIN= -0.204346 TAUMAX= -0.018907

MIN. R PEARSON

-0.181682	0.093220	-0.181869	0.092780
-0.181933	0.093240	-0.181933	0.093620
-0.181521	0.088450	-0.181507	0.089280
-0.181471	0.088300	-0.181200	0.086560
-0.188046	0.061880	-0.187833	0.061390
-0.187909	0.061220	-0.188154	0.061230
-0.117553	0.014690	-0.117510	0.014140

MAX. R PEARSON

-0.142081	0.077080	-0.141920	0.078220
-0.141736	0.078320	-0.141715	0.078570
-0.142455	0.072990	-0.142232	0.072090
-0.142411	0.072120	-0.142371	0.073820
-0.148465	0.028140	-0.148711	0.027960
-0.148501	0.029200	-0.148155	0.029220
-0.109675	0.140920	-0.109669	0.141350

RCORMIN= -0.270802 RCORMAX= -0.039539

\*\*\*\*\*

MIN. RHO SPEARMAN

-0.182814	0.085960	-0.182921	0.086810
-0.183032	0.087605	-0.183074	0.087835
-0.183099	0.086605	-0.183079	0.088690
-0.183145	0.087165	-0.182901	0.085955
-0.190298	0.067585	-0.190206	0.067775
-0.190279	0.067820	-0.190581	0.068120
-0.120099	0.016400	-0.120136	0.015675

MAX. RHO SPEARMAN

-0.157640	0.072200	-0.157549	0.072605
-0.157371	0.072565	-0.157352	0.072510
-0.157668	0.072545	-0.157480	0.072810
-0.157592	0.071280	-0.157596	0.072640
-0.164824	0.033300	-0.165160	0.033015
-0.164844	0.033095	-0.164645	0.033570
-0.114479	0.143970	-0.114422	0.143895

RRHOMIN= -0.285905 RRHOMAX= -0.039251

#### 5.4 Badanie efektywności wybranego algorytmu heurystycznego w zależności od rodzaju statystycznej miary zależności, typu zależności, stopnia rozmytości danych oraz liczności próbek.

Przedstawiono przypadek umiarkowanej dodatniej zależności ( $\tau=0,3$ ) dla danych rozmytych (wszystkie dane nieprecyzyjne) w stopniu niewielkim (maksymalna szerokość przedziału wartości równa  $0,5\sigma$ ), umiarkowanym (maksymalna szerokość przedziału wartości równa  $2\sigma$ ) i dużym umiarkowanym (maksymalna szerokość przedziału wartości równa  $3\sigma$ ), próbki o małej ( $n=10$ ) i dużej ( $n=100$ ) liczności.

##### Kopuła normalna ( $n=10$ , rozmytość niewielka)

```

BIVARIATE NORMAL: TAU= 0.300000 PEARSON RO= 0.453990
LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 10
SIGMA= 1.000000 Z= 0.500000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000
*****
ZAL. TAU= 0.300000 ESTYM. TAU= 0.301709 EST. SIGMA(TAU)= 0.228953
EST. R PEARSON = 0.435243 EST. SIGMA(R)= 0.279434
EST. RHO SPEARMAN = 0.402015 EST. SIGMA(RHO)= 0.289001
MIN. TAU
0.286355 0.078723 0.286595 0.079060
0.286755 0.076510 0.286090 0.077534
0.286682 0.070634 0.286384 0.071711
0.286159 0.073246 0.286326 0.072011
0.287282 0.053072 0.287359 0.052814
0.287208 0.053019 0.287068 0.053086
0.293342 0.094450 0.293536 0.094161
MAX. TAU
0.349301 0.085951 0.349101 0.085738
0.349135 0.086494 0.348783 0.085305
0.348897 0.080395 0.349173 0.081326
0.349467 0.082971 0.348928 0.080917
0.349798 0.062141 0.350014 0.063121
0.350047 0.064006 0.349704 0.063094
0.298613 0.039823 0.298712 0.038757
TAUMIN= 0.181839 TAUMAX= 0.442781
*****
MIN. R PEARSON
0.434287 0.082995 0.434638 0.081995
0.434397 0.082935 0.434312 0.082335
0.434494 0.075075 0.434477 0.075015
0.434231 0.075685 0.434586 0.075105
0.435592 0.012120 0.435741 0.012180
0.435467 0.012000 0.435681 0.011780
0.426729 0.159570 0.426723 0.161210
MAX. R PEARSON
0.473756 0.108375 0.473699 0.107175
0.473811 0.107295 0.473817 0.108755
0.473642 0.105650 0.473931 0.105570
0.473979 0.106580 0.473677 0.103135
0.474823 0.022050 0.474971 0.022160
0.475049 0.022000 0.474855 0.021295
0.430142 0.029790 0.430062 0.030170
RCORMIN= 0.359561 RCORMAX= 0.531660

```

\*\*\*\*\*

MIN. RHO SPEARMAN

0.397688	0.074028	0.397854	0.074168
0.398157	0.072091	0.397584	0.073206
0.398056	0.067578	0.397690	0.068131
0.397411	0.069489	0.397953	0.068360
0.398777	0.048209	0.398906	0.046557
0.398763	0.046892	0.398926	0.046953
0.392796	0.122478	0.393014	0.121870

MAX. RHO SPEARMAN

0.443030	0.086073	0.442963	0.084571
0.442901	0.085238	0.442561	0.084051
0.442491	0.080369	0.443158	0.082105
0.443324	0.082199	0.442573	0.080879
0.443690	0.059503	0.444201	0.060179
0.443983	0.059973	0.443544	0.059324
0.396688	0.048732	0.396737	0.046827

RRHOMIN= 0.276204 RRHOMAX= 0.543887

**Kopuła normalna (n=100, rozmytość niewielka)**

BIVARIATE NORMAL: TAU= 0.300000 PEARSON RO= 0.453990

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 0.500000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.300000 ESTYM. TAU= 0.300618 EST. SIGMA(TAU)= 0.061044

EST. R PEARSON = 0.452868 EST. SIGMA(R)= 0.080182

EST. RHO SPEARMAN = 0.434092 EST. SIGMA(RHO)= 0.083768

MIN. TAU

0.317725	0.036795	0.317705	0.037335
0.317740	0.036472	0.317686	0.036388
0.317669	0.035398	0.317620	0.035613
0.317760	0.034720	0.317711	0.034735
0.318596	0.018367	0.318587	0.018518
0.318628	0.018058	0.318570	0.018278
0.295961	0.318490	0.295963	0.320832

MAX. TAU

0.323593	0.092555	0.323545	0.091104
0.323615	0.092882	0.323572	0.092102
0.323624	0.088426	0.323573	0.087854
0.323543	0.087992	0.323493	0.087312
0.324494	0.068953	0.324429	0.068433
0.324472	0.068627	0.324458	0.069937
0.296442	0.001842	0.296449	0.001982

TAUMIN= 0.290183 TAUMAX= 0.341286

\*\*\*\*\*

MIN. R PEARSON

0.474506	0.025640	0.474502	0.025200
0.474554	0.026180	0.474477	0.025600
0.474499	0.025030	0.474391	0.025840
0.474578	0.024610	0.474530	0.024960
0.475731	0.007160	0.475733	0.007540
0.475758	0.007390	0.475719	0.007310
0.446524	0.381895	0.446509	0.385645

## MAX. R PEARSON

0.480106	0.096650	0.480039	0.095680
0.480090	0.096070	0.480075	0.094880
0.480136	0.094360	0.480078	0.095080
0.480079	0.094240	0.479961	0.093620
0.481300	0.059590	0.481260	0.058570
0.481305	0.059980	0.481293	0.059690
0.446872	0.000740	0.446876	0.000850

RCORMIN= 0.442231 RCORMAX= 0.497484

\*\*\*\*\*

## MIN. RHO SPEARMAN

0.459339	0.030970	0.459307	0.030950
0.459349	0.031560	0.459292	0.030570
0.459283	0.030535	0.459192	0.030975
0.459382	0.030580	0.459322	0.030085
0.460519	0.014485	0.460486	0.014520
0.460560	0.013960	0.460488	0.014390
0.427845	0.345160	0.427827	0.351260

## MAX. RHO SPEARMAN

0.462248	0.092275	0.462196	0.090930
0.462274	0.092545	0.462216	0.090720
0.462287	0.090965	0.462216	0.090860
0.462192	0.090625	0.462108	0.089625
0.463448	0.066445	0.463379	0.065655
0.463431	0.066735	0.463389	0.067640
0.428163	0.002540	0.428171	0.002440

RRHOMIN= 0.421318 RRHOMAX= 0.484585

**Kopuła normalna (n=10, rozmytość umiarkowana)**

BIVARIATE NORMAL: TAU= 0.300000 PEARSON RO= 0.453990

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 10

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.300000 ESTYM. TAU= 0.301709 EST. SIGMA(TAU)= 0.228953

EST. R PEARSON = 0.435243 EST. SIGMA(R)= 0.279434

EST. RHO SPEARMAN = 0.402015 EST. SIGMA(RHO)= 0.289001

## MIN. TAU

0.158009	0.093945	0.161244	0.091723
0.159222	0.093698	0.159658	0.092115
0.160315	0.075304	0.161760	0.074112
0.160687	0.075065	0.162320	0.073851
0.172592	0.046704	0.174244	0.046151
0.172888	0.046628	0.173072	0.046501
0.189806	0.072647	0.189819	0.071559

## MAX. TAU

0.473956	0.095270	0.472239	0.093095
0.472816	0.095432	0.473111	0.094318
0.473539	0.081410	0.474855	0.082395
0.474876	0.084567	0.473564	0.083893
0.486523	0.065758	0.486115	0.063808
0.487520	0.067339	0.486381	0.066087
0.278407	0.013195	0.279130	0.013440

TAUMIN= -0.138754 TAUMAX= 0.710007

\*\*\*\*\*

# MIN. R PEARSON

0.340802	0.093005	0.344117	0.090655
0.342124	0.092805	0.342385	0.092845
0.345100	0.069540	0.346040	0.068545
0.345831	0.068895	0.346725	0.068545
0.361976	0.019515	0.363548	0.019290
0.362152	0.019965	0.362695	0.018980
0.314354	0.138295	0.314737	0.139120

# MAX. R PEARSON

0.545432	0.103475	0.545132	0.102855
0.545523	0.104415	0.545932	0.104995
0.545673	0.085055	0.546619	0.085695
0.546517	0.085945	0.545465	0.084775
0.560935	0.050425	0.560845	0.047770
0.561734	0.049005	0.561385	0.048900
0.379786	0.023540	0.379377	0.023150

RCORMIN= 0.013910 RCORMAX= 0.743589

\*\*\*\*\*

# MIN. RHO SPEARMAN

0.286199	0.089547	0.290086	0.087686
0.287900	0.088971	0.288173	0.088764
0.289107	0.071026	0.291053	0.068905
0.289877	0.070874	0.291556	0.070225
0.305556	0.040369	0.307281	0.039210
0.305785	0.039971	0.306022	0.040132
0.278536	0.102456	0.278846	0.101865

# MAX. RHO SPEARMAN

0.532823	0.095153	0.531589	0.093653
0.531924	0.094112	0.532863	0.094872
0.532690	0.082107	0.534772	0.083221
0.534164	0.082775	0.533239	0.081367
0.547879	0.063958	0.547672	0.063186
0.548761	0.064409	0.548065	0.062472
0.346737	0.018983	0.347333	0.019732

RRHOMIN= -0.092715 RRHOMAX= 0.784678

## Kopuła normalna (n=100, rozmyślność umiarkowana)

BIVARIATE NORMAL: TAU= 0.300000 PEARSON RO= 0.453990

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.300000 ESTYM. TAU= 0.300618 EST. SIGMA(TAU)= 0.061044

EST. R PEARSON = 0.452868 EST. SIGMA(R)= 0.080182

EST. RHO SPEARMAN = 0.434092 EST. SIGMA(RHO)= 0.083768

# MIN. TAU

0.326406	0.036660	0.326632	0.035595
0.326343	0.035185	0.326285	0.036385
0.326890	0.033585	0.326764	0.034105
0.327303	0.033590	0.327131	0.034320
0.340363	0.009525	0.340184	0.009690
0.340297	0.010095	0.340267	0.009530
0.240888	0.338675	0.240852	0.343060



# MAX. TAU

0.358063	0.077547	0.357995	0.077715
0.358277	0.077710	0.358401	0.078955
0.358757	0.076747	0.358616	0.075678
0.358449	0.076017	0.358267	0.074542
0.371799	0.098382	0.371735	0.095705
0.371995	0.095430	0.371744	0.094663
0.249055	0.000460	0.249042	0.000450

TAUMIN= 0.222097 TAUMAX= 0.427278

\*\*\*\*\*

## MIN. R PEARSON

0.485048	0.028100	0.485402	0.027860
0.485087	0.028510	0.484873	0.029350
0.486431	0.023520	0.486187	0.024350
0.486781	0.023200	0.486690	0.024570
0.504196	0.004120	0.504138	0.004670
0.504266	0.003730	0.504286	0.004040
0.370679	0.385100	0.370646	0.388880

## MAX. R PEARSON

0.515456	0.078160	0.515242	0.077240
0.515690	0.076740	0.515821	0.079110
0.515948	0.073070	0.515864	0.072510
0.515781	0.072730	0.515451	0.072430
0.533290	0.101080	0.533309	0.098540
0.533465	0.098900	0.533284	0.098960
0.378602	0.000270	0.378532	0.000260

RCORMIN= 0.350523 RCORMAX= 0.589205

\*\*\*\*\*

## MIN. RHO SPEARMAN

0.480037	0.030900	0.480330	0.030280
0.479969	0.030310	0.479903	0.030735
0.480851	0.028480	0.480639	0.028830
0.481309	0.029155	0.481081	0.029150
0.498640	0.007580	0.498432	0.007730
0.498500	0.007850	0.498520	0.007680
0.353511	0.363495	0.353450	0.367825

## MAX. RHO SPEARMAN

0.496523	0.077845	0.496452	0.077410
0.496765	0.077565	0.496985	0.079210
0.497363	0.077525	0.497192	0.076385
0.497018	0.076495	0.496793	0.075075
0.514202	0.096460	0.514223	0.095170
0.514501	0.095430	0.514297	0.093870
0.359387	0.000840	0.359331	0.000720

RRHOMIN= 0.330524 RRHOMAX= 0.582921

## Kopuła normalna (n=10, rozmytość duża)

BIVARIATE NORMAL: TAU= 0.300000 PEARSON RO= 0.453990

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 10

SIGMA= 1.000000 Z= 3.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.300000 ESTYM. TAU= 0.301709 EST. SIGMA(TAU)= 0.228953

EST. R PEARSON = 0.435243 EST. SIGMA(R)= 0.279434

EST. RHO SPEARMAN = 0.402015 EST. SIGMA(RHO)= 0.289001

# MIN. TAU

0.026874	0.101244	0.029927	0.098402
0.028009	0.098778	0.028547	0.098380
0.032636	0.076854	0.034900	0.075402
0.033919	0.075859	0.035672	0.076456
0.053566	0.044708	0.056259	0.045142
0.053881	0.045958	0.055434	0.045130
0.086591	0.058167	0.086606	0.059520

# MAX. TAU

0.534783	0.093820	0.534001	0.092194
0.535528	0.094315	0.534680	0.095434
0.538996	0.081495	0.539594	0.081056
0.538713	0.084082	0.537988	0.082013
0.560827	0.067850	0.561173	0.068670
0.561541	0.069548	0.560550	0.068982
0.277005	0.010160	0.278391	0.010377

TAUMIN= -0.357293 TAUMAX= 0.820205

\*\*\*\*\*

# MIN. R PEARSON

0.216966	0.103190	0.221020	0.102095
0.218732	0.104270	0.218390	0.102745
0.231732	0.068135	0.232886	0.067585
0.233590	0.067240	0.234449	0.067685
0.259188	0.023230	0.262537	0.022225
0.260716	0.022800	0.261450	0.022935
0.202261	0.112615	0.202960	0.113250

# MAX. R PEARSON

0.565346	0.101850	0.564522	0.100050
0.566350	0.101385	0.565063	0.101120
0.567300	0.076155	0.568406	0.077410
0.567660	0.077535	0.565843	0.075210
0.593255	0.060240	0.593727	0.060285
0.594140	0.060680	0.593171	0.059935
0.349990	0.023740	0.350162	0.024405

RCORMIN= -0.244224 RCORMAX= 0.818139

\*\*\*\*\*

# MIN. RHO SPEARMAN

0.150368	0.098830	0.153620	0.097077
0.151613	0.097213	0.152330	0.096332
0.158574	0.071848	0.160921	0.070522
0.160059	0.071944	0.162157	0.072071
0.186112	0.039157	0.189315	0.040073
0.186453	0.040916	0.188375	0.039541
0.166400	0.081177	0.167211	0.083299

# MAX. RHO SPEARMAN

0.570584	0.095475	0.569668	0.093244
0.571667	0.093544	0.570856	0.095150
0.576108	0.081949	0.576847	0.081214
0.575909	0.081820	0.575094	0.079666
0.600518	0.067125	0.601178	0.068434
0.601385	0.067319	0.600713	0.066949
0.318104	0.014043	0.319723	0.014062

RRHOMIN= -0.344427 RRHOMAX= 0.872319

### Kopuła normalna (n=100, rozmyślność duża)

BIVARIATE NORMAL: TAU= 0.300000 PEARSON RO= 0.453990

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 3.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.300000 ESTYM. TAU= 0.300618 EST. SIGMA(TAU)= 0.061044

EST. R PEARSON = 0.452868 EST. SIGMA(R)= 0.080182

EST. RHO SPEARMAN = 0.434092 EST. SIGMA(RHO)= 0.083768

#### MIN. TAU

0.302076	0.046060	0.302443	0.046505
0.302307	0.044955	0.302028	0.047100
0.304674	0.039625	0.304672	0.039810
0.305154	0.040220	0.305139	0.039430
0.330449	0.009450	0.330445	0.008935
0.330547	0.009375	0.330276	0.009165
0.193493	0.309400	0.193452	0.309970

#### MAX. TAU

0.357452	0.069303	0.357164	0.068863
0.357489	0.068330	0.357635	0.070085
0.359161	0.070237	0.359168	0.069173
0.358888	0.070473	0.358777	0.069672
0.385007	0.111620	0.384712	0.110043
0.385110	0.110505	0.385010	0.111100
0.211181	0.000270	0.211132	0.000325

TAUMIN= 0.161764 TAUMAX= 0.461293

\*\*\*\*\*

#### MIN. R PEARSON

0.452771	0.039990	0.453262	0.040530
0.452962	0.038830	0.452627	0.039860
0.458914	0.028390	0.458624	0.028760
0.459419	0.027410	0.459542	0.026780
0.492147	0.004440	0.492409	0.004010
0.492569	0.004470	0.492402	0.004350
0.302290	0.354260	0.302268	0.357920

#### MAX. R PEARSON

0.509397	0.069230	0.509116	0.067880
0.509660	0.067470	0.509754	0.071120
0.509996	0.062220	0.510210	0.063910
0.509926	0.062760	0.509480	0.063450
0.543963	0.118530	0.543817	0.117100
0.543971	0.118230	0.544071	0.117420
0.322816	0.000370	0.322665	0.000310

RCORMIN= 0.263989 RCORMAX= 0.620422

\*\*\*\*\*

#### MIN. RHO SPEARMAN

0.454966	0.039845	0.455396	0.039430
0.455254	0.039185	0.454816	0.039785
0.458808	0.033895	0.458675	0.034440
0.459364	0.033865	0.459342	0.033525
0.493121	0.007380	0.493024	0.006910
0.493302	0.007630	0.492944	0.007315
0.289217	0.337845	0.289152	0.338950

# MAX. R PEARSON

-0.456153	0.048160	-0.455988	0.049775
-0.477672	0.014500	-0.477780	0.015890
-0.456657	0.035810	-0.456632	0.035780
-0.480895	0.014180	-0.481088	0.014420
-0.474061	0.008580	-0.473773	0.008240
-0.499469	0.001720	-0.499519	0.001800
-0.353084	0.405485	-0.353575	0.345660

RCORMIN= -0.576829 RCORMAX= -0.331460

\*\*\*\*\*

## MIN. RHO SPEARMAN

-0.493504	0.093365	-0.493784	0.093705
-0.479349	0.054220	-0.479324	0.054830
-0.495988	0.099055	-0.496395	0.101540
-0.479115	0.051290	-0.479072	0.052705
-0.514649	0.132335	-0.514855	0.133170
-0.497420	0.067355	-0.497223	0.065190
-0.347681	0.000660	-0.347742	0.000580

## MAX. RHO SPEARMAN

-0.460100	0.041675	-0.459914	0.042330
-0.478749	0.019875	-0.479016	0.019460
-0.459889	0.040805	-0.459819	0.039975
-0.481926	0.017445	-0.482326	0.017930
-0.478204	0.010990	-0.477945	0.011325
-0.501084	0.003545	-0.501271	0.003630
-0.341674	0.377175	-0.341937	0.353840

RRHOMIN= -0.574850 RRHOMAX= -0.318667

CLAYTON: TAU= -.100000 TETA= -.181818

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= -0.100000 ESTYM. TAU= -0.100170 EST. SIGMA(TAU)= 0.066018

EST. R PEARSON = -0.158652 EST. SIGMA(R)= 0.095936

EST. RHO SPEARMAN = -0.147960 EST. SIGMA(RHO)= 0.097624

## MIN. TAU

-0.138229	0.098380	-0.138370	0.099713
-0.132644	0.077658	-0.132524	0.075628
-0.138573	0.096177	-0.138714	0.097132
-0.132821	0.079400	-0.132803	0.078040
-0.143318	0.077150	-0.143374	0.078578
-0.137223	0.059008	-0.137207	0.058080
-0.086533	0.012895	-0.086549	0.012160

## MAX. TAU

-0.099678	0.081243	-0.099476	0.081665
-0.103266	0.072543	-0.103306	0.071462
-0.099840	0.082658	-0.099853	0.082065
-0.103563	0.068615	-0.103654	0.067423
-0.104175	0.040808	-0.104199	0.041175
-0.108330	0.033005	-0.108300	0.032128
-0.078975	0.121848	-0.078942	0.123360

\*\*\*\*\*

TAUMIN= -0.207556 TAUMAX= -0.022291

# MIN. R PEARSON

-0.206055	0.105870	-0.206259	0.105960
-0.196314	0.077480	-0.196087	0.077150
-0.206317	0.102710	-0.206479	0.103540
-0.196125	0.073990	-0.196042	0.073890
-0.213802	0.076700	-0.213867	0.075870
-0.202854	0.049920	-0.202937	0.050290
-0.134884	0.013460	-0.134836	0.013170

# MAX. R PEARSON

-0.157344	0.087070	-0.156936	0.089000
-0.165524	0.066900	-0.165511	0.065820
-0.157993	0.081840	-0.157953	0.082260
-0.166545	0.062030	-0.166643	0.062070
-0.164297	0.032650	-0.164359	0.032100
-0.173618	0.022190	-0.173576	0.020950
-0.126870	0.149450	-0.127125	0.145670

RCORMIN= -0.290044 RCORMAX= -0.058830

\*\*\*\*\*

# MIN. RHO SPEARMAN

-0.190648	0.096205	-0.190831	0.097475
-0.183104	0.078385	-0.182888	0.075755
-0.191161	0.096340	-0.191326	0.097500
-0.183336	0.079645	-0.183325	0.078275
-0.197957	0.075565	-0.198022	0.076095
-0.189647	0.058690	-0.189650	0.057120
-0.125195	0.016965	-0.125218	0.015985

# MAX. RHO SPEARMAN

-0.158902	0.078160	-0.158562	0.078380
-0.164594	0.067280	-0.164624	0.066750
-0.159091	0.078995	-0.159107	0.078460
-0.165059	0.065375	-0.165174	0.065165
-0.165381	0.038300	-0.165417	0.037805
-0.172008	0.030945	-0.171954	0.029730
-0.119570	0.142970	-0.119517	0.141685

RRHOMIN= -0.289933 RRHOMAX= -0.043631

CLAYTON: TAU= 0.100000 TETA= 0.222222E+00

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.100000 ESTYM. TAU= 0.099792 EST. SIGMA(TAU)= 0.068117

EST. R PEARSON = 0.161203 EST. SIGMA(R)= 0.101423

EST. RHO SPEARMAN = 0.147547 EST. SIGMA(RHO)= 0.099633

# MIN. TAU

0.103249	0.066078	0.103296	0.067405
0.096876	0.088675	0.096902	0.088155
0.103238	0.065573	0.103178	0.067160
0.097243	0.084240	0.097428	0.084393
0.107665	0.032380	0.107719	0.032865
0.101225	0.044645	0.101418	0.044150
0.079030	0.117325	0.079042	0.116955

# MAX. TAU

0.131557	0.084033	0.131680	0.086958
0.133413	0.088900	0.133505	0.090563
0.131924	0.085715	0.132132	0.085175
0.133164	0.089760	0.133186	0.089578
0.135984	0.065730	0.136167	0.066278
0.137495	0.069310	0.137614	0.069833
0.086694	0.014220	0.086749	0.013945

TAUMIN= 0.020828 TAUMAX= 0.204951

\*\*\*\*\*

## MIN. R PEARSON

0.169055	0.065700	0.168958	0.066050
0.158239	0.092490	0.158472	0.091930
0.169555	0.059230	0.169519	0.060330
0.159202	0.084430	0.159512	0.083180
0.176446	0.022520	0.176683	0.022230
0.165486	0.034250	0.165603	0.034210
0.131226	0.142870	0.131275	0.140580

## MAX. R PEARSON

0.198600	0.080660	0.198963	0.083890
0.205395	0.100800	0.205361	0.101310
0.198709	0.078600	0.199021	0.079090
0.204913	0.094470	0.204906	0.097120
0.205421	0.056110	0.205606	0.056420
0.212051	0.071520	0.212256	0.071190
0.138980	0.014050	0.139265	0.014770

RCORMIN= 0.061544 RCORMAX= 0.290513

\*\*\*\*\*

## MIN. RHO SPEARMAN

0.164456	0.062230	0.164496	0.064045
0.155123	0.084085	0.155088	0.084550
0.164528	0.062160	0.164348	0.064025
0.155570	0.081890	0.155877	0.080450
0.170938	0.029940	0.171014	0.030315
0.161439	0.041590	0.161647	0.040580
0.119703	0.136195	0.119695	0.137945

## MAX. RHO SPEARMAN

0.181218	0.083660	0.181352	0.085835
0.184057	0.089260	0.184170	0.090140
0.181726	0.085995	0.182012	0.084915
0.183697	0.089390	0.183682	0.088805
0.187556	0.063500	0.187808	0.064450
0.189927	0.068360	0.190073	0.069000
0.125402	0.018270	0.125452	0.018420

RRHOMIN= 0.042927 RRHOMAX= 0.285126

CLAYTON: TAU= 0.300000 TETA= 0.857143E+00

LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBKI: 100

SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000

\*\*\*\*\*

ZAL. TAU= 0.300000 ESTYM. TAU= 0.299812 EST. SIGMA(TAU)= 0.064432

EST. R PEARSON = 0.453357 EST. SIGMA(R)= 0.087032

EST. RHO SPEARMAN = 0.429759 EST. SIGMA(RHO)= 0.087436

MIN. TAU

0.325235	0.027755	0.325156	0.028315
0.310067	0.058920	0.310255	0.058340
0.324932	0.028420	0.324892	0.028035
0.311819	0.050435	0.312095	0.049325
0.337988	0.007370	0.338005	0.007335
0.323113	0.017665	0.323409	0.017830
0.239912	0.311245	0.239892	0.309010

MAX. TAU

0.347764	0.071675	0.347980	0.073780
0.351329	0.084720	0.351243	0.084728
0.349383	0.075253	0.349675	0.074220
0.350440	0.080233	0.350381	0.080315
0.361105	0.086858	0.361383	0.089010
0.363592	0.099320	0.363571	0.098532
0.248242	0.000750	0.248277	0.000605

TAUMIN= 0.217603 TAUMAX= 0.419408

\*\*\*\*\*

MIN. R PEARSON

0.492568	0.018210	0.492592	0.018240
0.467991	0.053840	0.468143	0.052470
0.493390	0.015890	0.493461	0.015340
0.470569	0.042800	0.470991	0.041180
0.511100	0.002090	0.511224	0.002130
0.485867	0.010030	0.486137	0.009820
0.375106	0.360210	0.375162	0.357750

MAX. R PEARSON

0.504867	0.058660	0.505133	0.060900
0.515750	0.096040	0.515780	0.096720
0.506500	0.061700	0.506943	0.062100
0.515194	0.086970	0.515203	0.088860
0.522055	0.075800	0.522405	0.076210
0.532434	0.116950	0.532517	0.118190
0.382705	0.000510	0.383461	0.000390

RCORMIN= 0.351630 RCORMAX= 0.584011

\*\*\*\*\*

MIN. RHO SPEARMAN

0.476451	0.023490	0.476461	0.023630
0.454908	0.051700	0.455137	0.050665
0.476065	0.023440	0.476013	0.022160
0.457187	0.044970	0.457630	0.044540
0.492947	0.005430	0.492944	0.005730
0.471692	0.015055	0.472145	0.015270
0.350821	0.336975	0.350786	0.336945

MAX. RHO SPEARMAN

0.479364	0.072040	0.479674	0.073950
0.484297	0.086690	0.484285	0.086795
0.481600	0.076305	0.482071	0.076215
0.482816	0.080955	0.482749	0.080715
0.496040	0.084150	0.496535	0.087455
0.499379	0.095710	0.499340	0.096630
0.356827	0.001360	0.356697	0.001030

RRHOMIN= 0.323923 RRHOMAX= 0.568435

CLAYTON: TAU= 0.800000 TETA= 0.800000E+01  
 LICZBA SYMULACJI: 100000 LICZN.PROBK: 100  
 SIGMA= 1.000000 Z= 2.000000 PEX= 0.000000 PSYM= 0.500000  
 \*\*\*\*\*  
 ZAL. TAU= 0.800000 ESTYM. TAU= 0.800062 EST. SIGMA(TAU)= 0.027732  
 EST. R PEARSON = 0.916958 EST. SIGMA(R)= 0.022176  
 EST. RHO SPEARMAN = 0.936777 EST. SIGMA(RHO)= 0.017631

# MIN. TAU

0.732302	0.000960	0.732362	0.000685
0.721156	0.002160	0.721349	0.002345
0.737721	0.000600	0.737778	0.000595
0.728313	0.000905	0.728521	0.001000
0.771786	0.000060	0.771828	0.000070
0.760854	0.000065	0.761002	0.000130
0.572735	0.494850	0.572738	0.495575

# MAX. TAU

0.778780	0.011160	0.778932	0.010620
0.781028	0.013627	0.781135	0.014308
0.783911	0.014477	0.784095	0.014828
0.786313	0.018143	0.786331	0.017465
0.828701	0.193015	0.828837	0.195135
0.832142	0.248753	0.832211	0.248468
0.585480	0.000000	0.585472	0.000000

TAUMIN= 0.567399 TAUMAX= 0.860881

\*\*\*\*\*

# MIN. R PEARSON

0.902051	0.000050	0.902130	0.000050
0.888012	0.000910	0.888192	0.001080
0.903703	0.000050	0.903821	0.000010
0.893109	0.000140	0.893204	0.000200
0.923722	0.000000	0.923854	0.000000
0.910833	0.000000	0.910889	0.000010
0.762105	0.500380	0.762136	0.497120

# MAX. R PEARSON

0.907073	0.017060	0.907214	0.016940
0.907879	0.020670	0.907952	0.021390
0.910838	0.027700	0.910936	0.027795
0.908059	0.018210	0.908176	0.017680
0.928703	0.221820	0.928774	0.223185
0.927571	0.192245	0.927697	0.195305
0.770244	0.000000	0.770626	0.000000

RCORMIN= 0.755620 RCORMAX= 0.941705

\*\*\*\*\*

# MIN. RHO SPEARMAN

0.913756	0.000300	0.913806	0.000330
0.904441	0.001310	0.904587	0.001460
0.915947	0.000240	0.915961	0.000280
0.908605	0.000450	0.908730	0.000530
0.938156	0.000010	0.938191	0.000000
0.929098	0.000040	0.929189	0.000070
0.763136	0.497235	0.763127	0.497745



## MAX. RHO SPEARMAN

0.915604	0.013260	0.915727	0.013095
0.917956	0.019800	0.918027	0.019645
0.919241	0.019375	0.919388	0.020055
0.919746	0.021595	0.919753	0.021160
0.940979	0.178665	0.941100	0.179375
0.943221	0.245460	0.943275	0.248515
0.770292	0.000000	0.770068	0.000000

RRHOMIN= 0.757325 RRHOMAX= 0.957405

## 6. Omówienie wyników badań symulacyjnych

- a) Przedstawione w pkt. 5.2 wyniki symulacji potwierdzają wpływ typu zależności na wartość współczynnika korelacji liniowej  $r$  Pearsona. Pokazane zostały wyniki symulacji dla kopuł: normalnej, Claytona i Gumbela. Wszystkie dane dotyczą próbek symulowanych przy takiej samej sile zależności mierzonej (przed rozmyciem danych) współczynnikiem  $\tau$  Kendalla równemu 0,8. Wyestymowane dla tych próbek wartości współczynnika  $\rho$  Spearmana są dla różnych kopuł w przybliżeniu jednakowe. Natomiast analogiczne wartości współczynnika korelacji liniowej  $r$  Pearsona różnią się dosyć istotnie. W przypadku słabszych zależności różnice te są jednak mniej wyraźne, co można zauważyć analizując dane przedstawione w pkt. 5.3, dla współczynnika  $\tau$  Kendalla równego -0,1. Należy tu zwrócić uwagę, że rozkłady brzegowe symulowanych wektorów losowych są rozkładami normalnymi. W przypadku uwzględnienia także innych rozkładów brzegowych zmienność wartości współczynnika  $r$  byłaby znacznie wyraźniejsza. Nie miałyby to jednak wpływu, z definicji, na zmienność współczynników  $\tau$  Kendalla oraz  $\rho$  Spearmana, które jako statystyki rangowe nie zależą od postaci funkcyjnej rozkładów prawdopodobieństwa. Wniosek ten potwierdziły nieopisane w tym raporcie inne eksperymenty symulacyjne.
- b) W pkt. 5.3 przedstawiono wyniki zależności efektywności algorytmów heurystycznych od typu zależności statystycznej oraz liczności próbek. W badaniach wyliczano wartości skrajne rozpatrywanych statystyk wykorzystując wszystkie zaproponowane heurystyki (14 do wyznaczania wartości minimalnych i 14 do wyznaczania wartości maksymalnych). Porównując wyniki obliczeń dla poszczególnych heurystyk wybierano wartości najmniejsze i największe. Uśrednione po wszystkich symulacjach wyniki przedstawiono w poniższych tabelach dla przypadków statystyk  $\tau$  Kendalla,  $r$  Pearsona oraz  $\rho$  Spearmana.

Tabela 3. Średnie wartości minimalne i maksymalne statystyki  $\tau$  Kendalla

Kopuła	N=10		N=100	
	$\tau_{\min}$	$\tau_{\max}$	$\tau_{\min}$	$\tau_{\max}$
Normalna	-0.525155	0.334992	-0.205324	-0.020445
Clayton	-0.527672	0.335272	-0.290044	-0.058830
Frank	-0.525246	0.336896	-0.203183	-0.017901
FGM	-0.525853	0.336668	-0.204346	-0.018907

Tabela 4. Średnie wartości minimalne i maksymalne statystyki  $r$  Pearsona

Kopuła	N=10		N=100	
	$r_{\min}$	$r_{\max}$	$r_{\min}$	$r_{\max}$
Normalna	-0.532151	0.274099	-0.284609	-0.054672
Clayton	-0.536642	0.273713	-0.290044	-0.058830
Frank	-0.525856	0.282517	-0.269087	-0.038345
FGM	-0.527151	0.283105	-0.270802	-0.039539

Tabela 5. Średnie wartości minimalne i maksymalne statystyki  $\rho$  Spearmana

Kopuła	N=10		N=100	
	$\rho_{\min}$	$\rho_{\max}$	$\rho_{\min}$	$\rho_{\max}$
Normalna	-0.586833	0.353386	-0.286624	-0.041720
Clayton	-0.591120	0.354589	-0.289933	-0.043631
Frank	-0.586102	0.356429	-0.283438	-0.037776
FGM	-0.587524	0.356895	-0.285905	-0.039251

Wyniki zaprezentowane w tabelach 3 – 5 wskazują na brak zależności efektywności zaproponowanych zestawów algorytmów heurystycznych wyznaczających przedziałowe oceny rozpatrywanych statystyk od typu zależności.

Pomimo że wyznaczane przez zestawy heurystyk średnie wartości minimalne i maksymalne rozpatrywanych statystyk w niewielkim stopniu zależą od typu zależności, efektywność poszczególnych heurystyk (mierzona frakcją przypadków, dla których okazały się one najlepsze) zależy zarówno od typu zależności oraz liczności próbki. Na przykład dla rozpatrywanego w pkt. 5.3 przypadku słabej zależności ujemnej ( $\tau=-0,1$ ) heurystyki  $(X_c^u, Y_c^u)$  oraz  $(X_c^d, Y_c^d)$  są mało efektywne, niezależnie od liczności próbki, przy wyznaczaniu minimalnych wartości rozpatrywanych statystyk. Natomiast przy wyznaczaniu maksymalnej wartości tych statystyk są one także mało efektywne, ale tylko dla małych liczności próbki ( $n=10$ ), a ich efektywność staje się największa w przypadku próbek o dużej liczności ( $n=100$ ). Z kolei, dla rozpatrywanego w pkt. 5.2 przypadku silnej zależności dodatniej ( $\tau=0,1$ ) i dużych liczności próbek ( $n=200$ ) heurystyki te są całkowicie nieefektywne w przypadku wyznaczania wartości maksymalnych, zaś stuprocentowo efektywne w przypadku wyznaczania wartości minimalnych.

- c) Stopień rozmytości danych w oczywisty sposób wpływa na szerokość przedziałów wartości rozpatrywanych statystyk, co ilustruje przykład podany w tabeli 6.

Tabela 6. Średnie wartości minimalne i maksymalne statystyki  $\tau$  Kendalla dla różnych poziomów rozmytości danych

Rozmytość	N=10		N=100	
	$\tau_{\min}$	$\tau_{\max}$	$\tau_{\min}$	$\tau_{\max}$
mała	0.181839	0.442781	0.290183	0.341286
umiarkowana	-0.138754	0.710007	0.222097	0.427278
duża	-0.357293	0.820205	0.161764	0.461293

Natomiast efektywność poszczególnych heurystyk nie zależy od stopnia rozmycia danych. Na przykład wspomniane powyżej heurystyki  $(X_c^u, Y_c^u)$  oraz  $(X_c^d, Y_c^d)$  są bardzo efektywne w przypadku poszukiwania wartości minimalnych dla dużych próbek, zaś zupełnie nieefektywne w przypadku poszukiwaniu wartości maksymalnych.

- d) Przykładowe dane przedstawione w pkt.5 pokazują silną zależność efektywności poszczególnych heurystyk w zależności od siły i kierunku występujących w danych zależności. W tabeli 7 przedstawiono zależność efektywności heurystyki  $(X_c^d, Y_c^d)$  od siły i kierunku zależności w danych dla przypadku poszukiwania wartości minimalnych i maksymalnych statystyki  $\tau$  Kendalla. Miarą efektywności jest tu frakcja przypadków, dla których ta heurystyka dała najlepsze rezultaty.

Tabela 7. Efektywność heurystyki  $(X_c^d, Y_c^d)$

$\tau$ Kendalla	Minimum $\tau$	Maksimum $\tau$
-0,8	0	0.475703
-0,3	0.000280	0.349593
-0,1	0.012160	0.123360
0,1	0.116955	0.013945
0,3	0.309010	0.000605
0,8	0.495575	0

Heurystyka  $(X_c^u, Y_c^u)$  odznacza się praktycznie taką samą efektywnością. Oznacza to, że w przypadku występowania silnych zależności w analizowanych danych oraz dużych licznosci próbek heurystyki  $(X_c^u, Y_c^u)$  oraz  $(X_c^d, Y_c^d)$  wystarczają do poszukiwania maksymalnych

wartości statystyk w przypadku zależności ujemnych oraz minimalnych wartości statystyk w przypadku zależności dodatnich.

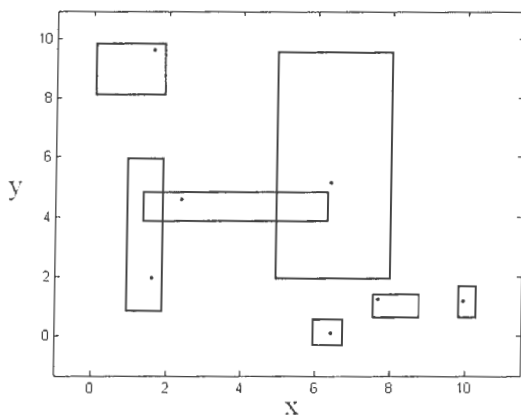
- e) W przypadku słabych zależności w danych (zarówno ujemnych jak i dodatnich) oraz niedużych licznosci badanych próbek żadna z proponowanych heurystyk nie jest w istotny sposób lepsza od pozostałych. W przypadku silnych zależności w danych można wskazać heurystyki, które są znacznie bardziej efektywne od pozostałych

## 7. Wyznaczanie przedziałowych statystyk rangowych

### 7.1 Motywacja badań i postać danych

Przedstawione w tej pracy rozważania na temat przedziałowych statystyk rangowych zostały zainspirowane problemem badania szeregów czasowych w modelu autoregresyjnym pierwszego rzędu  $S_t = \varphi S_{t-1} + \varepsilon$ . Niech  $y$  oznacza wektor  $N$  ostatnich obserwacji wartości szeregu  $y = [S_{t-N}, S_{t-(N-1)}, \dots, S_{t-1}, S_t]$ , zaś  $x$  wektor  $N$  ostatnich obserwacji jednokrotnie opóźnionych  $x = [S_{t-N-1}, S_{t-N}, \dots, S_{t-2}, S_{t-1}]$ . Do analizy zależności pomiędzy wektorami  $x$  i  $y$  można zastosować standardowe narzędzia statystyczne. Zagadnienie komplikuje się jednak, gdy nie są znane dokładne wartości wektorów  $x$  i  $y$  a jedynie przedziały  $[x^{\min}, x^{\max}]$  i  $[y^{\min}, y^{\max}]$  do których należą. Warunek ten można zapisać w postaci układu nierówności  $x^{\min} \leq x \leq x^{\max}$  oraz  $y^{\min} \leq y \leq y^{\max}$ , przy czym znane są jedynie wartości  $x^{\min}$ ,  $x^{\max}$ ,  $y^{\min}$  i  $y^{\max}$ . Tego typu zagadnienie występuje, gdy znane są jedynie dolne i górne ograniczenia wartości szeregu czasowego  $S_t$ .

Przypadek, w którym zarówno zmienna objaśniająca jak i objaśniana są znane jedynie z dokładnością do przedziału może wystąpić również w problemach innej natury niż analiza szeregów czasowych. Z tego względu zdecydowano się przeprowadzić analizy tego typu danych na ogólniejszym poziomie rezygnując z wymagania mówiącego, że  $i$ -te ograniczenie wektora  $x$  musi być równe  $i$ -1-szemu ograniczeniu wektora  $y$ . Na rys. 1 przedstawiono dwuwymiarowe dane przedziałowe. Prostokąty obrazują zakres zmienności odpowiednich elementów wektorów  $x$  i  $y$ , zaś kropki prawdziwe (nieznane) wartości par  $(x_i, y_i)$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$ .



Rys. 1. Graficzna interpretacja dwuwymiarowych danych przedziałowych

## 7.2 Przedziałowe statystyki rangowe

Do analizy zależności monotonicznej między dwiema zmiennymi można wykorzystać współczynniki korelacji rangowej takie jak  $\rho$  - Spearmana lub  $\tau$  - Kendalla. W przypadku, gdy zmienne  $x$  i  $y$  są znane jedynie z dokładnością do przedziałów ich korelacja nie jest jednoznacznie ustalona. Przedziałowy charakter danych powoduje, że zmienne  $x$  i  $y$  mogą znaleźć się w różnych porządkach, co pociągnie za sobą różne wartości współczynników  $\rho$  - Spearmana i  $\tau$  - Kendalla. W pracy (Dencœur et al., 2005) zaproponowano, aby w takim przypadku rozważać przedziałową statystykę rangową Kendalla  $[\tau^{\min}, \tau^{\max}]$ , uogólniono również pojęcie testów statystycznych dla tego typu wartości.

## 7.3 Problem optymalizacyjny

Zastosowanie przedziałowych statystyk nieparametrycznych wymaga jednak rozwiązania problemu estymacji wartości  $\tau^{\min}$  oraz  $\tau^{\max}$ . Stanowi to złożony problem optymalizacyjny polegający na poszukiwaniu takiego ustawienia elementów wektorów  $x$  i  $y$  w odpowiadających im zakresach, które zminimalizuje albo zmaksymalizuje wartość statystyki  $\tau$ .

$$(x_*, y_*) = \arg \min \{ \tau(x, y) : x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \wedge y^{\min} \leq y \leq y^{\max} \} \quad (29)$$

$$(x^*, y^*) = \arg \max \{ \tau(x, y) : x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \wedge y^{\min} \leq y \leq y^{\max} \} \quad (30)$$

W niniejszej pracy podjęto próbę rozwiązania przedstawionych zadań optymalizacyjnych za pomocą algorytmów optymalizacji globalnej. Zagadnieniem badawczym jest poszukiwanie heurystyki

pozwalającej na wygenerowanie obiecujących punktów startowych dla metod optymalizacyjnych, co może przyspieszyć proces znajdowania minimalnej oraz maksymalnej wartości statystyki  $\tau$  oraz poprawić odporność uzyskiwanych wyników.

Zagadnienie wyznaczania wartości  $\tau^{\min}$  oraz  $\tau^{\max}$  można również przedstawić jako problem optymalizacji dyskretnej, polegający na przeszukiwaniu przestrzeni rozszerzeń liniowych naturalnych porządków częściowych ze względu na każdą zmienną, co opisano dokładnie w artykule (Denceux et al., 2005). Rozwiązania heurystyczne problemów optymalizacji dyskretnej są zazwyczaj silnie oparte na właściwościach konkretnych problemów, gdyż są silnie uzależnione od metody kodowania zadania. Z tego względu, wygodnie jest poszukiwać minimalnych i maksymalnych wartości statystyki  $\tau$  za pomocą dopracowanych i sprawdzonych algorytmów optymalizacji ciągłej „ogólnego zastosowania”. Specyficzną wiedzę o problemie (w tym przypadku jego rangowy charakter) można zawrzeć w postaci funkcji celu. Z tego względu, zamiast rozwiązywać oryginalne problemy (29) i (30) ograniczenia  $x^{\min}$ ,  $x^{\max}$ ,  $y^{\min}$  i  $y^{\max}$  zastąpiono odpowiednio minimalnymi oraz maksymalnymi rangami  $r(\cdot)$  jakie mogą przyjmować elementy wektorów  $x$  i  $y$ .

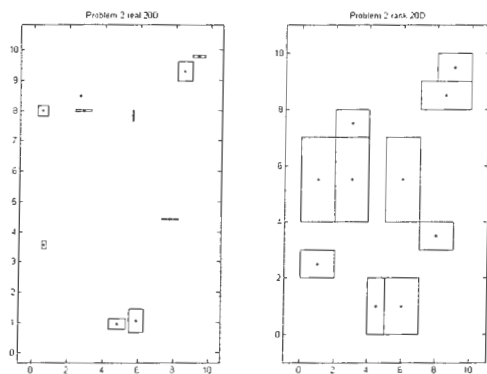
$$(x_*, y_*) = \arg \min \{ \tau(x, y) : r(x^{\min}) \leq x \leq r(x^{\max}) \wedge r(y^{\min}) \leq y \leq r(y^{\max}) \} \quad (31)$$

$$(x^*, y^*) = \arg \max \{ \tau(x, y) : r(x^{\min}) \leq x \leq r(x^{\max}) \wedge r(y^{\min}) \leq y \leq r(y^{\max}) \} \quad (32)$$

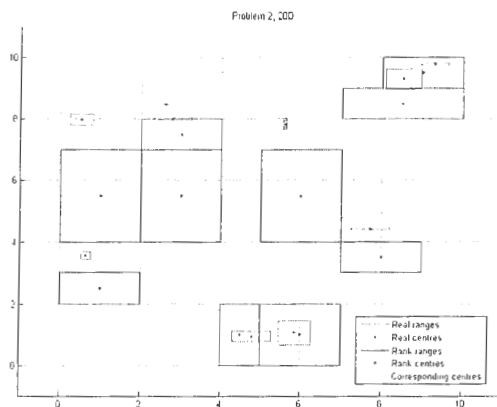
przy czym  $r(x^{\min}) = [r_1^{\min}, r_2^{\min}, \dots, r_N^{\min}]$  oznacza wektor rang minimalnych poszczególnych elementów, zaś  $r(x^{\max}) = [r_1^{\max}, r_2^{\max}, \dots, r_N^{\max}]$  opisuje wektor rang maksymalnych. Pojedynczą rangę minimalną (czyli rangę dla  $i$ -tego elementu wektora) można wyznaczyć jako liczbę tych przedziałów, które leżą poniżej rozważanego przedziału i mają z nim puste przecięcie,  $r_i^{\min} = \# \{ j \in \{1, 2, \dots, N\} : x_j^{\max} \leq x_i^{\min} \}$ . Podobnie można wyznaczyć maksymalną rangę dla  $i$ -tego elementu wektora jako  $r_i^{\max} = N - \# \{ j \in \{1, 2, \dots, N\} : x_i^{\max} \leq x_j^{\min} \}$ . Postępowanie dla zmiennej  $y$  wygląda analogicznie.

Przykłady transformacji zadania optymalizacji z postaci naturalnej (28) i (29) do postaci rangowej (30) i (31) zilustrowano na rysunkach 2 i 3. Symulacje numeryczne pokazały, że zastosowanie tego przekształcenia znacznie poprawiło uwarunkowanie zadania optymalizacji, a co za tym idzie szybkość oraz jakość odnajdywanych optimum.

Zaproponowana transformacja sprowadza się do liniowego przekształcenia każdego z przedziałów  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$  oraz  $[y_i^{\min}, y_i^{\max}]$ , co oznacza, że dla każdego z przedziałów istnieje liniowa transformacja odwrotna. Oparcie analizy na rangach nie ogranicza zatem ogólności rozumowania.



Rys. 2. Przykładowy problem optymalizacyjny w postaci naturalnej (po lewej) oraz rangowej (po prawej)



Rys. 3. Przekształcenie układu naturalnego do rangowego; zielonymi liniami połączono środki odpowiadających sobie prostokątów

## 7.4 Procedura benchmarkowania

Hipoteza badana w tej pracy mówi, że proces poszukiwania wartości  $\tau_{\min}$  i  $\tau_{\max}$  można usprawnić poprzez zastosowanie heurystycznie dobranych wartości jako punktów startowych metod optymalizacyjnych. Aby zweryfikować tę hipotezę oraz wskazać najbardziej obiecujące heurystyki należy porównać efektywność algorytmów optymalizacyjnych inicjowanych przy pomocy heurystyki oraz losowo. Procedury porównawcze metod optymalizacyjnych wymagają mierzenia efektywności bądź szybkości algorytmu dla odpowiedniego zestawu problemów testowych, co pokazano w pracach (Opara, Arabas, 2011) oraz (Hansen et al., 2010). W analizowanym tutaj przypadku problemy testowe utworzono poprzez wygenerowanie wektorów  $x$  i  $y$  za pomocą kopuły Franka z różnymi wartościami parametrów, co pozwalało kontrolować stopień zależności pomiędzy tymi zmiennymi. Następnie, dla każdego punktu  $(x_i, y_i)$  losowano zawierający go prostokąt  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}] \times [y_i^{\min}, y_i^{\max}]$  posługując się następującymi zależnościami

$$x_i^{\min} = x - \xi_1 \xi_2 u$$

$$x_i^{\max} = x + (1 - \xi_1) \xi_2 u$$

$$y_i^{\min} = y - \xi_3 \xi_4 u$$

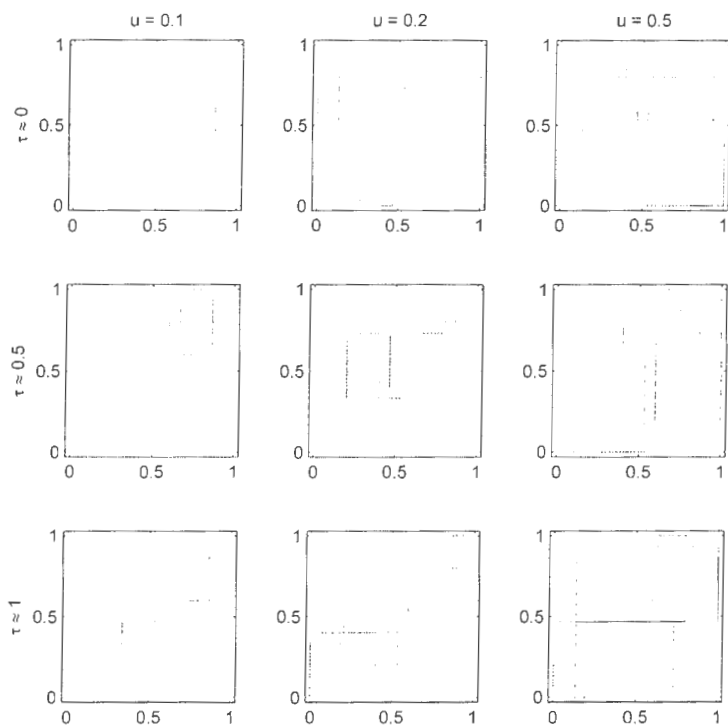
$$y_i^{\max} = y + (1 - \xi_3) \xi_4 u$$

przy czym  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  i  $\xi_4$  to niezależne realizacje zmiennej losowej z rozkładu jednostajnego  $U(0,1)$ , natomiast  $u$  oznacza parametr służący do kontrolowania oczekiwanych rozmiarów prostokąta. Na rys. 4 przedstawiono dziewięć funkcji testowych uzyskanych dla zmiennych  $x$  i  $y$  wygenerowanych dla oczekiwanej wartości  $\tau \in \{0, 0.5, 1\}$  oraz parametru maksymalnej względnej niepewności  $u \in \{0.1, 0.2, 0.5\}$ . Na rys. 4 przedstawiono 15 par przedziałów, co oznacza, że odpowiadający mu problem optymalizacyjny ma trzydzieści wymiarów oraz ograniczenia kostkowe. Po przetransformowaniu przedziałów do postaci rangowej wykres przeskalowano do jednostkowego kwadratu  $[0,1] \times [0,1]$ .

Przy porównywaniu algorytmów optymalizacyjnych największe możliwości interpretacyjne uzyskuje się, gdy kryterium porównawczym jest oczekiwany czas potrzebny do rozwiązania problemu z założoną dokładnością, patrz (Opara, Arabas, 2011) oraz (Hansen et al., 2010). W przypadku proponowanego benchmarku istotną trudnością okazał się fakt, że prawdziwe wartości  $\tau_{\min}$  i  $\tau_{\max}$  nie są znane. Problem ten rozwiązano zastępując je ich oszacowaniami  $\hat{\tau}_{\min}$  i  $\hat{\tau}_{\max}$  uzyskanymi dzięki uruchomieniu na długi czas (tydzień) optymalizacji restartowanymi metodami: Monte Carlo (MC), adaptacji macierzy kowariancji CMA-ES w implementacji podanej pracy (Hansen, 2006), jak również



symulowanego wyżarzania (SA) oraz algorytmu genetycznego (GA) zaczerpniętych z pakietu Matlab Optimization Toolbox. Następnie ustalono kryteria zatrzymania dla właściwych (kilkugodzinnych) symulacji, jako uzyskanie rozwiązania, dla którego wartość współczynnika Kendalla wynosi  $\tau$ , zaś błąd  $\tau - \tau_{\min}$  jest mniejszy niż  $\Delta\tau = 0.2(\hat{\tau}_{\max} - \hat{\tau}_{\min})$ . Wskaźnikiem jakości algorytmu jest w tym przypadku oczekiwany czas potrzebny do rozwiązania problemu z dokładnością  $\Delta\tau$ . Czas ten określa się jako liczbę obliczeń funkcji aby uniezależnić go od sprzętu i wydajności implementacji danego algorytmu. Szczegółową definicję oraz charakterystykę własności oczekiwanego czasu działania można znaleźć w pracach (Opara, Arabas, 2011) oraz (Hansen et al., 2010).

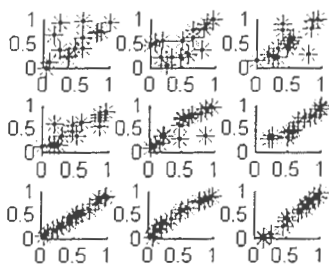


Rys. 4. Wykresy trzydziestowymiarowych funkcji testowych opartych na kopule Franka

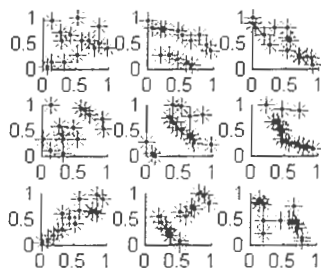
## 7.5 Rozważane heurystyki

Przebadano jedną heurystykę inspirowaną geometrycznymi właściwościami przybliżeń rozwiązań optymalnych dających współczynniki korelacji  $\hat{r}_{\min}$  i  $\hat{r}_{\max}$ . Rozwiązania te, uzyskane dla zadań zobrazowanych na rys. 4, przedstawiono na rys. 5 i 6. Dzięki zmniejszeniu rysunków i powiększeniu znaczników łatwiej zauważyć ogólne zależności położenia punktów. Punkty na wykresie wydają się układać w jedną lub kilka linii przebiegających w tym samym kierunku.

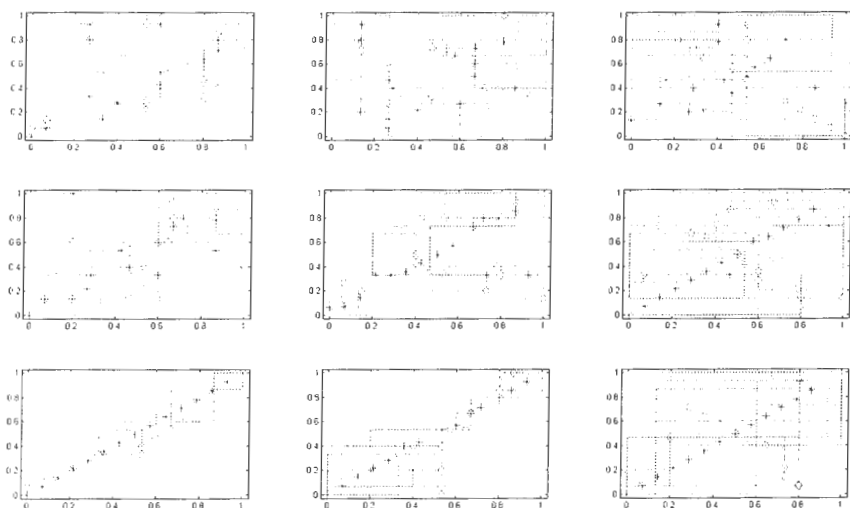
Do inicjalizacji metody optymalizacyjnej zaproponowano ustawienie punktów liniowo wzdłuż obu przekątnych odpowiednio dla maksymalizacji i minimalizacji. Każdy punkt musi jednak należeć do jakiegoś prostokąta, czyli leżeć w zbiorze dopuszczalnym. Jeżeli tak nie jest, wówczas rzutowany jest on na najbliższy, niezajęty prostokąt. Wyniki zastosowania tej procedury zobrazowano na rys. 7.



Rys. 5. Położenie punktów dające  $\hat{r}_{\max}$



Rys. 6. Położenie punktów dające  $\hat{r}_{\min}$



Rys. 7. Heurystyka geometryczna liniowa; gwiazdki pokazują położenie punktu startowego dla poszukiwania  $\hat{\tau}_{\max}$ , zaś rąby dla poszukiwania  $\hat{\tau}_{\min}$

## 7.6 Wstępne wyniki

Dokonano wstępnych obliczeń za pomocą wspomnianych wcześniej algorytmów MC, CMA-ES, GA oraz SA. W tabelach 8 i 9 przedstawiono oczekiwane czasy działania dla poszczególnych algorytmów i problemów testowych odpowiednio dla zagadnienia poszukiwania minimalnej i maksymalnej wartości współczynnika  $\tau$ . W górnej części każdej komórki przedstawiono oczekiwany czas działania dla metody zainicjalizowanej za pomocą heurystyki, zaś w dolnej dla metody zainicjalizowanej losowym punktem ze zbioru dopuszczalnego. Czasy działania estymowano na podstawie pięciu uruchomień każdego algorytmu dla każdej próbki. Wartość Inf oznacza, że żadne z tych uruchomień nie zakończyło się sukcesem, czyli znalezieniem rozwiązania, dla którego przy minimalizacji współczynnik korelacji  $\tau$  spełni nierówność  $\tau - \hat{\tau}_{\min} \leq \Delta\tau = 0.2(\hat{\tau}_{\max} - \hat{\tau}_{\min})$ , zaś przy maksymalizacji  $\hat{\tau}_{\max} - \tau \leq \Delta\tau = 0.2(\hat{\tau}_{\max} - \hat{\tau}_{\min})$ .

Dla zbadania statystycznej istotności uzyskanych wyników posłużono się testem sum rang Wilcozona. Przypadki, w których mediana czasu działania okazała się być istotnie mniejsza na poziomie ufności 0.95 oznaczono pogrubioną czcionką. Okazuje się, że zdecydowana większość „lepszych” wyników uzyskana została przy uruchomieniach zainicjalizowanych przy pomocy heurystyki.

Tab. 8. Porównanie oczekiwanych czasów działania dla zagadnienia poszukiwania  $\tau_{\min}$ ; pogrubioną czcionką zaznaczono różnice istotne statystycznie według testu Wilcoxona

ERT <sub>min</sub>	Numer problemu testowego								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MC	8,5E+03	1,3E+05	1,5E+05	4,5E+03	<b>1,0E+00</b>	<b>1,0E+00</b>	7,4E+04	1,0E+05	Inf
	9,4E+03	2,5E+05	3,1E+05	7,7E+03	8,7E+04	Inf	5,7E+04	1,1E+05	Inf
CMA-ES	6,1E+01	8,0E+01	<b>2,4E+01</b>	2,8E+02	<b>2,7E+01</b>	<b>5,5E+01</b>	6,3E+02	3,1E+02	<b>8,6E+01</b>
	1,1E+02	1,4E+02	1,1E+02	1,3E+02	1,6E+02	Inf	1,9E+02	3,0E+02	6,4E+02
GA	4,7E+02	<b>1,6E+02</b>	<b>4,0E+01</b>	5,6E+02	<b>4,0E+01</b>	<b>4,0E+01</b>	1,8E+03	5,0E+02	<b>2,4E+02</b>
	8,6E+02	1,8E+03	1,8E+02	<b>1,3E+02</b>	6,1E+02	Inf	4,4E+03	9,7E+02	Inf
SA	2,6E+03	1,2E+04	<b>1,0E+00</b>	5,1E+03	<b>1,0E+00</b>	<b>1,0E+00</b>	8,0E+03	2,1E+04	Inf
	1,2E+03	8,3E+03	3,8E+03	5,3E+03	2,7E+04	Inf	6,7E+03	2,4E+04	Inf

Tab. 9. Porównanie oczekiwanych czasów działania dla zagadnienia poszukiwania  $\tau_{\max}$ ; pogrubioną czcionką zaznaczono różnice istotne statystycznie według testu Wilcoxona

ERT <sub>max</sub>	Numer problemu testowego								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MC	2,3E+04	4,0E+05	Inf	2,4E+04	<b>4,7E+03</b>	<b>2,0E+00</b>	<b>2,0E+00</b>	3,0E+04	1,6E+05
	3,4E+04	6,3E+05	Inf	1,7E+04	5,1E+04	3,9E+05	2,9E+02	5,9E+04	1,1E+05
CMA-ES	1,1E+02	6,3E+02	<b>7,2E+01</b>	<b>6,6E+01</b>	<b>2,4E+01</b>	<b>1,6E+01</b>	1,6E+01	1,6E+01	<b>1,6E+01</b>
	1,1E+02	2,9E+02	6,4E+02	5,7E+02	8,6E+01	6,1E+01	2,4E+01	3,3E+01	4,7E+01
GA	<b>1,6E+02</b>	1,8E+03	<b>9,1E+02</b>	1,7E+02	1,0E+02	<b>4,0E+01</b>	4,0E+01	4,0E+01	4,0E+01
	9,1E+02	4,6E+03	Inf	1,8E+02	4,5E+02	8,8E+01	4,0E+01	4,0E+01	4,8E+01
SA	2,3E+03	1,9E+04	Inf	4,2E+03	3,6E+03	<b>1,0E+00</b>	<b>1,0E+00</b>	<b>1,0E+00</b>	<b>1,0E+00</b>
	3,7E+03	5,6E+04	Inf	8,0E+03	7,1E+03	2,1E+02	5,4E+00	2,4E+01	7,6E+01

W tabeli 10 przedstawiono mediany i rozstępy międzykwartylowe przyspieszenia działania algorytmu jakie udało się uzyskać dzięki zastosowaniu heurystyki. Przykładowo, dla problemu minimalizacji algorytm adaptacji macierzy kowariancji (CMA-ES) działa około 1,9 razy szybciej, gdy jest

zainicjalizowany za pomocą heurystyki, zaś algorytm symulowanego wyżarzania (SA) działa porównywalnie szybko.

Tab. 10. Przyspieszenie uzyskane dzięki zastosowaniu heurystyki; w lewej tabeli zadanie minimalizacji, w prawej maksymalizacji

ERT <sub>min</sub>	Przyspieszenie	
	Mediana	IQR
MC	1,7	0,9
CMA-ES	1,9	4,8
GA	4,5	13
SA	1,0	3800

ERT <sub>max</sub>	Przyspieszenie	
	Mediana	IQR
MC	1,6	9,8
CMA-ES	2,9	2,3
GA	2,2	3,2
SA	3,0	22

Wartości przyspieszenia dla poszczególnych funkcji znacznie się różnią. Można to zaobserwować porównując wielkości rozstępów międzykwartylowych z medianą. W większości przypadków są one jednak większe niż 1, co sugeruje, że zastosowanie heurystyki pozwala skrócić czas działania algorytmu.

Dla uzyskania bardziej znaczących statystycznie wyników konieczne wydaje się dokładniejsze estymowanie oczekiwanego czasu działania (zwiększenie liczby uruchomień testowych dla każdej funkcji z 5 do 10 lub 20). Ponadto, dla uzyskania bardziej ogólnych wyników należałoby rozszerzyć zbiór funkcji testowych dodając zależności o różnym charakterze wygenerowane dla kopuł innych niż kopuła Franka (np. Gaussowskich, Claytona czy Gumbela). Ciekawym obszarem badawczym byłoby też wypróbowanie innych rodzajów heurystyk geometrycznych takich jak zależności wklęsłe, wypukłe, czy piłokształtne. Zastosowanie wielu heurystyk jednocześnie wymaga jednak uruchamiania wielu instancji algorytmu z różnymi punktami startowymi, co w praktyce stanowić może pewną trudność. Problem ten nie dotyczy jednak algorytmów ewolucyjnych, które mogą zostać zainicjowane całą populacją, w której każdy punkt może odpowiadać wynikowi działania pojedynczej heurystyki. Z tego względu w dalszych badaniach planuje się koncentrację na algorytmach populacyjnych.

## 8. Literatura

Clayton G.G. (1978) A model for Association in Bivariate Life Tables and its Applications in Epidemiological Studies of Familial Tendency in Chronic Disease Incidence. *Biometrika*, **65**, 141 – 151.

Dencaux T, Masson M.-H., Hbert P.-A. (2005) Nonparametric rank-based statistics and significance tests for fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, **153**, 1-28.

Farlie D.J.G. (1960) The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution. *Biometrika*, **47**, 307 – 323.

Frank M.J. (1979) On the Simultaneous Associativity of  $F(x,y)$  and  $x+y-F(x,y)$ . *Æquationes Mathematicæ*, **19**, 194 – 226.

Fredricks G.A., Nelsen R.B. (2007) On the relationship between Spearman's rho and Kendall's tau for pairs of continuous random variables. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 2143-2150.

Genest C., MacKay J. (1986) Copules archimdiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont donnes. *Canadian Journal of Statistics*, **14**, 145 – 159.

Genest C., Rivest L.-P. (1993) Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas. *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 1034 – 1043.

Genest C., Verret F. (2005) Locally most powerful rank tests for independence for copula models. *Nonparametric Statistics*, **17**, 521-539.

Gumbel E.J. (1960) Distributions des valeurs extrms en plusieurs dimensions. *Publications de l'Institut statistique de l'Universit de Paris*, **9**, 171 – 173.

Hansen, N. (2006) The CMA evolution strategy: a comparing review. In: Lozano, J. (Ed.) *Towards a new evolutionary computation. Advances on estimation of distribution algorithms*, Springer, Berlin, 75-102.

Hansen, N., Auger, A., Finck, S., Ros, R. (2009), *Real-parameter black-box optimization benchmarking 2009: Experimental setup*, Techn.Rep. INRIA, <http://coco.gforge.inria.fr/>.

Hryniewicz O., Szewi A. (2008) Fuzzy Kendall  $\tau$  statistic for Autocorrelated data. In : D.Dubois, M.A. Lubiano, H.Prade, M.A.Gil, P.Grzegorzewski, O.Hryniewicz (Eds.), *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision*. Springer, Heidelberg, 155-162.

Marshall A.W., Olkin I. (1967) A generalized bivariate exponential distribution. *Journal of Applied Probability*, **4**, 291 – 302.

Nelsen R.B. (1999) *Introduction to Copulas*, Springer, New York.

Opara, K., Arabas, J. (2011) Benchmarking Procedures for Continuous Optimization Algorithms, *Journal of Telecommunications and Information Technology(in press)*, no. 4, 2011.

Schweizer B., Wolff E.F (1981) On nonparametric measures of dependence for random variables. *Annals of Statistics*, **9**, 879-885.

Sklar A. (1959) Fonctions de répartition à  $n$  dimensions et leur marges. *Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris*, **8**, 229-231.

Shih J.H., Louis T.A. (1995) Inferences on the Association Parameters in Copula Models for Bivariate Survival Data. *Biometrics*, **51**, 1384 – 1399.











the 1990s, the number of people in the UK who are aged 65 and over has increased from 10.5 million to 12.5 million, and the number of people aged 75 and over from 4.5 million to 6.5 million (Office of National Statistics 1999).

There is a growing awareness of the need to develop services to meet the needs of the ageing population. The Department of Health (1999) has set out a vision for the future of health care for older people, and the Department of Social Security (1999) has set out a vision for the future of social care for older people. Both visions emphasize the need to develop services that are person-centred, that are based on the needs of the individual, and that are integrated with other services. The Department of Health (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality.

The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality.

The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality.

The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality.

The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality.

The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality. The Department of Social Security (1999) also emphasizes the need to develop services that are accessible to all, and that are of high quality.